

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО**

Андрій Гусак

**ФІЗИЧНІ ЗАДАЧІ-ОЦІНКИ:
ВІД МЕЛОДІЇ ДО СИМФОНІЇ**

Частина I

Черкаси – 2020

УДК 53(447)
ББК 22.31я73
Г 96

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Черкаського національного університету ім. Б.Хмельницького
Протокол № 7 від 20 травня 2020 р.*

Г 96 Гусак Андрій Михайлович
Фізичні задачі-оцінки: від мелодії до симфонії. – Черкаси: видавець
Третьяков О.М., 2020. – 40 с.

Видання призначене для вчителів фізики, студентів фізичних і технічних спеціальностей, учнів фізико-математичних ліцеїв, учнів – членів Малої Академії Наук, і, взагалі, для «фізичних гурманів» – для тих молодих і не дуже молодих людей, хто отримує задоволення, відкриваючи для себе закономірності навколишнього фізичного світу. Книга написана фахівцем, який, працюючи останні 44 роки в Україні та в зарубіжжі, намагається сполучати наукові дослідження в галузі фізики матеріалів (<https://scholar.google.fr/citations?user=dsM8gAAAAJ&hl=ukr>) з викладанням фізики. Ця книжка планується як перша в серії популярних видань автора про фізичні задачі.

УДК 53(447)
ББК 22.31я73

© Гусак А.М., 2020

Підп. до друку 20.05.2020. Формат 60х84/16. Папір офсетний.

Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,3.

Вид. № 05-20. Тираж 100 прим.

Видавець Третьяков О.М.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

Серія ДК № 4862 від 11.03.2015 р. Україна, 18001, м. Черкаси, вул. Слави, 1, к. 24.

Тел.: 067 4701314. E-mail: book_brama@ukr.net

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ-РОЗМИНКИ	7
РОЗДІЛ II. ЗАДАЧІ СЕРЕДНЬОГО РІВНЯ («на подумать»)	20
РОЗДІЛ III. «ЗАДАЧІ-ВИКЛИКИ»	33
ВИСНОВКИ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	40

ВСТУП

Розвиток штучного інтелекту робить актуальною проблему швидкого (буквально за десяток років) відмирання багатьох професій, які не вимагають творчості або/і персоналізації (секретарі, касири, продавці, креслярі, туроператори, будівельники, в перспективі – водії, до деякої міри навіть програмісти нижчого рівня). Отже, люди мають шанс залишитись потрібними лише розвиваючи свою здатність до творчості – наукової, інженерної, мистецької, гастрономічної... Одним із найбільш ефективних способів розвивати творчі здібності при вивченні фізики є задачі-оцінки.

Концепція задач-оцінок, наскільки нам відомо, була вперше в явному вигляді запроваджена геніальним фізиком, відкривачем явища надтекучості, Нобелівським лауреатом, радянським академіком Петром Капицею [1] (до речі, з українськими коренями – мама – українка з Вінниці, батько – поляк із Бесарабії). Працюючи в одній із найкращих наукових шкіл світу (Капиця був улюбленим учнем і колегою Ернста Резерфорда і пропрацював із ним у Кембриджі 13 років), Петро Капиця розумів обмеженість стандартних методів університетського навчання. Після другої світової війни він став ініціатором запровадження так званої «фіз-техівської системи освіти», яка, зокрема, дозволяла студентам вже з молодших курсів сполучати навчання з активною дослідницькою діяльністю. Одним із яскравих індикаторів впровадження творчості в процес навчання стали його «задачі-оцінки», які він вигадував для своїх екзаменів.

Екзамени проводились так: студенту зранку формулювалась задача типу

(1) «В аудиторію входить студентка. Вона надушилась парфумами "Червона Москва". Оцініть проміжок часу, через який професор зможе відчути запах парфумів.» ...[2]

або...

(2) З якою швидкістю мусить бігти людина по воді, щоб не потонути? [2]

Студент ішов у бібліотеку, міг користуватись будь-якою літературою, але зрештою повинен був до зустрічі з екзаменатором проаналізувати задачу, зрозуміти, які явища і закони в цій задачі є основними, а якими в першому наближенні можна нехтувати, придумати фізичну модель процесу, реалізувати на її основі математичну модель, і нарешті зробити чисельні оцінки. При цьому студент проявляв (а іноді і набував у процесі виконання) свої навички до творчої діяльності.

Влучно охарактеризував метод задач-оцінок сам Петро Капиця:

«Перш ніж почати лекцію, я хочу сказати кілька слів про ті задачі, які ви отримали і які я для вас склав. Як їх можна розв'язувати? Задачі - це перше наближення до невеликої наукової роботи. Вирішення цих задач - це вже якесь певне дослідження. Не те, що в середній школі, де досить підставити в формулу відомі дані та ін. Тут рішення задачі визначається вами самими. Ви можете показати свої знання і своє розуміння фізики в самих різних ступенях. Від вас самих залежить, де зупинитися під час розв'язання задачі. Це залежить і від глибини аналізу, який ви самі застосовуєте. Всі задачі складені так, що ви їх можете і в двох-трьох словах приблизно вирішити і, заглиблюючись все далі і далі без обмежень. Одну і ту ж задачу можна, продовжуючи її аналіз, розкласти в ряди Фур'є, інтегрувати і т.і., і довести до рівня кандидатської дисертації» [1]

Я можу, як науковець (звичайно, значно нижчого рівня ніж Петро Леонідович, але все ж із власним 45-річним досвідом спроб розібратись у таємницях природи) зі свого боку привести наступну аналогію: Композитори часто беруть за основу народну мелодію, а потім засобами композиції доводять її до рівня симфонії. Те ж саме можна зробити і з фізичними задачами.

У Черкаському національному університеті (раніше – педагогічному інституті) багато років працював фанат задач-оцінок, улюбленець поколінь студентів Михайло Сіденко. Він не був обтяжений науковими ступенями і нагородами (найвища його посада була – старший викладач і заступник декана

фізмату), але любив і умів розв'язувати нестандартні задачі, прищеплював цю любов своїм студентам. Важка хвороба завчасно вкоротила йому віку у 2003 році, але він встиг підготувати основну книгу свого життя (видав її вже його син) – «Фізичні задачі-оцінки» (Черкаси, 2004, пізніше з'явилися ще кілька видань – зокрема, в видавництві Основа) [3]

Починаючи з 2017 року, кафедра фізики ЧНУ проводить щорічний конкурс задач-оцінок імені М. В. Сіденка. Для дистанційного туру члени журі не лише використовують уже зібрані раніше, але й придумують нові, оригінальні задачі-оцінки. До даної брошури включені задачі-оцінки, частина з яких придумана мною саме для конкурсу імені М.В. Сіденка, а решта взяті з книжки М.В. Сіденка, але розв'язки пропонуються або зовсім відмінні від тих, які вказані М.В. Сіденком, або більш розгорнуті. Задачі ці ми розділили на три частини (рівні) – розминки, серйозні задачі «на подумать» і нарешті задачі-виклики – на межі з реальною наукою. Частину задач ми розв'язуємо кількома способами на різних рівнях, як і казав Петро Капиця. Автор вдячний студенткам Тетяні Атаманюк та Дарині Воркут за допомогу: Тетяна в рамках дипломної роботи самостійно розв'язала 100 задач із збірника М.В. Сіденка, показавши, що принаймні для хорошого студента задачі-оцінки є посильними. В цій брошурі я використав лише три з цих задач, але зі своїми альтернативними способами аналізу. (Коли знайдемо красиві «дерева розв'язків» або альтернативи для інших 97 задач, випустимо наступну частину). Дарина допомогла з записом на папері і оформленням нових задач і/або розв'язків.

Ця брошура, сподіваюсь, може бути корисною для вчителів фізики, студентів фізичних і технічних спеціальностей та учнів-членів МАН, які нерідко мають проблеми з пошуком хороших задач для досліджень, особливо з теоретичної фізики. Сподіваюсь також, що принаймні декілька з цих задач достатньо «апетитні» для фізичного гурмана, щоб викликати бажання знайти більш точні або взагалі альтернативні розв'язки.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ-РОЗМИНКИ

До цього розділу я включив задачі, які, принаймні в першому, найгрубішому наближенні можна розв'язати в кілька рядків. Однак принаймні деякі з них можна розробляти і розвивати, як і казав Петро Капиця, і я спробував це показати конкретно.

ЗАДАЧА I-1. У широкій тонкій плівці товщиною $H = 1\text{ мм}$ утворився малий циліндричний отвір. Оцінити, який радіус r мусить мати отвір, щоб він міг сам по собі затягнутись.

Рівень I.

Розглянемо отвір радіусом r у плівці товщиною H нехтуючи згладжуванням країв. Радіус отвору набагато менший за розміри плівки, тому остання може вважатися практично нескінченною, тоді зміна розмірів отвору практично не змінює товщину плівки.

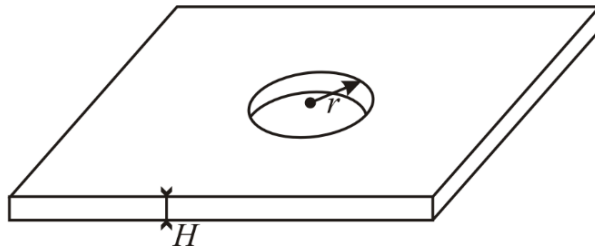


Рис. 1.1.1. Циліндричний отвір у тонкій плівці.

