

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

*В. І. Гук*

**СТОХАСТИЧНІ МЕТОДИ ІМІТАЦІЙНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ**

**Методичний посібник**

*Для студентів спеціальності 6.050102 “Економічна кібернетика”  
освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”*

Черкаси  
2008

Гук В.І. Стохастичні методи імітаційного моделювання економічних систем: Методичний посібник: Для студентів спеціальності 6.050102 “Економічна кібернетика” освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр". – Черкаси: Східноєвропейський університет економіки і менеджменту, 2008. – 25 с. – [Укр. мова.]

Рецензент С.М. Одокієнко, к.т.н., доцент кафедри загальнотехнічних наук Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Відповідальна за випуск  
*М. А. Меркотан*

Затверджено Методичною радою СУЕМ як методичний посібник для студентів спеціальності 6.050102 “Економічна кібернетика” освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр", протокол № 9/9 від 10.09.2008

© Східноєвропейський університет  
економіки і менеджменту, 2008

## **ВСТУП**

Імітаційне моделювання — визнаний науковий метод вивчення складних соціально-економічних і виробничих систем. Діапазон застосування імітаційного моделювання економічних процесів за допомогою сучасних комп'ютерів надзвичайно широкий — від окремих напрямків та форм мікроекономічної діяльності окремих підприємств, наприклад, в задачах управління запасами і планування виробництва та логістичної діяльності, до моделювання макроекономічних процесів в економіці країни. Останніми роками роль і значення імітаційного підходу при створенні ефективних автоматизованих систем управління підприємствами зі складними технологічними процесами, а також при прогнозуванні та моделюванні управлінських рішень при вирішенні масштабних та складних народногосподарських проблем дедалі зростають.

В методичному посібнику розглянуто стохастичний підхід до створення імітаційної моделі. Характерною рисою такого підходу є відмова від описання системи за допомогою математичних рівнянь та використання безпосереднього моделювання окремих процесів за допомогою стандартних комп'ютерних генераторів випадкових чисел. Стохастичний підхід дозволяє створювати комп'ютерні моделі достатньо складних систем, які подекуди неможливо описати за допомогою математичних рівнянь. Одним з найбільш поширених класів таких систем є, так звані, системи масового обслуговування, тобто системи, орієнтовані на обслуговування однотипних заявок. Ці заявки можуть поступати в систему в будь-які випадкові моменти часу і обслуговуються в системі на протязі певних проміжків часу, які теж вважаються випадковими. До систем масового обслуговування можна віднести практично любе економічне підприємство, орієнтоване на обслуговування клієнтів або виконання певних замовлень.

Освоєння студентами навичок стохастичного моделювання систем масового обслуговування дозволить створювати імітаційні моделі складних економічних систем, проводити машинну імітацію реальних економічних процесів, оцінювати ті чи інші важливі для практики параметри таких систем.

## **1. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ**

### **Змістовний модуль 1. ОСНОВИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Тема 1. Системний підхід до моделювання економічних систем.** Поняття системи та моделі. Види та особливості моделей. Математична модель економічної системи. Класифікація математичних моделей та їх характерні особливості. Поняття імітаційного моделювання. Особливості імітаційного моделювання економічних систем. Основні економіко-математичні задачі, що розв'язуються засобами імітаційного моделювання.

**Тема 2. Загальна структура математичної моделі економічної системи.** Види змінних та параметрів, що використовуються в математичній моделі.

Складні математичні моделі. Композиція та декомпозиція моделей за допомогою входів та виходів. Поняття керування системою. Ціль керування. Математичний опис цілей функціонування системи. Поняття цільової функції. Види керування. Поняття негативного зворотнього зв'язку. Класифікація економіко-математичних моделей. Моделі без керування та їх особливості. Оптимізаційні моделі та їх особливості. Ігрові моделі та їх особливості. Імітаційні моделі та їх особливості. Класифікація моделей керування підприємством за сферами їх застосування.

*Література:* [1, с. 3 – 11]

## **Змістовний модуль 2. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

### **Тема 3. Випадкова величина та її математичні характеристики.**

Поняття випадкової події та випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Статистичне визначення ймовірності події за допомогою частоти її з'явлення. Властивості ймовірності. Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу та функція розподілу. Щільність ймовірності випадкової величини. Числові характеристики випадкової величини. Формула для знаходження емпіричного значення математичного сподівання. Геометричний зміст математичного сподівання. Формула для знаходження емпіричної дисперсії випадкової величини. Геометричний зміст дисперсії. Поняття середнього квадратичного відхилення. Правило трьох сигм та його геометричний зміст. Коефіцієнт варіації.

### **Тема 4. Дослідження випадкової величини по емпіричним даним.**

Побудова емпіричної гістограми випадкової величини. Основні закони розподілу випадкової величини. Розподіл Пуасона дискретної випадкової величини. Рівномірний, показовий, нормальний та зрізаний нормальний закони розподілу неперервної випадкової величини. Перевірка гіпотези про відповідність експериментальних даних теоретичному закону розподілу. Критерій Колмогорова-Смірнова.

### **Тема 5. Системи випадкових величин та їх характеристики.**

Часткові щільності ймовірності. Умовні щільності ймовірності. Залежність та незалежність випадкових величин. Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції та кореляційна матриця системи випадкових величин. Нормальний закон розподілу системи випадкових величин. Некорельованість та незалежність нормально розподілених випадкових величин. Лінії регресії та еліпси розсіювання системи двох випадкових величин.

*Література:* [1, с. 3 – 11]

### **Змістовний модуль 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН**

#### **Тема 6. Формувальники (генератори) випадкових чисел.**

Способи отримання послідовностей випадкових чисел. Метод середини квадратів для програмної генерації псевдовипадкових чисел. Рівномірна випадкова послідовність чисел РВП  $[0, 1]$ . Властивості псевдовипадкових чисел. Методи перевірки невиродженості послідовності випадкових чисел.

#### **Тема 7. Моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу.**

Стандартний метод генерації дискретно розподілених випадкових величин. Метод оберненої функції для генерування неперервних випадкових величин із заданим законом розподілу. Моделювання послідовності рівномірно розподілених на інтервалі  $[a;b]$  випадкових чисел за допомогою рівномірної випадкової послідовності чисел РВП  $[0, 1]$ . Моделювання послідовності розподілених за показниковим законом випадкових чисел за допомогою рівномірної випадкової послідовності чисел РВП  $[0, 1]$ . Генерування нормально розподілених випадкових величин. Перевірка гіпотези про закон розподілу послідовності випадкових чисел за допомогою критерію Колмогорова-Смирнова.

*Література:* [1, с. 3 – 11]

### **Змістовний модуль 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ**

#### **Тема 8. Поняття системи масового обслуговування.**

Абсолютна та відносна пропускна здатність системи масового обслуговування. Вхідний потік заявок та його властивості. Поняття найпростішого або пуассонівського потоку заявок. Показниковий розподіл випадкових інтервалів між послідовними заявками в найпростішому потоці. Час обслуговування заявки в системі масового обслуговування. Можливі закони розподілу часу обслуговування. Математична форма запису показникового закону розподілу часу обслуговування.

**Тема 9. Марковський випадковий процес, його характерні властивості та особливості застосування для опису роботи систем масового обслуговування.** Граф станів системи. Система масового обслуговування з відмовами. Граф станів такої системи та опис роботи за допомогою системи диференціальних рівнянь Ерланга. Поняття стаціонарного процесу. Опис стаціонарного режиму роботи системи масового обслуговування за допомогою системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Ерланга для обчислення стаціонарних ймовірностей станів системи масового обслуговування.

**Тема 10. Дослідження роботи системи масового обслуговування за допомогою імітаційного моделювання.** Принципи моделювання окремих подій. Метод послідовної проводки заявок. Часова діаграма станів системи масового обслуговування. Імітаційне моделювання роботи атомобільної заправочної станції. Імітаційне моделювання системи управління запасами промислового підприємства.

