Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

Ніна Тарасенкова
Ірина Акуленко
Ірина Лов'янова
Зоя Сердюк

Організація навчання математики у старшій профільній школі

Монографія

Черкаси
2017

УДК 373.5.091.2 : 51
О-64

Рецензенти:

В. Г. Моторіна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики Харківського державного педагогічного університету ім. Г. С. Сковороди

О. С. Чашечникова – доктор педагогічних наук, професор, в.о. завідувача кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка

Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.

ISBN 978-966-9730-11-7

Матеріали монографії призначені для широкого загалу науковців у галузі теорії та методики навчання математики, аспірантів, студентів математичних спеціальностей ВНЗ педагогічного профілю, а також учителів математики.

Роботу виконано за підтримки МОН України
(держ. реєстрац. номер 0115U000639)

Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
(протокол № 2 від 17.10.2017 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Процеси реформування й модернізації сучасної української школи відбуваються в контексті прийняття Концепції Нової української школи (ухваленої рішенням колегії МОН України 27.10.2016) і закону України «Про освіту» (від 05.09.2017 № 2145-VIII діє з 28.09.2017).

У цих стратегічних документах метою повної загальної середньої освіти визначено усебічний розвиток, виховання і соціалізацію особистості, здатної до життя в суспільстві та цивілізованої взаємодії з природою, яка має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готової до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності.

Законом «Про освіту» встановлено, що повна загальна середня освіта має три рівні: початкова освіта тривалістю чотири роки; базова середня освіта тривалістю п'ять років; профільна середня освіта тривалістю три роки.

Отже, законодавчо затверджено, що старша ланка загальноосвітньої школи функціонуватиме як профільна, створюючи рівний доступ до якісної освіти школярам у відповідності до їхніх нахилів та потреб, забезпечуючи умови для якнайширшої соціалізації учнів, що має велике значення для побудови їхньої подальшої успішної професійної кар'єри.

Функціонування старшої ланки загальної середньої освіти як профільної перебуває у фокусі суспільної уваги і потребує ґрунтовного наукового супроводу.

Проблематика профільного навчання знаходиться на вістрі наукових розвідок багатьох вітчизняних і зарубіжних учених. У фокусі уваги дослідників були:

- теоретичні засади диференціації навчання (Н. Бібік, О. Бугайов, М. Бурда, В. Володько, О. Корсакова, І. Лікарчук, О. Ляшенко, П. Сікорський, А. Самодрін, В. Кизенко та ін.);
- методологічні аспекти реалізації цілей і задач профільного навчання (В. Алфімов, Н. Аніскіна, В. Гузєєв, І. Гершунський, Ю. Бабанський, В. Байденко, П. Блонський, І. Бутузов,

М. Гузик, М. Гончаров, В. Кизенко, І. Осадчий, Є. Рабунський, С. Чистякова, П. Лернер, Н. Родичев, О. Кузіна та С. Кропив'янська та ін.);

- психологічні передумови профільного навчання, зокрема особливості індивідуального розвитку школярів (О. Асмолов, Г. Балл, С. Максименко, В. Моляко, В. Рибалка, А. Фурман, І. Якиманська та ін.);
- діалектика взаємозв'язків профільного навчання і процесів професійного самовизначення (А. Бойко, Ю. Гільбух, Г. Григор'єв, С. Генкал, Н. Суханова, Е. Тер-Аракелян та ін.) та допрофільної підготовки учнів (І. Вольхіна, О. Корсакова, М. Іванова, С. Лебедєва, Ю. Німировська, Н. Южаніна та ін.);
- організаційні засади впровадження й ефективного функціонування профільного навчання (К. Мєшалкіна, З. Назарлієва, С. Кравцов, І. Лікарчук, С. Сігалов, П. Сікорський, Г. Сікорська та ін.);
- проектування змісту профільного навчання в старшій школі на основі введення Державного стандарту (О. Ляшенко, С. Гончаренко, І. Ляшенко, Ю. Мальований і О. Савченко, В. Гузєєв, С. Рягін, С. Трубачева та ін.);
- методичне забезпечення варіативної складової в допрофільному та профільному навчанні (Н. Альошина, О. Маскаєва, Г. Шахвеледов, Є. Єрмолаєв, Н. Вахрушева та ін.);
- моделі профільного навчання у загальноосвітніх закладах сільської місцевості (А. Остапенко, О. Касаткіна, О. Титова, Н. Шиян та ін.);
- особливості побудови профільного навчання в умовах наступності шкільної й вищої освіти (Є. Болотова, С. Григор'єв, В. Туркіна, Н. Решетнікова та ін.);
- потенціал інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема дистанційних форм навчання у профільній освіті (М. Жалдак, Г. Михалін, Ю. Триус, С. Семеріков, Н. Морзе та ін.).

Однак, як наголошено в Концепції профільного навчання, глибокого додаткового наукового супроводу й обґрунтування потребують такі напрями навчання в профільній школі: обґрунтування змісту профільного навчання; розроблення педагогічних технологій на основі застосування інноваційних методів навчання, самостійної навчальної діяльності, профільної виробничої практики; розроблення системи оцінювання навчальних досягнень учнів; здійснення моніторингу якості освіти; корекція концептуальних підходів до організації профільного навчання в різних умовах. Це стосується і такої важливої складової загальної середньої освіти, як математична освіта.

Якість математичної підготовки випускників профільної школи – індикатор готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, до впровадження високих технологій, мобільності особистості. З часів Г. Лейбніца та І. Ньютона математика пройшла довгий і плідний шлях, стала потужною галуззю науки, із абстрактної науки перетворилась на виробничу силу. На сучасному етапі розвитку людства математичні знання стали засобом проникнення в сутність явищ різної природи (фізичних, економічних, біологічних, хімічних, соціальних тощо). Недаремно нашу епоху, як підкреслював Б. Гнєденко, називають епохою математизації та інформатизації знань.

Місце математики в системі шкільної освіти визначається її роллю в інтелектуальному, соціальному й моральному розвитку особистості, у розумінні принципів побудови та використання сучасної техніки, нових інформаційних технологій, у сприйманні наукових і технічних ідей, формуванні наукової картини світу й сучасного світогляду випускників школи. Природничо-математична освіта є одним із основних факторів розвитку особистості. Її зміст постійно оновлюється з урахуванням суспільних запитів, потреб інноваційного розвитку науки та виробництва, запровадження сучасних методів навчання.

Завданням профільної математичної освіти є не лише набуття учнями теоретичних математичних знань відповідно до їх індивідуальних інтелектуальних здібностей, можливостей та соціальних прагнень, а й подолання тих труднощів, які виникають у практичному використанні цих знань у процесі життєдіяльності або у професійній сфері, формування теоретичної готовності й практичної спроможності учнів до їх використання. У сучасних умовах підвищення якості шкільної природничо-математичної освіти є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та конкурентоспроможної економіки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показує, що в педагогічній літературі досліджувались:

- різні аспекти дидактичного й методичного супроводу профільного навчання математики (В. Ачкан, М. Бурда, Г. Бевз, В. Бевз, В. Забранський, І. Лов'янова, В. Моторіна, Ю. Мальований, О. Матяш, О. Скафа, З. Слєпкань, Н. Тарасенкова, Т.Хмара, О. Чашечникова, В. Швець, О. Шаран, С. Яценко та ін.);
- посилення прикладної складової профільного навчання математики (Л. Нічуговська, Л. Соколенко, Л. Філон, В. Швець, А. Прус, І. Шапіро, О. Сухорукова та ін.);
- особливості особистісного і професійного самовизначення учнів старших класів у період прийняття рішення про вибір подальшого життєвого та професійного шляху (К. Абульханова-Славська, В. Журавльов, Н. Касаткіна, А. Маркова, Ю. Міков, Л. Мітіна, А. Орлов, Є. Павлютенков, В. Парамзін, В. Поляков, Є. Прощицька, Н. Пряжников, Г. Чередниченко, П. Шавір, Т. Шалавіна, І. Шкабара, В. Шубкін та ін.).
- упровадження професійної орієнтації учнів у процесі вивчення окремих шкільних дисциплін, зокрема математики (Л. Благодаренко, М. Опачко, М. Пригодій, Н. Кнорр, Б. Федоришин, В. Хільковець та ін.);
- формування у старшокласників професійно-значущих якостей особистості (В. Вакуленко та ін.).

Попри широкий спектр проведених досліджень, нові умови функціонування системи освіти в Україні висувають і нові вимоги до результатів профільної середньої математичної освіти, які формулюються через систему компетентностей. Сучасний випускник профільної школи має не лише опанувати певний обсяг знань з математики, він має вміти користуватися ними. У Концепції Нової української школи наголошено, що знання та вміння, взаємопов'язані з ціннісними орієнтирами учня, формують його життєві компетентності, потрібні для успішної самореалізації у житті, навчанні та праці.

Математична компетентність, що включає в себе: культуру логічного й алгоритмічного мислення, здатність застосовувати математичні (числові та геометричні) методи для розв'язування прикладних завдань у різних сферах діяльності, здатність до розуміння й використання простих математичних моделей, уміння будувати такі моделі для розв'язання проблем, визнана ключовою.

Такі суспільні запити щодо результатів профільної математичної освіти індукують зміни в складній динамічній системі навчання математики у старшій профільній школі.

Спробою дослідити історичні витоки, ґенезу, актуальні тенденції й суперечності, що виникають у функціонуванні цієї системи, знайти шляхи їхнього розв'язання є пропонована увазі читачів монографія.

Розділ 1

ІСТОРИКО-ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ СТАНОВЛЕННЯ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

1.1. Ідеї розвитку вітчизняної школи XVI-XIX ст., пов'язані з організацією профільного навчання

Профільне навчання не є абсолютно новим феноменом педагогічної практики. Для будь-якої гуманістичної науки її власна історія – це не другорядне питання. Визначення і характеристика етапів розвитку тієї чи іншої науки підвищують її методологічний рівень, сприяють збереженню необхідної історичної наступності у її еволюції.

Таблиця 1.1.

Історичні передумови диференціації навчання (за [118, 147])

Історичний період/епоха	Особливості диференціації
Афінські школи	Уперше в історії педагогічної думки відбувся своєрідний поділ досліджуваного матеріалу на окремі предмети залежно від спеціальності вчителя-кіфариста, граматиста, гімнаста або філософа [118, с. 70]. Однак диференціація предметів ще була незавершеною і набула своєї специфіки у створенні трівіума і квадріума (сім вільних мистецтв) тільки в римській освітній системі. Саме в цій системі на початку нашої ери шкільні предмети становили вільні мистецтва, які слід було відрізняти від «механічних мистецтв», що підготовляли до ремісничої діяльності та не визнавалися римською знаттю. Спочатку до цієї схеми Марко Варрон вніс дев'ять дисциплін: риторику, діалектику, граматику, арифметику, геометрію, астроном-мію, музику, медицину й архітектуру. Однак пізніше ця схема була скорочена, а шкільний курс семи вільних мистецтв став двочастинним і поділявся на трівіум (риторика, діалектика, граматика) і квадріум (арифметика, геометрія, астарономія і музика). Така структура, запропонована Боецієм, стала канонічною [118, с.71]
Епоха Відродження	Характерною рисою педагогіки [118, с.92] є чітка ієрархія системи освіти: нижча ступінь представлена елементарною школою; навчальні заклади підвищеної загальної освіти – міськими (латинськими) школами, гімназіями і колежами, коледжами; вища ступінь – університетами, гуртками й академією

Продовження табл. 1.1

Епоха Просвітництва	Основні тенденції, що характеризують розвиток освіти: консервативний характер усієї системи освіти, орієнтованої на вузько-функціональну підготовку учнів; розгляд освіти як цивільного обов'язку для представників різних верств населення; поява освітніх установ для представників різних верств населення, що відрізняються як програмами навчання, так і специфікою організації навчального процесу.
XVIII століття	Період значних досягнень і перетворень у сфері освіти, створення державної системи освіти, мережі державних загальноосвітніх і професійних шкіл різного типу. Навчання в середніх навчальних закладах носило елементи диференційованого характеру]
Перша половина XIX ст.	Ідея диференціації навчання дістала свого розвитку, було закладено основи педагогічної психології та проголошено тези про виховну і розвивальну функцію навчання [147]

Сформована однакова система навчання мала національні особливості в різних європейських державах.

Ідеї, які виникали у розвитку вітчизняної школи XVI-XIX ст., були пов'язані так чи інакше з організацією профільного навчання. У братських школах України (XVI–XVII століття) суть ідеї профілізації полягала в тому, що, елементи диференціації згідно з якими становище учнів школи залежало від їхніх особистих успіхів у навчанні, а не від матеріального стану батьків.

Диференціація за здібностями, коли обов'язковими предметами вважалися лише закон Божий, арифметика й військова справа, інші предмети вивчалися за бажанням учнів запроваджувалася у Петербурзьському корпусі кадетів (1732 р.)

Класи французької і німецької мов, математики, інженерної справи, артилерії, геодезії, вокалу та інструментальної музики, де вчилися діти всіх верств населення були притаманними для Харківського колегіуму (1765 р.)

У гімназіях та повітових училищах запровадження професійного спрямування освіти відбувалося через створення спеціальних класів і додаткових курсів.

З 1864 р. мета класичної гімназії – підготовка до вступу в університет з посиленим вивченням іноземних мов та історії;

мета реальних гімназій – підготовка до практичної діяльності та вступу в спеціалізовані навчальні заклади, посилено вивчалися природознавство, математика, фізика і дві іноземні мови.

Вивчення предметів університетської програми, об'єднаних в три групи: етико-політичні, словесні і фізико-математичні було характерним для ліцеїв, розрахованих на особливо обдарованих дітей.

Їх аналіз дозволяє виокремити характерні риси профілізації, а саме:

- наявність шкіл різної практичної спрямованості, що готують учнів до різних професій;
- створення поліпрофільні школи, продиктоване характером суспільного розвитку;
- навчання в середніх навчальних закладах з елементами диференційованого характеру;
- біфуркація гімназій на філологічне і фізико-математичне відділення;
- закладання основ педагогічної психології та проголошення тези про виховну і розвивальну функції навчання.

На початку XX ст. обговорювалося кілька різних проектів типології навчальних закладів. Одним із них є проект міністра освіти М. Боголєпова, за яким пропонувалася така типологія: гімназія з двома стародавніми мовами (латинська і грецька); гімназія з однією латинською мовою; гімназія, що допускає принцип індивідуалізації (для учнів, що виявили успіхи в тому чи іншому предметі, дозволялося посилення занять з цього предмета, тобто педагогічна рада мала у своєму розпорядженні більшу волю в розподілі занять з учнями); реальне училище; так звана школа нового типу (тут передбачалися додаткові заняття для дітей, що виявили інтерес і схильності до вивчення мов або природничих наук; на старшому ступені передбачалася фуркація за трьома напрямками: класичний, природничий і гуманітарний; середня школа з біфуркацією (гуманітарним відділенням і реальним відділенням) – передбачалося з’єднання в одній школі двох типів навчальних закладів: гімназії і реального училища [55, с. 21].

Отже, проблема диференціації навчання була в центрі уваги педагогічної громадськості і знаходила рішення в російській дореволюційній школі через фуркацію на старших ступенях навчання.

Нового імпульсу ідея профільного навчання набула у процесі підготовки в 1915–1916 рр. реформи освіти [79], що здійснювалася під керівництвом міністра освіти П. Ігнатьєва [97]. У повідомленні Комітету з реформи школи (21 квітня 1915 року) загальними задачами школи були такі: школа надає закінчену середню освіту; школа повинна розвивати в учнів національну самосвідомість; мати різні напрямки. Так пропонувалося після початкової школи мати єдину школу (гімназію) із семирічним терміном навчання. Після четвертого гімназичного класу учні повинні бути поділені за напрямками: новогуманітарний (основні предмети – словесність, рідна й іноземна мови, історія), гуманітарно-класичний (з поглибленим вивченням стародавніх мов) і реальний (відділення природничих наук і математики) [97].

Здійснюючи порівняльний аналіз диференціації навчання у вітчизняній школі та педагогіці на межі XIX і XX століть та досліджень сучасного стану проблеми, ми схиляємося до позиції А. Арапова [10] і виокремлюємо основні напрямки подальшого розвитку диференціації навчання (рис. 1.1).

Кінець XIX і початок XX ст. позначені могутнім підйомом у розвитку методичної думки, так актуальним були наступні ідеї і напрямки:

- Матеріальний напрямок, який захищав інтереси буржуазії і вимагав від викладання математики повідомлення тільки корисних відомостей, «необхідних у житті математичних розрахунків» (В. Лермантов, П. Єнько [66, 44]).

- «Методологічний напрямок», заснований на ідеалістичних передумовах філософії раціоналізму, згідно з яким передбачалося вибудувати викладання математики на матеріалі, згрупованому навколо методів дослідження (С. Поляков [100]).

- Напрямок, який спирався на теорію «вільного виховання» (В. Мрочек, Д. Галанин [88]).

- Прогресивний напрямок виходив із вимог усебічного розвитку особистості, прагнув до того, щоб: матеріал, який вивчається, був засвоєний осмислено, математичні знання були максимально наближеними до життя, розвивалися кмітливість та ініціативність (С. Шохор-Троцкий, А. Астряб, К. Лебединцев [65, 32]).

- Напрямок, який передбачав такі цілі викладання математики у середній школі: «…ознайомити з математикою а) як з наукою, як з науковою системою, що забезпечує злагодженість і порядок в уяві; б) як з потужним методом, що надає можливість вивчати явища довкілля; в) нарешті, як цінне знаряддя для розвитку усіх сторін духу і, зокрема, мисленнєвих здібностей учня (К. Щербина [157]).
- Напрямок, який підкреслює значення математики у пізнанні світу, значення розвиненого математичного мислення у пізнанні окремих сторін об'єктивного світу (А. Власов [27]).

поширення в масовій школі внутрішньокласної диференціації, яка дозволяє організувати навчальний процес з урахуванням реальних навчальних можливостей учнів		здійснення більш гнучкої диференціації, яка надавала би можливість розвитку профільної диференціації на старшому ступені навчання
	напрямки розвитку диференціації навчання	
згладжування жорсткої зовнішньої диференціації між різними типами шкіл за рахунок максимальної кореляції їх навчальних програм із загальноосвітніх предметів		створення шкіл для дітей, які виявили особливу обдарованість в окремих видах діяльності

Рис. 1.1. Основні напрямки подальшого розвитку диференціації навчання

У русі за реформу викладання математики брали участь представники різних класів, що наклало на нього певний відбиток, рух не мав однорідного характеру. Це свідчить про те, що чітко сформувалися прогресивні погляди передової частини вітчизняної методичної думки на початку XX сторіччя [32, с.39].

У 1899 році для п'яти проектів середніх шкіл було обрано п'ять різних варіантів програм з математики [126, 32]: 1) класична гімназія з двома стародавніми мовами (27 годин математики за весь курс, виходячи з тижневого навантаження учнів по класах); 2) класична гімназія II типу (27 годин); 3) гімназія з однією латинською мовою (29 годин); 4) реальне училище (37 годин); 5) середня школа нового типу с 6-го класу галузі – гуманітарна – 30 годин, новогуманітарна – 32 години, класична – 30 годин.

Принципами системи освіти були сувора становість і класицизм. Основою для поліспрямованості математичної освіти став принцип застосування різних програм для різних типів навчальних закладів.

Найкращу у Росії математичну підготовку давали кадетські корпуси (військові гімназії); добре було поставлене викладання математики в гімназіях; задля одержання якісної середньої математичної освіти слугували реальні училища. Кожному відпускалося стільки знань, скільки було потрібно для його стану. Основними цілями навчання математики у першій половині XIX століття були: 1) навчити учнів обчислювати; 2) навчити учнів застосуванню отриманих знань задля розв'язування практичних задач; 3) сприяти формально-логічному розвиткові учнів [56].