Що буде далі з отвором – буде він стягуватись чи навпаки, розширюватись? Для відповіді на це питання знайдемо залежність повної поверхневої енергії системи від радіуса отвору. При цьому важливо врахувати, що при рості отвору збільшується площа бокової поверхні отвору $2\pi rH$ (але зменшується поверхня плівки поза діркою), $2S_0 - 2\pi r^2$, де S_0 – площа поверхні плівки без отвору. Отже,

$$E^{surf} = \gamma(2S_0 - 2\pi r^2 + 2\pi rH) \quad (1.1.1)$$

Графік залежності зміни поверхневої енергії від радіуса отвору:

$$\Delta E = E^{surf} - E_0^{surf} = \gamma(2\pi rH - 2\pi r^2) = 2\pi\gamma\left(-\left(r - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{H^2}{4}\right) \quad (1.1.2)$$

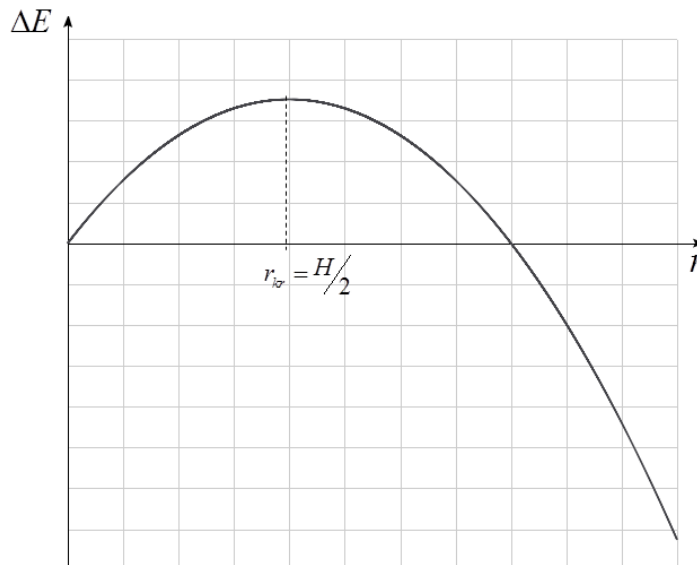


Рис. 1.1.2. Залежність зміни поверхневої енергії від радіусу отвору. Максимум залежності відповідає критичному радіусу, рівному половині товщини плівки (менші отвори стягуються, більші - збільшуються).

Бачимо, що залежність має форму бар'єру з критичним радіусом (на кшталт нуклеаційного бар'єру при зародкоутворенні) і визначається загальною властивістю систем – намагатись зменшити свою енергію – отвори з діаметром меншим за товщину плівки, повинні стягуватись, а з більшим – розширюватись. Величина критичного радіусу виявляється рівною половині товщини плівки (тобто критичний діаметр просто рівний цій товщині. Отже, в нашому випадку отвір діаметром меншим за міліметр мусить затягуватись.

Рівень II.

Задача нами розв'язана наближено, оскільки ми не враховували можливість утворення потовщення плівки навколо отвору (відповідна більш складна модель пончика розглянута нами в першому розділі книги [4]).

ЗАДАЧА I-2. Оцінити час витікання води із заповненої ванни.

Рівень I.

Спочатку знехтуємо в'язким опору труби, через яку вода витікає з ванни (тобто будемо вважати, що внизу у ванни просто дірка, через яку вода витікає). Крім того, знехтуємо можливими завихреннями і турбулентністю при витіканні.

В цьому разі основа розв'язку – це використання (1) закону збереження речовини і (2) закону збереження енергії, який у даному випадку реалізується рівнянням Бернуллі.

(1) Почнемо з закону збереження речовини: зменшення об'єму води в ванні за кожен малий інтервал часу dt рівне об'єму води, який витікає через отвір за той же інтервал часу. Для спрощення припустимо, що площа горизонтального перерізу S однакова на всіх висотах h від свого початкового значення H до свого кінцевого значення 0 . Початковий об'єм води у ванні рівний: $V_0 = S \cdot H$. Його миттєве значення $V = S \cdot h(t)$. Зміна об'єму води в ванній рівна $dV = S \cdot dh = S \frac{dh}{dt} dt = -Sv dt < 0$, де $v = -\frac{dh}{dt}$ – швидкість опускання рівня води в ванній. Згідно закону збереження речовини, як сказано вище:

$$S \cdot dh = -(\pi r_0^2) \cdot u dt, \quad (1.2.1)$$

де r_0 – радіус отвору в дні ванни; πr_0^2 – площа цього отвору, u – швидкість витікання води з отвору ванни.

(2) Швидкість можна знайти з закону Бернуллі (фактично закону збереження енергії),

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g \cdot z + p = \text{const}.$$

Враховуючи, що зовнішній тиск на поверхні води як на верхньому рівні, так і у отворі однаковий і рівний $p = p_{atm}$, а висоти рівні відповідно $z = h$ і $z = 0$, отримуємо уточнення відомої формули Бернуллі:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g \cdot h + p_{atm} = \frac{\rho u^2}{2} + \rho g \cdot 0 + p_{atm} \Rightarrow u = \sqrt{2g \cdot h + v^2} \quad (1.2.2)$$

Комбінація рівнянь (1.2.1) і (1.2.2) приводить до звичайного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} S \cdot dh &= -\sqrt{2 \cdot g \cdot h + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2} \cdot \pi r_0^2 \cdot dt \Rightarrow \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2\right) = 2gh \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow dh &= -\sqrt{h} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2}} \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right) dt \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Поділимо на $(-\sqrt{h})$ та проінтегруємо по часу від початку витікання ($t=0$) до фінального моменту, коли все витече, а по висоті відповідно від початкової висоти H води у ванні до фінальної (тобто нульової) висоти:

$$-\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2}} \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right) t^{final} \Rightarrow t^{final} = \sqrt{\frac{H}{2g}} \frac{S}{\pi r_0^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2}$$

$$\text{Відповідь: } t^{final} = \sqrt{\frac{H}{2g}} \frac{S}{\pi r_0^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi r_0^2}{S}\right)^2}. \quad (1.2.4)$$

Зазвичай площа отвору набагато менше площі перерізу ванни: $\frac{\pi r^2}{S} \ll 1$.

$$\text{Тоді } t^{final} \approx \sqrt{\frac{H}{2g}} \frac{S}{\pi r^2}.$$

Чисельний приклад: $S = 2 \times 1 = 2 \text{ м}^2$, $r_0 = 0.01 \text{ м}$, $H = 1 \text{ м}$, $g = 9.8 \text{ м}^2/\text{с}$

$$\text{Тоді } t^{final} \approx \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 9.8}} \frac{2}{\pi \cdot 0.01^2} \approx 1439 \text{ с} \approx 24 \text{ хвилини}$$

Рівень II.

Ускладнимо геометрію. Нехай «ванна» має форму лійки – конуса з кутом розхилу α , нижнім круглим отвором радіусу r_0 , радіусом верхнього рівня R (початкове значення R_0), так що, $H = (R_0 - r_0) \operatorname{tg} \alpha$, $h = (R - r_0) \operatorname{tg} \alpha$, $z = (r - r_0) \operatorname{tg} \alpha$. Закон збереження речовини: $S dh = \pi R^2 dh = -\pi r_0^2 u dt$

При цьому $R = r_0 + h \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $S = \pi R^2 = \pi (r_0 + h \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2$.

Тоді рівняння (1.2.3) набуде наступного вигляду:

$$dh = -\sqrt{h} \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{r_0}{r_0 + h \cdot \operatorname{tg} \alpha}\right)^4}} \left(\frac{r_0}{r_0 + h \cdot \operatorname{tg} \alpha}\right)^2 dt \quad (1.2.5)$$

Розглядаємо далі лише випадок $H \cdot \operatorname{tg} \alpha \gg r_0$. Тоді майже на кожному кроці по часу (крім завершальних) $h \cdot \operatorname{tg} \alpha \gg r_0$, так що можна рівняння (1.2.5) використовувати у спрощеному вигляді:

$$-dh \approx \sqrt{h} \sqrt{\frac{2g}{(h \cdot \operatorname{tg} \alpha)^4}} r_0^2 dt \Rightarrow -\frac{5}{2} h^{3/2} dh = \frac{5r_0^2 \sqrt{2g}}{2(\operatorname{tg} \alpha)^2} dt \Rightarrow H^{5/2} = \frac{5r_0^2 \sqrt{2g}}{2(\operatorname{tg} \alpha)^2} t^{final}$$

$$\text{Тобто } t^{final} = \frac{2(\operatorname{tg} \alpha)^2}{5r_0^2 \sqrt{2g}} H^{5/2} \quad (1.2.6)$$

Якщо ми візьмемо $\operatorname{tg} \alpha = 1$ і початковий об'єм води такий же, як у попередньому випадку ($2 \cdot 0.5 \cdot 0.64$), тобто

$$\frac{1}{3} H \cdot \pi (H \operatorname{tg} \alpha)^2 = \frac{\pi}{3} H^3 = 0.64 m^3 \Rightarrow H = \left(\frac{3 \cdot 0.64}{3.14} \right)^{1/3} = 0.85 m$$

$$\text{Тоді } t^{final} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 1e - 4 \sqrt{19.6}} 0.84^{\wedge} (5 / 2) \approx 584 c \approx 10 \text{ хвилин}.$$

Таким чином, залежність від висоти суттєво інша, але числові значення – того ж порядку величини.