*Література:* [1, с. 3 – 11]

## **Змістовний модуль 5. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Тема 11. Спеціалізовані комп'ютерні системи імітаційного моделювання.** Історичний огляд основних систем комп'ютерного моделювання. Принципи моделювання в системі **GPSS World**. Імітаційне моделювання в середовищі **AnyLogic**. Імітаційне моделювання за допомогою об'єктно-орієнтованої системи **Pilgrim**.

*Література:* [1, с. 3 – 11]

## **2. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ**

### **2.1. Тематика лекцій**

**Змістовний модуль 1.** Основи економіко-математичного моделювання

Тема 1. Системний підхід до моделювання економічних систем.

Тема 2. Загальна структура математичної моделі економічної системи.

**Змістовний модуль 2.** Основні відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики

Тема 3. Випадкова величина та її математичні характеристики.

Тема 4. Дослідження випадкової величини по емпіричним даним.

Тема 5. Системи випадкових величин та їх характеристики.

**Змістовний модуль 3.** Математичне моделювання випадкових величин

Тема 6. Формувальники (генератори) випадкових чисел.

Тема 7. Моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу.

**Змістовний модуль 4.** Елементи теорії масового обслуговування

Тема 8. Поняття системи масового обслуговування.

Тема 9. Марковський випадковий процес, його характерні властивості та особливості застосування для опису роботи систем масового обслуговування.

Тема 10. Дослідження роботи системи масового обслуговування за допомогою імітаційного моделювання.

**Змістовний модуль 5.** Основні відомості про комп'ютерні системи імітаційного моделювання

Тема 11. Спеціалізовані комп'ютерні системи імітаційного моделювання.

## 2.2. Завдання для лабораторних робіт

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу.

**Завдання.** За допомогою генератора випадкових чисел MS EXCEL сформувати масив з 1000 значень випадкової величини  $Z$ , рівномірно розподіленої на інтервалі  $[0;1]$ . Використовуючи одержані значення по методу зворотної функції розподілу сформувати масив з 1000 значень, розподілених за заданим згідно варіанту роботи законом розподілу. Знайти статистичну оцінку числових характеристик одержаної вибірки. Побудувати гістограму і перевірити гіпотезу про відповідність закону розподілу вибірки заданому закону розподілу.

Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин наведені в Таблиці 1 згідно з варіантами роботи.

Таблиця 1.

#### Варіанти законів розподілу.

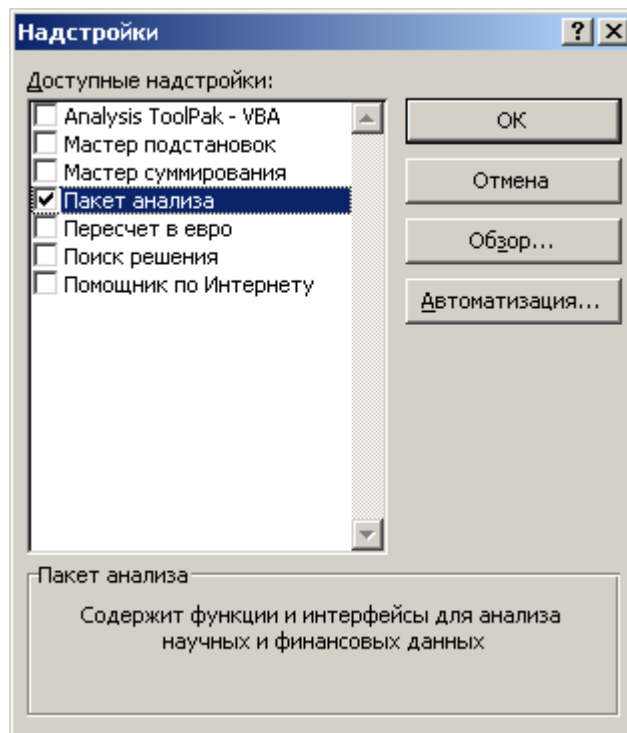
Номер варіанту	Закон розподілу	Параметри закону розподілу	
1	Показниковий	$\lambda=1$	
2	Показниковий	$\lambda=2$	
3	Показниковий	$\lambda=3$	
4	Показниковий	$\lambda=4$	
5	Показниковий	$\lambda=5$	
6	Показниковий	$\lambda=6$	
7	Показниковий	$\lambda=7$	
8	Показниковий	$\lambda=8$	
9	Показниковий	$\lambda=9$	
10	Показниковий	$\lambda=10$	
11	Рівномірний	$a=5$	$b=15$
12	Рівномірний	$a=15$	$b=75$
13	Рівномірний	$a=60$	$b=100$
14	Рівномірний	$a=35$	$b=105$
15	Рівномірний	$a=20$	$b=50$
16	Рівномірний	$a=37$	$b=77$
17	Рівномірний	$a=65$	$b=75$
18	Рівномірний	$a=40$	$b=100$
19	Рівномірний	$a=110$	$b=220$
20	Рівномірний	$a=45$	$b=95$
21	Нормальний	$m_x=100$	$\sigma_x=10$

22	Нормальный	$m_x=150$	$\sigma_x=8$
23	Нормальный	$m_x=170$	$\sigma_x=7$
24	Нормальный	$m_x=180$	$\sigma_x=5$
25	Нормальный	$m_x=130$	$\sigma_x=9$
26	Нормальный	$m_x=140$	$\sigma_x=10$
27	Нормальный	$m_x=120$	$\sigma_x=7$
28	Нормальный	$m_x=10$	$\sigma_x=1$
29	Нормальный	$m_x=10$	$\sigma_x=2$
30	Нормальный	$m_x=10$	$\sigma_x=3$

### Порядок виконання роботи.

Проведення імітаційних експериментів в середовищі Microsoft EXCEL можна здійснити шляхом використання інструменту "*Генератор випадкових чисел*" доповнення "*Аналіз даних*" (*Analysis ToolPak*).

Застосування інструменту "*Генератор випадкових чисел*", як і більшості використовуваних в цій роботі функцій, **вимагає установки надбудови "Пакет аналізу"**. Для цього в меню "*Сервіс*" потрібно вибрати пункт "*Надбудови*" і встановити у віконці "*Доступні надбудови*" прапорець напроти надбудови "*Пакет аналізу*" (Мал.1).



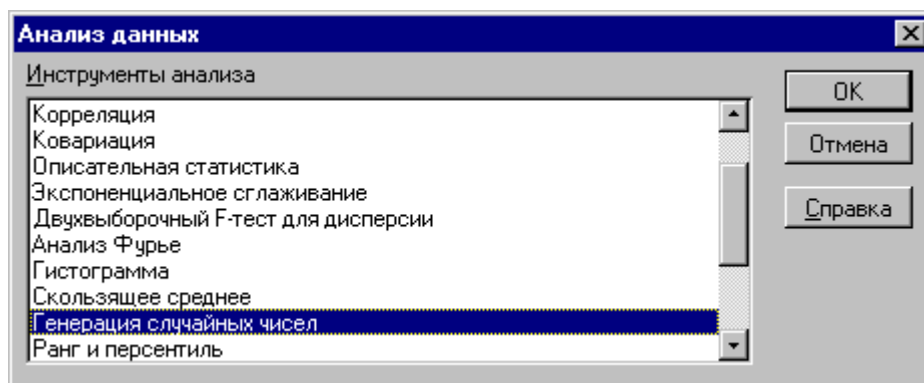
Мал.1. Підключення надбудови "*Пакет аналізу*".

Встановіть курсор в комірку A1

Виберіть в головному меню тему "*Сервіс*" пункт "*Аналіз даних*". Результатом виконання цих дій буде поява діалогового вікна "*Аналіз даних*", що містить в собі список інструментів аналізу.