Отже, на початку XX століття як у роботах прогресивних педагогів, так і в «розумах» чиновників освіти стала чіткіше виявлятися необхідність диференційованого навчання учнів і в першу чергу профільного навчання.

На початку XX століття ідея диференціації навчання математики зміцнювалася. Матеріали з реформи середньої школи [84; 85; 128; 129; 130] свідчать про те, що навчання відбувалося на двох ступінях: I ступінь – 1, 2, 3 класи (арифметика, наочна геометрія, алгебра); II ступінь – 4-7 класи за наступними напрямками: А. Фізико-математична галузь реального відділення;

Б. Природничо-історична галузь реального відділення; новогуманітарне відділення; гуманітарно-класичне відділення.

1.2. Історичні особливості організації профільного навчання у XX ст.

Актуальна в різні періоди розвитку вітчизняної педагогіки диференціація навчання реалізовувалася по-різному на певних історичних етапах функціонування школи. Історичні особливості організації профільного навчання у XX ст., як одного із видів диференційованого навчання, на кожному етапі історичного розвитку мали свою специфіку організації. Аналіз джерел [97; 134; 58; 147; 55; 124; 76; 80], дозволив дійти наступних висновків:

1918 р. – Перший Всеросійський з'їзд працівників освіти, розроблене Положення про єдину трудову школу, що передбачає профілізацію змісту навчання на старшому ступені школи. У старших класах середньої школи виділялися три напрямки: гуманітарний, математичний і технічний.

1920 р. – У орієнтовних навчальних планах для I і II ступенів єдиної трудової школи допускався різний зміст навчання (тісно пов'язаний з географічним місцем положення й умовами роботи школи): міська школа з промисловою орієнтацією; сільська школа з орієнтацією на сільське господарство.

20-і рр. – Профільна школа функціонувала як професійна і будувалась на основі проекту «Положення про єдину трудову школу Української РСР» та «Декларації Наркомосвіти УРСР про соціальне виховання дітей» від 20 липня 1920 року і мала на меті дати загальноосвітню підготовку, необхідну для вступу до вищих навчальних закладів, а також забезпечити трудову підготовку випускників на допрофесійному рівні. Професійна школа, що стала масовою в галузі індустрії та сільського господарства будувалася на семирічній трудовій школі і становила єдину форму освіти підлітків та юнацтва. Вона виступала синтезом загальної й спеціальної освіти. Схема освітньої системи передбачала професійну школу за такими профілями: сільськогосподарський (агрономічна школа), індустріальнотехнічний (технічна школа), соціально-економічний та медичний (школа лікарського помічника)

1924 р. – 69 шкіл II ступеня Ленінграда (42 % усіх шкіл міста) перейшли на навчання дітей за наступними ухилами: індустріальний (5 ч математики в тиждень); промислово-економічний (4 ч математики в тиждень); педагогічний (3 ч математики в тиждень). В інших містах і селах північного заходу школи мали також ухили сільськогосподарський, економічний, кооперативний (у залежності від потреб господарства тієї місцевості, де знаходилася школа).

1934 р. – ЦК ВКП(б) і Рада Народних комісарів СРСР приймають постанову «Про структуру початкової і середньої школи в СРСР», що передбачає єдиний навчальний план і єдині навчальні програми. Однак уведення на всій території СРСР єдиної школи згодом висвітило серйозну проблему: відсутність наступності між єдиною середньою школою і глибоко спеціалізованими вищими навчальними закладами, що змусило вчених-педагогів у який раз звернутися до проблеми профільної диференціації на старших ступенях навчання.

1935 р. – Була розроблена програма з математики, яка проіснувала 20 років. Власне кажучи, школа повернулася до дореволюційних традицій. За основу був узятий тип російської школи з біфуркацією, у якій природниче і гуманітарне відділення злилися.

50-ті роки – Формування концепції розвивального навчання, почалося створення шкіл з поглибленим вивченням окремих предметів.

1957 р. – Академія педагогічних наук виступила ініціатором проведення експерименту, у якому передбачалося провести диференціацію за трьома напрямками: фізико-математичним і технічним; біолого-аграним; соціально-економічним і гуманітарним.

1959 р. – Вперше в колишньому Радянському Союзі виникли класи з поглибленим вивченням математики. Поглибленому вивченню предмета сприяла така форма позакласного навчання як факультативні заняття за вибором учнів.

60-ті роки – Було введено диференціацію за проектованою професією. Школярі стали здобувати середню освіту в різнотипових середніх навчальних закладах: загальноосвітня школа, середні професійно-технічні училища (СПТУ) і середні спеціальні навчальні заклади.

1966 р. – З метою подальшого поліпшення роботи середньої загальноосвітньої школи були введені дві форми диференціації змісту освіти за інтересами школярів: факультативні заняття в 8-10-х класах і школи (класи) з поглибленим вивчанням предметів, що, постійно розвиваючись, збереглися аж дотепер.

1984 р. – Реалізація Постанови Верховної Ради СРСР «Про основні напрями реформи загальноосвітньої і професійної школи» від 10 квітня 1984 року. Відповідно до якої, у середній загальноосвітній школі, розпочинаючи із восьмого класу, учні навчалися і працювали у складі учнівських виробничих бригад, у міжшкільних навчально-виробничих комбінатах, навчальних цехах і дільницях на підприємствах і в профтехучилищах.

1980 – поч. 1990-х – В Україні з'являються нові типи освітніх закладів (гімназії, ліцеї, коледжі), які зосереджують зусилля учнів на поглибленому вивченні окремих предметів, потрібних їм для подальшого навчання у вищих навчальних закладах, розвитку творчих здібностей, відповідно до інтересів і нахилів учнів сприяють свідомому вибору професії. Диференціація навчального процесу, що включає профільне навчання старшокласників, курси за вибором та факультативи, вже розглядається як необхідна складова нового підходу до конструювання навчального плану.

1989 р. – Згідно наказу Державного комітету СРСР з народної освіти від 22 вересня 1989 року №751 диференціація освіти, визначальний фактор і умова його демократизації і гуманізації, закріплюється в базисному навчальному плані у вигляді обов'язкових курсів за вибором, поглибленого і профільного навчання в старших класах, факультативів і гуртків за інтересами, індивідуальних і групових занять як усередині одного класу, так і в міжкласних і різновікових навчальних групах. Диференціація, що доповнює загальний й обов'язковий для всього учнів програмний матеріал, створює умови для індивідуалізації навчання, найбільш повного розкриття схильностей і здібностей школярів, для всебічного урахування місцевих і регіональних запитів.

Важливими для розвитку ідеї профілізації є здобутки радянської школи 1917-х–1990-х рр., які можна умовно поділити на певні етапи щодо становлення профільної диференціації навчання. Так Н. Шиян [155] на основі даних розвитку суспільства, педагогіки і пріоритетності освітньої парадигми виокремлює дев’ять етапів становлення профільної диференціації навчання у ХХ ст. подані у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Етапи становлення профільної диференціації навчання у ХХ ст. (за Н. Шиян [155])

№ етапу / Період	**Зміст диференціації**
І етап 1917 р.	проект Г. Ващенка про створення різних типів старшої школи
ІІ етап 1918–1920-ті рр.	виникнення «профухилів»
ІІІ етап 1930–1950-ті рр.	відміна «профухилів», одноманітність школи
IV етап кінець 50-их рр.	диференціація розглядається як принцип навчання
V етап 60-ті рр.	вводиться диференціація за проектованою професією, факультативи, створюються школи й класи з поглибленим вивченням предметів
VI етап початок 70-их рр.	припинено дослідження диференційованого навчання, яке почало розглядатися як породження буржуазної школи
VII етап 80-ті рр.	науковий інтерес до проблеми зростає, урізноманітнюються форми профільного навчання
VIII етап 1991–кінець 90-их рр.	розвиток навчальних закладів нового типу, становлення профільного навчання в загальноосвітній школі
IX етап 1999 р. –сьогодення	законодавче введення профільного навчання в старшій школі незалежної України

Слід зазначити, що найбільш плідними з точки зору розвитку профільної диференціації у навчанні математики виявилися IV і V етапи (кінець 50-их рр., 60-ті рр.). Саме в цей період у 1959 р. С. Шварцбурд у московській школі № 444 створює перший в країні спеціалізований клас, який готує програмістів-обчислювальників [150]. Підготовка програмістів-обчислювальників вимагала глибокої математичної підготовки, тому і виникла ідея створення школи з поглибленим вивченням математики. Автором і натхненником даного проекту став С. Шварцбурд [148; 149; 151; 152]. Під його керівництвом було розроблено програму з математики для середніх навчальних закладів нового типу – математичних шкіл. У 1961 році Міністерством освіти РРФСР було затверджено кваліфікаційну характеристику, навчальний план, програми із загального курсу математики, спеціальних навчальних предметів. Це стало відправною точкою для появи в СРСР шкіл і класів з поглибленим вивченням математики, математичних інтернатів.

Ми погоджуємося з точкою зору Н. Шиян [155], стосовно того, що у 80–90-ті рр. науковий інтерес до проблеми зростає, урізноманітнюються форми профільного навчання, відбувається розвиток навчальних закладів нового типу, становлення профільного навчання в загальноосвітній школі, розробляються концепція середньої освіти [57] й профільного навчання.

Серед проблем реформи математичної освіти ученими-методистами [104] розглядалися такі: 1. У старшій ланці школи пріоритет надається різноманітним формам профільного вивчення предметів. Одна з основних форм диференціації у старших класах має вияв у скороченні обов'язкових предметів і уведенні предметів на вибір. Питання, пов'язані з добором обов'язкових предметів і предметів на вибір, з визначенням часу на ці групи предметів досліджував М. Рогановський. 2. Піднімалося питання (Є. Семенов) про використання «методу нашарування» як необхідного засобу урахування вікових особливостей учнів і систематизації їхніх знань (знання повинні ставати більш широкими, осмисленими, іншим повинний бути рівень строгості, узагальненості, глибини, а на колишні знання учень повинний дивитися, немов у дороге дитинство з вершини дорослості). 3. Н. Кварацхелія наголошував на тому, що сучасна система навчання математиці в школі повинна забезпечити такий рівень підготовки у профільному навчанні, що цілком забезпечував би потреби вищої школи.

Відхиляючи орієнтацію на «плановані обов'язкові результати», В. Болтянський, Г. Глейзер, С. Черкасов [16; 31] пропонують свою концепцію диференційованого навчання математиці. Ця концепція припускає поділ учнів за їх ставленням до предмета на три групи: 1) ті, для кого математика є лише елементом загального розвитку; 2) ті, хто уважає математику важливим інструментом у подальшій професійній діяльності; 3) ті, хто обрав математику як основу своєї майбутньої діяльності. Відповідно рівні опанування математики умовно названі загальнокультурним, прикладним і творчим. Задля реалізації цієї концепції її автори уважають за необхідне створити три підручники математики, що відповідають загальнокультурному, прикладному і творчому рівням. Ці підручники, за задумом авторів концепції, повинні бути написані в одному ключі, дотримувати однієї програми, однієї послідовності викладу. У цих підручниках математики повинна бути передбачена можливість у будь-який момент переходити з одного на інший. Кожен учень повинний мати у своєму розпорядженні повний комплект цих підручників, оскільки передбачається мати єдиний підручник загальнокультурного рівня і ще паралельно підручники прикладного і творчого рівнів.

Уведення системи профільного диференційованого навчання на цьому етапі спиралося на досить глибоко розроблені в науці підходи до вивчення структури особистості, в основу було покладено ідеї К. Платонова [82] про підструктури особистості (соціально зумовлена підструктура, індивідуально набутий досвід, індивідуальні особливості психічних процесів, генетично зумовлені властивості особистості).

Щодо реалізації концепції диференційованого навчання математики відомі науковці-методисти М. Метельський [80], В. Болтянський, Г. Глейзер [16], О. Дубинчук, З. Слєпкань, С. Соболь, С. Філіппова [43] висловлювали такі думки.

- Основу диференційованого навчання у старших класах повинні скласти класи з поглибленим вивчанням дисциплін певного профілю: фізико-математичного, хіміко-біологічного, гуманітарного й ін. Об’єктивною основою диференційованого навчання є те, що в різних профілях на математику треба приділяти різну кількість тижневих годин, знадобляться різні програми й підручники. Кожен профіль повинен практично відповідати на найближчі йому запити суспільства. З іншого боку, зберігаючи академічні й політехнічні цінності, запровадження диференціації має зберегти й розвити загальнокультурні і загальнолюдські завоювання школи. Одним із таких завоювань є вивчення усіма учнями середньої загальноосвітньої школи основ науки математики, що проникає усе ширше в усі галузі людської діяльності. Математика потрібна всім, навіть майбутнім гуманітаріям, і може бути їм навіть більше, ніж тим, хто її буде вивчати після школи. Варто неодмінно гарантувати підхід, у результаті якого математика повинна стати обов’язковим предметом у навчальному плані для гуманітарних класів за деякого мінімуму тижневих годин із полегшеним змістом, доступним і привабливим для учнів.

- Досягнення визначеного рівня математичної культури, стилю мислення й обсягу знань – ось те, до чого в першу чергу варто прагнути, навчаючи дитину, яка надалі буде мати мало справи з математикою.
- У концепції шкільної математичної освіти однією з тенденцій, розкритою на основі аналізу світового досвіду, є розуміння необхідності математичної освіти для всіх учнів. Адже тільки за наявності відповідної математичної підготовки в умовах безперервної освіти людина може розв’язати питання про свою подальшу долю, якщо йдеться про підвищення кваліфікації, оволодіння новою професією, спеціальністю, усунення прогалин попереднього етапу навчання.

1.3. Досвід країн Європи і світу щодо запровадження профільного навчання

Становлення вітчизняної профільної школи не може відбуватися без орієнтації на досвід шкільної освіти за кордоном, де до 70% шкіл є профільними. Елементи профільного навчання у європейській старшій школі тією чи іншою мірою почали запроваджуватись понад сто років тому, коли стало зрозумілим, що в епоху бурхливого розвитку науки та швидкого накопичення обсягу нової інформації, яке мало місце в кінці XIX – на початку XX століття, реалізувати заклик Я. Коменського «учити всіх усьому» виявилось не під силу тогочасній загальноосвітній школі. Більш ніж сторічний досвід провідних країн Європи у розбудові ідеї профільного навчання та її втілення у сучасні системи освіти різних країн нами систематизовано за джерелами [162; 164; 166; 167; 168; 169; 171; 172; 173; 174].

За матеріалами джерел [1; 63; 115; 116; 133] проаналізуємо досвід країн Європи щодо запровадження профільного навчання. Елементи профільного навчання в європейській старшій школі в тій чи іншій мірі почали запроваджуватись понад сто років тому.

Так понад сто тридцять років тому профільним навчальним закладом стає французький ліцей. Особливості профільної диференціації у цьому закладі полягають у наступному: після навчання за загальною для всіх програмою у колежі (що умовно відповідає нашій неповній середній школі) учні переходять у ліцей, де навчання триває 3 роки, причому лише на двох останніх роках навчання відбувається диференціація за декількома секціями (гуманітарна, природничо-наукова, економічна, технічна), кожна з яких поділяється на підсекції (наприклад, економічна поділяється на підсекції гуманітарних і соціальних наук, математики й економіки). Що стосується математичної освіти у французькому ліцеї, то в усіх секціях математика вивчається усіма ліцеїстами, але в різних секціях вона вивчається у різних обсягах.

Схема середньої освіти Франції має наступну структуру: елементарний цикл – 5 років, перший – 4 роки, другий – 3 роки навчання. Елементарний цикл утворює відокремлену ланку системи освіти, так звану початкову школу; перший і другий цикли – середню школу. Нумерація класів у середній школі йде у зворотному порядку: VI, V, IV, III, II, I, «випускний». Середня школа поділяється на повну – ліцеї (перший цикл + другий цикл) і неповну – колежі (перший цикл). В II класі обов’язкові предмети вивчаються за загальними програмами. В I і випускному класах – диференційовано. В таблиці подано відомості про кількість навчальних годин на тиждень, що відводиться на вивчення обов’язкових предметів за кожним напрямком в II, I і випускному класах (таблиця 1.3).

Як бачимо, математика у французькій школі є предметом, обов’язковим для вивчення усіма категоріями учнів.

Перший цикл середньої школи (класи 6, 5, 4, 3) характеризується загальноосвітньою направленістю навчання.

Таблиця 1.3

Кількість навчальних годин на тиждень з математики

Предмет	I	I				випускний				
	Всі напрямки	Філософський	Гуманітарний	Економічний	Природничо – математичний	Філософський	Гуманітарний	Економічний	Природничий	Фізико – математичний
Математика					6					

Курс математики на цьому етапі поглиблює і закріплює результати навчання початкової школи, зокрема передбачається довести до автоматизму виконання арифметичних операцій над натуральними числами й десятковими дробами, використання різних одиниць вимірювання величин. Учні забезпечуються теоретичними знаннями, практичними навичками й необхідними прийомами, що дозволяють на основі побудови математичної моделі розв’язувати прості прикладні задачі. Відбувається сприяння розумовому розвитку учнів, а саме: формуються навички спостереження й аналізу, виробляються вміння уявляти реальні об’єкти навколишньої діяльності в вигляді конкретних образів (фігур, схем, символів); закладаються основи дедуктивного мислення шляхом критичного відношення до індуктивних висновків; розвивається уява на основі вміння робити висновки, узагальнювати, роз’яснювати спосіб дій, знаходити приклади, ілюструючи вислови, або контрприклади, які спростовують передбачення; привчаються ясно, просто і точно висловлювати свої думки; прививаються навички охайності, чіткості, порядку при побудові геометричних фігур, виконанні обчислень, веденні записів.

Курс математики II класу загальноосвітній. Його мета не формальна побудова строгої математичної теорії, а формування «творчого відкриття» основних положень, дослідження отриманих результатів, їх застосування в практиці і вивченні других предметів. Програма II класу включає такі розділи: Операції над числами. Статистика. Функції. Планіметрія. Стереометрія. Скалярний добуток (на площині). Система лінійних рівнянь.

Найбільший інтерес представляють курси математики I-го і випускного класів, в яких вивчення цього предмету здійснюється диференційовано в залежності від напрямку. Ми розглядаємо програми двох напрямків: філософського, де на вивчення математики відводиться 2 години на тиждень, і математичного, де на вивчення математики передбачено 6 годин в I класі і 9 годин у випускному.

Курс математики філософського напрямку визначається як загальнокультурний, він повинен, з одного боку, сприяти формуванню широкого гуманітарного кругозору учнів, з другого боку, являтися основою становлення філософського мислення. Цей курс представлено такою програмою: I клас – Організація даних. Аналіз. Випускний клас – Статистика. Аналіз. Тема за вибором (Арифметика. Алгоритми. Геометрія. Теорія ймовірностей. Астрономія. З п'яти запропонованих тем учитель разом з класом вибирає для вивчення одну).

Курс математичного напрямку є великим курсом, який готує учнів до подальшого серйозного професійного заняття математикою. Програма цього курсу передбачає не тільки поглиблене вивчення тих чи інших теорій але й оволодіння математичними методами дослідження задач і з інших областей знань. Програма цього курсу така: I клас – Числові послідовності. Числові функції. Многочлени. Статистика. Планіметрія. Стереометрія. Випускний класс – Комбінаторика. Статистика. Числові послідовності. Числові функції. Інтегральне числення. Векторний аналіз і кінематика. Комплексні числа. Лінійна алгебра. Геометрія. По закінченні середньої школи учні здають екзамен на ступінь бакалавра, що надає право зачислення на відповідне відділення університетів. Відмітимо що організація диференційованого навчання будується на принципі єдиної школи, організація навчання в якій враховує різноманіття індивідуальних нахилів дітей, забезпечує всебічний розвиток їх природних здібностей, передбачає відкритий доступ до всіх ступенів і видів освіти усіх верств населення.