Рівень III.

Вплив в'язкого опору при витіканні через циліндричну трубу.

Нехай витікання води відбувається через трубу довжиною L . Якщо припустити, що витікання відбувається у вигляді квазістаціонарної ламінарної течії в'язкої рідини, то швидкість витікання мусила би визначатися формулою Пуазейля

$$\pi r^2 v = \frac{\pi r^4}{\eta} \frac{\Delta P}{L} = \frac{\pi r^4}{\eta} \frac{\rho g h - 0}{L} \Rightarrow v = \frac{r^2 \rho g h}{\eta L}. \quad (1.2.7)$$

Фізично очевидно, що формулою (1.2.7) має сенс користуватись лише якщо вона дає меншу швидкість витікання, ніж формула Бернуллі-Торічеллі:

$$\frac{r^2 \rho g h}{\eta L} < \sqrt{2gh} \Rightarrow h < \frac{2\eta^2 L^2}{r^4 \rho^2 g} \text{ або } L > \frac{r^2 \rho \sqrt{gh/2}}{\eta}.$$

В'язкість води рівна приблизно $0.9 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. При параметрах із попереднього варіанту отримуємо критичну довжину труби порядку кількох сотень метрів, тобто врахування цих ефектів суттєво лише при малих висотах рівня води або дуже вузькому отворі.

ЗАДАЧА І-3. Оцінити масу Земної атмосфери.Рівень І.

З першого погляду, задача може видатись складною, оскільки звична шкільна формула для маси як для добутку густини на об'єм тут «напрямую» не працює. Дійсно, густина повітря залежить від висоти і температури, а атмосфера не має чітко визначеного об'єму – у неї немає чіткої границі. Красота цієї задачі полягає у еквівалентності інертної та гравітаційної мас, виразі гравітаційної маси через вагу, а ваги через тиск. Знайдемо масу з означення ваги: вага – сила, з якою тіло тисне на опору або розтягує підвіс:

$$P = mg,$$

звідки маса:

$$m = \frac{P}{g}. \quad (1.3.1)$$

Вага Земної атмосфери рівна силі її середнього тиску, тобто добутку середнього тиску на площу земної поверхні, тобто площу сфери. При цьому, незважаючи на перепади тиску (які приводять до вітру, циклонів і зміни настрою) з непоганою точністю середній по Землі тиск можна вважати рівним нормальній величині $p_{\text{атм}} = 10^5 \text{ Па}$. Отже,

$$P = p_{\text{атм}} \cdot 4\pi R_3^2. \quad (1.3.2)$$

Підставимо (1.3.2) у формулу (1.3.1):

$$m = \frac{p_{\text{атм}} \cdot 4\pi R_3^2}{g}. \quad (1.3.3)$$

Підставимо такі чисельні значення: $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ – радіус Землі, $g = 10 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння. Обчислимо:

$$m = \frac{10^5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{10} \approx 5 \cdot 10^{18} (\text{кг}).$$

Якщо не здогадатись про те, що маса – це вага поділена на прискорення вільного падіння, а вага – це тиск, помножений на площу, то прийшлося би ту ж задачу робити іншим, стандартним для загального курсу способом:

Другий спосіб. Маса будь-якого тіла, густина якого нерівномірно розподілена по об'єму, – це інтеграл від густини по об'єму. Чіткої границі

атмосфери не існує, тому межі інтегрування - від нуля до нескінченності. На нескінченності густина дорівнює нулю і не дає ніякого вкладу. В силу сферичної симетрії задачі потрійний інтеграл можна представити як однократний інтеграл по тонким сферичним прошаркам об'ємом $4\pi(R_3 + h)^2 dh$:

$$m = \iiint_0^\infty \rho dV = \int_0^\infty \rho(h) \cdot 4\pi(R_3 + h)^2 dh. \quad (1.3.4)$$

Оскільки реально атмосфера простягається лише на кілька десятків кілометрів, що значно менше за радіус Землі 6370 км, доданком h поруч з радіусом Землі можна нехтувати: $4\pi(R_3 + h)^2 = 4\pi(R_3)^2$.

Густину виразимо через тиск із рівняння стану ідеального газу:

$$\rho = \frac{M}{RT} p, \quad (1.3.5)$$

тут M – молярна маса, R – універсальна газова стала, T – температура атмосфери. Залежність тиску від висоти опишемо барометричною формулою (будемо наближено вважати, що температура є середньою і не змінюється з висотою, так же як і середня молярна маса):

$$p = p_{\text{атм}} e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \quad (1.3.6)$$

У формулі (1.3.4) застосуємо (1.3.5) та (1.3.6), отримаємо масу атмосфери:

$$m = 4\pi R_3^2 \frac{M}{RT} p_{\text{атм}} \int_0^\infty e^{-\frac{Mgh}{RT}} dh = 4\pi R_3^2 \frac{M}{RT} p_{\text{атм}} \cdot \frac{RT}{Mg} = 4\pi R_3^2 \frac{p_{\text{атм}}}{g}. \quad (1.3.7)$$

Можемо зазначити, що результати (1.3.7) та (1.3.3) є однаковими.

ЗАДАЧА І-4. Оцінити радіус Землі, при якому вона стане чорною дірою.

Перший спосіб. Чорна діра – це гравітуюче тіло, яке своєю гравітацією не випускає від себе нічого, навіть світло. «Зробимо вигляд», що для чорної діри можна застосовувати формули нерелятивістської (Ньютонової) механіки. Як відомо, застосування закону збереження енергії разом із Ньютоновим законом гравітації призводить до наступного простого виразу для мінімальної початкової швидкості кинутого з поверхні (на відстані R від центру) тіла, яка дозволяє тілу

«втікти» на нескінченність: $v(II) = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Ця швидкість називається другою космічною. Для чорної діри друга космічна швидкість рівна швидкості світла, тому:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad (1.4.1)$$

Із рівняння (1.4.1) зразу отримуємо:

$$R = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.4.2)$$

Насправді ця формула була строго виведена Карлом Шварцшильдом у 1916 році в рамках загальної теорії відносності Ейнштейна.

Підставимо такі числові значення:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \text{ – гравітаційна стала,}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг – маса Землі,}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с – швидкість світла у вакуумі.}$$

Обчислимо:

$$R = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 10^{-2} (\text{м}).$$

Отже, Земля перетвориться в чорну діру лише якщо всю її масу стиснути до кулі радіуса менше сантиметра.

Цей розв'язок не може 100-процентно задовольнити, оскільки застосування класичної нерелятивістської формули другої космічної швидкості до швидкості світла – це дуже сумнівний «трюк». Тому пропонуємо як альтернативу ще два підходи (теж нестрогі):

Другий спосіб. Почнемо з того, що за означенням Лапласа, чорна діра не випускає випромінювання. Однак, випромінювання – це світло, тобто фотони. Фотон завжди має одну швидкість – швидкість світла у вакуумі.

Виникає питання: що у фотона може змінитись, коли він намагається вирватися із поля тяжіння? Очевидно, що при віддаленні фотона від зірки, повинна зменшуватись його енергія. У «нормального» (нерелятивістського) тіла зменшення енергії означає зменшення швидкості. Оскільки фотон зменшити швидкість не може, йому залишається зменшувати енергію шляхом зменшення частоти (енергія фотона $E = h\nu$)

При віддаленні від масивного гравітуючого тіла, фотон повинен «червоніти» - зменшувати частоту, тобто збільшувати довжину хвилі. Якщо він вирвався із поля тяжіння, то частота зменшилась, але залишилась додатною. Якщо фотон не може покинути чорну діру – його частота зменшилась до нуля.

Напишемо закон збереження енергії для руху у гравітаційному полі:

$$h\nu + \left(-G \frac{mM}{r}\right) = \text{const}, \quad (1.4.3)$$

r – довільна відстань до центра зірки, $m = \frac{h\nu}{c^2}$ – релятивістська маса фотона на цій відстані.

Умову чорної діри можна записати:

$$h\nu - G \frac{h\nu M}{c^2 R} = 0 - G \frac{0 * M}{c^2 * \infty} = 0. \quad (1.4.4)$$

(У нерелятивістському випадку було так: $\frac{m\nu^2}{2} - G \frac{mM}{R} = \frac{m * 0}{2} - G \frac{mM}{\infty} = 0$)

Із рівняння (1.4.4) отримаємо:

$$\frac{GM}{c^2 R} = 1,$$

звідки

$$R = \frac{GM}{c^2}. \quad (1.4.5)$$

Ця формула відрізняється від (1.4.2) множителем 2, тобто має той же порядок величини.