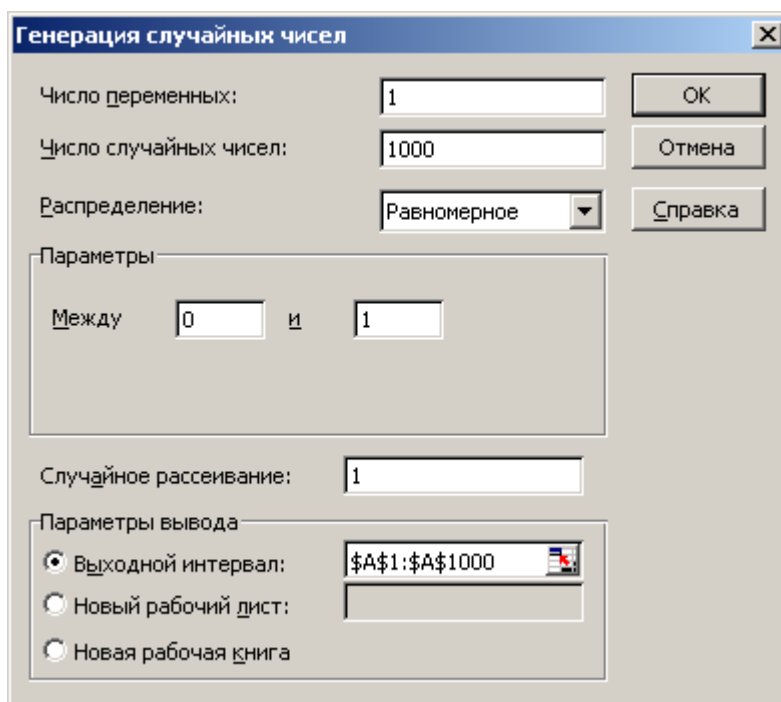


Виберіть із списку "*Інструменти аналізу*" пункт "*Генерація випадкових чисел*" і натисніть кнопку "ОК" (Мал. 2.).



Мал.2. Вибір пункту "*Генерація випадкових чисел*"

На екрані з'явиться діалогове вікно "*Генерація випадкових чисел*". Укажіть в списку "*Розподіл*" необхідний тип - "*Рівномірний*". Заповніть інші поля вікна, що змінилося, згідно Мал. 3 і натисніть кнопку "ОК". В полі "*Випадкове розсіяння*" повинен бути указаний номер вашого варіанту роботи.



Мал.3. Заповнення полів вікна "*Генерація випадкових чисел*"

Результатом буде заповнення блоку комірок A1-A1000 випадковими значеннями, що згенерувалися за допомогою інструменту "*Генерація випадкових чисел*".

Приведемо необхідні пояснення.

Першим заповнюваним аргументом діалогового вікна "*Генерація випадкових чисел*" є поле "*Число змінних*". Воно задає кількість колонок Excel, в яких будуть розміщуватися

випадкові числа, які згенеруються відповідно до вибраного закону розподілу. В нашому прикладі поле "**Число змінних**" повинно містити одиницю (1), оскільки раніше ми відвели під значення змінної Z (рівномірно розподілена на відрізку [0;1] випадкова величина Z) в Excel одну колонку - "A". У випадку, якщо вказується число більше 1, випадкові величини будуть розміщені у відповідній кількості сусідніх колонок, починаючи з активної комірки. Якщо це число не введено, то всі колонки у вихідному діапазоні будуть заповнені згенерованими числами.

Наступним обов'язковим аргументом для заповнення є вміст поля "**Число випадкових чисел**" (тобто - кількість реалізацій або імітацій випадкової величини). Згідно умовам лабораторної роботи воно повинне дорівнювати 1000. При цьому Excel автоматично підраховує необхідну кількість комірок для зберігання цих чисел.

Необхідний вид розподілу задається шляхом відповідного вибору із списку "**Розподіли**". Можуть бути одержані 7 найбільш поширених в практичному аналізі типів розподілів, кожний з яких характеризується власними параметрами. Вибраний тип розподілу визначає зовнішній вигляд діалогового вікна. В даному прикладі вибір типу розподілу "**Рівномірний**" спричинив за собою появу додаткових параметрів - меж інтервалу "a" і "b", заданих згідно варіанту роботи. Ці аргументи можуть бути задані тільки у вигляді констант, використання адрес комірок і власних імен тут не припускається!

Задання конкретного числового значення аргументу "**Випадкове розсіювання**" дозволяє при повторних запусках генератора отримувати ті ж значення випадкових величин, що і при першому запуску генератора. Таким чином одну і ту ж генеральну сукупність випадкових чисел можна одержати кілька разів, що спрощує відладку даних. У разі якщо цей аргумент не заданий (рівний 0), при кожному подальшому запуску генератора буде формуватися нова генеральна сукупність. В нашому прикладі цей аргумент заданий рівним номеру варіанту N=1, що дозволить оперувати з однією і тією ж генеральною сукупністю для кожного окремого варіанту і уникнути постійних перерахунків даних.

Останній аргумент діалогового вікна "**Генерація випадкових чисел**" - "**Параметри виводу**" визначає місце розташування одержаних результатів. Місце виводу задається шляхом встановлення відповідного прапорця. При цьому можна вибрати три варіанти розміщення:

1 вихідний блок комірок на поточному листі - введіть посилання на ліву верхню комірку вихідного діапазону- A1, при цьому його розмір буде автоматично підраховано і у разі можливого накладення значень, що генеруються, на вже наявні дані на екран буде виведено застережливе повідомлення;

2 новий робочий лист - в робочій книзі буде відкритий новий лист, що міститиме результати генерації випадкових величин, починаючи з комірки A1;

3 нова робоча книга - буде відкрита нова книга з результатами імітації на першому листі.

Для моделювання випадкової величини з показовим законом розподілу запишемо функцію розподілу у вигляді

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Застосувавши метод зворотної функції отримаємо

$$z = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

звідки знаходимо x

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z)$$

Застосовуючи цю формулу для знаходження нового стовпця значень випадкової величини, заповнюємо комірки B1:B1000.

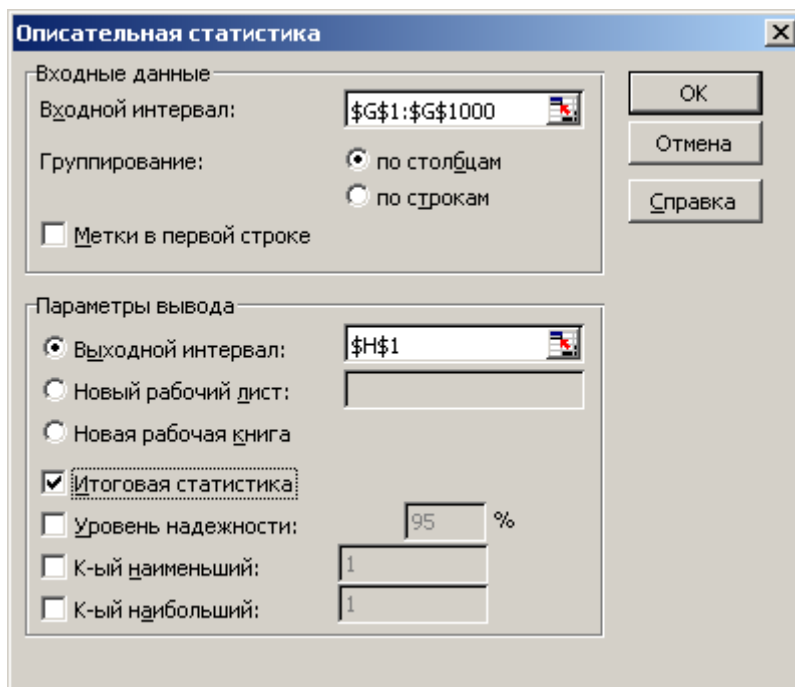
Для знаходження статистичної оцінки числових характеристик одержаної вибірки скористаємося інструментом "*Описова статистика*", який автоматично обчислює найбільш відомі в практичному аналізі характеристики розподілів. При цьому значення числових характеристик можуть бути підраховані відразу для декількох досліджуваних змінних (тобто для декількох стовбчиків).