Особливості сучасної системи середньої освіти в Німеччині пов'язані перш за все з федеративним устроєм країни (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Особливості системи середньої освіти в Німеччині

Особливості навчання у різних видах навчальних закладів		
Гімназія	Загальна школа	
	Реальна	Головна
Навчання дає можливість отримати атестат проповну середню освіту	Навчання відкриває шлях до ВНЗ (професійних й академічних)	Навчання спрямоване на професійну освіту. Передбачає допрофільну підготовку

Навчання на вищому гімназійному ступені (10-12, 11-13 класи) дещо схоже на організацію навчання у вітчизняній профільній школі. Схарактеризуємо його особливості, спираючись на дослідження М. Авраменко [1]. Для гімназійного навчання характерним є розподіл навчальних предметів на обов'язкові та елективні (факультативні). Обов'язкові навчальні предмети своєю чергою поділяються на базові та профілюючі. Останні більше зорієнтовані на самостійне навчання учнів, на підготовку до вступу у ВНЗ. У більшості німецьких земель статус обов'язкових гімназійних дисциплін мають німецька мова і література, іноземна мова, суспільствознавство, математика, природничі науки, технологія, релігія, спорт. Елективні навчальні курси слугують поглибленню знань учнів з обов'язкових предметів, а також розширенню їх пізнавальних можливостей та інтересів за рахунок дисциплін, які не входять до переліку обов'язкових.

На вищому гімназійному ступені за кожним учнем закріплюється тьютор. В обов'язки тьюторів входить пояснення учневі особливості навчального процесу у старших класах гімназії, ознайомлення їх з різновидами навчальних курсів та можливими їх комбінаціями, а також професійно-орієнтаційне консультування учнів та психолого-педагогічна їх підтримка в розв'язанні різноманітних проблем, пов'язаних із навчанням, стосунками у шкільному колективі, в сім'ї тощо. Завершується навчання на вищому гімназійному ступені складанням абітури – випускних іспитів, які зараховуються як вступні до ВНЗ. Абітура охоплює три групи навчальних предметів: мовно-літературно-мистецьку, суспільно-наукову, математично-природничо-технічну.

Аналіз досліджень, проведених Л. Фаннінгер [133], дозволив виділити особливості профільного навчання у середній освіті Австрії. Так дослідниця підкреслює, що підготовка до профільного навчання у Австрії починається з основної школи. В основу профільного навчання в австрійській основній школі покладено диференційований підхід, який передбачає врахування вікових, фізичних, психічних, інтелектуальних особливостей дітей і спрямований на всебічний розвиток учнів та забезпечення їхньої фахово-спрямованої освіти. Випускники основної школи можуть далі навчатись в усіх видах шкіл вищого рівня, серед яких: професійно-освітні середні школи, професійно-освітні вищі школи та освітні заклади з дошкільної та соціальної педагогіки, політехнічна школа, професійно-педагогічні та професійні школи (подвійна система), гімназії верхнього рівня.

Основними завданнями профільного навчання основних шкіл Австрії на сучасному етапі є виділені у дослідженні [133]:

- створення умов для врахування й розвитку навчально-пізнавальних й професійних інтересів, нахилів, здібностей й потреб учнів основної школи в процесі їхньої профільної підготовки;
- виховання в дітей гуманних почуттів, любові до праці, забезпечення умов для їхнього життєвого й професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору й оволодіння майбутньою професією;
- формування соціальної та фахових компетенцій учнів, спрямування підлітків до майбутньої професійної діяльності;
- забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю.

Зміст профільної освіти австрійської основної школи побудований із урахуванням тенденції збереження загальнокультурного компонента, який допомагає учневі в оптималізації навчання, за якого б ураховувались його побажання і прагнення і водночас зберігався загальноосвітній стандарт обов'язкової освіти. Програма є базисом для реалізації принципу особистісно орієнтованого освітнього процесу, створення сприятливих умов для розвитку індивідуальних особливостей учнів, їхніх інтересів, потреб, формування в школярів орієнтації на той чи інший вид майбутньої професійної діяльності, розширення можливості учня у створенні власної освітньої траєкторії [133].

Середня освіта Польщі як це зазначено у [115] – триступенева. Загальний час навчання до моменту закінчення середньої школи складає від 12 до 14 років. До системи середньої школи входить: Початкова школа (Szkola Podstawowa) – 6 класів, загальнообов'язкова; Гімназія (Gimnazium) – 4 класи. Фізично школа і гімназія можуть знаходитися в одній будівлі, і учень всі 10 років ходить в одну і ту ж школу, змінивши лише статус з «школяра» на «гімназиста»; Ліцей (Liceum) – 4 роки. Лише після закінчення ліцею можна поступити у ВНЗ. По закінченню середньої школи учні можуть приступити до матуральних іспитів і після успішної їх здачі отримати атестат зрілості (матура), або як ще його називають «swiadectwo dojrzalosci» (свідоцтво зрілості).

Шкільна освіта в Болгарії [47] розділяється за ступенями: основна освіта (початкова освіта – з 1 по 4 клас, прогімназична освіта – з 5 по 8 клас); середня освіта (гімназійну освіту – з 9 по 12 класи). Середня освіта здобувається після успішного закінчення 12-го класу та успішної здачі покладених іспитів. Класифікація шкільної освіти в Болгарії за змістом підготовки поділяється на: 1) загальну – загальноосвітній мінімум і по можливості профільована підготовка, яка ведеться з 1 по 12 клас; 2) професійну – загальноосвітній мінімум і професійна кваліфікація відповідно до державних освітніх вимог. Професійна освіта в Болгарії ведеться: з 7 або 8 класу – протягом трьох років; з 9 класу – протягом чотирьох років; в професійних коледжах, де навчаються особи з середньою освітою – до двох років. Відповідно з рівнями освіти функціонують такі школи: початкові – з 1 по 4 клас; прогімназичні – з 5 по 8 клас; основні – з 1 по 8 клас; гімназичні – з 9 по 12 клас; середні загальноосвітні – з 1 по

12 клас. профільовані (професійні) гімназії: спортивні; за мистецтвами; з культури; спеціальні – технічні, сільськогосподарські, харчові та ін.

Обов’язкова середня освіта в Швейцарії [63] – це початкова школа і перша ступінь середньої освіти (Secondaire I). Secondaire I – це 3 (в деяких кантонах 4) класу, таким чином, обов'язково навчання з 6 до 15 років. Повна середня освіта розрахована на додаткові 3-4 роки навчання в старшій середній школі – Secondaire II. Атестати зрілості Maturit gymnasiale учні отримують у 18-19 років. В кінці першого ступеня середньої освіти (Secondaire I) відбувається поділ учнів на тих, хто здатний вчитися за академічною програмою далі й готуватися до навчання в університеті та на тих, хто успіхів не демонструє. Останні йдуть зі школи й проходять підготовку до отримання атестата про середню професійну освіту – Maturit professionnelle. Швейцарська система освіти демократична – Maturit professionnelle не означає неможливість отримання вищої освіти. У Швейцарії вища освіта буває двох видів: академічна (університетська) і прикладна (професійна). Maturit professionnelle дає можливість вступу в усі вищі навчальні заклади Швейцарії окрім університетів. Ті, хто пройшов на наступний рівень шкільної освіти – Secondaire II, протягом 3 років проходять підготовку до складання іспитів на отримання атестата зрілості Maturit gymnasiale.

У системі середньої освіти Італії [116] розрізняють: початкову школу (з 6 до 11 років), середню молодшу школу (scuola media) (з 11 до 15 років), в якій школярі вивчають італійську мову, історію, географію, математику і природні науки, іноземна мова, мистецтво і музику та середню старшу школу (з 15 до 18-19 років) в якій учні вирішують, вчитися їм за звичайною програмою і готуватися до вступу до ВНЗ, або поєднувати своє навчання з професійною підготовкою. Тут можливі два варіанти. Варіант 1. Учень вирішує продовжити своє навчання за звичайною програмою. У цьому випадку учні продовжують своє навчання в ліцеях, головним завданням яких є підготовка учня до вступу в Університет. Ліцеї діляться за профілем: класичні ліцеї; технічні ліцеї; гуманітарні ліцеї; лінгвістичні ліцеї; ліцеї мистецтв. Вибираючи той чи інший профіль, учень фактично визначається зі своєю майбутньою професією. Як правило, більшість випускників ліцеїв надходять до ВНЗ. Варіант 2. Учні крім шкільної освіти отримують якусь професію. Отримати такий вид освіти можна в так званих «інститутах» або коледжах. Після закінчення учні отримують атестат про середню освіту (diploma di maturita) та свідоцтво про професійну кваліфікацію.

Як зазначається у [47] основні тенденції профільного навчання в зарубіжній європейській школі полягають у такому: профільне навчання передбачено на третьому рівні за Міжнародною стандартною класифікацією освіти ЮНЕСКО (2011 р.), навчальні програми на ньому є диференційованими. Кількість напрямів диференціації/профілів може варіюватись від 3 (Німеччина, Франція) до 17 (Швеція). Старша школа у країнах – членах ЄС – це щонайменше 3 роки (Греція, Данія, Ірландія, Голландія, Німеччина, Норвегія, Португалія, Фінляндія, Франція, Швеція, Шотландія), а то 4 (Австрія, Англія, Уельс, Бельгія, Люксембург, Північна Ірландія).

У більшості країн Європи (Франції, Голландії, Шотландії, Англії, Швеції, Фінляндії, Норвегії, Данії й ін.) усі учні до 6-го року навчання в основній загальноосвітній школі формально одержують однакову підготовку. До 7-го року навчання учень повинен визначитись у виборі свого подальшого шляху. Кожному учневі пропонуються два варіанти продовження освіти в основній школі: «академічний», який у подальшому відкриває шлях до вищої освіти, та «професійний», в якому навчаються за спрощеним навчальним планом, що містить переважно прикладні та профільні дисципліни [47].

Коротка характеристика зарубіжного досвіду організації профільного навчання, представлена у Проекті Концепції профільного навчання [63], засвідчує існування двох базових підходів до організації профільного навчання, а саме: 1) профілізація в межах єдиної установи; 2) профілізація в межах окремих типів навчальних закладів (академічних, технічних, професійних тощо).

Там же підкреслюється, що незалежно від національної специфіки в усіх країнах Європи профільне навчання базується на визначенні переліку навчальних предметів/освітніх галузей, змісту, вмінь і навичок/компетентностей, необхідних для підготовки молоді до дорослого життя.

Профільний предмет залишається головним компонентом змісту освіти на цьому рівні, передбачаючи поглиблене вивчення інших предметів обраного профілю. Компонент із предметів за вибором надає учням можливість удосконалювати знання з обраної галузі шляхом вивчення поглиблених модулів з фаху або споріднених з ним. Можливим є вибір протилежних до профілю дисциплін або дисциплін загального характеру [63]. Як зазаначала З. Слєпкань [122] у цілому, у старшій зарубіжній школі нині спостерігається стійка тенденція до скорочення кількості профілів і навчальних курсів за рахунок збільшення у навчальному плані обов'язкових предметів і курсів.

Загальносвітові тенденції розвитку освіти свідчать про те, що в більшості розвинених країн світу суттєвий складник реформи освіти пов'язується з проблемою профільної диференціації навчання. У цих країнах педагоги обрали шлях поліфуркації, тобто шлях більш широкої розмаїтості ухилів і напрямків. Погоджуючись з поглядом О. Локшиної [74], зазначимо, що серед основних цілей, що ставить перед собою старша школа в зарубіжних країнах, потрібно передусім виокремити такі:

- індивідуальний розвиток особистості, розкриття її потенціалу;
- задоволення потреб економіки країни у кваліфікованій робочій силі;
- соціальна та культурна інтеграція, формування активного члена громадянського суспільства;
- закладення основ для цiложиттєвого навчання.

У розвинених зарубіжних країнах профільність навчання тісно взаємопов'язана з організацією професійної орієнтації учнів шкіл задля реальної індивідуалізації навчання, наближення його цілей і завдань до потреб ринкової економіки. Хоча, як таке, поняття «професійна орієнтація» в зарубіжній педагогіці не має використання, система інформування учнів про стан ринку праці, про можливості і способи професійного самовизначення має узагальнену назву career development, тобто «розвиток кар'єри».

Хоча в цілому у зарубіжних країнах спостерігається тенденція збільшення у навчальному плані обов'язкових предметів і курсів, учням шкіл США, Англії та Шотландії пропонується широкий спектр елективних предметів, які відіграють головну роль у здійсненні спеціалізованого навчання.

Цікавими є особливості профільної диференціації та математичної освіти у Канаді, США, Японії.

Стосовно особливостей профільної диференціації у Японії, США, Канаді (за матеріалами [55; 117]), слід відмітити, що у Японії після 9 років навчання за загальною для всіх програмою учні переходять у вищу середню школу, де вони обирають курс навчання з пропонованих їм більш, ніж двадцяти напрямків, умовно поділених на три потоки: загальний потік, академічний (готує до вступу на природничі і гуманітарні факультети університету), професійний (підготовка здійснюється за кількома блоками). У старшій середній школі США чинними є три різних навчальних плани, що відповідають трьом різним потокам: академічному, професійному (практичному) і загальному. Академічний потік готує до коледжу і містить більшу кількість академічних предметів (обов'язкових і на вибір; математика до числа обов'язкових не входить). На загальному і практичному потоках більше утилітарних, професійних курсів, курсів на вибір (обов'язковим на практичному потоці є курс прикладної математики). Повна середня освіта у канадських навчальних закладах, серед яких є як державні, так і приватні, складається із навчання в початковій (1-6 класи, 6-12 років) і середній школі (7-12 класи, 13-18 років) і відкриває дорогу до ВНЗ. Канадські коледжі поділяються на суспільні (Community Colleges), технічні (Technical Institutes) і коледжі системи CEGEP (College d'Etudes Generales et d'Education Professionnelle). Основне завдання коледжів – готувати професійні кадри для промисловості й бізнесу. Зокрема, технічні коледжі – це щось на зразок професійно-технічних училищ, студенти яких за короткий строк одержують певну професію. У коледжі вчаться два роки, і більша частина навчального часу проходить у лабораторіях і майстернях. По закінченні студенти отримують професійні дипломи.

Математична освіта у профільній школі Японії, США, Канади також має свої особливості [55; 117].

В Японії у школах всіх напрямків розроблено різні за змістом і рівнем викладання курсів математики. Учень може обмежитися одним загальним обов'язковим курсом або обрати ще один або кілька інших.

В школах США учень може обрати для вивчення один, два або кілька курсів математики, але може не вибрати жодного. Варто помітити, що такий підхід призвів до зниження рівня математичної підготовки випускників середньої школи. У зв'язку з цим у 1987 р. Національна рада вчителів математики США запропонувала для обговорення програму з математики, загальну для всіх учнів. У ній передбачаються різні методичні підходи навчання учнів, що обрали різні напрямки навчання, і формулюються додаткові теми, що поглиблюють або розширюють основний курс (для тих, хто буде продовжувати навчання або планує пов'язати надалі свою професійну діяльність з математикою)

У канадській школі математика поділяється на два рівні – базовий (Foundations) і поглиблений (Pre-calculus). До речі, тут вона не розбивається на окремі уроки з алгебри та геометрії. Базовий рівень зазвичай обирають учні з гуманітарними нахилами, більш поглиблений – майбутні «технарі». Якщо в 10-11-х класах математика є обов'язковим предметом, то в 12-му класі вона переходить у категорію виборних, а також доповнюється ще одним, третім рівнем складності – уведенням у математичний аналіз (Calculus)

Аналіз закордонного досвіду, представлений у Проекті концепції профільного навчання [63] дозволяє виокремити такі загальні для всіх вивчених країн риси організації навчання у старшій ланці загальної середньої освіти [72]:

1. Загальна освіта на старшому ступені в усіх розвинених країнах є профільною.

2. Як правило, профільне навчання охоплює три останніх роки навчання у школі.

3. Частина учнів, які продовжують навчання у профільній школі, неухильно зростає в усіх країнах і складає на сучасному етапі не менше 70 %.

4. Кількість напрямів диференціації, які можна вважати аналогами профілів, невелика. Наприклад, два в англомовних

країнах (академічний і неакадемічний), три у Франції (природничо-науковий, філологічний, соціально-економічний) і три в Німеччині («мова-література-мистецтво», «соціальні науки», «математика-точні науки-технологія»).

5. Організація профільної підготовки розрізняється за способом формування індивідуального навчального плану учнів: від досить жорстко фіксованого переліку обов’язкових навчальних курсів (Франція, Німеччина) до можливості вибору з безлічі курсів, пропонованих на весь період навчання (Велика Британія, Шотландія).

6. Кількість обов’язкових навчальних предметів (курсів) на старшому ступені в порівнянні з основними істотно менша. Серед них передбачено в обов’язковому порядку природничі науки, іноземні мови, математику, рідну словесність, фізичну культуру.

7. Як правило, старша профільна школа (ПШ) виокремлюється як самостійний вид освітньої установи: ліцей – у Франції, гімназія – у Німеччині.

8. Дипломи (посвідчення) про закінчення старшої (профільної) школи зазвичай надають право на безпосереднє зарахування до вищих навчальних закладів.

9. Увесь післявоєнний період кількість профілів і навчальних курсів на старшому ступені школи за кордоном постійно скорочувалася, одночасно зростала кількість обов’язкових предметів і курсів. При цьому все більш чітко виявлялись вплив і зростаюча відповідальність центральної влади за організацію та результати освіти. Це відбивається на всіх етапах проведення іспитів, розробленні національних освітніх стандартів, зменшенні розмаїтості підручників та ін. [47].

10. Характеристика організації профільного навчання у трьох країнах Японія, США, Канада, які мають багаторічний досвід диференціації навчання у старшій ланці школи спонукає до таких висновків:

- розмаїтість напрямів навчання у старших класах дозволяє ураховувати схильності і здатності практично усіх учнів, а також потреби держави в різних фахівцях;

- орієнтація курсів математики на той або інший загальний профіль значною мірою спрямована на можливе більш повне задоволення схильностей учнів за умови оволодіння ними майбутньою спеціальністю (однак будь-яка математична підготовка у старшій ланці базується на єдиній підготовці в середній ланці школи);
- наявність великої кількості курсів математики на вибір учнів у поєднанні з мінімальним обов'язковим курсом, на наш погляд, недостатньою мірою може забезпечити повноцінну базову математичну освіту;
- здатності і схильності дітей можуть бути враховані не тільки під час вибору профілю навчання (або типу навчального закладу), але й у процесі навчання за рахунок гнучкості навчальних планів і програм;
- ЗОШ в розвинених зарубіжних країнах має такі характерні риси, що дозволяють уважати її профільною: високий ступінь взаємодії школи з ринком праці; розвинений інформаційно-аналітичний супровід професійної орієнтації, в тому числі, використання обширних банків даних, тестових методик оцінки особистості, взаємодія з роботодавцями; переважання активних форм і методів пізнання різних сфер професійно-трудової діяльності (тренінгів, ділових ігор, трудових практик); цільова установка на виховання таких якостей особистості, як самостійність, відповідальність, уміння об'єктивно оцінювати свої потреби і можливості, прагнення до кар'єрного росту.

1.4. Досвід впровадження і функціонування профільного навчання в Україні

До втілення ідеї профілізації старшої школи в нинішній її інтерпретації українська педагогіка йшла через апробацію і впровадження таких її форм, як спеціалізовані школи для дітей з підвищеними здібностями і навчальними можливостями (фізико-математичні, з поглибленим вивченням іноземних мов, музичні, художні та ін.), класи з поглибленим вивченням окремих предметів, упровадження широкого спектру факультативів, навчально-виробничі комбінати, які не лише забезпечували реалізацію спільного для всіх учнів змісту трудового і виробничого навчання, а й у багатьох випадках були центрами професійного навчання старшокласників.