Третій спосіб. Можна використати також метод розмірностей, який корисний тоді, коли про систему невідомо майже нічого крім загальних міркувань про те, які саме величини пов'язані з іншими величинами.

Очевидно, що критерій чорної діри повинен пов'язувати між собою радіус діри, її масу, швидкість світла і гравітаційну сталу. Тому можна припустити, що радіус чорної діри:

$$R = M^x c^y G^z. \quad (1.4.6)$$

Відомо, що радіус має бути у метрах, тому рівняння (1.4.6) перепишемо так:

$$M = \text{кг}^x \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^y \left(\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \right)^z, \\ \text{кг}^0 \text{с}^0 \text{м}^1 = \text{кг}^{(x-z)} \text{с}^{(-y-2z)} \text{м}^{(y+3z)}. \quad (1.4.7)$$

З рівняння (1.4.7) тримаємо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ -y - 2z = 0, \\ y + 3z = 1. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

розв'язком системи (1.4.8) є

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = 1. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Отже,
$$R = M^x c^y G^z = M c^{-2} G = \frac{GM}{c^2}. \quad (1.4.10)$$

тобто результат за порядком величини не змінився.

ЗАДАЧА І-5. Оцінити, скільки треба з'їсти манної каші, щоб побудувати піраміду Хеопса.

Будемо вважати, що матеріали вже готові і привезені до місця спорудження піраміди. Параметри піраміди Хеопса: висота $h=140\text{ м}$ і маса $M=5,7 \cdot 10^9 \text{ кг}$. Енергетична цінність каші приблизно 100 кілокалорій на 100 грам, тобто 1000 кілокалорій на кілограм: $q=4,2 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

Із елементарної геометрії відомо, що висота розташування центра мас піраміди:

$$h_c = \frac{1}{3}h.$$

Припустимо, що вся енергія, отримана від споживання каші, витрачається лише на підвищення потенціальної енергії під час піднімання вантажу при будівництві піраміди, яку треба витратити на будівництво піраміди буде рівною потенціальній енергії піраміди на висоті центра мас:

$$E_p = M \cdot g \cdot \frac{1}{3}h = m_k q. \quad (1.5.1)$$

Знайдемо звідси необхідну масу каші:

$$m_k = \frac{Mgh}{3q}. \quad (1.5.2)$$

Будемо вважати, що $g = 10^{\frac{M}{c^2}}$ і обчислимо:

$$m_k = \frac{5,7 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 140}{3 \cdot 4,2 \cdot 10^6} \approx 6,3 \cdot 10^5 \text{ (кг)}.$$

Припустимо, що піраміду будують 1000 рабів. Тоді на кожного випадає 630 кг. При щедрому харчування по кілограму в день – майже 2 роки.

У цьому розв'язку використовувалось занадто ідеалістичне припущення, що вся енергія, набута рабами, іде лише на піднімання каменів для піраміди. Для більш реалістичного розв'язку необхідно оцінити коефіцієнт корисної дії манної каші.

ЗАДАЧА І-6. Оцінити тепло, яке поверхня Землі віддає в космос за одну секунду.

Будемо вважати, що Земля абсолютно чорне тіло. За законом Стефана-Больцмана, енергія, яку випромінює абсолютно чорне тіло за одиницю часу з одиниці поверхні рівна σT^4 . Потужність, яку виділяє Земля за одиницю часу:

$$P_3 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_3^2. \quad (1.6.1)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} - \text{стала Стефана-Больцмана},$$

$$T \approx 3 \cdot 10^2 \text{ К} - \text{температура поверхні Землі},$$

$$R_3 \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} - \text{радіус Землі}.$$

Обчислимо:

$$P_3 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (3 \cdot 10^2)^4 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2 \approx 2,4 \cdot 10^{17} \text{ (Вт)}$$

ЗАДАЧА І-7. *Оцінити тепло, яке поверхня Землі отримує від Сонця за одну секунду. Яка частина цієї потужності потрапляє на територію України.*

Будемо вважати, що Сонце і Земля - абсолютно чорні тіла. (Для Сонця, яке світиться за рахунок гарячої поверхні з температурою біля 6000 Кельвінів і дійсно майже нічого не відбиває, це наближення непогане, а для Землі – так собі). За законом Стефана-Больцмана, температура, яку випромінює абсолютно чорне тіло за одиницю часу з одиниці поверхні рівна: $F = \sigma T^4$. Потужність, яку виділяє Сонце за одиницю часу у всіх напрямках:

$$P_0 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_c^2 \quad (1.7.1)$$

Знайдемо площу сфери Дайсона (сфери, радіус якої є радіусом земної орбіти):

$$S_o = 4\pi R_o^2.$$

Площа перерізу Землі:

$$S^{пер.} = \pi R_3^2.$$

Отже на Земну поверхню потрапляє така потужність:

$$P = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_c^2 \cdot \frac{S^{пер.}}{S_o} = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_c^2 \cdot \frac{\pi R_3^2}{4\pi R_o^2} = \sigma \pi T^4 R_c^2 \frac{R_3^2}{R_o^2}. \quad (1.7.2)$$

Площа поверхні Землі:

$$S^{пов.} = 4\pi R_3^2. \quad (1.7.3)$$

Знайдемо, яка частка від цієї потужності припадає на Україну:

$$P_y = P \frac{S_y}{S_{\text{пов.}}} = P \cdot \frac{S_y}{4\pi R_s^2}. \quad (1.7.4)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$$\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} - \text{стала Стефана-Больцмана},$$

$$T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ К} - \text{температура поверхні Сонця},$$

$$R_c \approx 7 \cdot 10^8 \text{ м} - \text{радіус Сонця},$$

$$R_o \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м} - \text{радіус орбіти},$$

$$R_z \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} - \text{радіус Землі},$$

$$S_y \approx 6 \cdot 10^{11} \text{ м}^2 - \text{площа території України}.$$

Обчислимо:

$$P = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14 \cdot (6 \cdot 10^3)^4 \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \frac{(6,4 \cdot 10^6)^2}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} \approx 2,1 \cdot 10^{17} (\text{Вт}).$$

Порівняння з попередньою задачею показує, що Земля за секунду випромінює приблизно стільки ж енергії, скільки отримує від Сонця. Саме цим визначається її сучасна середня температура. Якщо збільшиться виробництво ядерної і термоядерної енергії на Землі, то для балансу підніметься і середня температура Землі, щоб Земля могла більше енергії випромінювати.

На Україну припадає потужність

$$P_y = 2,1 \cdot 10^{17} \cdot \frac{6 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 3,14 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2} \approx 2,4 \cdot 10^{14} (\text{Вт}) = 2,4 \cdot 10^{11} (\text{кВт}).$$

Якщо з неї використовувати хоча би одну соту процента, то це замінить 2400 атомних блоків-мільйонників (по мільйону кіловат), таких, чотири з яких були у Чорнобилі (ще два не встигли добудувати, а один вибухнув).

РОЗДІЛ II. ЗАДАЧІ СЕРЕДНЬОГО РІВНЯ («на подумать»)

ЗАДАЧА II-1. На масивну дерев'яну колоду радіусом 0.5 м зверху рівно посередині поклали дерев'яну дошку довжиною 2 метри . На край дошки сіла маленька пташка і полетіла далі. При цьому дошка не зсунулась, але почала коливатись. Оцінити період коливань дошки.

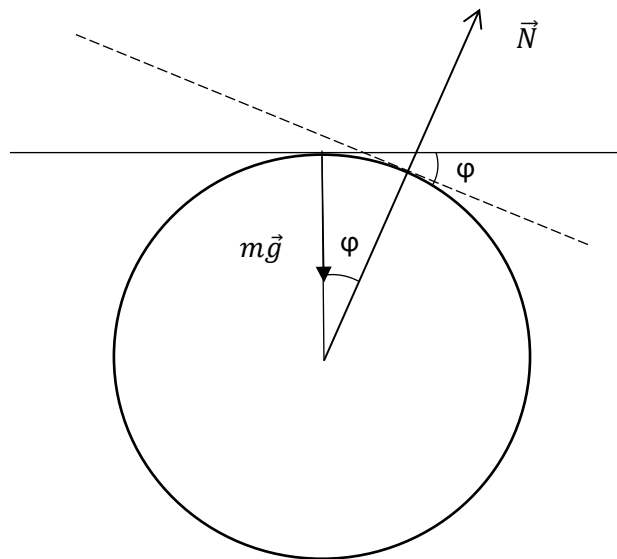


Рис. 2.1.1. Схематичне зображення до задачі №1.

У наших міркуваннях колода буде лишатись нерухомою (важка або просто частково вкопана чи закріплена в інший спосіб). Нехай у якийсь момент часу дошка відхилена на певний кут – φ (рис. 2.1.1). При цьому точка дотику дошки до колоди теж зміщується вздовж околу колоди на той же кут. (Вказані на рисунку два кути рівні оскільки вони мають взаємно ортогональні сторони – адже дотична в обох положеннях перпендикулярна до радіуса). Ми вважаємо, що дошка коливається без проковзування (оцінка умов такого руху – це окрема цікава задача, яку ми теж можемо поставити і розв'язати). Якщо так, то точка дотику в даний момент має нульову швидкість і тому є миттєвим центром обертання дошки. Тому сили, які прикладені дошки в цій точці, обертового моменту не створюють (це сила нормальної реакції з боку колоди і сила тертя

спокою вздовж дошки). Зате сила тяжіння залишається прикладеною вниз до центру мас дошки і тому створює повертаючий назад момент сили:

$$M = -mgR\sin\varphi. \quad (2.1.1)$$

(У цьому рівнянні ми наближено взяли, що вздовж горизонтальної осі положення центру мас практично не змінюється – це наближення виконується тим краще, чим менше зміщення – можете порахувати строго і перевірити, що це ефект наступного – другого порядку малості по куту відхилення.)