Визначимо параметри описової статистики для змінної  $Z$ . Для цього необхідно виконати наступні кроки.

1. Виберіть в головному меню тему "*Сервіс*" та пункт "*Аналіз даних*". Результатом виконання цих дій буде поява діалогового вікна "*Аналіз даних*", що містить список інструментів аналізу.

2. Виберіть із списку "Інструменти аналізу" пункт "*Описова статистика*" і натисніть кнопку "*ОК*". Результатом буде поява вікна діалогу інструменту "*Описова статистика*".

Заповніть поля діалогового вікна, як показано на Мал.4. і натисніть кнопку "*ОК*".



Мал.4. Заповнення полів інструменту "*Описова статистика*"

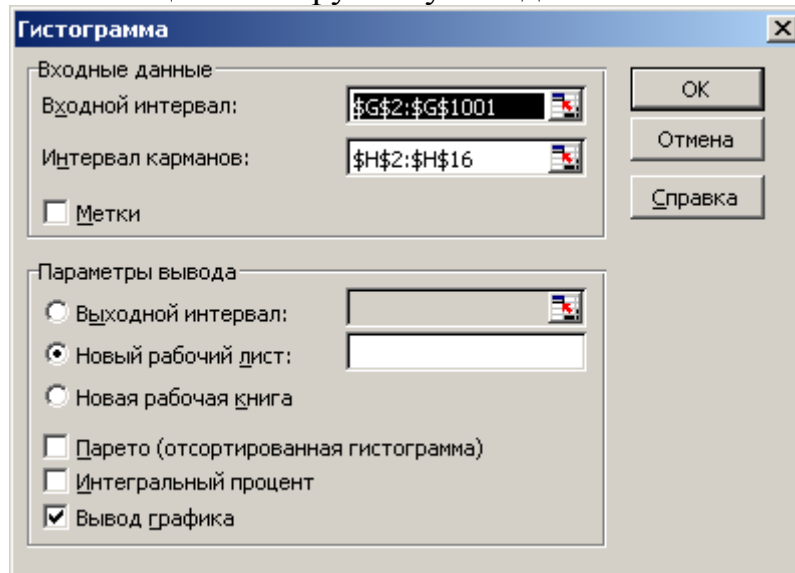
Результатом виконання наведених дій буде формування таблиці, що містить обчислені емпіричні оцінки числових характеристик сукупності випадкових реалізацій величини  $Z$ .

<i>Столбец1</i>	
Среднее	0.097628371
Стандартная ошибка	0.002886597
Медиана	0.072351191
Мода	0.044508997
Стандартное отклонение	0.091282221
Дисперсия выборки	0.008332444
Эксцесс	3.011807189
Асимметричность	1.616315326

Интервал	0.564102015
Минимум	0.000256685
Максимум	0.5643587
Сумма	97.6283709
Счет	1000

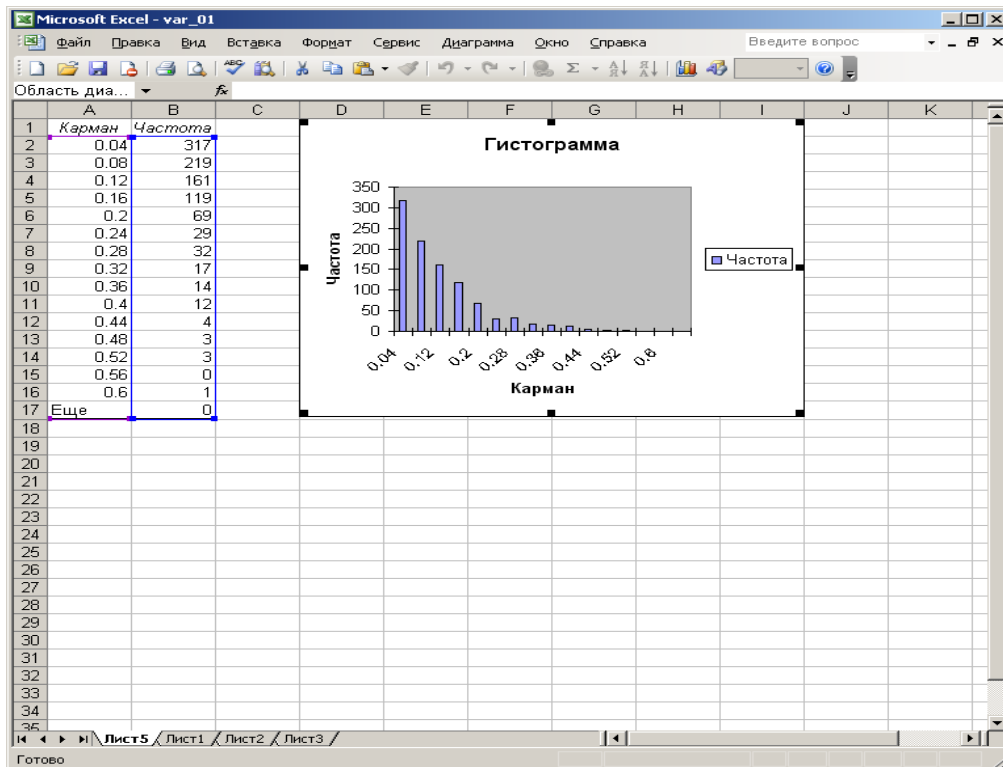
Тут під середнім значенням розуміється оцінка математичного сподівання випадкової величини  $Z$ , під стандартним відхиленням розуміється оцінка середнього квадратичного відхилення, а під мінімумом і максимумом - відповідно мінімальне і максимальне значення випадкової величини.

Для побудови гістограми розподілу випадкової величини  $Z$  розіб'ємо інтервал зміни випадкової величини  $[0,5641020; 0,6]$  на 15 підінтервалів, які в Excel називаються кишнями. Межі цих кишень запишемо в окремий стовпець таблиці. Тепер можна скористатися інструментом "Гістограма" надбудови "Аналіз даних". Діалогове вікно цього інструменту наведене на Мал.5:



Мал.5. Параметры построения гистограммы.

В поле "**Вхідний інтервал**" вказується стовпець таблиці, у якому розташовані значення випадкової величини  $Z$ , а в полі "**Інтервал кишень**" вказуються комірки, в які заздалегідь повинні бути введені межі підінтервалів побудови гістограми. В параметрах виводу вказано, що вивід графіка потрібно здійснити на новий робочий лист. Після натиснення кнопки "**ОК**" отримуємо гістограму наступного вигляду (Мал.6.).



Мал.6. Гістограма розподілу випадкової величини  $Z$ .

**Висновок.** З малюнка видно, що гістограма випадкової величини має вигляд характерний для показового закону розподілу. Для перевірки гіпотези про показовий закон розподілу слід скористатися критерієм Колмогорова-Смирнова.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

### Моделювання випадкової величини з довільним законом розподілу.

**Завдання.** По заданій функції розподілу з використанням датчика випадкових чисел рівномірно розподілених на інтервалі  $[0;1]$  побудувати вибірку з 1000 значень випадкової величини  $X$ , розподіл якої відповідає заданому. Знайти емпіричні значення числових характеристик одержаної вибірки значень випадкової величини (математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, максимальне і мінімальне значення). Побудувати гістограму і порівняти з початковою функцією розподілу.