В Україні є достатній позитивний досвід впровадження і функціонування профільного навчання. Нині в Україні має місце розгалужена мережа різних типів навчальних закладів: ліцеї, гімназії, колегіуми. Ці навчальні заклади надають можливість здобуття поглиблених знань із певних напрямів. Популярність навчання в ліцеях та гімназіях доводить, що попит на профільне навчання в старшій школі є.

Прийняттям Закону України «Про загальну середню освіту» (1991) [46], «Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа)» (2001) [58], «Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті» (2002) [89], «Концепції профільного навчання в старшій школі» (від 25. 09. 2003 і 11. 09. 2009) [61], у яких законодавчо затверджено введення профільного навчання в старшій школі, розпочався новий, сучасний етап у розвитку проблеми профільного навчання. У результаті, визначено сутність, мету, принципи, а також структуру профільного навчання, окреслено можливі форми організації, умови комплексного навчально-методичного супроводження.

Теоретичного оформлення ідея профільності набула в Концепції профільного навчання [62; 61], яка визначає сутність, мету і принципи організації профільного навчання, його структуру, форми організації, сутність етапу до профільної підготовки та умови реалізації Концепції. З моменту затвердження Концепція набула реалізації в різноманітних формах функціонування старшої профільної школи. Аналіз науково-методичних проблем практичної реалізації Концепції, розроблення нових державних документів [30; 39; 64; 81; 90; 101; 99; 131], які унормовують профільне навчання, характеристика й аналіз вітчизняного й зарубіжного досвіду організації профільного навчання зумовили оновлення Концепції профільного навчання у старшій школі і наразі її Проект [63] після громадського обговорення був затверджений наказом МОН України від 21.10.2013 № 1456 «Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі». Оновленою Концепцією [103] визначено мету і завдання профільного навчання, реалізація яких здійснюється на основі принципів соціальної рівноваги, наступності і неперервності, гнучкості, варіативності, діагностико-прогностичної реалізованості, диференціації, індивідуалізації. Цим же документом визначено структуру і форми організації профільного навчання, особливості до профільної підготовки, умови реалізації Концепції.

Завершуючи короткий нарис історії становлення профільної школи, зазначимо, що ідеї профільного навчання були актуальними як у вітчизняній так і у зарубіжній педагогіці в усі періоди її розвитку, і хоча на різних етапах функціонування школи вони реалізовувалися по-різному, слід наголосити на подібних рисах, характерних для процесу профілізації, а саме: вибір типу школи з біфуркацією або поліфуркацією; розгляд диференціації, як принципу навчання; введення факультативів та курсів за вибором; урахування нахилів і здібностей учнів, а також потреб держави в спеціалістах різних галузей. У світлі проблематики нашого дослідження це означає, що процес профілізації сучасної старшої школи має об’єктивний і закономірний характер і має бути спрямований на розв’язання таких завдань:

- сприяти встановленню рівного доступу до повноцінної освіти різним категоріям учнів відповідно до їх здібностей, індивідуальних схильностей й потреб;
- створити умови для диференціації змісту навчання старшокласників з широкими і гнучкими можливостями побудови учнями індивідуальних освітніх програм;
- забезпечити поглиблене вивчення окремих предметів програми повної загальної освіти;
- розширити можливості соціалізації учнів, забезпечити наступність між загальною і професійною освітою, більш ефективно підготувати випускників школи до засвоєння програм вищої професійної освіти.

Психолого-педагогічні розвідки науковців з питань профілізації загальноосвітньої школи проводилися в різних напрямках. Теоретичні засади диференціації навчання розкривали вітчизняні науковці Н. Бібік [12; 13; 50], М. Бурда [21; 22], В. Кизенко [52], С. Логачевська [73], Л. Покроєва [98], А. Самодрин [109; 110], О. Чашечникова [163]; російські дослідники П. Лернер [67; 68], В. Монахов [83], В. Орлов [93], А. Пінський [96], К. Рибніков [108], А. Хуторський [140]; білоруські науковці І. Ананич, А. Василевський, В. Водейко [3], Н. Огурцов, Г. Бунтовська [91], Л. Рожина [106]; західноєвропейські науковці, а саме: естонські Х. Лійметс [69; 70], І. Унт [132]; англійські Дж. Волфорд [173], П. Гордон, Д. Дин, Р. Олдріч [168]; а також американські дослідники Л. Кремін [165], Т. О'Брайн [170] та інші.

В. Алфімов [9], Л. Божович [15], В. Давидов [38], С. Максименко [78], С. Рубінштейн [107], А. Фурман [136], Є. Ямбург [160] досліджували психологічні передумови профільного навчання.

Розвиток профільного навчання в історичному аспекті розкрито в працях Г. Ващенка [25], М. Гончарова [34], В. Ревякіної [105] та інших.

Методика вивчення математики, інформатики, фізики, медицини в умовах профільного навчання розглянуто у кандидатських та докторських дисертаціях Т. Гордієнко [35], М. Губанової [37], Л. Жовтан [45], Т. Захарової [48], О. Лосєвої [75], М. Пригодій [102], І. Смирнової [125], Я. Цехмістер [141], О. Шестакової [154].

Досвід реалізації профільного навчання за кордоном проаналізовано у працях Н. Воскресенської [29], О. Локшиної [74], Н. Семергей [113], М. Сметанського [123], І. Сотниченко [127], М. Авраменко [1] і Л. Фаннінгер [133].

Чільне місце серед досліджень займають наукові розвідки щодо методичної підготовки вчителів до роботи у профільній школі: І. Акуленко [7] (компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи), В. Моторіна [86, 87] (професійна компетентність учителя математики профільної школи), В. Оніпко [92] (професійна підготовка вчителя природничих дисциплін до роботи у профільній школі).

Організаційні засади профільного навчання в загальноосвітній школі розроблені у працях І. Лікарчука [71] (елективне профільне навчання), А. Остапенка [95], (різновіковий розподіл профілів), І. Фролова [135] (внутрішньокласна профільна диференціація), А. Макарчук, Н. Райсвіха [77] (дистанційне профільне навчання) тощо. В сучасних дослідженнях розкрито коло питань, спрямованих на розв’язання проблем підготовки учнів до вибору професії вчителя у профільному навчанні.

На особливу увагу заслуговує комплекс проблем диференціації навчання окремим дисциплінам. Аналізуючи педагогічні дослідження в зазначеному напрямку, ми дотримуємо точки зору академіка РАО В. Борисенкова [17, с. 8] про те що строгої наукової теорії з цієї проблеми не створено дотепер ні в нашій країні, ні за кордоном. Скрізь модернізація і спроби удосконалення систем диференційованого навчання ведуться фактично методом спроб і помилок. На сьогоднішній день психолого-педагогічна наука і практика оперує такими поняттями: «диференціація», «диференціація навчання» «диференційований підхід до навчання», «рівнева диференціація», «профільна диференціація». Диференціація навчання виокремлюється як складова частина і необхідна умова гуманізації і демократизації освіти, її переведення на нову культуростворюючу основу.

Під диференціацією розуміють:

- таку систему навчання, при якій кожен учень, опановуючи деяким мінімумом загальноосвітньої підготовки, що є загальнозначущим і забезпечує можливість адаптації у постійно змінних життєвих умовах, одержує право і гарантовану можливість приділяти переважну увагу тим напрямкам, що найбільшою мірою відповідають його схильностям (Г. Дорофєєв, Л. Кузнєцова, С. Суворова, В. Фірсов) [41];
- урахування індивідуальних особливостей учнів у тій формі, коли учні групуються на основі яких-небудь особливостей для окремого навчання, і навчання в цьому випадку відбувається за різними навчальними планами і програмами (І. Унт) [132];
- спосіб захоплення молодих людей знаннями, але з максимальним урахуванням їхніх індивідуальних особливостей, уподобань і здібностей (О. Бугайов) [19];
- множинність і варіативність індивідуальних заходів досягнення суспільно узгоджених цілей освіти (А. Фурман) [137].

Ми схиляємося точки зору групи дослідників [154] і будемо розуміти під диференціацією систему навчання, оскільки такий підхід у найбільшій мірі сприяє організації професійно спрямованого навчання.

Також варто розрізняти два терміни: «диференційоване навчання» і «диференційований підхід у навчанні». Терміни «диференційоване навчання», «диференційований підхід», – пише О. Дружиніна [42], виникли в зв’язку з розробленням педагогічної проблеми індивідуалізації навчальної діяльності, тобто поняття «диференціація» є похідним від поняття «індивідуалізація». У першому випадку розглядаються соціально-економічні, правові, організаційно-управлінські, дидактичні аспекти навчання; розробляється статус навчальних закладів різного типу, умови вступу, зміст і організація навчально-виховного процесу, терміни навчання, наповнюваність груп, кваліфікація, навантаження, оплата викладачів і т.п. Усе це визначає вимоги до роботи шкіл з диференційованим навчанням, мету їхнього створення. У другому випадку йдеться про наукове розроблення диференційованого підходу до кожного учня для розв’язання проблем добору, формування і корекції розвитку особистості в обраній галузі навчання [159, с. 46].

Диференційоване навчання – це: 1) форма організації навчального процесу, при якій учитель працює з групою учнів, сформованою з урахуванням наявності в них яких-небудь значимих для навчального процесу загальних якостей (гомогенна група); 2) частина загальної дидактичної системи, що забезпечує спеціалізацію навчального процесу для різних груп учнів (Г. Селевко) [111].

Ми поділяємо точку зору О. Чашечникової [145], яка під диференційованим навчанням математики пропонує розуміти таке навчання, що: *враховує:* психічні й індивідуально-психологічні особливості учнів, навчальні досягнення учня з математики, професійну зорієнтованість і загальнокультурну підготовку учнів; *реалізується* через диференціацію змісту навчання відповідно до цілей, а також диференціацію стратегій і тактик навчання.

Як зазначає І. Осмоловська [94] диференціація навчання дозволяє організувати навчальний процес на основі урахування індивідуальних особливостей особистості, забезпечити засвоєння всіма учнями змісту освіти, що може бути різним для різних учнів, але обов'язковим для усіх виокремленням інваріантної частини. При цьому кожна група, що має подібні індивідуальні особливості, йде своїм шляхом. Процес навчання в умовах диференціації стає максимально наближеним до пізнавальних потреб учнів, їхніх індивідуальних особливостей.

З точки зору Г. Селевко [111] диференціація навчання – це створення різноманітних умов навчання для різних шкіл, класів, груп з метою урахування особливостей їхнього контингенту; диференційований похід у навчанні – комплекс методичних, психолого-педагогічних й організаційно-управлінських заходів, що забезпечують навчання в гомогенних групах.

Питання диференційованого підходу на матеріалах навчання математики розглядали вчені-методисти: І. Акуленко [4, 5, 6, 8], І. Богатирьова, [14], М. Бурда [23], К. Власенко [26], Я. Грудьонов [36], Л. Жовтан [45], В. Кірман [53] В. Козира [54], С. Семенець [112], З. Сердюк [114], О. Скафа, В. Прач, І. Реутова [119; 121; 120], З. Слєпкань [122], Т. Хмара [139; 138], А. Хуторський [140], О. Чашечникова [145; 144; 143; 142], В. Швець [153], С. Яценко [161].

Як зазначає Л. Голік [33], за диференційованого підходу до навчання реальною фактичною метою є оволодіння кожним учнем практичними вміннями й навичками на рівні, що в даний момент відповідає його навчальним можливостям і професійним намірам.

Диференційований підхід (як до змісту освіти, так і до організації процесу навчання) [2] – така форма реалізації принципу індивідуалізації, яка оптимально забезпечує орієнтацію на індивідуально-психологічні особливості учнів, застосування в роботі з ними спеціальних засобів.

Диференційований підхід [146] – це динамічна форма втілення в навчальний процес дидактичного принципу доступності навчання та психологічного принципу розвивального навчання – індивідуалізації на суб'єктному рівні.

На підставі всіх вище розглянутих досліджень можна зробити висновок про те, що диференціація є системою навчання, яка ґрунтується на диференційованому підході до навчання, основою для диференціації можуть бути загальні і спеціальні здібності учнів, їхні інтереси і проектована професія.

Диференціація за змістом припускає навчання різних груп учнів за програмами, що відрізняється глибиною викладу матеріалу, обсягом відомостей і навіть номенклатурою внесених питань. Цей вид диференціації іноді називають профільною диференціацією. Профільне навчання, як зазначає В. Дорофєєв [41], є більш демократичною і широкою формою фуркації школи на старшому ступені.

Індивідуалізація навчання у старшій ланці середньої школи припускає надання учням можливості одержати освіту за різними напрямами, різними навчальними планами і програмами, тобто здійснення профільної диференціації на базі фуркації. (Фуркація [55] – побудова навчального плану старших класів середньої загальноосвітньої школи за ухилами (гуманітарним, природничо-математичним та ін.) з переважною увагою до визначеної групи навчальних предметів).

Концепцією [60] визначено, що профільне навчання – вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання.

Також у науковій літературі [11; 156; 158] поняття «профільне навчання» трактується як:

- навчальна праця, спрямована на вивчення освітніх галузей, що містять типові знання, уміння, навички, характерні для певної сфери діяльності, професії, спеціальності (Е. Аршанський) [11];
- один з видів диференціації – форма організації навчальної діяльності учнів середнього та старшого віку, при якій ураховуються їх нахили, інтереси, здібності (Н. Шиян) [156];
- вид диференціації навчання у старших класах, що передбачає поглиблене вивчення учнями одного чи кількох предметів, спеціальних курсів, які відповідають певному профілю і забезпечують допрофесійну підготовку з метою вибору майбутньої сфери діяльності (І. Якиманська) [158].

Останнє трактування І. Якиманської, на нашу думку, як найточніше визначає профільне навчання з точки зору його професійної спрямованості, а тому у власному дослідження ми схиляємося саме до цього трактування.

У Концепції [60] зазначається, що профіль навчання – це спосіб організації диференційованого навчання, який передбачає поглиблене та професійно зорієнтоване вивчення циклу споріднених предметів. Профіль навчання охоплює таку сукупність предметів: базові, профільні та курси за вибором. Базові загальноосвітні предмети є обов'язковими для всіх профілів. Профільні загальноосвітні предмети – це предмети, що реалізують цілі, завдання і зміст кожного конкретного профілю. Курси за вибором – це навчальні курси, які доповнюють навчальні предмети сприяють формуванню індивідуальної освітньої траєкторії школярів, орієнтують на усвідомлений та відповідальний вибір майбутньої професії.

Концепцією [60] визначається, що не слід ототожнювати поняття «профільне навчання» і «поглиблене вивчення предметів» та «спеціалізоване навчання». Оскільки профільне навчання надає змогу учням обрати не один-два предмети, а конкретну пріоритетну галузь для глибшого вивчення, опанування групи, циклу, сукупності предметів на взаємодоповнювальній і підтримуючій основі. Відмінності профільного і поглибленого навчання полягають, переважно, у ступені спеціалізації і, як наслідок, у глибині відповідних курсів і ширині охоплення ними контингенту учнів. Поглиблене вивчення предметів припускає досить просунутий рівень підготовки учнів, що дозволяє досягти високих результатів і разом з тим обмежує кількість учнів [83, с. 43].

Слід підкреслити, що поглиблене і спеціалізоване навчання передували профільному саме в математичній підготовці. С. Шварцбурду належить ідея створення спеціалізованих фізико-математичних шкіл. Автор підкреслював, що підвищена математична підготовка може забезпечити різні рівні професійної спрямованості навчання, що уможливлюють досягнення хоча б однієї з наступних цілей: а) професійної орієнтації; б) допрофесійної підготовки; в) професійної підготовки. Таким чином, ідея професійної спрямованості навчання, що виникла ще в 60-і рр. XX ст., є актуальною і в сучасній профільній школі, оскільки, як підкреслював С. Шварцбурд [150], різні види підвищеної математичної підготовки допускають різні рівні професійної спрямованості навчання. Так позакласна робота, виявляючи інтереси, схильності і здібності, учнів передбачає попередню професійну орієнтацію учнів, факультативні заняття дозволяють досягти цілей професійної орієнтації, математична спеціалізація дозволяє більш наблизитися до мети прищеплення професійних навичок, навчанню у школах і класах з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики властива допрофесійна підготовка.

Прерогатива й обов’язок математики – розвиток абстрактного і логічного мислення, тобто якостей особистості, необхідних для пізнання нових галузей знань, для полегшення адаптації до постійно мінливих умов життя. Залежно від тієї ролі, що математика відіграє в освіті людини, розмежовують два типи шкільних курсів для завершального ступеня школи: курс загальнокультурної орієнтації (назвемо його курсом А), і курси підвищеного типу, що забезпечують подальше вивчення математики і її застосування як елемент професійної підготовки (курс В, курс С) [41]. Орієнтація на особистість учня вимагає, щоб диференціація навчання математики враховувала потреби всіх учнів – не тільки сильних, але і тих, які цей предмет засвоюють складно або чиї інтереси стосуються інших галузей.

Підкреслимо ті принципи, які виокремив і поклав в основу системи диференціації шкільного навчання Ю. Колягін [55, с.25]:

- уведення навчання за напрямами, лише після того, як учні одержать достатню єдину базову освіту і затвердяться у своїх схильностях;
- на старшій ступені навчання забезпечення можливо більшу кількість напрямів навчання;
- у кожному навчальному предметі доцільно поєднувати різні напрями навчання у блоки за принципом подібності цілей і завдань навчання за цими напрямами задля створення єдиних програм у кожному блоці;

- математика повинна входити до набору обов’язкових навчальних предметів кожного з профілів (фізико-математичного, технічного та гуманітарного).

Проектування профільного навчання математики має враховувати щонайменше два фактори: змістову спрямованість і рівень навчання. Розмаїття профілів навчання математики у межах базової профільної математичної підготовки може мати три напрями: *загальнокультурний, прикладний, теоретичний* [18, с. 28].

Залежно від профілю навчання математики може проводитися на одному з трьох рівнів: 1) стандарту; 2) академічному рівні; 3) профільної підготовки.

Профільна диференціація навчання математики передбачає: створення умов для свідомого вибору учнями профілю; наступність з допрофільним навчанням математики і навчанням математики у звичайних класах загальноосвітньої школи; досягнення всіма учнями базового рівня навчання математики; розроблення державних стандартів з математики для різних профілів навчання; реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, орієнтованої на профіль навчання як одного з головних засобів формування профільних інтересів засобами математики; відмінність змісту навчання математики у профільних класах і звичайних класах; реалізацію рівневої диференціації, що аспектуалізує і структурно градує диференціацію навчання математики для кожного профілю; розмаїтість форм і видів класної та позакласної роботи; поглиблене вивчення математики як одного з видів профільного навчання [28].

Профільна диференціація навчання математики повинна: забезпечити необхідний загальнокультурний рівень математичної підготовки молоді, який визначається замовленням суспільства й можливостями учнів певного віку; задовольнити потреби профільної підготовки в розвитку пізнавальної і математичних видів діяльності учнів, що характерні для даного профілю; формувати засобами математики професійні нахили учнів [24].

Математика, як обов’язковий предмет на фізико-математичному або технічному профілі, сумніву не викликає. Що ж стосується гуманітарного профілю, то, як підкреслює О. Чашечникова [145], у класах гуманітарного профілю на практиці домінує звуження змісту, необґрунтоване зменшення складності завдань. Ми дотримуємось погляду Ю. Колягіна [55], що математична освіта всіх гуманітарних профілів повинна підлягати загальній меті – забезпечити засвоєння системи математичних знань і умінь, що фактично є елементами загальної культури; розвинути логічне мислення і просторову уяву; сформувати уявлення про прикладні можливості математики; подати відомості про історію розвитку науки; дати знання, необхідні для застосування в побуті й обраній спеціальності.