Напишем основне рівняння динаміки (аналог другого закону Ньютона) для обертального руху:

$$M = I \cdot \varepsilon, \quad (2.1.2)$$

де M – момент сили, I – момент інерції відносно миттєвого центру обертання, ε – кутове прискорення.

Згідно теореми Штейнера про зв'язок двох моментів інерції відносно двох паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас,

$$I = I_0 + m \cdot (R \cdot \operatorname{tg}\varphi)^2 = I_0 + m \cdot (R \wedge \varphi)^2 \approx I_0. \quad (2.1.3)$$

(зміщення і відповідні кути повороту дуже маленькі).

Будемо вважати нашу дошку однорідним стержнем довжиною l і масою m . Тоді момент інерції можна розписати так:

$$I_0 = \frac{1}{12} m \cdot l^2. \quad (2.1.4)$$

Кутове прискорення є другою похідною від кута по часу, тому:

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx I_0 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.1.5)$$

Отже,
$$M = \frac{1}{12} m l^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.1.6)$$

Оскільки кут дуже малий, то синус кута практично рівний самому куту в радіанах, тобто $\sin\varphi = \varphi$, тоді рівняння (2.1.1) набуде вигляду:

$$M = -mgR\varphi. \quad (2.1.7)$$

Прирівняємо значення моменту сили у рівняннях (2.1.6) та (2.1.7):

$$\frac{1}{12}ml^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgR\varphi, \quad (2.1.8)$$

звідси зразу слідує:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{12gR}{l^2}\right)\varphi. \quad (2.1.9)$$

Всі рівняння типу $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi$ добре відомі в математичній фізиці – це диференціальні рівняння коливань, які мають розв’язками гармонічні коливання, пропорційні синусу чи косинусу: $Asin(\omega t + const)$.

Значення у дужках $\left(\frac{12gR}{l^2}\right)$ є квадратом кутової частоти цих коливань:

$$\omega^2 = \frac{12gR}{l^2}, \quad (2.1.10)$$

тоді з рівняння (2.1.10) слідує:

$$\omega = \sqrt{\frac{12gR}{l^2}}. \quad (2.1.11)$$

Період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{l^2}{3gR}}. \quad (2.1.12)$$

Тепер оцінімо чисельне значення

$$T = 3,14\sqrt{\frac{2^2}{3 \cdot 9,8 \cdot 0,5}} \approx 1,6(\text{Гц})$$

ЗАДАЧА II-2. Оцінити, з якою частотою мусить людина махати руками, щоб піднятися у повітря.

(Ця наша задача виглядає дещо екзотично, але вона насправді аналогічна задачі в книзі М.В. Сіденка, де треба оцінити частоту звуку комах, що летить.)

Опускаючи різко руки вниз, ми передаємо імпульс вниз повітря і тим самим отримаємо такий же за величиною, але протилежний за напрямом імпульс вгору. Переданий нам в одиницю часу імпульс вгору, згідно другому закону

Ньютона ($F = dp/dt$) – це сила, а в нашому випадку - це наша підйомна сила.

Отже, в принципі, якби площа наших рук була би як у крил, а маса як у колібрі, ми могли би літати. У людини, порівняно з птахами, площа рук невелика відносно до тіла. Оцінимо, як це можна компенсувати збільшенням швидкості рук. Щоправда, тут виникає ще одна проблема: Коли ми піднімаємо руки, ми теж опираємось повітря, але в іншому напрямку. Тому будемо вважати, що руки у нас рухаються як у стилі плавання «брас» (<https://youtu.be/kJc2FSKD4RM>) і при підніманні рук ми «викручуємо» їх так, що повітря майже не розганяємо.

Спочатку виразимо середню швидкість рухів руками:

$$v \sim \frac{\frac{l}{2} - \left(-\frac{l}{2}\right)}{\frac{T}{2}} = \frac{2l}{T} = 2lv, \quad (2.2.1)$$

(l - довжина руки, T – період махань).

Силу опору при швидкому русі оцінюємо так: Нехай S – площа поперечного перерізу руки. За малий час руху дві руки «замітають» повітря в об'ємі $2Svdt$, тобто надає масі $2\rho_{\text{пов.}}Svdt$ імпульс $(2\rho_{\text{пов.}}Svdt) \cdot (v - 0)$. Тому сила опору (в нашому випадку – реактивна сила) рівна

$$\frac{dp}{dt} \sim 2\rho_{\text{пов.}}Sv^2, \quad (2.2.2)$$

де $S = wl$ – площа поперечного перерізу руки.

Щоб людина піднялася, сила опору повітря (направлена вгору при русі рук униз і майже нульова при зворотному русі рук) має бути в середньому більшою за силу тяжіння:

$$F^{\text{опору}} \sim (2\rho_{\text{пов.}}Sv^2 + 0) / 2 > mg, \quad (2.2.3)$$

$S = wl$ – площа поперечного перерізу руки.

Отже, умова літання завдяки маханню руками/крилами:

$$\rho_{\text{пов.}}Sv^2 > mg. \quad (2.2.4)$$

Підставимо у нерівність (2.2.4) значення швидкості (2.2.1) і площі поперечного перерізу руки:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{пов.}} w l \cdot (2lv)^2 &> mg, \\ 4\rho_{\text{пов.}} w l^3 v^2 &> mg.\end{aligned}\quad (2.2.5)$$

Звідси:

$$v > \sqrt{\frac{mg}{4\rho_{\text{пов.}} w l^3}}. \quad (2.2.6)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$m = 70$ кг – середня маса людини,

$g \approx 10$ м/с² – прискорення вільного падіння,

$\rho_{\text{пов.}} = 1,3$ кг/м³ – густина повітря,

$w = 0,1$ м – ширина руки,

$l = 0,8$ м – довжина руки.

Знайдемо числове значення частоти:

$$v > \sqrt{\frac{70 \cdot 10}{4 \cdot 1,3 \cdot 0,1 \cdot 0,8^3}} \approx \sqrt{2800} = 53 \text{ (Гц)}.$$

ЗАДАЧА II-3. *Оцінити, скільки обертів зробить автомобіль, що на повній швидкості вільно впав в 200-метрове провалля.*

(Ця задача запозичена із збірника М. В. Сіденка [3], однак розв’язок цієї задачі, приведений у кінці цієї книжки, занадто короткий і нестрогий – зокрема, з нього не зовсім ясно, чому взагалі виникає обертання)

Коли передні колеса уже з’їхали у провалля, а задні ще ні, утворюється пара сил, які і будуть обертати авто (рис. 2.3.1). Це сила тяжіння, прикладена до центру мас, і сила реакції опори, прикладена до задніх колес. Можна довести, що у такому випадку сила реакції опори в чотири рази менша за силу тяжіння:

$$N = \frac{mg}{4}. \quad (2.3.1)$$

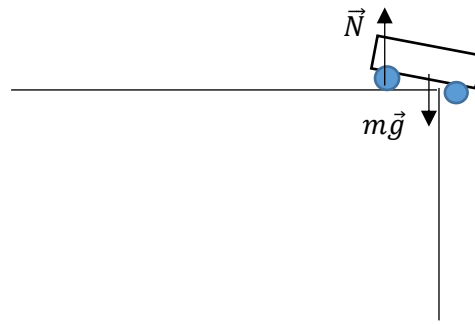


Рис. 2.3.1. Схематичне зображення до задачі II.3.

Доведення. Згідно другому закону Ньютона,

$$ma = mg - N \Rightarrow N = m \cdot (g - a). \quad (2.3.2)$$

Прискорення центру мас знайдемо через кутове прискорення обертання, а кутове прискорення знайдемо через основне рівняння динаміки обертального руху. Згідно цьому рівнянню, обертальний момент сили відносно миттєвого центру обертання (точки дотику задніх коліс) дорівнює добутку моменту інерції відносно цього центру на кутове прискорення:

$$M = I \cdot \varepsilon.$$

Для простоти будемо вважати, що автомобіль – це однорідний стержень, а його задні колеса знаходяться зовсім ззаду – на кінці стержня. Момент інерції відносно кінця стержня (згідно теоремі Штейнера),

$$I = \frac{ml^2}{3} = \frac{ml^2}{12} + m(l/2)^2. \text{ Відносно точки опори момент створює лише сила}$$

тяжіння, прикладена до центру мас, з плечем, рівним половині довжини, тобто

$$mg \cdot \frac{l}{2}. \text{ Тоді } mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon, \text{ тобто}$$

$$\varepsilon = \frac{3g}{2l}. \quad (2.3.3)$$

Тоді лінійне прискорення центра мас рівне добутку плеча на кутове прискорення:

$$a = \frac{l}{2} \varepsilon = \frac{3g}{4} \quad (2.3.4)$$

і сила реакції опори визначається з другого закону Ньютона:

$$N = mg - ma = m \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)g = mg / 4. \quad (2.3.5)$$

Для нашої задачі насправді потрібна лише формула (2.3.3). Час з'їжджання $\Delta t = \frac{l}{v}$, де v – швидкість автомобіля.