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

#### Імітаційне моделювання роботи системи масового обслуговування методом послідовної проводки заявок.

**Завдання.** Розробити модель роботи перукарні при наступних припущеннях.

1. В перукарні 1 зал (чоловічий)
2. Працюють 2 майстри
3. Час роботи з 8.00 до 20.00 без перерви на обід
4. Випадкові часові інтервали між приходами двох послідовних відвідувачів описуються показовим законом розподілу з інтенсивностями  $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}$ , які постійні в межах кожної години. Значення інтенсивностей задані в таблиці варіантів. Прихід відвідувачів закінчується за 30 мін. до закриття.
5. У випадку, якщо обидва майстри зайняті, відвідувач займає чергу. Час очікування і кількість місць в черзі необмежено. Дисципліна черзі звичайна – «Раніше прийшов - раніше обслужився».
6. Обслуговування наступного відвідувача починається через 2 мін. після закінчення обслуговування попереднього відвідувача. Це технологічна перерва на прибирання і дезинфекції. У разі простою майстрів при приході чергового клієнта майстра працюють по черзі.
7. Закон розподілу часу обслуговування клієнта кожним майстром задається згідно варіанту.
8. Використовуючи метод поетапної проводки заявок вирахувати моменти приходу клієнтів, визначити який майстер і на протязі якого часу буде їх обслуговувати, та чи прийдеться чекати в черзі на обслуговування. Побудувати часову діаграму роботи перукарні протягом одного робочого дня. На підставі аналізу часової діаграми визначити наступні характеристики:
  - Кількість обслужених клієнтів за день.
  - Час простою кожного з майстрів.
  - Загальні час відсутності клієнтів в парикмахерській.
  - Максимальну довжину черги.
  - Средню довжину черги.
  - Средній час очікування клієнта в черзі.
  - Максимальний час очікування клієнта в черзі.

Варіанти завдань наведені в таблиці 2.

#### Порядок виконання роботи:

Будемо виконувати варіант N=3. Для цього варіанту задані наступні значення інтенсивностей потоку заявок, які визначають середній інтервал між приходом клієнтів протягом кожної години роботи перукарні:

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_1=30 & \lambda_2=15 & \lambda_3=8 & \lambda_4=10 & \lambda_5=8 & \lambda_6=9 \\ \lambda_7=9 & \lambda_8=15 & \lambda_9=15 & \lambda_{10}=6 & \lambda_{11}=20 & \lambda_{12}=30 \end{array}$$

Запишемо ці дані в перший рядок таблиці Excel і для кожного стовпця згенеруємо випадкові числа, що задають часові інтервали між моментами приходу відвідувачів. Згідно властивостей найпростішого потоку значення випадкової величини  $\tau$  підкоряються закону розподілу Пуассона із заданим параметром  $\lambda$ .

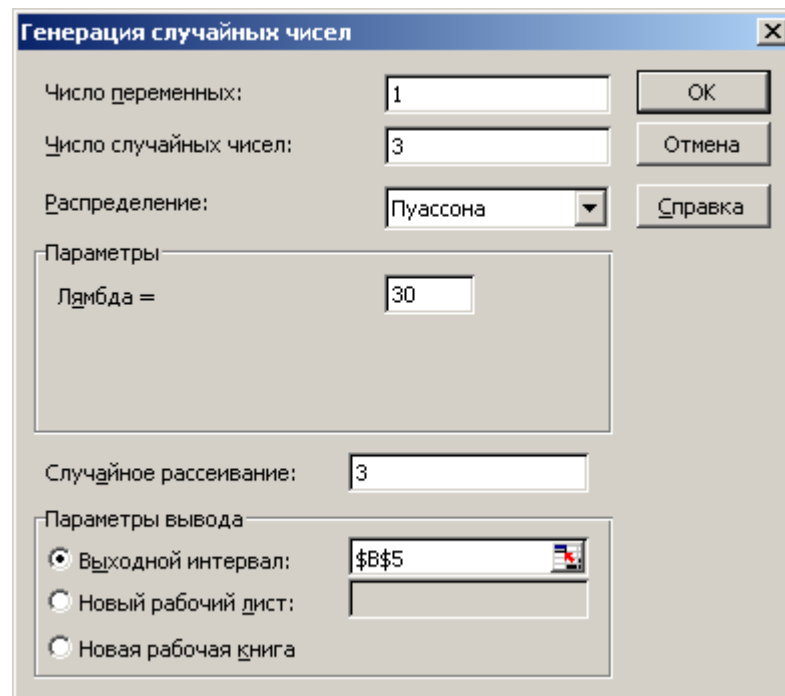
## Варіанти завдань до лабораторної роботи № 3

Номер варіанту	Інтенсивність заявок $\lambda$ [1/хв]												Час обслуговування		
	1-а година	2-а година	3-я година	4-а година	5-а година	6-а година	7-а година	8-а година	9-а година	10-а година	11-а година	12-а година			
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$			
1	20	18	10	12	10	8	10	12	15	12	20	30	Рівномірний	$a=14$	$b=30$
2	30	20	15	12	10	9	10	12	13	15	20	25	Пуассона	$\lambda=18$	
3	30	15	8	10	8	9	9	15	15	10	20	30	Нормальний	$m(x)=20$	$\sigma(x)=3$
4	30	20	10	8	7	10	15	15	20	12	20	30	Рівномірний	$a=10$	$b=25$
5	25	18	15	10	8	8	10	15	18	20	20	30	Пуассона	$\lambda=20$	
6	25	20	15	10	5	10	15	20	25	20	20	30	Нормальний	$m(x)=18$	$\sigma(x)=4$
7	20	20	15	15	15	10	15	15	15	20	20	30	Рівномірний	$a=15$	$b=28$
8	20	20	15	15	10	10	12	12	18	18	24	30	Пуассона	$\lambda=22$	
9	20	18	16	14	12	10	10	12	14	20	25	30	Нормальний	$m(x)=17$	$\sigma(x)=5$
10	30	26	22	18	14	10	12	16	20	24	28	30	Нормальний	$m(x)=21$	$\sigma(x)=4$
1	20	18	10	12	10	8	10	12	15	12	20	30	Рівномірний	$a=14$	$\beta=30$
2	30	20	15	12	10	9	10	12	13	15	20	25	Пуассона	$\lambda=18$	
3	30	15	8	10	8	9	9	15	15	10	20	30	Нормальний	$m(x)=20$	$\sigma(\xi)=3$
4	30	20	10	8	7	10	15	15	20	12	20	30	Рівномірний	$a=10$	$\beta=25$
5	25	18	15	10	8	8	10	15	18	20	20	30	Пуассона	$\lambda=20$	
6	25	20	15	10	5	10	15	20	25	20	20	30	Нормальний	$m(x)=18$	$\sigma(\xi)=4$
7	20	20	15	15	15	10	15	15	15	20	20	30	Рівномірний	$a=15$	$\beta=28$
8	20	20	15	15	10	10	12	12	18	18	24	30	Пуассона	$\lambda=22$	
9	20	18	16	14	12	10	10	12	14	20	25	30	Нормальний	$m(x)=17$	$\sigma(\xi)=5$
10	30	26	22	18	14	10	12	16	20	24	28	30	Нормальний	$m(x)=21$	$\sigma(\xi)=4$
1	20	18	10	12	10	8	10	12	15	12	20	30	Рівномірний	$a=14$	$\beta=30$
2	30	20	15	12	10	9	10	12	13	15	20	25	Пуассона	$\lambda=18$	
3	30	15	8	10	8	9	9	15	15	10	20	30	Нормальний	$m(x)=20$	$\sigma(x)=3$
4	30	20	10	8	7	10	15	15	20	12	20	30	Рівномірний	$a=10$	$b=25$
5	25	18	15	10	8	8	10	15	18	20	20	30	Пуассона	$\lambda=20$	
6	25	20	15	10	5	10	15	20	25	20	20	30	Нормальний	$m(x)=18$	$\sigma(x)=4$
7	20	20	15	15	15	10	15	15	15	20	20	30	Рівномірний	$a=15$	$b=28$
8	20	20	15	15	10	10	12	12	18	18	24	30	Пуассона	$\lambda=22$	
9	20	18	16	14	12	10	10	12	14	20	25	30	Нормальний	$m(x)=17$	$\sigma(x)=5$
10	30	26	22	18	14	10	12	16	20	24	28	30	Нормальний	$m(x)=21$	$\sigma(x)=4$

Для генерації випадкових значень часових інтервалів скористаємося надбудовою "Сервіс" -"Аналіз даних" і інструментом "Генерація випадкових чисел" і згенеруємо декілька значень випадкової величини, яка розподілена за законом Пуассона із заданим параметром  $\lambda_i$ .