Концепцією й навчальними програмами [61; 60; 49] передбачено врахування особливостей профілю у професійному становленні особистості. Так, загальнокультурний напрям математичної освіти сприяє становленню гуманітарної культури людини; формуванню уявлення про математику як форму опису та метод пізнання дійсності, про роль математики для прогресу суспільства; він будується на основі широкого використання можливостей образного мислення учнів, доцільний для суспільно-гуманітарного, художньо-естетичного, спортивного напрямів. Прикладний напрям передбачає достатньо уваги приділити розвиненню логічного, просторового мислення, формуванню готовності застосовувати математику для моделювання реальних процесів і явищ, зокрема володінню методом математичного моделювання. Цей напрям доцільний для природничо-математичного, суспільно-гуманітарного, технологічного напрямів, профілів, у яких математична освіта є інструментом оволодіння певними професіями (інженерно-технічними, економічними, сільськогосподарськими, хіміко-біологічними, воєнно-технічними тощо). Теоретичний напрям математичної підготовки розрахований на формування теоретичного мислення, яке характеризується гармонійною взаємодією аналізу й синтезу, а також високим рівнем абстракції, побудованої на основі пізнавальної рефлексії, завдяки якій формується орієнтовна основа дій, оцінюються результати їх виконання. Напрям навчання математики доцільний для профілів, у яких математична освіта є не тільки засобом, а й ціллю отримання освіти. Майбутня професійна діяльність невід'ємно пов'язана з математичною діяльністю.

Як підкреслює З. Слєпкань [122], особливості математичної підготовки в різних класах старшої профільної школи визначаються і кількістю годин на вивчення математики, і рівнями її вивчення.

Зв'язок із подальшою професійною діяльністю має бути відображений і у змісті навчання на кожному з трьох рівнів підготовки. Зміст навчання на рівні стандарту спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури, оскільки не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність. На академічному рівні підготовки більш глибокий і тематично складний зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Навчання математики на цьому рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами й забезпечує їх ефективне засвоєння, крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напряму спеціалізації. Профільний рівень підготовки спрямований на формування ключових компетентностей старшокласників, набуття ними навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти, оскільки передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуваннями.

Окрім того, реалізація профільного навчання математики у 10-11 класах забезпечується системою курсів за вибором (за рахунок варіативного компоненту), які певною міроюураховують інтереси й можливості учнів даного профілю. Курси за вибором поглиблюють та розширюють основний курс математики відповідно до профілю навчання, надають можливості для організації творчої роботи учнів через систему індивідуальних завдань професійної спрямованості. Так

М. Бурда і О. Глобін [20] визначають наступні функції елективних курсів: мотивація самовиховання та вибору професії; переконанання у правильності професійного вибору; сприяння формуванню професійно важливих якостей особистості старшокласників; слугування розвитку прикладних математичних знань і умінь. Аналіз навчальних програм факультативних курсів та курсів за вибором [49], надає змогу стверджувати, що більшою мірою орієнтації на майбутню професію сприяють курси за вибором пропоновані на природничо-математичному і технологічному напрямах, а також суспільно-гуманітарному напрямі, тематика пропонованих курсів орієнтована на прикладну спрямованість математичних знань, проте слід зауважити, що у програмах зазначених курсів не спостерігається орієнтація на професії, безпосередньо пов'язані з математикою та її викладанням, про що зазначається в інструктивно-методичному листі МОН про викладання математики у 2011–2012 н.р. [50].

Навчальні програми факультативних курсів та курсів за вибором передбачають *для природничо-математичного й технологічного напрямів такі курси*:

1. Обернені тригонометричні функції
2. Ірраціональність у рівняннях, нерівностях і алгебраїчних виразах
3. Елементи теорії чисел
4. Обчислювальний практикум
5. Прикладні задачі на екстремум
6. Зображення та геометричні перетворення
7. Застосування похідної до розв'язування задач
8. Інтеграл та його застосування
9. Математичні моделі у фізиці
10. Фізична математика
11. Історія математики
12. Побудова зображень геометричних фігур
13. Обчислення в системах комп'ютерної алгебри

Для суспільно-гуманітарного напряму:

1. Історія тригонометрії
2. Економіко-математичне моделювання

3. Задачі лінійного програмування
4. Основи фінансової математики та математичної економіки
5. Математика прибутків
6. Задачі економічного змісту в математиці
7. Комп’ютерна математика для економістів

Для поглибленого вивчення математики:

1. Ціла й дробова частина числа
2. Вища математика
3. Введення у фрактальний аналіз
4. Елементи стохастики
5. Комплексні числа та їх застосування

Отже, аналізуючи процес диференціації навчання в загальноосвітній школі, визначаємо, що роль математичної підготовки в освіті, розвитку і вихованні людини визначають основні завдання навчання математики в загальноосвітній школі, проголошені основними державними документами про освіту [39; 40; 59; 61]: 1) формування уявлень про ідеї і методи математики і їхню роль у пізнавальній діяльності; оволодіння системою математичних знань й умінь, необхідних у повсякденному житті й трудовій діяльності кожному членові сучасного суспільства, достатніх для вивчення інших дисциплін, продовження навчання в системі безперервної освіти; 2) формування і розвиток засобами математики якостей особистості, необхідних людині для повноцінного функціонування в суспільстві.

Що стосується диференціації навчання, то Концепцією [61] визначено, що принциповим положенням організації шкільної математичної освіти стає глибока й різнобічна диференціація навчання математики, що здійснюється різними шляхами. Так, у старших класах диференціація здійснюється за рахунок навчання на різних профілях за різними програмами. Поряд із програмами, що реалізують базовий компонент освіти, передбачаються програми, які поглиблюють змістовні лінії базового компонента або розширюють його відповідно до потреб профілю [51, с. 27-28].

Принциповими ідеями перебудови навчально-виховного процесу відповідно до Концепції [51] є:

- створення в навчальному процесі ситуацій, коли обсяг і рівень викладання перевищує обсяг і рівень обов'язкових вимог;
- орієнтація викладання на кінцевий результат, співвіднесений з цілями навчання математики;
- орієнтація на розв'язування задач як на провідний вид діяльності учнів під час вивчення математики;
- створення в ході викладання математики позитивного емоційного тла, формування ціннісного ставлення до цієї галузі знань, особистісних мотивів і потреб її вивчення.

Профільне навчання, складова частина диференційованого навчання, розглядається як навчальна праця, спрямована на засвоєння типових знань, характерних для визначеної сфери діяльності, професії, спеціальності.

Список використаних джерел до розділу 1

1. Авраменко М. М. Профільне навчання в середніх школах Федеративної Республіки Німеччини: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.01 / М. М. Авраменко. – К., 2007. – 20 с.
2. Акимова М. К. Индивидуальность учащегося и индивидуальный поход / М. К. Акимова, В. Г. Козлова. – М.: Знание, 1992. – 80 с.
3. Актуальные проблемы дифференцированного обучения / [И. А. Ананич, А. Б. Василевский, В. И. Водейко и др.]; под ред. Л. Н. Рожиной. – Минск : Нар. асвета, 1992. – 189 с.
4. Акуленко И. А. Развитие приёмов логического мышления учащихся гуманитариев в процессе изучения курса по выбору «Элементы логики» / И. А. Акуленко // Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «64 Герценовские чтения». – СПб, 2011. – С. 216–218.
5. Акуленко І. А. Вивчення елементів математичної логіки у поглибленому курсі математики / І. А. Акуленко // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 4. – С. 11–19.
6. Акуленко І. А. До проблеми навчання математики учнів-гуманітаріїв на основі урахування їхніх індивідуальних і типових особливостей / І. А. Акуленко // Дидактика математики. – 2010. – Вип. 34. – С. 93–98.
7. Акуленко І. А. Методика навчання математики в профільній школі : методичні рекомендації до проведення практично-семінарських занять : методичний посібник для організації аудиторної та самостійної роботи студентів / І. А. Акуленко ; за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси : видавець Чабаненко Ю., 2012. – 165 с.
8. Акуленко І. А. Проблема формування та розвитку логічного мислення учнів у контексті профілізації старшої школи / І. А. Акуленко, Ю. Ю. Лещенко // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – 2011. – Вип. 211, ч. ІІ. – С. 3–13.

9. Алфімов В. І. Педагогічні основи організації навчально-виховного процесу в ліцеї: дис.. … д-ра пед. наук: 13.00.01 / Алфімов Валентин Миколайович. – К., 1997. – 438 с.
10. Арапов А. И. Проблема дифференциации обучения в истории отечественной педагогики и школы конца XIX – начала XX века: автореферат дис. на соискание уч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.01 / Арапов Александр Иванович. – Новосибирск, 2000. – 21 с.
11. Аршанский Е. Я. Специальная методическая подготовка будущего учителя химии к работе в условиях профильного обучения / Е. Я. Аршанский // Химия: методика преподавания. – 2003. – № 6. – С. 3–11.
12. Бібік Н. Проблема профільного навчання в педагогічній теорії і практиці / Надія Бібік // Математика в школі. – 2006. – №1. – С. 2–6.
13. Бібік Н. Профільна школа як стратегія рівного доступу до якісної освіти / Надія Бібік // Директор школи. – 2004. – Жовт. (№37). – С. 2–3.
14. Богатирьова І.М. Методика розв'язування прикладних задач у шкільному курсі геометрії / І.М. Богатирьова, З.О. Сердюк // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – Черкаси: Вид. від ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2011. – Вип. 211, ч. ІІ. – С. 19–23.
15. Божович Л. И. Проблемы формирования личности. Избранные психологические труды // Под ред. Д. И. Фельдштейна. – Москва-Воронеж, 1995. – 349 с.
16. Болтянский В. Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер // Математика в школе. – 1988. – №3. – С. 9-13.
17. Борисенков В. П. Развитие фундаментальних педагогических исследований в Российской академии образования // Педагогика. – 2006. – №1. – С. 3-13.
18. Бродський Я. Шляхи оновлення змісту шкільної математичної освіти / Яків Бродський, Олександр Павлов // Математика в школі. – 2008. – № 1. – С. 24–29.
19. Бугайов О. І. Диференціація навчання в сучасній середній школі / О. І. Бугайов // Рідна школа. – 1991. – №8. – С. 7–15.
20. Бурда М. І. Особливості організації навчання математики в 10-12 класах на профільному рівні / М. І. Бурда, О. І. Глобін // Вісник Черкас. ун-ту. Сер. Пед. науки. – 2009. – Вип. 150. – С. 24-31.
21. Бурда М. Нові підходи до організації освіти у старшій школі: Концепція профільного навчання у старшій школі / М. Бурда // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2004. – №1. – С. 72–77.
22. Бурда М. Особистісна орієнтація змісту профільного навчання / М. Бурда // Профільне навчання теорія і практика: зб. наук. праць за матеріалами методологічного семінару АПН України. – К. : Пед. преса, 2006. – С. 100–104.
23. Бурда М. І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи : дис. … доктора пед. наук : 13.00.02 / Михайло Іванович Бурда. – К. : Ін-т педагогіки АПН України, 1994. – 347 с.
24. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики / М. І. Бурда // Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 3–6.
25. Ващенко Г. Твори / Всеукраїнське педагогічне товариство ім. Г. Ващенка / Анатолій Погрібний (ред.), Омелян Вишневський (упоряд. та автор передмов). – К.: Школяр, 2000. – Т.4.: Праці з педагогіки та психології. – 416 с.
26. Власенко К. В. Формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики» / К. В. Власенко. – К. : НПУ, 2004. – 19 с.

27. Власов А. Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования? / А. Власов // Математическое образование. – 1914. – №2.
28. Волянська О.Є. Вивчення алгебри і початків аналізу в професійно-технічних училищах в умовах впровадження освітнього стандарту: автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / О. Є. Волянська – К. : Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова., 1999. – 18 с.
29. Воскресенская Н. М. Дифференциация обучения в школах Англии / Н. М. Воскресенская // Сов. педагогика. – 1988. – №12. – С. 118–123.
30. Галузева концепція розвитку неперервної педагогічної освіти (наказ МОН України від 14.08.2013 № 1176) [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/36816/
31. Глейзер Г. Д. Школе необходима концепция общего математического образования / Г. Д. Глейзер, Р. С. Черкасов // Математика в школе. – 1988. – №6. – С. 14–17.
32. Глушков П. Н. Борьба за улучшение преподавания математики в первые годы строительства сов. школы (1917-1925гг.): дис. … к. пед. наук: 13.00.02 / П. Н. Глушков – К., 1951. – 359 с.
33. Голік Л. До питання про диференційоване навчання старшокласників математики / Людмила Голік // Математика в школі. – 1999. – № 2 – С. 11–12.
34. Гончаров Н. К. Еще раз о дифференцированном обучении в старших класах общеобразовательной школы / Н. К. Гончаров // Сов. педагогика. – 1958. – №6. – С. 12-37.
35. Гордієнко Т. П. Профільна диференціація навчання фізики в 10-11 класах середньої загальноосвітньої школи (гуманітарний профіль): автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / Т. П. Гордієнко. – К., 1998. – 21 с.
36. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я. И. Груденов. – М.: Педагогика, 1987. – 160 с.
37. Губанова М. И. Формирование профессиональных намерений старшеклассников в условиях профильного обучения: автореф. дис. на соискание уч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / М. И. Губанова. – Кемерово, 1994. – 20 с.
38. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения / В. В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996. – 554 с.
39. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011
40. Державний стандарт базової і повної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 14 січня 2004 р. № 24 [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=24-2004%EF&new=1&p=1301387 250437416.
41. Дорофеев Г. В. Дифференциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. В. Фирсов // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 15–21.
42. Дружинина О. М. Дифференцированный подход при проведении лабораторных работ по физике в старших классах средней школы: дисс. … канд. пед. наук / Дружинина Ольга Михайловна. – Челябинск, 1996. – 166 с.
43. Дубинчук Е. С. Обязательные результаты обучения себя оправдывают / Е. С. Дубинчук, З. И. Слепкань, С. А. Соболь, С. Н. Филиппова // Математика в школе. – 1990. – №3. – С. 9–10.
44. Енько П. Методика начального счета по лабораторному методу / П. Енько. – М. : Петроград, 1914. – 67 с.

45. Жовтан Л. В. Диференціація навчання учнів 7-11 класів у процесі поглибленого вивчення предметів природничо-математичного циклу: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: 13.00.09 / Л. В. Жовтан. – Х., 2001. – 22 с.
46. Закон України «Про загальну середню освіту» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/651-14.
47. Зарубіжний досвід профільного навчання [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://osvita.ua/school/method/technol/3521
48. Захарова Т. Б. Профильная дифференциация обучения информатике на старшей ступени школы: автореф. дис. на соискание уч. ступени докт. пед. наук: спец. 13.00.02 / Т. Б. Захарова. — М., 1997. — 42 с.
49. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). – Харків: Ранок, 2011. – 76 с.
50. Інструктивно методичний лист МОН про викладання математики у 2011–12 н.р. // Математика в школі. – 2011. – №6. – С. 3–7.
51. К концепции школьного математического образования // Математика в школе. – 1989. – №2. – С. 20–30.
52. Кизенко В. І. З вітчизняного досвіду організації профільного навчання у старшій школі / В. І. Кизенко // Підручник для директора. – 2003. – №11–12. – С. 27–31, С. 61–74.
53. Кірман В. К. Вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю: посібник для вчителів / В. К. Кірман. – Дніпропетровськ: Свідлер, 2009. – 180 с.
54. Козира В. М. Система навчання алгебри в школах ліцеях і гімназіях фізико-математичного профілю при педагогічних вузах: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / В. М. Козира. – К., 1997. – 18 с.
55. Колягин Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 21–27.
56. Кондратьева Г. В. Школьное математическое образование в России (вторая половина 19 века) / Г. В. Кондратьева. – М.: Издательство МГОУ, 2002. – 128 с.
57. Концепция среднего образования и совершенствование системы обучения математике // Математика в школе. – 1988. – №6. – С. 3–12.
58. Концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) [Затв. постановою спільного засідання колегії М-ва освіти і науки й Президії АПН України від 22 листоп. 2001 р. № 12/5-2] // Інформ. зб. М-ва освіти і науки України. – 2002. – № 2. – С. 2-22.
59. Концепція математичної освіти 12-річної школи: Проект // Директор шк., ліцею, гімназії. – 2004. – № 1. – С. 73–75; Математика в школі. – 2002. – № 2. – С. 12–17.
60. Концепція профільного навчання в старшій школі (з коментарями та запитаннями) // Підруч. для директора. – 2003. – №11–12. – С. 4–12.
61. Концепція профільного навчання в старшій школі [Затв. рішенням колегії М-ва освіти і науки України від 25.09.03 № 10/12-2] / АПН України. Ін-т педагогіки ; Уклад.: Л. Березівська, Н. Бібік, М. Бурда та ін. // Інформ. зб. М-ва освіти і науки України. – 2003. – № 24. – С. 3–15. – Додаток: Структура профільного навчання, с. 15; Завуч. – 2004. – Черв. (№ 16). – С. 3–13. – Спецвипуск; Освіта України. – 2003. – 25 листоп. (№ 88). – С. 4–5.
62. Концепція профільного навчання у старшій школі // Математика в школі. – 2006. – №4. – С. 2-7.
63. Концепція профільного навчання: Проект [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://mon.gov.ua/ua/pr-viddil/1312/1390288033/1402388614/

64. Концепція розвитку інклюзивної освіти (наказ МОН України від 01.10.2010 № 912) [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/9189/
65. Лебединцев К. Программа и метод преподавания алгебры в средней школе / К. Лебединцев // Педагогический сборник. – 1910. – Сентябрь. – С. 242–243.
66. Лермантов В. В. Содержание курса школьной математики с точки зрения современных запросов жизни и приемы для посильного выполнения школой этих требований. Труды I Всероссийского съезда представителей математики / В. В. Лермантов. – М., 1912. – Т. 1.
67. Лернер П. Проблеми становлення профільного навчання / П. Лернер // Завуч. – №2(224). – 2005. – С. 7–12.
68. Лернер П. С. Модель самоопределения выпускников профильных классов средней общеобразовательной школы / П. С. Лернер // Школьные технологи. – 2003. – №4. – С. 50–62.
69. Лийметс Х. Й. Групповая работа на уроке / Х. Й. Лийметс. – М.: Знание, 1975. – 64 с.
70. Лийметс Х. Й. Как воспитывает процесс обучения / Х. Й. Лийметс. – М.: Знание, 1982. – 96 с.
71. Лікарчук І. Проблема профілізації навчання в старшій школі та шляхи її розв'язання / І. Лікарчук // Управління освітою. – 2003. – 13-14 липня. – № 61-62. – С. 2–3, 9.
72. Лов'янова І. В. Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія / І. В. Лов'янова. – Черкаси: Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. – 354 с.
73. Логачевська С. П. Дійти до кожного учня [метод. матеріал] / С. П. Логачевська; ред. О. Я. Савченко. – К.: Рад. Школа, 1990. – 158 с.
74. Локшина О. Зарубіжна старша профільна школа: структурна організація, зміст освіти, підходи до оцінювання / Олена Локшина // Рідна школа. – 2004. – №4. – С. 65–67.
75. Лосева О. Л. Методика обучения учащихся средствам представления знаний в рамках профільного спецкурса по информатике: автореферат дис. на соискание уч. ступени канд. пед. наук: спец.: 13.00.02 / О. Л. Лосева. — М., 1999. — 17 с.
76. Мадзігон В. М. Безперервна освіта: науково-педагогічний аспект / Василь Мадзігон // Педагогічна газета. – 2000. – №7. – С. 1.
77. Макарчук А. В. Профильное обучение в сельской малокомплектной школе / А. В. Макарчук, Н. К. Райсвих // Підручник для директора. – 2003. – №11–12. – С. 143–146.
78. Максименко С. Д. Загальна психологія: навчальний посібник / С. Д. Максименко. – К., 2004. – 272 с.
79. Материалы по реформе средней школы. Примерные программы и объяснительные записки. – Петроград, 1915. – 553 с.
80. Метельский Н. В. Реализм – основа перестройки школьного математического образования / Н. В. Метельский // Математика в школе. – 1989. – №3. – С. 23–30.
81. Методичні рекомендації щодо складення регіональних планів створення освітніх округів та модернізації мережі професійно-технічних, загальноосвітніх навчальних закладів, у тому числі шкіл-інтернатів, затверджені розпорядження КМУ від 5.09. 2012 № 675-р [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/675-2012
82. Мешалкина К. Н. Профильная дифференциация образования / К. Н. Мешалкина // Советская педагогика. – 1990. – №1. – С. 60-65.