За цей час кутова швидкість зросте від нуля до величини

$$\omega = 0 + \varepsilon \cdot \Delta t = \frac{3g}{2l} \cdot \frac{l}{v} = \frac{3g}{2v}. \quad (2.3.6)$$

Обертатись автомобіль буде до моменту падіння. При цьому час падіння визначається стандартною формулою кінематики вільного падіння:

$$t_{\text{пад.}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2.3.7)$$

Кут обертання автомобіля за час падіння:

$$\varphi = \omega t_{\text{пад.}} = \frac{3g}{2v} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{3\sqrt{2gh}}{2v}. \quad (2.3.8)$$

Кількість обертів:

$$\chi = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3\sqrt{2gh}}{4\pi v}. \quad (2.3.9)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$g \approx 10 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння,

$h = 200 \text{ м}$ – глибина провалля,

$v = 15 \text{ м/с}$ – швидкість автомобіля,

і $\pi \approx 3$.

Обчислимо:

$$\chi = \frac{3\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 200}}{4 \cdot 3 \cdot 15} \approx 1 \text{ – тобто зробить повний оберт і впаде на колеса.}$$

ЗАДАЧА II-4 (задача зі збірника М.В.Сіденка). *Оцінити, на якій відстані людина в яскравому одязі, йдучи до лісу, стає невидимою.*

Якщо знати відповідь, то задача здається майже тривіальною. Насправді це не так – у цій задачі фактично вперше неявно застосовуються статистичні міркування і розглядається величина типу довжини вільного пробігу при випадкових блуканнях у випадковому середовищі, дуже корисна для багатьох проблем молекулярної, атомної та ядерної фізики.

Нехай відома кількість дерев на одиницю площі n і діаметр стовбура d .

Нехай промінь пройшов відстань L . Він попаде в дерево, якщо в прямокутнику довжиною L і шириною $2 \cdot \frac{d}{2} = d$ знаходиться центр хоча би одного дерева. Статистично на цій площі (в середньому) знаходиться $L \cdot d \cdot n$ дерев.

Тоді, в середньому, людину не буде видно, коли добуток відстані, кількості дерев та діаметра стовбура буде рівним одиниці, це і є нашим рівнянням:

$$\lambda dn = 1, \quad (2.4.1)$$

Звідси знайдемо нашу відстань:

$$\lambda = \frac{1}{dn}. \quad (2.4.2)$$

Використаємо такі значення:

$n = 0,01 \text{ м}^{-2}$ та $d = 0,4 \text{ м}$. Тепер обчислимо:

$$\lambda = \frac{1}{0,4 \cdot 0,01} = 250 (\text{м}).$$

ЗАДАЧА II-5. *Інтенсивним перемішуванням у посудині висотою 10 см отримана суспензія – суміш золотого порошку із середнім розміром 1 мікрон із водою при кімнатній температурі.*

(1) *Оцінити, за який час порошинки осядуть на дно. Як зміниться результат, якщо середній розмір буде 10 мікрон? Вважати, що товщина результуючого осаду набагато менша висоти посудини.*

(2) *Оцінити час осідання частинок коронавірусу в повітрі.*

(3) *Оцінити час осідання краплинок слини, які виділяються з носу або рота при чиханні.*

Очевидно, що мова йде про малі швидкості, значно менші за швидкість звуку в середовищі, так що опір руху є в'язким і у випадку сферичної форми описується як сила Стокса, пропорційна швидкості, радіусу і коефіцієнту динамічної в'язкості, $6\pi\eta r v_{\text{ст.}}$.

Можна показати, що за умов задачі час виходу на стаціонар набагато менший за час осідання. (Для цього бажаючи можуть швиденько проінтегрувати рівняння руху $\frac{dV}{dt} = g - \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)V$ і переконатися, що характерний час виходу на стаціонарний режим рівний $m / (6\pi\eta r)$.)

Умова рівноваги сил при постійній швидкості:

$$mg = 6\pi\eta r v_{\text{ст.}}, \quad (2.5.1)$$

звідки стаціонарна швидкість:

$$v_{\text{ст.}} = \frac{mg}{6\pi\eta r}. \quad (2.5.2)$$

Масу виражаємо через густину і об'єм кулі: $m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, тепер рівняння (2.29) набуде вигляду:

$$v_{\text{ст.}} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho g}{\eta} r^2. \quad (2.5.3)$$

Час осідання:

$$t = \frac{h}{v_{\text{ст.}}} = \frac{9\eta h}{2\rho g r^2}. \quad (2.5.4)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – прискорення вільного падіння,

$h = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ – висота посудини,

$\rho = 1,93 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – густина золота,

$\eta = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ – динамічний коефіцієнт в'язкості води,

$r_1 = 10^{-6} \text{ м}$ і $r_2 = 10^{-5} \text{ м}$

Обчислимо:

$$t_1 = \frac{9 \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{2 \cdot 1,93 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot (10^{-6})^2} \approx 2,1 \cdot 10^3 (\text{с}),$$

$$t_2 = \frac{9 \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{2 \cdot 1,93 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot (10^{-5})^2} \approx 21 (\text{с}).$$

Отже порошинки розміром 1 мікрон будуть осідати у сто разів повільніше ніж порошинки 10 мікрон.

Тепер застосуємо рівняння (2.31) для опускання коронавірусу – одиночного самостійного чи причепленого до мікрокраплини при чиханні.

З'ясуємо за який час він опуститься на 1 м.

Застосуємо такі чисельні значення:

$g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – прискорення вільного падіння,

$h = 1 \text{ м}$ – висота опускання,

$\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – густина води,

$\rho_v = 1,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – густина окремого вірусу

$\eta = 1,74 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$ – динамічний коефіцієнт в'язкості повітря,

$r_1 = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ – радіус одного вірусу,

$r_2 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ – радіус мікрокраплини (10 мікрон).

$$t_1 = \frac{9 \cdot 1,74 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot (1,1 \cdot 10^{-7})^2} \approx 5,4 \cdot 10^4 (\text{с})$$

$$t_2 = \frac{9 \cdot 1,74 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10^{-5})^2} \approx 3 (\text{с}).$$

За час t_1 опуститься один вільний вірус на 1 м, а за час t_2 – мікрокраплина мікронного діаметру з вірусом.

ЗАДАЧА II-6. Оцінити індукцію магнітного поля в центрі атома, створеного орбітальним рухом електронів з орбітальним квантовим числом l .

Коли заряджена частинка рухається по колу, ми можемо спостерігати кільцевий струм. Як відомо з курсу «Електрика і магнетизм», кільцевий струм створює у центрі кільця магнітне поле, напрямлене вздовж осі обертання, з наступними напруженістю та індукцією:

$$H = \frac{I}{2r}, \quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (2.6.1)$$

За означенням, сила струму – це заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за одиницю часу. У нашому випадку, сила струму – заряд, що здійснив повний оберт за період обертання:

$$I = \frac{e}{T}. \quad (2.6.2)$$

Нам відомий орбітальний рух електрона: орбітальне квантове число 1. Згідно постулатам Бора, у цьому випадку момент імпульсу орбітального руху електрона дорівнює зведений сталій Планка $\hbar$:

$$mvr = \hbar \quad (2.6.3)$$

Звідси знайдемо швидкість електрона:

$$v = \frac{\hbar}{mr}. \quad (2.6.4)$$

Період обертання:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mr^2}{\hbar}. \quad (2.6.5)$$

У співвідношення (2.5.2) підставимо (2.5.5) і отримаємо:

$$I = \frac{e\hbar}{2\pi mr^2} \quad (2.6.6)$$

відповідно у формулі (2.5.1) застосуємо значення (2.5.6):

$$H = \frac{e\hbar}{4\pi mr^3}. \quad (2.6.7)$$

Отже магнітна індукція у:

$$B = \mu_0 \frac{e\hbar}{4\pi mr^3}. \quad (2.6.8)$$

Підставимо такі чисельні значення:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 \text{ – магнітна стала,}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл – заряд електрона,}$$

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с – зведена стала Планка,}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг – маса електрона,}$$

$$r \approx 10^{-10} \text{ м – радіус атома,}$$

Обчислимо для атома водню:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,054 \cdot 10^{-34}}{4\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-10})^3} \approx 0,19 \cdot 10^1 (\text{Тл}) = 2 \text{ Тл.}$$

ЗАДАЧА II-7. Табуретку нахиляють так, що вона опирається на підлогу двома ніжками, і відпускають, після чого вона падає на всі чотири ніжки. Оцінити, на яку відстань вона переміститься по підлозі.