Кількість випадкових чисел при кожному значенні  $\lambda_i$  вибираємо так, щоб сума всіх значень випадкової величини була менше 60 хвилин, тобто кількість значень випадкової величини вибираємо рівною  $60/\lambda_i + 1$ , що приблизно відповідає одній годині роботи перукарні при заданому значенні інтенсивності  $\lambda_i$ . Параметр "випадкове розсіювання" для першого стовпця виберемо рівним номеру варіанту, а для кожного подальшого стовпця будемо збільшувати це значення в 2 рази. Дані, що згенерували, будемо записувати по стовпчиках під відповідними значеннями  $\lambda_i$ .

Для генерації даних першого стовпчика використовуємо параметри, що наведені на Мал.7.:



Мал.7. Параметри генерації часових інтервалів для варіанту N=3 та  $\lambda = 30$ .

Для генерації другого стовпця, у якому будуть міститися дані про часові інтервали між моментами приходу клієнтів в другу годину роботи перукарні, використовуємо параметри, що наведені на Мал.8.



Генерация случайных чисел

Число переменных: 1

Число случайных чисел: 6

Распределение: Пуассона

Параметры

Лямбда = 15

Случайное рассеивание: 6

Параметры вывода

Выходной интервал: \$C\$5

Новый рабочий лист:

Новая рабочая книга

OK Отмена Справка

Мал.8. Параметры генерації часових інтервалів для другої години та  $\lambda = 15$ .

Для третьої години зміниться кількість випадкових чисел  $\approx 60/\lambda+1$ , значення  $\lambda_3 = 8$  і параметр випадкового розсіяння  $m = 3 \times 2$ , а також зміниться початкова комірка інтервалу, що виводиться. Ці зміни наведені на Мал. 9.

Генерация случайных чисел

Число переменных: 1

Число случайных чисел: 8

Распределение: Пуассона

Параметры

Лямбда = 8

Случайное рассеивание: 12

Параметры вывода

Выходной интервал: \$D\$5

Новый рабочий лист:

Новая рабочая книга

OK Отмена Справка

Мал.9. Параметры генерації часових інтервалів для третьої години та  $\lambda = 15$ .

Після заповнення всіх дванадцяти стовпчиків одержимо наступну таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		1-й час	2-й час	3-й час	4-й час	5-й час	6-й час	7-й час	8-й час	9-й час	10-й час	11-й час	12-й час		
2	Интенсивность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$		
3	заявок [1/мин]	30	15	8	10	8	9	9	15	15	10	20	30		
4															
5	Интервалы времени между приходом заявок	36	16	7	11	12	18	7	16	17	4	21	27		
6			17	6	6	11	14	9	17	15	14	14			
7			15	7	10	11	8	16	17	11	10	14			
8				7	14	6	17	5		13	5				
9				7	9	7		10			8				
10				11	7	7		7			8				
11				5				6							
12			7												
13															
14															
15															
16															
17	Сумма интервалов между приходами клиентов	36	48	57	57	54	57	60	50	56	49	49	27		
18	Количество пришедших клиентов	1	3	8	6	6	4	7	3	4	6	3	1		
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															

Мал.10. Результати генерації часових інтервалів для всього періоду роботи

З наведеної таблиці видно, що було введено додатковий рядок за номером 17, в який записані суми всіх значень часових інтервалів по стовпцях. Причому останні значення, що згенерували, в кожному стовпці були вилучені, якщо сума інтервалів кожної години перевищувала 60 хвилин.

В рядку 18 записана кількість елементів, що залишилася в стовпцях, тобто підрахована кількість клієнтів за кожен годину роботи перукарні.

Далі необхідно сформулювати загальний стовпець, в який будемо записувати час приходу клієнта. Для зручності будемо відлічувати час приходу клієнтів в хвилинах від часу відкриття перукарні, тобто початкове значення часу приймемо рівним нулю:  $t_0 = 0$ . Значення інтервалів між моментами приходу, відлічувані від попереднього приходу або від початку наступної години, задані в сформованих раніше стовпцях. Так, з першого стовпця (комірка B5) видно, що 1-й клієнт прийшов через 36 хвилин після відкриття перукарні. Час приходу 2-го клієнта припадає на 16-у хвилину другої години, тобто формується як сума 60+значення комірки C5. Час приходу третього клієнта дорівнює сумі моменту приходу попереднього клієнта (комірка B23) і наступного часового інтервалу (комірка C6). Аналогічно будуються подальші значення.

Після такої обробки буде сформований масив В22 : В73, що містить 52 значення моментів приходу кожного з клієнтів. (Загальна кількість клієнтів за день дорівнює 52, номери клієнтів записані в комірках А22:А73).

N п/п	Время прихода клиента	1-й мастер			2-й мастер			Признак ожидания в очереди	Время ожидания
		Начал	Закончил	Время работы	Начал	Закончил	Время работы		
1	36	36	49	13					
2	76			0	76	94	18		
3	93	93	113	20					
4	108			0	108	125	17		
5	127	127	144	17					
6	133			0	133	149	16		
7	140	141	165	24			7	1	
8	147			0	151	168	17		
9	154	167	186	19			9	13	
10	165			0	170	195	25	10	
11	170	188	207	19			11	18	
12	177			0	197	212	15	12	
13	191	209	229	20			13	18	
14	197			0	214	232	18	14	
15	207	231	250	19			15	24	
16	221			0	234	256	22	16	
17	230	252	270	18			17	22	
18	237			0	258	278	20	18	
19	252	272	290	18			19	20	
20	263			0	280	303	23	20	
21	274	292	308	16			21	18	
22	280			0	305	329	24	22	
23	287	310	328	18			23	23	
24	294	330	346	16			24	36	
25	318			0	331	347	16	25	
26	332	348	369	21			26	16	
27	340			0	349	366	17	27	
28	357			0	368	382	14	28	
29	367	371	391	20			29	4	
30	376			0	384	405	21	30	
31	392	393	410	17			31	1	
32	397			0	407	426	19	32	
33	407	412	429	17			33	5	
34	414			0	428	443	15	34	
35	420	431	453	22			35	11	
36	438			0	445	471	26	36	
37	453	455	470	15			37	2	
38	470	472	490	18			38	2	

Мал.11. Результати розрахунку моментів приходу, початка та кінця обслуговування клієнтів

Далі потрібно сформуванати по 3 стовпці, що містять час початку і час закінчення обслуговування клієнта, а також тривалість роботи кожного з майстрів-перукарів. Але перед цим, за допомогою інструменту "*Аналіз даних*" - "*Генерація випадкових чисел*" потрібно сформуванати стовпець Р22:Р73, у якому будуть міститися значення часу обслуговування кожного з 52 клієнтів. За умовами варіанту 3, ці випадкові значення мають нормальний закон розподілу з параметрами  $t_{обсл.} = 20$  хв. і  $\sigma_{обсл.} = 3$  хв. Стовпці С22:Е73 і F22:Н73 формуються згідно пунктам 4-7 завдання на лабораторну роботу. Так, початок роботи першого майстра співпадає з часом приходу 1-го клієнта, тобто дорівнює 36-ій хвилині від відкриття перукарні. Згідно значенню комірки Р22 час роботи першого майстра склав 13 хвилин, що відображено в комірці Е22. Тоді час закінчення роботи першого майстра буде С22+Е22, ця формула записана в комірку D22, а обчислене по ній значення дорівнює 49-ій хвилині з моменту відкриття перукарні. Наступного клієнта за умовами роботи повинен

обслуговувати другий майстер. Клієнт приходить на 76-ій хвилині (див. комірку В23), і аналогічно описаному вище заповнюються комірки F23, H23 і G23.