83. Монахов В. М. Дифференциация обучения в средней школе / В. М. Монахов, В. А. Орлов, В. В. Фирсов // Сов. педагогика. – 1990. – №8. – С. 42–47.
84. Мордухай-Болтовской Д. Д. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Философские, методологические и дидактические очерки по поводу докладов съезда / Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской // Варшавские университетские известия. – 1915. – № 1. – С. 1–95.
85. Мордухай-Болтовской Д. Д. О первом Всероссийском съезде преподавателей математики / Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской // Варшавские университетские известия. – 1913. – № 3. – С. 1–42.
86. Моторіна В. Г. Професійна компетентність учителя математики профільної школи: навч. посіб. для студ. природничо–математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ / В. Г. Моторіна. – Х.: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, 2012. – 268 с.
87. Моторіна В. Г. Формування графічної грамотності майбутнього вчителя математики. Навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів / В. Г. Моторіна, Є. Ю. Сизоненко. – Харків, Видавництво «Мітра», 2014. – 79 с.
88. Мрочек В. Педагогика математики : Исторические и методические этюды. / В. Мрочек, Ф. Филиппович. – Т. 1. – С-Пб. : Изд-во Богдановой, 1911. – 380 с.
89. Національна доктрина розвитку освіти // Освіта України. – 2002. – №33
90. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року, затверджена Указом Президента України від 25.06.2013 № 344 [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/344/2013
91. Огурцов Н. Т. Дифференцированное обучение в школе: опыт, проблемы, перспективы: [материал в помощь лектору] / Н. Т. Огурцов, Т. М. Бунтовская. – Минск, 1990. – 22 с.
92. Оніпко В. В. Професійна підготовка вчителя природничих дисциплін до роботи у профільній школі : монографія / В. В. Оніпко. – Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2011. – 376 с.
93. Орлов В. В. Построение основного курса геометрии общеобразовательной школы в концепции личностно ориентированого обучения: автореф. дис. на соискание научной степени докт. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения математике» / Орлов Владимир Викторович. – С.-Петербург, 2000. – 41 с.
94. Осмоловская И. М. Организация дифференцированного обучения в современной общеобразовательной школе / И. М. Осмоловская. – М.: Изд-во «Ин-т практич. психологии», Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998. – 155 с.
95. Остапенко А. А. Пути реализации концепции профильного обучения в сельской школе / А. А. Остапенко, А. Ю. Скопин // Школьные технологии. – 2003. – №4. – С. 39–48.
96. Пинский А. К концепции профильной старшей школы [Электронный ресурс] / А. Пинский // Доклад на семинаре в ВШЭ, 23.01.2002 // http://www.profile.-edu.ru
97. Писарева С. А. Профильное обучение как фактор обеспечения доступности образования : российское видение : [рекомендации по результатам научных исследований] / С. А. Пиарева ; под ред. Г. А. Бордовского ; Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. – СПб. : Изд-во РГПУ, 2006. – 83 с.
98. Покроєва Л. Д. Створення організаційно-педагогічних умов для забезпечення профільного навчання в старшій школі / Л. Д. Покроєва // Джерело педагогічної майстерності. Профільна школа: досвід і перспектива: наук.-метод. журнал. – Вип. №2 (32). – Х.: ХОНМІБО. – 2004. – 128 с.

99. Положення про дистанційне навчання. Наказ МОН від 25.04.2013 № 466 [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13
100. Поляков С. Н. О программах математики / С. Н. Поляков // Педагогический сборник – 1902. – №2.
101. Порядок організації інклюзивного навчання у загальноосвітніх навчальних закладах (постанова КМУ від 15.08.2011 № 872) [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/872-2011
102. Пригодій М. А. Профільне та початкове професійне навчання з електротехніки в загальноосвітній школі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / Микола Анатолійович Пригодій. — К., 1999. – 20 с.
103. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі (наказ МОН України від 21.10.2013 № 1456) [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/1456/
104. Проблемы реформы математического образования // Математика в школе. – 1989. – №5. – С. 3–15.
105. Ревякина В. И. Теория и практика допрофессиональной подготовки старшеклассников к педагогической деятельности (на материале педагогических классов) : автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра пед. наук : спец. 13.00.01 «Общая педагогика, история педагогики и образования». / Ревякина Валентина Ивановна. – Барнаул, 2002. – 42 с.
106. Рожина Л. Н. Актуальные проблемы дифференциации обучения / Л. Н. Рожина. – Минск: Народна асвета, 1992. – 189 с.
107. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2002. – 720 с.
108. Рыбников К. А. К вопросу о дифференциации обучения / К. А. Рыбников // Математика в школе. – 1988. – №5. – С. 16–19.
109. Самодрін А. П. Вступ до профільного навчання: навч. посібник для студ. вищ. навч. закладів / А. П. Самодрін. – 2-ге вид. – Кременчук, 2006. – 188 с.
110. Самодрін А. П. Профільне навчання в середній школі / А. П. Самодрін. – Кременчук: Вид. центр СГЄ за участю РВЦ ПНТУ, 2004. – 384 с.
111. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии: учебное пособие: [учеб. пособие для пед. вузов и ин-тов повышения квалификации] / Г. К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
112. Семенець С. П. Розвиток продуктивного мислення учнів при вивченні алгебри і початків аналізу : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / С. П. Семенець – К., 1998. – 220 с.
113. Семергей Н. В. Організація диференційованого навчання в сучасній зарубіжній школі / Семергей Н. В. // Постметодика. – 2000. – №4. – С. 14–17.
114. Сердюк З. О. Особливості вивчення теми «Паралелепіпед» в класах суспільно-гуманітарного напряму / З.О. Сердюк // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2012. – Вип. 37. – С. 103–107.
115. Середня освіта в Польщі [Электороний ресурс]. – Режим доступу : http://www.osvita.org.ua/abroad/edusystem/pol/school/
116. Система освіти в Італії [Электороний ресурс]. – Режим доступу : http://znaimo.com.ua/
117. Система освіти Канади [Электороний ресурс]. – Режим доступу: http://znaimo.com.ua/

118. Ситаров В. А. Дидактика: [учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. Заведений] / В. А. Ситаров; под ред. В. И. Сластенина. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 368 с.
119. Скафа О. І. Наступність у навчанні розв’язуванню задач на многогранники та тіла обертання між старшою школою технічного профілю та ВНТЗ / О. І. Скафа, І. М. Реутова. – Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2010. – №6. – С. 90–99.
120. Скафа О. І. Управління евристичною діяльністю учнів-гуманітаріїв на уроках математики / О. І. Скафа, В. С. Прач // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 5. – С. 30–37.
121. Скафа О. І. Використання інформаційно-комунікаційних технологій як засобу управління евристичною діяльністю учнів гуманітарного профілю / О. І. Скафа, В. С. Прач // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 38. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2012. – С. 118–128.
122. Слєпкань З. І. Профільне навчання в зарубіжній і українській школі як вид диференційованої підготовки учнів і ключова проблема реформування сучасної системи освіти / З. І. Слєпкань // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 25. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2006. – С. 11–21.
123. Сметанський М. І. Організація профільного навчання в країнах Західної Європи: [монографія] / М. І. Сметанський. – Вінниця: ВДПУ, 2008. – 339 с.
124. Смирнова И. Исторические аспекты дифференциации обучения / И. Смирнова // Математика: (еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». – 2000. – №2. – С. 1–8.
125. Смирнова И. М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: автореферат дис. на соискание уч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / И. М. Смирнова. – М., 1995. – 18 с.
126. Совещания, проходившие в 1899 г. в Московском учебном округе по вопросам о средней школе, в связи с циркуляром Мин. Нар. просв. от 8 июля 1899 г. За № 16212 вып. 1–6. – М., 1899.
127. Сотніченко І. І. Підготовка вчителів природничих дисциплін до профільного навчання старшокласників у системі підвищення кваліфікації: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.04 / І. І. Сотніченко. — К., 2009. – 22 с.
128. Труды 1–го Всероссийского съезда преподавателей математики : 27 декабря 1911 г. – 3 января 1912 г. – [в 3-х тт.]. – СПб. : Север, 1913. – Т. 1. – 610 с. (Общия собрания) ; Т. 2. – 368 с. (Секции) ; Т. 3. – 124 с (Доклады, оставшиеся не прочитанными) // Ассоциация учителей и преподавателей математики : [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://math.teacher.msu.ru/history.
129. Труды 2–го Всероссийского съезда преподавателей математики [26 декабря 1913 г. – 3 января 1914 г.] : Отдельный оттиск журнала «Математическое просвещение». – М., 1915. – 320 с. // Ассоциация учителей и преподавателей математики : [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://math.teacher.msu.ru/history.
130. Труды Всероссийского экстренного совещания преподавателей математики, физики и космографии. – М., 1917. – 926 с.

131. Указ Президента України «Про заходи щодо забезпечення пріоритетного розвитку освіти в Україні» від 30.09.2010 № 926 [Электоронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/926/2010
132. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И. Э. Унт. – М.: Педагогика, 1990. – 188 с.
133. Фаннінгер Л. П. Особливості профільного навчання в основній школі Австрії : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Фаннінгер Людмила Павлівна. – Тернопіль, 2008. – 186 с.
134. Федоришин Б. О. Психолого-педагогічні основи професійної орієнтації: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.04 / Борис Олексійович Федоришин. – К.: АПН України, 1996. – 49 с.
135. Фролов И. В. Профильное обучение в условиях сельской школы: состояние и проблемы / И.В. Фролов // Наука и школа. – 2000. – №3. – С. 48–53.
136. Фурман А. В. Психодіагностика інтелекту в системі диференціації навчання : [кн. для вчит.] / А. В. Фурман. – К.: Освіта, 1993. – 224 с.
137. Фурман А. В. Системна диференціація навчання: концепція, теорія, технологія / А. В. Фурман // Освіта і управління. – 1997. – №2. – С. 7.
138. Хмара Т. Курси за вибором як компонент методичної системи профільного навчання математика в школі / Тамара Хмара // Математика в школі. – 2004. – №. 6 – С. 55.
139. Хмара Т. М. Створюємо особистісно-орієнтовану систему навчання математики / Т. М. Хмара // Математика в школі. – 2001. – №5. – С. 4.
140. Хуторской А. В. Индивидуализация и профильность обучения в старшей школе // Профильное обучение в условиях модернизации школьного образования. Сборник научных трудов / Под ред. Ю. И. Дика, А. В. Хуторского.— М.: ИОСО РАО, 2003. – С. 18–29.
141. Цехмістер Я. В. Теорія і практика допрофесійної підготовки учнів у ліцеях медичного профілю при ВНЗ: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.04 / Я.В. Цехмістер. – К., 2002. – 45 с.
142. Чашечникова О. С. Вплив особливостей оперування навчальним матеріалом на розвиток творчого мислення учнів / О. С. Чашечникова // Математика в школі, 2011. – № 3. – С. 38–45.
143. Чашечникова О. С. Шляхи розвитку творчого мислення в умовах профільного навчання математики / О. С. Чашечникова // Математика в школі. – 2010. – № 10. – С. 33–36, № 11. – С. 33–37.
144. Чашечникова О. С. Модель формування та розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики / Чашечникова О. С. // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: збірник наукових праць за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції, 26-27 квітня 2012 р. / Міністерство освіти, науки. Молоді та спорту україни, Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського [та ін.] – Вінниця; ВДПУ, 2012 – С. 59–61.
145. Чашечникова О. С. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики. Монографія / О. С. Чашечникова. – Суми: Видавництво: ПП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б., 2011. – 412 с.
146. Черних Л. В. Диференційований підхід до навчання учнів математики на основі їх персональних когнітивних стилів / Л. В. Черних // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 22. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2004. – С. 100–105.

147. Шаповалов А. Д. Профильная дифференциация обучения в колледже как фактор формирования устойчивого интереса студентов к выбранной профессии : дис. … канд. пед. наук : 13.00.08 / Шаповалов Анатолий Дмитриевич. – Ставрополь, 2005. – 188 с.
148. Шварцбурд С. И. Математическая специализация учащихся средней школы / С. И. Шварцбурд. – М.: АПН, 1963. – 149 с.
149. Шварцбурд С. И. О развитии интересов, склонностей и способностей к математике / С. И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1969. – № 6. – С. 20–25.
150. Шварцбурд Семен Ісаакович. Педагогічні персоналії / Портал сучасних педагогічних ресурсів : Електронний ресурс. – Режим доступу: http://intellect-invest.org.ua/pedagog_personalias_schvarzburd_si/
151. Шварцбурд С. И. Проблема повышения математической подготовки учащихся. Авторский доклад: 13.00.02 / С. И. Шварцбурд. – АПН СССР, М., 1972. – 106 с.
152. Шварцбурд С. И. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике: Пособие для учителей / С. И. Шварцбурд и др. – М., 1977. – 48 с.
153. Швець В. Екзамен з математики на ступінь бакалавра у Франції / В. Швець, Л. Соколенко // Математика в школі. – 1999 . – № 3. – С. 37–41.
154. Шестаков О. П. Профильное обучение информатике в сарших классах средней школы на примере курса «Компьютерно-математическое моделирование»: автореферат дис. на соискание уч. ступени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 / О.П.Шестаков. – Омск., 1999. – 18 с.
155. Шиян Н. І. Дидактичні засади профільного навчання у загальноосвітній школі сільської місцевості: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.09 / Надія Іванівна Шиян. – Харків, 2005. – 40 с.
156. Шиян Н. І. Профільне навчання у школах сільської місцевості: теорія і практика / Н. І. Шиян. – Полтава: АСМІ, 2004. – 442 с.
157. Щербина К. М. Математика в русской средней школе / К. М. Щербина. – К., 1908. – 124 с.
158. Якиманская И. С. Дифференцированное обучение «внешние» и «внутренние» формы / И. С. Якиманская // Директор школы. – 1995. – №3. – С. 39–45.
159. Якиманская И. С. Психолого-педагогические проблемы дифференцированного обучения / И. С. Якиманская // Советская педагогика. – 1991. – №4. – С. 43–52.
160. Ямбург Е. А. Школа для всех: Адаптивная модель / Е. А. Ямбург. – М.: Новая школа, 1996. – 352 с.
161. Яценко С. Є. Організація навчально-виховного процесу на уроках математики в класах з поглибленим вивченням предмета основної школи: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / С. Є. Яценко. – К.,1999. – 216 с.
162. Auger P. Tendances actuelles de la recherché scientifique. – Paris: UNESCO, 1961. – 262 p.
163. Chashechnikova O. S. Theoretical and methodological bases for formation and development of the creative thinking in differentiated teaching of mathematics // Science and education a new dimension. – Vol. 1. – February, 2013. – Budapest, 2013. – P. 29–33.
164. Comparative researhe on education: Overview, strategy and applications in Eastern and Western Europe / Ed.: M. Neissen, J. Posshar, T. Husen. – Bdp.: Akad. kiad., 1982. – 270 p.
165. Cremin L. A. The transformation of the school / L. A. Cremin. – N.-Y., 1971. – 387 p.
166. F r e u d e n t h a l H. L'enseignement des mathematiques modernes ou enscignement moderne des mathematiques? // L'Enseignement mathematique. – 1963. – s. II. – v. IX. – f. 1–2.

167. F r e u d e n t h a l H. Les tendances nouvelles de l'enseignement mathematique // Revue de 1'enseignement superieur. – 1969. – n. 46–47.
168. Gordon P. Education and Policy in England in the Twenticth century / P. Gordon, R. Aldrich, D. Dean. – Frank Cass, 1991. – 368 p.
169. Le systeme educatif en France et son administration // Collection franco-russe de documents d'information et de formation. – 1993. – №22. – 130 p.
170. O'Brien T. Differentiation in Teaching and learning / T. O'Brien. – Continuum International Publishing Group, 2001. – 224 p.
171. UNESCO. The teaching of mathematics at secondary level (Preliminary Edition). – Paris, 1965.
172. Vaugan H. E. Le project de la comission de reforme de I'Enseignement des mathematiques dans les ecoles secondaires // L'Enseignement mathematique. – 1959. – s. II. – v. V. – f. 3.
173. Walford G. British private schools / G. Walford. – Oxford University (Ed), 2003. – 226 p.
174. Warren Hug'h. L'enseignement technique et professionnel Etude comparative dans dix pays. – P.: UNESCO, 1968. – 242 p.

Розділ 2

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

2.1. Дидактичні вимоги до організації навчального процесу в старших класах школи

Перехід до старшої школи з різними напрямами профілізації – це, безсумнівно, важливий та складний крок у житті будь-якого школяра. В учнів старшого шкільного віку вибір профілю навчання здебільшого пов'язаний із вибором майбутньої професії, тобто учні зосереджують усі свої зусилля на вивченні основних предметів із навчальної програми обраного напряму. Часто при цьому вони недооцінюють важливість вивчення інших предметів, зокрема математики.

Для виконання основних завдань реформи школи в Україні, з урахуванням надбань провідних учених, процес навчання математики потрібно будувати на основі комплексного, системного, діяльнісного, особистісно орієнтованого та семіотичного підходів.

Оволодіння знаннями неможливе без застосування комплексного підходу до процесу навчання. За З. І. Слєпкань [72, с. 47], комплексний підхід до навчального процесу полягає в забезпеченні єдності трьох параметрів організації процесу навчання: 1) навчальний процес повинен бути єдністю соціального, психологічного й педагогічного; 2) єдність усіх функцій навчання (освітньої, розвивальної, виховної); 3) єдність усіх компонентів навчального процесу в будь-якій методичній системі (цілей, змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання) за умови провідної ролі цілей навчання.

Процес навчання слід організовувати відповідно до основних принципів навчання [30]: науковості; свідомості; наочності; зв'язку навчання з практичною діяльністю; систематичності й послідовності; активності та самостійності; ґрунтовності; доступності; емоційності.

У межах комплексного підходу до організації навчання П.М.Щербань [92] виокремлює такі головні чинники інтенсифікації навчання: підвищення цілеспрямованості навчання; посилення мотивації навчання; розширення інформаційного змісту уроків; активізація процесу навчання; удосконалення форм навчання; оптимізація темпу навчальних дій; розвиток навичок навчальної праці; застосування наочності та аудіовізуальних засобів навчання; використання комп'ютерів; створення проблемних ситуацій; логіко-пізнавальні прийоми: аналіз, синтез, узагальнення, індукція, дедукція, аналогія, порівняння; самостійні роботи реконструктивного і конструктивного характеру; особистість учителя і творчий підхід до справи.

Процес навчання учнів – складний і багатогранний, тому вимагає застосування системного підходу. Як стверджує З. І. Слєпкань, «у педагогіці та методиці навчання математики системний підхід спрямований на розкриття цілісності об'єктів навчання, виявлення в них різних типів зв'язків і зведення в єдину теоретичну характеристику. Її складовими є суб'єкт пізнання (учень), процес, продукт і мета пізнання, умови, за яких відбувається пізнавальна діяльність» [72, с. 46].