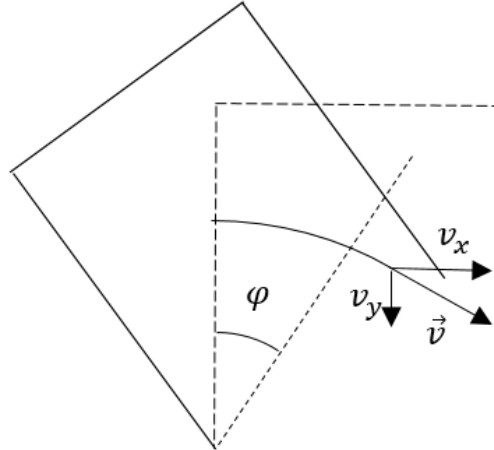


Рис. 2.7.1. Схематичне зображення до задачі II-7.

Будемо вважати, що табуретка стоїть у такому положенні, що центр мас знаходиться над точкою опори (знаходиться у стані нестійкої рівноваги). Нехай φ – початковий кут відхилення.

Швидкість, яку набирає центр мас при опусканні табуретки (при обертанні навколо миттєвого центру – навколо краю ніжок) має вертикальну і горизонтальну складові (рис. 2.7.1).

Знайдемо із закону збереження енергії швидкість центра мас перед падінням:

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = mg(H - h) \quad (2.7.1)$$

H – висота центра мас у стані нестійкої рівноваги, $h = H \cdot \cos\varphi$ – висота центра мас після падіння.

$$\frac{mv^2}{2} = mgH(1 - \cos\varphi), \quad (2.7.2)$$

з рівняння (2.8.2) швидкість:

$$v = \sqrt{2gH(1 - \cos\varphi)}. \quad (2.7.3)$$

Знайдемо горизонтальну проекцію швидкості, використовуючи теорему про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами:

$$v_x = v \cdot \cos\varphi.$$

Прирівняємо кінетичну енергію горизонтального руху відразу після удару та роботу сил тертя до зупинки:

$$\frac{mv^2 \cos^2\varphi}{2} = \mu mgl. \quad (2.7.4)$$

Знайдемо відстань l , на яку зсунеться табуретка:

$$l = \frac{m \cdot 2gH(1 - \cos\varphi) \cos^2\varphi}{2\mu mg} = \frac{H \cos^2\varphi (1 - \cos\varphi)}{\mu}. \quad (2.7.5)$$

У (2.7.5) підставимо такі чисельні значення:

$H \approx 0,4\text{м}$ – висота центра мас у стані нестійкої рівноваги,

$\varphi \approx 45^\circ$ – кут нахилу табуретки,

$\mu \approx 0,33$ – коефіцієнт тертя ковзання дерева по дереву.

$$\text{Обчислимо: } l = \frac{0,4 \cos^2 45^\circ (1 - \cos 45^\circ)}{0,33} \approx 0,18(\text{м}).$$

РОЗДІЛ III. «ЗАДАЧІ-ВИКЛИКИ»

У цьому розділі ми даємо задачі «на виріст» -їх цілком можуть брати і досліджувати, наприклад, члени Малої Академії Наук (МАН), які часто скаржаться на труднощі вибору тематики.

ЗАДАЧА III-1. Оцінити максимальний добуток густини матеріалу на товщину вітрила сонячного вітрильника, при якому сила сонячного тиску буде переважати силу гравітаційного притягання до Сонця. Оцінити прискорення вітрильника на різних відстанях від Сонця (від Землі до Нептуна) при реалістичних параметрах вітрильника. За можливості, спрогнозуйте закон віддалення від Сонця в часі.

Підказка. Тиск світла на дзеркальну поверхню (подвоєний імпульс фотонів, які попадають на одиницю площі поверхні за одиницю часу), рівний подвоєній освітленості (у Ваттах на квадратний метр), поділений на швидкість світла:

$$p = \left(\frac{2}{c}\right) \cdot \sigma T^4 \cdot 4\pi R_c^2 \cdot \frac{1}{4\pi R_o^2} = \left(\frac{2}{c}\right) \sigma T^4 R_c^2 \frac{1}{R_o^2}.$$

«Гравітаційний тиск притягання» тонкої плівки одиничної площі і товщини d до Сонця рівний $p(\text{gravit}) = G \cdot \rho d \cdot 1 \cdot \frac{M}{R_o^2}$

Вирівнювання тисків означає

$$G \cdot \rho d \cdot 1 \cdot \frac{M}{R_o^2} = \left(\frac{2}{c}\right) \sigma T^4 R_c^2 \frac{1}{R_o^2},$$

тобто $\rho d = \frac{2\sigma T^4 R_c^2}{cGM}$. Якщо $\rho d < \frac{2\sigma T^4 R_c^2}{cGM}$, сонячний вітрильник буде прискорюватись від Сонця. Читачі можуть спробувати змодельовати його рух із допомогою другого закону Ньютона.

ЗАДАЧА III-2. Припустимо, що існують надсвітлові частинки – тахіони, не порушуючи при цьому перетворень Лоренца в теорії відносності [5-6]. Нехай одна із них летить вздовж осі X зі швидкістю $2 \cdot c$ (c – швидкість світла у вакуумі), а друга – проти осі X з такою ж по модулю швидкістю. Знайдіть

швидкість першої частинки відносно другої. Спробуйте узагальнити цей результат.

Підказка. Відносна швидкість одного тахіона відносно іншого повинна бути досвітловою, тобто для всіх тахіонів всі досвітлові частинки – це тахіони, а такі ж тахіони - це нормальні досвітлові частинки. Перетворення Лоренца і закон релятивістського додавання швидкостей виконується і для досвітлових частинок, і для тахіонів.

ЗАДАЧА III-3. *Із Місяця піднімається і летить на Землю космічний корабель масою 1 т. Оцінити необхідний для цього запас пального. Ракету вважати одноступінчастою.*

Підказки.

III-3.1. Як мінімум, необхідно від місяця долетіти до точки, де притягання Землі стає більше за притягання Місяця.

III-3.2. Пальне зазвичай витрачається швидко – для розгону – тут треба узагальнити формулу Ціолковського на підйом у практично однорідному полі тяжіння місяця.

ЗАДАЧА III-4. *Оцінити, скільки механічної енергії переходить в тепло із-за приливів за один оберт Місяця навколо Землі (точніше, за один оберт Місяця і Землі навколо їх спільного центру).*

Підказка. Радимо почати з https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_force

ЗАДАЧА III-5. *«Чому хмари не падають?»*

Підказки.

III-5.1. Оцінити швидкість падіння крапель дощу для радіусів крапель 2 мм, 1 мм, 0.1 мм, 0.01 мм. (Рекомендуємо подивитись у Вікіпедії чи інших джерелах тему «Закон Стокса»)

III-5.2. Оцінити час випаровування краплини радіусом 2 мм, 1 мм, 0.1 мм, 0.01 мм у повітрі за нормальних умов при відносній вологості повітря 99%, 90%, 50%.

III-5.3. Оцінити, краплини яких радіусів не будуть падати на землю у конвекційному потоці повітря, що піднімається в полі градієнта температур зі швидкістю 5 м/с.

ЗАДАЧА III-6. Є відома фізична демонстрація, у якій кулька від пінг-понгу утримується у струмені повітря, що виходить із пилососа в інверсному режимі. При цьому кулька коливається.

(1) Пояснити цей ефект.

(2) Оцінити період коливання кульки у струмені повітря.

Підказки. Будемо розрізняти два типи коливань: (1) горизонтальні відносно центру струменя повітря і (2) вертикальні коливання вздовж струменя, який конусоподібно розширюється з висотою.

III.-6.1. Припустимо, що струмінь повітря має циліндричну форму і в ньому швидкість повітря зменшується з відстанню до осі за лінійним законом. Розглянемо мале відхилення кульки від центральної осі струменя. Тоді одна сторона кульки попадає далі від центру - в область меншої швидкості (а тому, внаслідок закону Бернуллі, більшого тиску), а протилежна сторона – ближче до центру - в область більшої швидкості (а тому меншого тиску). Тому виникає повертаюча сила, приблизно пропорційна відхиленню і направлена проти нього, що і викликає гармонічні горизонтальні коливання.

III.-6.2. Врахуємо, що струмінь повітря розходить угору. Будемо вважати струмінь конусом, радіус якого збільшується лінійно з висотою. Оскільки повний потік – це добуток площі перерізу на середню швидкість у цьому перерізі, то це значить, що з висотою швидкість потоку зменшується. А значить, з висотою зменшується і підйомна сила $F = S \rho V^2 \approx \pi R^2 \rho V^2$. Тому при підйомі кульки вгору вище рівноваги рівнодіюча сила тяжіння і підйомної сили направлена вниз, а при опусканні – вгору, тобто знову ж таки маємо повертаючу силу.