Після формування стовпців С22:Е73 і F22:Н73 можна розрахувати час очікування в черзі кожного з клієнтів перукарні. Для цього в стовпці І в рядку, що відповідає окремому клієнту, проставляється порядковий номер цього клієнта, якщо час початку його обслуговування не співпадає з часом його приходу. В наступному стовпці записуємо відповідний час очікування.

По даних таблиці можна визначити параметри роботи перукарні, а саме:

*Кількість обслужених заявок (клієнтів) за день* = 52 клієнти;

*Загальний час простою першого майстра* = 236 хв.

*Загальний час простою другого майстра* = 238 хв.

*Загальний час відсутності клієнтів* = 123 хв.

*Максимальна довжина черги* = 3 чоловіки.

*Середня довжина черги* = 1

*Середній час очікування в черзі* = 17 хв.

Для формування висновків по лабораторній роботі слід дати відповіді на наступні запитання.

1. Які показники говорять про неефективність роботи перукарні?
2. Які показники потрібно поліпшити
3. Якими змінами в роботі перукарні можна поліпшити ці показники?

### **3. ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

#### ***Базові підручники***

1. Ситник В.Ф. Імітаційне моделювання: Навч. посібник / В.Ф. Ситник, Н.С. Орленко. – К.: КНЕУ, 1998. – 232 с.
2. Ситник В.Ф. Імітаційне моделювання: Навч.-метод. посібник для самоств. вивч. дисципліни / В.Ф. Ситник, Н.С. Орленко. – К.: КНЕУ, 1999. – 208 с.

#### ***Основна література***

3. Харин Ю.С. Основы имитационного и статистического моделирования: Учеб. пособие / Ю.С. Харин, В.И. Малюгин, В.П. Кирлица и др. – Минск: Дизайн ПРО, 1997.
4. Советов Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.
5. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1978.
6. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1968. – 355 с.

### *Додаткова література*

7. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988.
8. Вагнер Г. Основы исследования операций. – Т. 1-3. – М.: Мир, 1973.
9. Степанюк В.В. Исследование операций: Учеб. пособие / В.В. Степанюк, А.Г. Скрипка. – К., 1972.

### **4. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ**

1. Поняття системи і моделі. Види і особливості моделей. Системний підхід до моделювання.
2. Поняття математичної моделі економічної системи. Види математичних моделей і їх особливості.
3. Імітаційне моделювання економічних систем і особливості його застосування. Основні економічні задачі, що розв'язуються засобами імітаційного моделювання.
4. Загальна схема математичної моделі складної системи. Види змінних і параметрів, що використовуються при описі системи.
5. Складні математичні моделі. Об'єднання моделей через входи і виходи.
6. Поняття управління системою. Ціль управління. Математичний опис цілей функціонування системи.
7. Види управління системою. Поняття негативного зворотного зв'язку.
8. Класифікація економіко-математичних моделей. Моделі без управління і їх особливості.
9. Класифікація економіко -математичних моделей. Оптимізаційні моделі і їх особливості.
10. Класифікація економіко -математичних моделей. Ігрові моделі і їх особливості.
11. Класифікація економіко -математичних моделей. Імітаційні моделі і їх особливості.
12. Класифікація моделей управління підприємством по області застосування.
13. Поняття системи масового обслуговування. Абсолютна і відносна пропускна спроможність системи масового обслуговування.
14. Вхідний потік заявок системи масового обслуговування і його особливості. Поняття найпростішого потоку заявок.
15. Пуассоновській потік заявок системи масового обслуговування, його функція щільності ймовірності і основні числові характеристики.
16. Час обслуговування заявки в системі масового обслуговування. Показовий закон розподілу часу обслуговування.
17. Марківський випадковий процес і його графічне зображення за допомогою графа станів.
18. Система масового обслуговування з відмовами. Граф станів і система диференціальних рівнянь Ерланга, що описує ймовірності станів системи.

19. Поняття стаціонарного процесу. Система рівнянь алгебри, що описують функціонування стаціонарної системи масового обслуговування.
20. Формули Ерланга для обчислення стаціонарних ймовірностей станів системи масового обслуговування з відмовами.
21. Поняття випадкової величини. Дискретні і безперервні випадкові величини.
22. Визначення ймовірності події за допомогою частоти її появи. Властивості ймовірності.
23. Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу і функція розподілу.
24. Функція щільності ймовірності і її графік.
25. Числові характеристики випадкової величини. Формула для знаходження емпіричного математичного сподівання. Геометричне значення математичного сподівання.
26. Числові характеристики випадкової величини. Формула для знаходження емпіричної дисперсії випадкової величини. Геометричний зміст дисперсії.
27. Числові характеристики випадкової величини. Поняття середнього квадратичного відхилення. Правило трьох сигм і його геометричний зміст.
28. Числові характеристики випадкової величини. Поняття коефіцієнта варіації.
29. Побудова емпіричної гістограми випадкової величини.
30. Основні закони розподілу випадкових величин.
31. Способи отримання послідовностей випадкових величин.
32. Метод середини квадратів для програмної генерації псевдовипадкових чисел. Властивості псевдовипадкових чисел.
33. Метод перевірки невиродженості послідовності випадкових чисел.
34. Використання методу зворотної функції для моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу.
35. Моделювання рівномірно розподіленої випадкової величини  $X$  на довільному інтервалі  $[a; b]$  по значеннях рівномірно розподілених на  $[0; 1]$  випадкових чисел  $z_i$ .
36. Моделювання дискретної випадкової величини  $X$ , заданої довільною таблицею розподілу, по значеннях рівномірне розподілених на  $[0; 1]$  випадкових чисел  $z_i$ .
37. Моделювання випадкової величини  $X$ , розподіленої за показовим законом із заданим параметром, по значеннях рівномірне розподілених на  $[0; 1]$  випадкових чисел  $z_i$ .
38. Моделювання випадкової величини  $X$ , розподіленої за нормальним законом із заданими параметрами  $\mu, \sigma$ , по значеннях рівномірно розподілених на  $[0; 1]$  випадкових чисел  $z_i$ .
39. Моделювання випадкової величини  $X$ , розподіленої за усіченим нормальним законом із заданими параметрами  $a, b, \mu, \sigma$ , по значеннях рівномірно розподілених на  $[0; 1]$  випадкових чисел  $z_i$ .
40. Критерій Колмогорова-Смірнова для перевірки припущення про розподіл послідовності випадкових чисел за відомим законом розподілу.

## 5. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАТЬ

### Тема 1. Основи економіко-математичного моделювання.

1. Дати визначення поняття "система" в економіко-математичному моделюванні.

А. Система - це сукупність елементів з деякою загальною властивістю і множини відносин між цими елементами, яка задає ієрархічну структуру елементів.

В. Система - ця множина елементів, об'єднаних єдиним принципом взаємодії.

С. Система - це сукупність різних елементів, відносин порядку і зв'язків між ними, що створюють цілісну єдність і мають загальну ціль функціонування.