Н. А. Тарасенкова [83] для основної школи пропонує виокремлювати в процесі навчання математики такі складні системи: 1) зміст математичної освіти; 2) організаційний аспект навчального процесу (методи, прийоми, організаційні форми та засоби); 3) особистісний аспект процесу навчання (потреби, інтереси, мотиви навчання математики, вікові та індивідуальні особливості учнів тощо); 4) процес цілеспрямованого перетворення особистого досвіду учнів – діяльність учіння; 5) організаційну, керівну діяльність учителя в процесі викладання.

Нам імпонують такі міркування вченого, тому ми вважаємо за доцільне і для старшої профільної школи використовувати аналогічні системи, адаптуючи до конкретного профілю навчання.

В. І. Бондар зазначає, що «процес навчання – це цілеспрямована, послідовно організована взаємодія вчителя і учнів, опосередкована змістом діяльності, в ході якої розв'язуються завдання освіти, виховання і загального розвитку дітей» [6, с. 745]. З огляду на це здобування учнями профільних класів певних знань, навичок та вмінь, необхідних їм для подальшого професійного навчання, неможливе поза діяльнісного підходу до навчання.

В енциклопедії освіти [5] В. І. Бондар тлумачить навчальну діяльність як цілеспрямовану й упорядковану сукупність дій, прийомів і операцій, що забезпечують мотиваційну й активну включеність суб'єкта діяльності (учня) в організований дорослими процес навчання. Основною характеристикою навчальної діяльності є її предметність.

П. М. Щербань [92] серед складників процесу навчання називає насамперед діяльність учителя (викладання) та діяльність учнів (учіння).

На думку Г. О. Атанова [1], знання потрібні не тільки для того, щоб їх запам'ятовувати, а передовсім для того, щоб за їх допомогою виконувати певну діяльність, а саме – навчальну діяльність. Учні краще засвоюють та усвідомлюють ті знання і вміння, які вони отримують під час активної та свідомої навчальної діяльності, коли перед ними ставлять мету, цілі, завдання щодо виконання цієї діяльності.

У Законі України про загальну середню освіту [25] зазначено, що результатом навчання є інтелектуальний, соціальний і фізичний розвиток особистості, який слугує основою для подальшої освіти й трудової діяльності. З огляду на це актуалізується проблема запровадження особистісно орієнтованого навчання.

Мету особистісно орієнтованого навчання С. І. Подмазін [47] убачає в створенні оптимальних умов для розвитку і становлення особистості як суб'єкта діяльності та суспільних відносин, що реалізує їх відповідно до стійкої системи гуманістичних особистісних цінностей.

О. Я Савченко [51], Г. К. Селевко [56], Н. А. Тарасенкова [83] вважають, що основним завданням особистіно орієнтованого навчання є формування позитивної Я-концепції особистості учня. Тому в процесі навчання математики учнів класів СГН, для яких цей предмет не є профільним, важливо створювати ситуації «успіху».

Основні положення диференційованого навчання математики розроблені вченими-методистами: М. І. Бурдою [10; 14], В. М. Володько [11], О. І. Глобіним [14], С. У. Гончаренко [16], В. О. Гусєвим [19], Г. В. Дорофєєвим [24], Ю. М. Колягіним [38], В. Б. Мілушевим [228], В. М. Монаховим [40], В. Г. Моторіною [41; 42], Г. І Саранцевим [54; 55], З. І. Слєпкань [72; 74], І. М. Смирновою [76; 78], І. Е. Унт [86], Р. А. Утєєвою [89], І. С. Якиманською [93] та ін.

Учені розрізняють внутрішню (рівневу), зовнішню (профільну), широку, пошукову та неперервну диференціації. Рівнева диференціація дає учням змогу в межах однієї програми, одного підручника засвоювати теоретичний матеріал на різних рівнях. Нам імпонує думка З. І. Слєпкань [74, с. 29] про те, що «рівнева диференціація зобов'язує на основі безумовного досягнення всіма учнями мінімального необхідного обсягу знань і умінь створити умови для підвищеного рівня навчання тих учнів, які мають для цього бажання і можливості». У контексті вивчення математики учнями класів СГН акцентуємо на першій частині твердження, але не нівелюємо і другої частини. Саме вивчення математики сприяє формуванню в учнів класів та шкіл СГН основних прийомів розумової діяльності, розвиткові теоретичного та практичного, абстрактного й конкретного мислення.

А. І. Кузьмінський та В. Л. Омеляненко [30] зазначають, що *методи навчання* – це упорядковані способи діяльності вчителя й учнів, спрямовані на ефективне розв'язання навчально-виховних завдань. Існують різні класифікації методів навчання: за джерелом знань (Д. О. Лордкіпанідзе, Є. Я. Голант, Н.М. Верзілін та ін); за характером навчально-пізнавальної діяльності (І. Я. Лернер, М. М. Скаткін); за рівнем проблемності знань і рівнем учіння (М. І. Махмутов); на основі цілісного підходу до процесу (Ю. К. Бабанський) та ін.

У своєму дослідженні ми керуємося класифікацією І. Я. Лернера та М. М. Скаткіна [22; 23; 70]. Дослідники виділяють п'ять методів навчання: пояснювально-ілюстративний (розповідь, лекція, пояснення, робота з підручником, демонстрації та ін.); репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою); проблемного викладу; частково-пошуковий (або евристична бесіда) і дослідницький.

І. Я. Лернер [23; 31] зауважує, що засвоєння знань учнями відбувається на трьох рівнях: 1) усвідомленого сприйняття і запам'ятовування, що виявляється в точності або у близькому відтворенні; 2) у застосуванні за зразком або в подібній ситуації; 3) у творчому застосуванні знань, тобто в новій незнайомій ситуації. За такими ж рівнями вчений характеризує засвоєння способів діяльності, відповідно до цих рівнів добирають методи навчання.

Суть пояснювально-ілюстративного методу навчання полягає в тому, що вчитель повідомляє учням певну інформацію за допомогою різних засобів: мовних (розповіді, пояснення), друкованих (підручники, довідкові посібники), наочних (картини, схеми, таблиці тощо), практичного показу способів діяльності (зразки способів розв'язування задач, доведень теорем, способів складання плану тощо). При цьому учні виконують діяльність, необхідну для засвоєння знань на першому рівні. Описаний метод забезпечує цілеспрямоване виконання учнями комплексу дій зі сприйняття, усвідомлення та запам'ятовування навчального матеріалу.

На жаль, знання, отримані внаслідок пояснювально-ілюстративного методу, не формують навичок і вмінь їх використання. Для того щоб учні досягли другого рівня засвоєння знань та набули певних навичок і вмінь, учителеві необхідно організовувати навчання, спрямоване на неодноразове відтворення отриманих учнями знань та способів діяльності. Отже, відтворення і повторення отриманих учнями знань (за допомогою вчителя) і є головною ознакою репродуктивного методу навчання. Для кращого застосування аналізованого методу методисти розробляють систему вправ, спрямованих на відпрацювання конкретних навичок і вмінь.

Як доводять наші дослідження, ефективним під час вивчення математики є поєднання пояснювально-ілюстративного та репродуктивного методів навчання.

Крім традиційних методів навчання, у процесі вивчення математики в класах СГН доцільно використовувати методи інтерактивного навчання. В. Г. Моторіна [112; 113] кваліфікує інтерактивне навчання як спеціальну форму організації пізнавальної діяльності, мета якої створити комфортні умови навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність, інтелектуальну спроможність. Дослідниця зазначає, що інтерактивна форма навчання, на відміну від традиційної, спрямована на перетворення особистості учня в процесі різних способів взаємодії учнів та вчителя.

Важливим у процесі навчання математики є добір форм організації навчання. М. М. Фіцула [90] називає такі головні особливості організаційних форм навчання: 1) зовнішній вияв функцій учителя й учнів відповідно до розпорядку; 2) діяльність учителя та учнів обмежена часом (тривалість уроку); 3) склад учнів може бути постійним (клас на уроці) або змінним (розподіл на групи); 4) порядок спілкування вчителя та учнів (пояснення, бесіда, інструктаж тощо); 5) організаційна форма навчання безпосередньо не пов’язана з основними закономірностями процесу навчання, вона впливає на конкретний процес навчання.

Однією з основних організаційних форм навчання математики в старшій школі є урок. Існують різні класифікації типів уроку. У нашій роботі ми керуємося класифікацією уроків В. О. Онищука [44], а саме: 1) урок засвоєння нових знань; 2) урок формування навичок і вмінь; 3) урок застосування навичок і вмінь; 4) урок узагальнення і систематизації; 5) урок контролю і корекції знань, навичок і вмінь; 6) комбінований урок.

Під час проведення уроку використовують такі форми організації навчання [51; 100; 124; 94]: індивідуальну (самостійна робота кожного учня за допомогою вчителя); парну (взаємодія двох учнів під керівництвом учителя); групову (робота в мікрогрупах самостійно або під керівництвом учителя); фронтальну (спільна діяльність всіх учнів під керівництвом учителя).

Засоби навчання – це будь-які засоби, прилади, обладнання чи устаткування, що використовуються для передачі інформації в процесі навчання [124; 180]. Засобами навчання математики є: підручник із математики, довідкова література, дидактичні матеріали, навчальне обладнання (наочні посібники, моделі, схеми, таблиці, рисунки, прилади, калькулятори, комп’ютери, педагогічні програмні засоби (ППЗ) тощо).

Основним засобом навчання під час вивчення математики в старшій школі слугує підручник, де викладено основний теоретичний матеріал, що відповідає чинній програмі, та подано систему задач, яка передбачає застосування і закріплення знань, відпрацювання навичок і вмінь, оволодіння основними способами діяльності. Проте кожен учитель обирає, як саме працювати з підручником, залежно від цілей і завдань уроку, типу уроку, контингенту класу тощо. З. І. Слєпкань [72] рекомендує використовувати кілька методів і форм роботи з підручником: 1) учні читають текст підручника після пояснення учителя; 2) учні аналізують приклади в тексті підручника для закріплення матеріалу, наводять власні приклади; 3) учитель читає текст підручника, навчає учнів при цьому розрізняти головне, розставляти логічні акценти, розбивати текст на змістові частини, складати план; 4) учні читають текст, виокремлюють у ньому головне, розбивають на змістові частини; 5) учні читають текст самостійно, складають план, відповідають на запитання вчителя або на запитання, сформульовані в підручнику.

Проведений аналіз доводить, що в загальних вимогах до організації навчального процесу не окреслено вимог стосовно цілеспрямованого формування ПРД.

2.2. Об'єкти засвоєння курсу «Математика», що вивчають у класах СГН (суспільно-гуманітарного напряму)

До основних об'єктів засвоєння курсу математики належать: поняття та їхні означення, математичні факти (аксіоми, теореми, формули), способи діяльності (правила, методи доведень, способи розв'язування задач тощо).

Поняття. Із філософського погляду, поняття – це форма мислення, у якій відображено загальні істотні та відмінні властивості й особливості певних предметів або явищ дійсності [63]. Властивість – це те, що притаманне предметові та відрізняє його від інших предметів або робить схожим. Істотними або суттєвими є ті властивості, без яких предмет не може існувати. Неістотними вважають ті властивості предмета, що можуть належати чи не належати предметові, але їхня відсутність не може вплинути на існування предмета.

Ю. М. Колягін [38], Є. І. Лященко [32], М. В. Метельський [107], Г. І. Саранцев [53; 54], З. І. Слєпкань [72] та ін. трактують математичне поняття як відображення в мисленні людини просторових форм та кількісних відношень дійсності, абстрагованих від реальних ситуацій. Поняття має свій обсяг та зміст. Зміст поняття – це сукупність ознак предметів або явищ, відображених у певному понятті, обсяг поняття – це множина об'єктів, відображених у цьому понятті. Розрізняють поняття: означувані та неозначувані, порівнювані та непорівнювані, натомість, порівнювані поняття поділяють на сумісні та несумісні.

Учні класів СГН ознайомлюються з різноманітними поняттями, вивчаючи шкільні предмети. При цьому вони виконують одні й ті ж дії у процесі їх застосування, нерідко роблячи помилки. Це відбувається через те, що вони не вміють окреслювати зміст та обсяг поняття, його суттєві та несуттєві властивості, зіставляти аналізований об'єкт із певним поняттям, формулювати висновки. Нерідко трапляються випадки генералізації несуттєвих ознак поняття. Процес, у ході якого вирізняють істотні властивості об'єкта (предмета) та відокремлюють їх від неістотних властивостей, називають *визначенням* поняття.

Означення – це речення, у якому в мовній або в символьній формі розкривають зміст поняття [177].

У курсі математики найбільш поширеними є такі способи визначення понять:

1) через найближчий рід і видову ознаку (наприклад, в означенні «Куб – це прямокутний паралелепіпед, що має рівні виміри» [7, с. 187] поняття «куб» потрактоване через його найближчий рід «прямокутний паралелепіпед» за допомогою видової ознаки «мати рівні виміри»);

2) конструктивно або генетично, через заначення способу утворення або виникнення поняття (наприклад, в означенні «Геометричне тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра, називається кулею» [7, с. 242] поняття «куля» потлумачене через спосіб його утворення «обертанням півкруга навколо діаметра»);

3) через перелік (наприклад, в означенні «Функції $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ називають тригонометричними функціями» [2, с. 32] поняття «тригонометричні функції» кваліфікують через перелік тих функцій, які належать до цього поняття, а саме «синус», «косинус», «тангенс», «котангенс», оскільки інші тригонометричні функції не вивчаються в класах СГН);

4) через заперечення (наприклад, «Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються» [7, с. 192]);

5) неявно, коли поняття трактують через систему аксіом (наприклад, так дефініюють поняття точки, прямої, площини тощо);

6) індуктивно (рекурентно, рекурсивно); наприклад, «Кожну лінійну функцію можна задати рівністю $y = kx + b$. Число k тут називають кутовим коефіцієнтом» [2, с. 112].

Формування поняття – одне з головних завдань навчання математики в школі. Засвоєння певного поняття супроводжується формуванням в учнів загальних уявлень про математичний об’єкт і його властивості та передбачає вміння застосовувати отриману систему знань про об’єкт у різних видах діяльності.

А. В. Усова [88], Н. А. Тарасенкова [83] вважають основними критеріями сформованості поняття: повноту засвоєння змісту поняття, рівень засвоєння обсягу поняття, повноту засвоєння зв’язків і відношень певного поняття з іншими. Як додаткові критерії кваліфікують уміння: відокремлювати істотні ознаки поняття від неістотних, оперувати поняттями в процесі розв’язування певного класу задач практичного характеру, класифікувати поняття, правильно зіставляти їх одне з одним.

На думку З. І. Слєпкань [71], важливу роль під час застосування понять у різних видах навчальної діяльності відіграють такі розумові дії, як «підведення під поняття» та «виведення наслідків».

Н. О. Менчинська [36] розрізняє чотири рівні сформованості поняття. *Перший рівень* – «дифузно-розсіяного» уявлення про предмет, явище. При цьому учень серед запропонованих предметів може обрати потрібний, але назвати його ознаки не може.

На *другому рівні* учень здатен виокремити ознаки предмета (поняття), але не може відрізнити його суттєві та несуттєві властивості.

На *третьому рівні* учень спроможний засвоїти всі суттєві властивості предмета (поняття), проте не може узагальнити власне поняття.

На *четвертому рівні* учень може узагальнити поняття, довести його зв'язки з іншими поняттями, тобто вільно володіє поняттям під час розв'язування різноманітних задач.

А. В. Усова [88] виокремлює ще й *п'ятий рівень* сформованості поняття, коли учень, крім того, що вміє узагальнювати поняття та оперувати ним під час розв'язування творчих завдань, може виявляти зв'язки між поняттями різних систем та предметів, тобто міжпредметні зв'язки.

У підручниках для класів СГН [2; 7; 8] використано всі наведені способи визначення понять. Проте в курсі математики не для всіх понять сформульовано строгі означення. Деякі з них введено описово, через порівняння, приклади тощо. Відрізняються не лише способи визначення понять, але й вимоги до їх засвоєння.

У програмі з математики (рівень стандарту) [34] зазначено, що важливим показником якості математичної освіти є практична компетентність учнів (див. п. 1.1), тобто учні повинні насамперед уміти застосовувати отримані знання. Тому *рівень строгості* вивчення понять певною мірою залежить від того, де і як застосовують поняття. З огляду на це доцільно розрізняти точне знання про поняття та уявлення про поняття. Вважатимемо, що учень має *точне знання про поняття*, якщо він знає означення поняття, може охарактеризувати його зміст і обсяг, ознаки, виокремити суттєві та несуттєві властивості, узагальнити поняття та довести його зв'язки з іншими поняттями. Очевидно, що точне знання про поняття відповідає щонайменше четвертому рівню сформованості поняття.

Під *уявленням про поняття* розуміємо вміння учня обирати серед запропонованих предметів той, що відповідає певному поняттю, а також самостійно наводити приклади. При цьому учень може бути не спроможним обґрунтувати свій вибір. Уявлення про поняття відповідає першому рівню сформованості понять.

Під час вивчення курсу математики в класах СГН важливо не підвищувати рівень вимог, формулювати адекватні, дидактично виважені вимоги до засвоєння учнями певного поняття (точне знання чи уявлення про поняття). Отже, методика формування поняття залежить від того, яким є запланований кінцевий результат формування поняття – точне знання чи уявлення.

Вимоги до результатів засвоєння математичних понять сформулюємо відповідно до критеріїв для підсумкового оцінювання навчальних досягнень учнів [34], а саме:

1) на початковому рівні – учень розпізнає одне з кількох запропонованих математичних понять; зіставляє запропоновані вчителем математичні поняття за їхніми суттєвими властивостями;

2) на середньому рівні – учень відтворює означення математичних понять та ілюструє їх;

3) на достатньому рівні – учень застосовує математичні поняття та їхні властивості для розв’язування завдань у знайомих ситуаціях;

4) на високому рівні – вільно володіє математичними поняттями та вміє їх застосовувати в різних ситуаціях.

Як зауважує З. І. Слєпкань [73], засвоєння математичних знань учнями неможливе без їхньої активної пізнавальної діяльності. Н. Ф. Тализіна [81] характеризує пізнавальну діяльність як об’єкт управління та зазначає, що поняття не може бути сформоване без оволодіння учнями системою спеціальних операцій, що становить операційну складову процесу засвоєння поняття. До складу пізнавальної діяльності із засвоєння математичних понять входять як *загальні* (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, аналогія, узагальнення, конкретизація, класифікація, систематизація), так і *комплексні* розумові дії («підведення під поняття» та «виведення наслідків»). Отже, під час вивчення та засвоєння понять в учнів формуються не лише певні знання про поняття, а й відбувається формування ПРД. Очевидно, що процес формування ПРД може відбуватися або стихійно, некеровано, або під керівництвом учителя. Від того, наскільки вдало буде організована навчальна діяльність учнів у процесі вивчення математичних понять, залежатиме і рівень сформованості в учнів ПРД.

Математичні факти. До математичних фактів, що вивчають у курсі математики старших класів, належать: аксіоми, зокрема стереометрії, теореми, формули тощо.

Структура курсу алгебри та початків аналізу, що відповідає програмі з математики для класів СГН [49] та новій програмі (рівень стандарту) [34], дещо відрізняється. Схеми вивчення курсу за кожною із цих програм подано в додатку З. У курсі алгебри та початків аналізу продовжується вивчення однієї з головних змістових ліній – функціональної лінії. Учні вивчають тригонометричні, степеневі, показникові й логарифмічні функції та їхні властивості; операції диференціювання та інтегрування. Засвоюють такі змістові лінії: числа й обчислення, вирази і перетворення, рівняння і нерівності. З’являється нова змістова лінія – елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Систему аксіом у курсі алгебри та початків аналізу введено неявно. Більшість властивостей функцій сформульовано у вигляді теорем. Проте доведення цих теорем у підручниках для класів СГН переважно або не запропоновано взагалі, або, за програмою, від учнів не вимагають таких знань.