III-6.3. Далі приводимо основні наближені формули для обох типів коливань.

$$(1) \quad V(x) = V_{\max} \left(1 - \frac{|x|}{L} \right),$$

$$V^2(x) = V_{\max}^2 \left(1 - 2 \frac{|x|}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) \approx V_{\max}^2 \left(1 - 2 \frac{|x|}{L} \right),$$

$$p(R+x) + \frac{\rho}{2} V^2(R+x) = p_0 + \frac{\rho}{2} V_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$p(R+x) = p_0 + \frac{\rho}{2} (V_{\max}^2 - V^2(R+x)) \approx p_0 + \frac{\rho}{2} \frac{2V_{\max}^2}{H} \cdot (R+x)$$

$$p(R-x) = p_0 + \frac{\rho}{2} (V_{\max}^2 - V^2(R-x)) \approx p_0 + \frac{\rho}{2} \frac{2V_{\max}^2}{H} \cdot (R-x)$$

$$p(R+x) - p(R-x) \approx \frac{2\rho V_{\max}^2}{H} \cdot x,$$

$$F_x = -S \cdot (p(R+x) - p(R-x)) \approx \pi R^2 \cdot (p(R+x) - p(R-x)) \approx -\frac{2\pi R^2 \rho V_{\max}^2}{H} \cdot x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2\pi R^2 \rho V_{\max}^2}{mH} \cdot x, \quad \omega = RV_{\max} \sqrt{\frac{2\pi\rho}{mH}}, \quad T = \frac{2\pi}{RV_{\max}} \sqrt{\frac{mH}{2\pi\rho}}$$

III-6.4.

$$V = \frac{J}{\pi r^2} = \frac{J}{\pi h^2 tg^2 \alpha}$$

$$mg = \rho V_{eq}^2 \pi R_{ball}^2 = \rho \pi R_{ball}^2 \left(\frac{J}{\pi h_{eq}^2 tg^2 \alpha} \right)^2 \Rightarrow h_{eq} = \left(\frac{\pi \rho}{mg} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{R_{ball} J}{\pi tg^2 \alpha}}$$

$$ma = \rho \pi R_{ball}^2 \left(\frac{J}{\pi h^2 tg^2 \alpha} \right)^2 - mg = \rho \pi R_{ball}^2 \left(\frac{J}{\pi h^2 tg^2 \alpha} \right)^2 - \rho \pi R_{ball}^2 \left(\frac{J}{\pi h_{eq}^2 tg^2 \alpha} \right)^2 \approx$$

$$\approx -\frac{4\rho \pi R_{ball}^2}{h_{eq}^5} \left(\frac{J}{\pi tg^2 \alpha} \right)^2 (h - h_{eq})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4\rho \pi R_{ball}^2}{mh_{eq}^5} \left(\frac{J}{\pi tg^2 \alpha} \right)^2} = \left(\frac{JR_{ball}}{\pi h_{eq}^2 tg^2 \alpha} \right) \sqrt{\frac{4\pi\rho}{mh_{eq}}}$$

ЗАДАЧА III-7. Критерій одновимірного розтікання в канавках [7, 8].

Розглянемо малу кількість рідини на поверхні полікристалічного твердого тіла. Виходи меж зерен на поверхню (особливо після травлення) формують канавки (англійською – grooves). Питання – як веде себе мала краплина, яка не

покриває все зерно, а має розміри, співмірні з канавкою? Як залежить форма краплини від кута розхилу канавки?

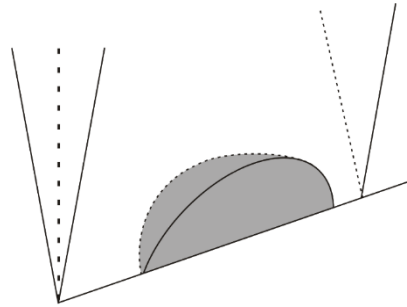


Рис. 3.7.1. Краплина в канавці.

Підказки.

ІІІ-7.1. Для спрощення математичних перетворень уявіть краплину у вигляді обрізаного сегмента довжиною H з поперечним перерізом у вигляді рівнобедреного криволінійного трикутника, у якого центральний (нижній) кут 2α (кут розхилу канавки), бокові сторони ρ , кути при основі рівні крайовому куту змочування θ ($\cos \theta = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}}$)

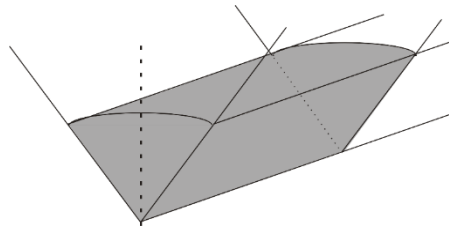


Рис. 3.7.2. Спрощена модельна схема краплини в канавці.

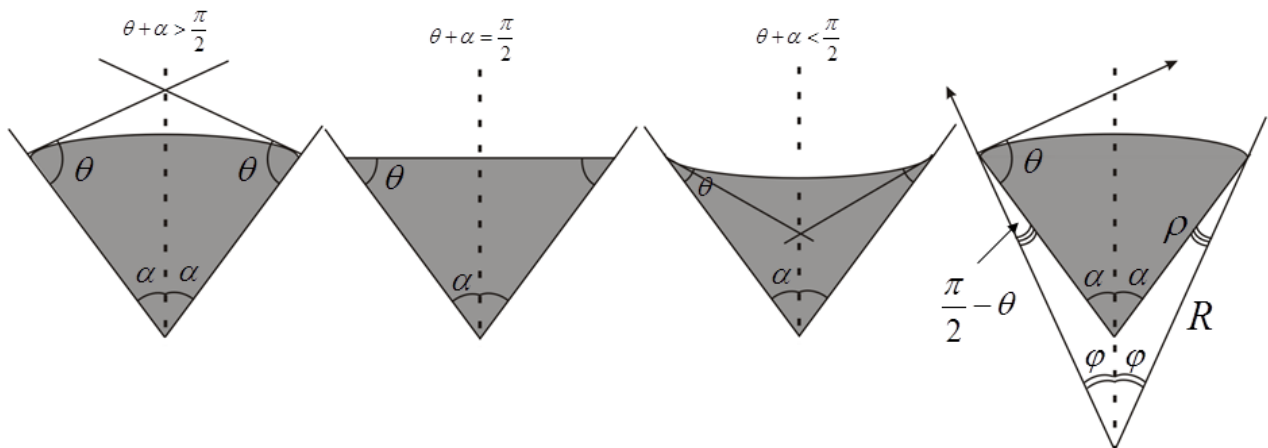


Рис. 3.7.3. Три варіанти морфології краплини в канавці. Проміжний варіант відповідає плоскому меніску.

III-7-2. Знайдіть, за яких умов можна очікувати необмеженого розтікання вздовж канавки

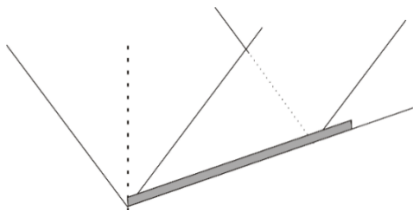


Рис. 3.7.4. Одновимірне розтікання вздовж канавки.

III-7.3. Пропонуємо бажаючим експериментально перевірити відповідь на попереднє питання.

Пропонуємо також самостійно розглянути ще дві нестандартні задачі:

ЗАДАЧА III-8. Чому і за якої умови тонка цівка води перетворюється на краплини?

Підказка. Погугліть в інтернеті ключові слова «Нестійкість Релея-Плато» («Plateau–Rayleigh instability»).

ЗАДАЧА III-9. Як поведе себе краплина на межі двох поверхонь із різними поверхневими натягами?

Підказка. Погугліть в інтернеті ключові слова «ефект Марангоні» («Marangoni effect»). Це не зовсім те, але в тому напрямі. Почніть із того, що запитайте себе, що енергетично вигідно зробити краплині.

ВИСНОВКИ

Розділення приведених у цій брошурі задач-оцінок на три рівня, звичайно, умовне. Сподіваюсь, наші розв'язки деяких із цих задач на різних рівнях показують: навіть коли задача нагадує якусь нехитру простеньку мелодію (дружній шарж реального процесу), це ще не значить, що її не можна розвинути і варіювати до рівня симфонії.

Якщо ця брошура викличе інтерес колег-викладачів, студентів, членів Малої академії наук, то ми спробуємо це видання продовжити. Прошу свої міркування, критику, побажання направляти автору на адресу amgusak@ukr.net

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Капица П. Л. Научные труды. Наука и современное общество / под. ред. П.Е. Рубинина. – М.: Наука, 1998. – с. 475-495.
2. Капица П. Л. Физические задачи. – М.: Знание, 1966.
3. Сіденко М. О., Сіденко О. М. Задачі-оцінки. – Харків: Основа, 2007.
4. Tu K. N., Gusak A. M. Kinetics in nanoscale materials. – John Wiley & Sons, 2014.
5. Bilaniuk O. M. Tachyons // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2009. – Т. 196. – №. 1. – P. 012021.
6. Bilaniuk O. M., Sudarshan E. G., DeWitt B., Sachs M., Yoshikawa S., Newcomb W. A., & Brown S. L. More about tachyons // Phys. Today, 1969. – Vol. 22. – P. 47-52.
7. Hodaj F., Gusak A. M., & Liashenko O. Possibility of a shape phase transition for solidification of tin at scallop-like surfaces of Cu₆Sn₅ // Philosophical magazine letters, 2013. – Vol. 93(3). – P. 166-173.
8. Гусак А.М., Сторожук Н.В. Сюрпризи під час вивчення капілярний явищ // Науково-методичний журнал «Фізика в школах України», 2019. – 3-4 (367-368). – С.28-34