Д. Система - це набір взаємозв'язаних частин, які працюють спільно, щоб виконати певну функцію. Будь-яка система будується на принципах того, що самоорганізовується і прагне оптимального стану рівноваги.

2. Які з перерахованих нижче моделей відносяться до математичних моделей.

- А. Натурна модель.
- В. Аналогова модель.
- С. Аналітична модель.
- Д. Імітаційна модель.
- Е. Чисельно-аналітична модель.
- Ф. Варіанти А і В.
- Г. Варіанти С, D і Е.
- Н. Варіанти А, В, С, D і Е.

3. Метод імітаційного моделювання не можна використовувати для:

- А. Розробки моделі розвитку національної економіки.
- В. Створення моделі світової економіки і глобальних економічних процесів.
- С. Аналізу і управління інвестиційними процесами.
- Д. Фінансового моделювання і управління фінансами підприємства.
- Е. Формування текстів художніх творів.
- Ф. Створення музичних творів.
- Г. Оцінки надійності систем захисту інформації.
- Н. Моделювання одягу.

4. Цільова функція використовується для побудови:

- А. Оптимізаційної моделі економічних процесів.
- В. Моделей масового обслуговування.
- С. Фінансової моделі підприємства.
- Д. Моделей управління запасами.

## Тема 2. Основні відомості з теорії ймовірностей і математичної статистики.

1. Статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини знаходиться по формулі:

$$A. \quad m_x^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$B. \quad m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$C. \quad m_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2$$

$$D. \quad m_x^* = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

2. Точне значення дисперсії випадкової величини знаходиться по формулі:

$$A. \quad D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2$$

$$B. \quad D_x^* = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) dx$$

$$C. \quad m_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2$$

$$D. \quad D_x^* = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x^*)^2 \cdot f(x) dx$$

3. Для перевірки гіпотези про відповідність емпіричного закону розподілу теоретичному закону розподілу випадкової величини використовується:

- A. Гістограма розподілу.
- B. Критерій Фішера.
- C. Критерій Колмогорова-Смірнова.
- D. Критерій Стьюдента.

4. Функція щільності ймовірностей показового закону розподілу має вигляд:

$$A. \quad f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$B. \quad f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

$$C. \quad f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot e^{-(x-m_x)}$$

$$D. \quad f(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-x)$$

$$E. \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$



F.  $f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ .

G.  $f(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{4}{16 - (x-3)^2}$ .

H.  $f(x) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2}}$

5. Датчиком випадкових чисел називається:

A. Стандартна комп'ютерна програма для отримання псевдовипадкових чисел.

B. пристрій, за допомогою якого вимірюються значення випадкової величини в довільні моменти часу.

C. Таблиця даних, в якій записані значення випадкової величини.

D. Рекурентная формула, за допомогою якої по відомому значенню  $x_i$  обчислюється наступне значення  $x_{i+1}$

6. Для моделювання нормально розподіленої випадкової величини використовується:

A. Метод зворотної функції

B. Метод випадкового розігрування числового значення на інтервалі  $[a;b]$ .

C. Метод Монте-карло.

D. підсумовування декількох випадкових величин.

7. Для отримання послідовності значень випадкової величини, розподіл якої відповідає емпіричному розподілу деякої випадкової величини, використовується:

A. Гістограма розподілу випадкової величини.

B. Функція накопичення частот.

C. Функція щільності ймовірності випадкової величини.

D. Функція розподілу випадкової величини.

8. Функція щільності ймовірності випадкової величини характеризує:

A. Ймовірність того, що випадкова величина менше, ніж довільне значення  $x$ .

B. Ймовірність того, що випадкова величина прикмет значення в діапазоні  $[x, x+Dx]$ .

C. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал  $[x_0 - x; x_0 + x]$ .

D. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення  $x$ .

### Тема 3. Елементи теорії масового обслуговування.

1. Системою масового обслуговування називається:

A. Система, орієнтована на багатократне виконання однотипних задач по обслуговуванню заявок, що вчинили..

В. Система управління черговістю обслуговування заявок при випадковому часі їх обслуговування.

С. Система, що дозволяє обслужити максимальну кількість заявок за певний час.

Д. Система обслуговування заявок по заданому графіку.

2. Абсолютною пропускнуою спроможністю системи масового обслуговування називається:

А. Середній прибуток від функціонування системи в одиницю часу.

В. Загальне число заявок, яке система обслуговує протягом дня.

С. Середнє число заявок, яке система може обслужити в одиницю часу.

Д. Середнє відношення числа обслужених заявок до числа заявок, що вчинили.

3. Стаціонарним потоком заявок називається:

А. Потік заявок, для якого число заявок, що поступають в деякий період часу, не залежить від кількості заявок, що вчинили за інший період часу.

В. Потік заявок, для якого ймовірністю одночасного надходження двох і більш заявок можна знехтувати в порівнянні з ймовірністю надходження однієї заявки.

С. Потік заявок, для якого час між  $n$  надходженнями двох послідовних заявок стає постійною величиною через деякий час після початку роботи системи.

Д. Потік заявок, для якого кількість заявок, що вчинили, залежить тільки від довжини часового інтервалу і не залежить від положення цього інтервалу на вісі часу.

4. В найпростішому потоці заявок час між надходженням двох послідовних заявок розподілений по:

А. Закону Пуассона.

В. Рівномірному закону.

С. Показовому закону.

Д. Нормальному закону.

5. Інтенсивністю пуассонівського потоку заявок називається:

А. Середній час між двома послідовними заявками.

В. Середнє число заявок в одиницю часу.

С. Середнє значення часу обслуговування заявки.

Д. Середнє відхилення часу обслуговування заявки від нормативного значення.

6. Марківським випадковим процесом називається:

А. Випадковий процес, що має властивість стаціонарності.

В. Випадковий процес, що має властивість ергодичності.

С. Випадковий процес без післядії.

D. Ординарний випадковий процес.

7. Марківський випадковий процес з безперервним часом і дискретним числом станів описується:

A. Системою диференціальних рівнянь Колмогорова.

B. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь Ерланга.

C. Системою диференціальних рівнянь Пуассона.

D. Системою ітераційних рівнянь для обчислення інтенсивності вихідного потоку заявок.

8. Гранична ймовірність зайнятості  $k$  каналів системи масового обслуговування знаходиться по формулі:

A. 
$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_{k-1}.$$

B. 
$$p_k = \alpha^{k-1} \cdot e^{-\alpha} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}.$$

C. 
$$p_k = \frac{\alpha^k}{k! \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right)}.$$

D. 
$$p_k = 1 - \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_{k-1}$$

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Навчальна програма дисципліни .....	3
змістовний модуль 1. Основи економіко-математичного моделювання .....	3
змістовний модуль 2. Основні відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики .....	4
змістовний модуль 3. Математичне моделювання випадкових величин .....	5
змістовний модуль 4. Елементи теорії масового обслуговування.....	5
змістовний модуль 5. Основні відомості про компютерні системи імітаційного моделювання .....	6
2. Робоча програма курсу.....	6
2.1. Тематика лекцій .....	6
2.2. Завдання для лабораторних робіт .....	7
Лабораторна робота 1. Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу.....	7
Лабораторна робота 2. Моделювання випадкової величини з довільним законом розподілу.....	13
Лабораторна робота 3. Імітаційне моделювання роботи системи масового обслуговування методом послідовної проводки заявок .....	14
3. Перелік навчально-методичної літератури.....	20
4. Питання для підсумкового контролю знань.....	20
5. Тестові завдання для підсумкового контролю знань.....	22

---

Підписано до друку 10.09.08. Формат 60x84/16.  
Гарнітура Times New Roman. Наклад 100 прим.

Надруковано в редакційно-видавничому відділі  
Східноєвропейського університету економіки і менеджменту,  
вул. Нечуя-Левицького, 16, Черкаси, 18036.