Курс алгебри та початків аналізу містить велику кількість нових, складних математичних формул. За нашими спостереженнями, засвоєння та, найголовніше, застосування цих формул у процесі розв’язування задач часто зумовлюють появу труднощів в учнів класів СГН. Тому методика вивчення формул у класах СГН має будуватися як специфічна для такої категорії учнів. Вивчення курсу геометрії на рівні стандарту в класах СГН суттєво відрізняється від аналогічного курсу, що вивчають на академічному чи на профільному рівнях.

Г. П. Бевз [3] виокремлює такі логічні напрями побудови курсу геометрії в школі:

– напрям А – формально-логічний, тобто основні поняття визначають лише аксіомами;

– напрям В – досвідно-дедуктивний, тобто основні поняття і відношення запозичують із досвіду, а всі обґрунтування дедуктивні (B_A – формулюють усі необхідні аксіоми, B_B – тільки частину аксіом подають явно, B_C – формулюють тільки ті аксіоми, зміст яких не є очевидним);

– напрям C – інтуїтивно-дедуктивний, тобто поєднання інтуїції та дедукції;

– напрям D – інтуїтивно-експериментальний, тобто всі факти представляють експериментально, доведення відсутні.

Курс стереометрії в класах СГН побудований на рівні C. Його вивчення починається з уведення системи аксіом стереометрії. Основні факти курсу стереометрії введено як теореми. Базовий набір теорем та вимоги до їх засвоєння учнями класів СГН передбачені програмою з математики (рівень стандарту). Значну кількість теорем на рівні стандарту запропоновано для засвоєння без доведень, або ж доведення представлено тільки для ознайомлення учнів – їх не вимагають засвоїти. Наприклад, теореми про обчислення площ поверхонь, об’ємів геометричних тіл тощо в курсі математики для класів СГН запропоновано учням без доведення.

Деякі властивості та ознаки математичних об’єктів учні з’ясовують у процесі розв’язування задач. Здебільшого використовують не часто, і тому учням не ставлять вимоги до їх запам’ятовування.

Відповідно до програми з математики на рівні стандарту [34] та програми з математики для класів СГН [49], до засвоєння математичних фактів висувають такі вимоги: 1) знати формули (тригонометричні; площ поверхонь та об’ємів призми, правильної піраміди, циліндра, конуса і кулі); 2) знати аксіоми стереометрії; 3) знати властивості й ознаки паралельних і перпендикулярних прямих та площин; властивості многогранників, тіл обертання; 4) знати основні властивості логарифмів, основні правила диференціювання та інтегрування функцій, ознаки зростання (спадання) функцій.

Способи діяльності. Крім математичних понять і фактів, під час вивчення математики учні оволодівають й основними способами діяльності. Спосіб діяльності – це система послідовних дій та операцій, виконання яких приводить до результату, що відповідає меті діяльності.

Опановуючи математику, учні класів СГН вивчають два види способів діяльності: загальнонавчальні та предметні.

Формування загальнонавчальних способів діяльності можливе не тільки на уроках математики, але й під час вивчення інших дисциплін. До загальнонавчальних способів діяльності Г. К. Селевко [56] та ін. зараховують: 1) планування навчальної діяльності; 2) організацію власної навчальної діяльності; 3) роботу з різними джерелами інформації; 4) оцінювання й осмислення результатів власних дій.

Н. А. Тарасенкова [83] вважає, що до предметних способів діяльності належать загальні предметні та спеціальні предметні способи діяльності. Загальні предметні способи діяльності учні класів СГН опановують під час вивчення всього курсу математики, але спеціально їх не формують. Уміння їх застосовувати формується опосередковано. До загальних предметних способів діяльності належать зокрема правила застосування означень понять та математичних фактів. Проаналізуємо приклад.

Задача [7, с. 126]. Замініть $\log_{\frac{1}{2}} a$ логарифмом із основою 2.

Для того щоб розв’язати запропонований приклад, потрібно насамперед проаналізувати умову та обрати чи то означення поняття, чи то теорему або формулу, якою доцільно скористатися саме в конкретному випадку (теорема про перехід від однієї основи логарифма до іншої). Щоб застосувати цю теорему, потрібно виконати такі дії: 1) записати формулу ($\log_b N = \dfrac{\log_c N}{\log_c b}$); 2) за умовою даної задачі з’ясувати, чому дорівнюють N, b, c ($N = a$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = 2$); 3) записати логарифми чисел N і b за основою c та обчислити їх, якщо це можливо ($\log_2 a$, $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \log_2 2 = -1$); 4) скласти вираз відповідно до формули та спростити його ($\log_{\frac{1}{2}} a = \dfrac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{\log_2 a}{-1} = -\log_2 a$).

До спеціальних предметних способів діяльності, до яких вдаються учні класів СГН, зараховуємо алгоритми, правила, евристичні схеми, методи доведення тверджень, способи розв’язування задач тощо.

Розрізняють змістовий та операційний компоненти способу діяльності. До складу змістового компонента способу діяльності Н. А. Тарасенкова [84] зараховує: 1) вихідні знання про об'єкт та його властивості; 2) підсумкові знання про результати дій з об'єктом; 3) знання про операційний склад способу діяльності; 4) знання про інтелектуальні й предметно-практичні засоби, необхідні для виконання діяльності; 5) систему орієнтирів вибору певного способу діяльності з множини інших.

Операційний компонент способу діяльності виражений тими навичками й уміннями, якими оволодівають учні в процесі певного виду діяльності, зокрема навчальної діяльності.

У курсі математики класів СГН набір теорем і тверджень, які запропоновані для обов'язкового доведення, значно менший, ніж на академічному та на профільному рівнях. Проте відмовлятися від проведення учнями доведень недоцільно, оскільки саме тут формується здатність учнів логічно та доказово міркувати.

У курсі математики використовують кілька методів доведень: 1) за способом побудови обґрунтувань: прямі (синтетичний, аналітичний); непрямі (від супротивного, розділовий); 2) за математичним апаратом (алгебраїчний, геометричний, векторний, координатний, диференціального та інтегрального числення, математичної індукції тощо).

Найбільш поширеними в курсі математики класів СГН є синтетичний та аналітичний методи доведення, а також метод доведення від супротивного. На відміну від останнього методу доведення, що учні аналізують та відпрацьовують ще в курсі геометрії основної школи, схеми проведення доведень за першими двома методами школярі детально не вивчають. Хоч на практиці, у процесі доведення теорем та розв'язування задач на доведення, переважають саме ці методи. Тому важливим є створення дидактично виваженої системи запитань, завдань, спрямованої на відпрацювання учнями класів СГН аналізованих методів доведень.

2.3. Семіотичний компонент навчання математики в класах СГН (суспільно-гуманітарного напряму)

Процес пізнання явищ навколишньої дійсності неможливий без процедури ідеалізації – побудови образів об’єктів. Проте для вивчення цих абстрактних об’єктів необхідно їх матеріалізувати, тобто утворити умовні замінники їхніх образів. Одним із найголовніших замінників, на думку провідних психологів (Л. С. Виготський, Е. Кассирер, М. І. Кондаков, Ж. Піаже та ін.), є мова – матеріальна оболонка думки. Уречевлення ідеального може відбуватися за допомогою безлічі різних інших засобів, зокрема шляхом створення штучних мов (метамов), як-от математичної мови. Основними засобами уречевлення змісту є знак і символ. У роботі за основу обрано психолого-семіотичний аналіз особливостей знаків і символів та особливостей їх використання у навчанні, що проведений Н. Г. Салміною [52], Н. А. Тарасенковою [83]. Керуючись студіями вчених, множину знаків та символів називатимемо знаково-символічними засобами (ЗСЗ). М. В. Гамезо, Б. Ф. Ломов, В. Ф. Рубахін [13], Н. Г. Салміна [52], Н. А. Тарасенкова [83] та інші розрізняють два класи ЗСЗ фіксації змісту навчання: мовні (вербальні) та немовні (невербальні). Кожен клас поділяють на види.

Н. А. Тарасенкова [83] обґрунтувала класифікацію вербальних та невербальних ЗСЗ, що використовують у навчанні математики. До вербальних ЗСЗ науковець зараховує: 1) об’єктні тексти; 2) термінологію (номінативні та допоміжні терміни); 3) символіку (математичні символи, логічні знаки); 4) математичні речення (елементарні та складені); 5) навчальні тексти; 6) тексти задач; 7) тексти запитань; 8) піктограми та піктографію. Серед невербальних ЗСЗ дослідниця розрізняє: 1) графічні та змістово-графічні інтерпретації геометричних понять і фактів (зображення геометричних фігур); 2) таблиці, діаграми, схеми, графіки; 3) аналітичні конфігурації; 4) реальні предмети, макети, конструкції; 5) пластику та ілюстрації. Кожен із цих видів поділено на два підвиди – іконічні ЗСЗ та довільні ЗСЗ.

У курсі математики, що вивчають у класах СГН, можуть використовувати всі названі ЗСЗ, однак існує певна специфіка їх застосування, пов’язана з особливостями контингенту учнів та вимог до засвоєння ними знань. У класах СГН не варто будувати виклад навчального матеріалу, керуючись лише логікою розгортання змісту. Натомість слід ураховувати і його семіотичну специфіку. Особливої уваги потребує прогнозування труднощів та помилок, що виникають в учнів під час засвоєння теоретичного матеріалу та розв'язування задач.

Опановуючи нові математичні поняття, факти, ознайомлюючись із новими об'єктами та явищами, учні класів СГН дуже часто запам'ятовують лише їх оболонку. При цьому особливості змісту залишаються поза увагою школярів. Згодом, на етапі засвоєння того чи того факту або його використання в конкретному завданні, в учнів виникають певні труднощі: вони не знають, як правильно скористатися цим фактом, як змінити його оболонку відповідно до змісту певного завдання. Або ж навпаки, учні розуміють зміст певного математичного факту, але не можуть правильно пов'язати його з можливими оболонками, при цьому нерідко трапляються так звані «конфлікти між візуальним і логічним». Тому для ефективного засвоєння учнями класів СГН математичних фактів необхідно приділяти спеціальну увагу процедурам упізнавання і розпізнавання. Першу з них ми пов'язуємо з візуальним аналізом, а другу – зі змістовим. Н. А. Тарасенкова [190] трактує візуальний аналіз як процес зорового упізнавання об'єкта засвоєння, а смисловий аналіз – як процес розпізнавання змісту. Своєю чергою, змістовий аналіз – це поєднання двох процесів: візуального й смислового аналізу. Як правило, візуальний аналіз опереджає в часі смисловий, однак іноді вони проходять одночасно.

Проте діалектична єдність візуального і логічного не виключає появи протиріч між ними. Основою таких протиріч у процесі навчання математики є протиріччя між змістом і формою об'єкта засвоєння. Найчастіше протиріччя між візуальним і логічним виникають в учнів на етапі первісного ознайомлення з об'єктом засвоєння. Ці проблеми породжують утворення так званих *спайок між змістом і формою* [190]. Частіше вони виникають в учнів у ході заучування, «зазубрювання» матеріалу, що вивчають.

Виникнення конфліктів між візуальним і логічним у процесі вивчення математики учнями класів СГН є неминучими. Однак, для того щоб уникати таких конфліктів, потрібно, щоб учні вміли вільно оперувати знаково-символічними оболонками тих чи тих об'єктів засвоєння та пов'язувати їх зі змістовими особливостями цих об'єктів. Докладніше проаналізуємо особливості ЗСО основних об'єктів засвоєння курсу математики, що вивчають у класах СГН.

Поняття. Вивчаючи математичні поняття, використовують такі ЗСЗ: об'єктні тексти, термінологія, символіка, математичні речення, запитання, графічні інтерпретації та ін.

До *об'єктних текстів*, що вивчають у процесі оволодіння математичними поняттями в шкільному курсі математики, належать: формулювання означень, описи понять. Н. А. Тарасенкова [83] розрізняє два види формулювань: строгі та нестрогі. Основні їхні характеристики подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Характеристика формулювань математичних понять

Строге формулювання	Нестроге формулювання
Логічно упорядковане	Логічно не упорядковане
Стилістично досконалий текст	Стилістично недосконалий текст
Лаконічне	Може бути громіздким
Змістовно повне	Може містити надлишкову інформацію

Вивчаючи математичні поняття, учні класів природничо-математичного, технологічного напряму легко засвоюють строгі формулювання того поняття, яке вони вивчають, можуть назвати його родове поняття, видові властивості, зв'язки між ними. В учнів класів СГН свідоме засвоєння строгого формулювання поняття, особливо на початкових етапах, спричиняє певні труднощі. Вони несвідомо запам'ятовують текст формулювання, при цьому не фіксуючи його логічної будови. Потім, легко змінюючи структуру формулювання (міняють місцями слова, логічні наголоси, замінюють одні символи іншими тощо), втрачають основний його зміст, результатом чого стає неправильне його засвоєння і застосування. Іноді учням не потрібно запам'ятовувати строге формулювання, а варто знати лише його суть та вміти застосувати під час розв’язування задач. Тому в класах СГН є можливим, а іноді навіть і доцільним, використання нестрогих формулювань. Якщо нестроге формулювання правильне, учень легко зможе його застосовувати. У разі, коли запропоноване учнем нестроге формулювання містить недоліки чи помилки, доцільно проаналізувати його, з’ясувати основні компоненти означення, виявити логічні зв’язки між ними, охарактеризувати недоліки у формулюванні та виправити їх. Проведений аналіз нестрогого формулювання дає учневі змогу свідомо засвоїти поняття. Наприклад, нижче подано строге і нестроге формулювання означення кута між мимобіжними прямими.

Строге формулювання: «*Кутом між мимобіжними прямими* називається кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим» [8, с. 194].

Нестроге формулювання: *Кут між мимобіжними прямими* – це кут, який утворений двома допоміжними прямими. Одна пряма паралельна одній з даних мимобіжних прямих, а інша пряма – паралельна іншій мимобіжній прямій. Ці допоміжні прямі перетинаються.

Важливим є також те, яка саме оболонка використана для поняття. Текст формулювання означення може бути побудований по-різному – за індуктивним або дедуктивним принципом. Наприклад, проаналізуємо означення мимобіжних прямих. Автори підручників [2; 8] для класів СГН пропонують таке формулювання: «Дві прямі, які не лежать в одній площині, називаються мимобіжними». Таке висловлювання побудоване за дедуктивним принципом: від загального (родового поняття «дві прямі») до окремого (означуваного поняття «мимобіжні прямі»). Можна переформулювати це означення так: «Мимобіжні прямі – це дві прямі, які не лежать в одній площині». У такому разі маємо означення, сформульоване за індуктивним принципом. Уміння учнів формулювати означення за обома принципами є важливим показником розуміння сутності поняття.

Термінологія шкільного курсу математики містить певну сукупність математичних термінів, які, на думку Н А. Тарасенкової [84], повинні відповідати принципам наукової точності, системності, інваріантності, контекстної однозначності.

Кожен термін – це мовний ЗСЗ, що слугує атрибутом способу розгорнутої фіксації певного змісту. У шкільному курсі математики використовують два види термінів: номінативні та допоміжні.

Номінативні терміни містять два класи. До *загальних номінативних термінів* належать*:* 1) назви математичних об'єктів (наприклад, терміни «пряма», «площина», «простір», «функція», «нерівність» тощо); 2) назви математичних операцій (наприклад, терміни «піднесення до степеня», «добування кореня», «логарифмування», «диференціювання», «інтегрування» тощо); 3) назви математичних відношень (наприклад, терміни «паралельність», «перпендикулярність», «більше», «менше» тощо); 4) загальні назви об'єктів засвоєння (наприклад, терміни «аксіома», «теорема», «поняття», «ознака», «властивість» тощо); 5) загальні назви знаково-символічних засобів фіксації математичного змісту: назви об'єктних текстів, назви іншомовних ЗСЗ; 6) загальні назви змістових компонентів об'єктних текстів; 7) сигніфікативні слова та словосполучення (наприклад, терміни «якщо ..., то ...», «дано, довести, доведення» тощо).

До *індивідуальних номінативних термінів* зараховують, наприклад, терміни «поняття (чого?) похідної функції», «теорема (про що?) про три перпендикуляри», «рівняння (яке?) ірраціональнальне», «формулювання (чого?) основної тригонометричної тотожності» та ін.

Термінологія, якою оперують у курсі математики, що вивчають на рівні стандарту, має деякою мірою відрізнятися від термінології дисциплін цього курсу, які вивчають на академічному та на профільному рівнях. Вона значно менша за обсягом, проте для вдалого використання навіть мінімального набору термінів, учні, вивчаючи математику, повинні не тільки пам'ятати візуальний образ терміна, а й чітко розуміти його зміст. Найчастіше учні допускають помилки, ототожнюючи різні терміни, які мають зовні схожі оболонки. Наприклад, «рівняння» і «нерівність», «система» і «сукупність» тощо.

В. Г. Коваленко та І. Ф. Следзінський [27], А. М. Микиша та Б. В. Орлов [39] під *математичною символікою* розуміють сукупність математичних знаків та правил їх використання.

Н. А. Тарасенкова [84] виокремлює наступні групи математичних знаків (символів), залежно від їхніх семіотичних характеристик:

1) мотивовані знаки мовного походження, які утворилися внаслідок скорочення відповідних термінів або є їхніми першими літерами (наприклад, V – позначення об'єму тіла, f – позначення функції, $\ln$ – позначення натурального логарифма та ін.);

2) немотивовані знаки мовного походження (наприклад, α, β, γ – позначення площин або кутів, a, b, c – позначення прямих або сталих величин та ін.);

3) знаки довільної природи й такі, що прийняті за домовленістю (наприклад, позначення математичних операцій – «+» – додавання, «–» – віднімання, $\int$ – інтегрування, $\lim$ – граничний перехід; позначення цифр – 0; 1; 2; 3; ... та ін.);

4) іконічні знаки, що є зменшеними копіями геометричних зображень (наприклад, знаки трикутника, кута, відношення паралельності, перпендикулярності, мимобіжності та ін.).

Учні класів СГН без особливих труднощів засвоюють та можуть застосовувати ті знаки (символи), у яких візуальна оболонка збігається зі змістовою. Це, наприклад, знаки третьої та четвертої груп, деякі знаки першої групи. Складніше школярі засвоюють знаки другої групи, особливо в разі: 1) якщо однаковими знаками позначають різні об'єкти (наприклад, α, β, γ – позначення площин або кутів); 2) якщо схожими знаками позначають зовні схожі об'єкти (наприклад, a, b, c – позначення сталих, x, y, z – позначення змінних). У ході засвоєння учнями символів помилки також виникають у випадках, коли одними знаками позначають різні об'єкти з різних тем шкільного курсу математики або взагалі з різних навчальних дисциплін. Наприклад, S – площа фігури, довжина дуги, відстань; l – бісектриса або довжина кола; m – медіана або маса тіла та ін.

До *математичних речень* належать елементарні речення, які побудовані зі знаків окремих об'єктів, та складені речення, побудовані зі знаків об'єктів, знаків операцій, відношень та допоміжних знаків.

А. А. Столяр [79] поділяє складені математичні речення на два класи: *терми* – вирази, що не містять знаків відношень рівності чи нерівності; *формули* – вирази, що містять знаки відношень рівності чи нерівності. Н. А. Тарасенкова [84] диференціює складені математичні речення на вирази (речення, що не містять знака відношення) та співвідношення (речення, що містять знак відношення у стверджувальному значенні). Для формулювання означень понять у курсі математики в класах СГН використовують як елементарні, так і складені речення.

Запис математичних речень, а саме топографія (абрис) та взаємне розміщення його елементів, також відіграє важливу роль у засвоєнні математичних понять. Оперуючи висловом Н. А. Тарасенкової [83], називатимемо такі записи *аналітичними конфігураціями*. Важливо, щоб у процесі вивчення математичних понять в учнів створювалися правильні зорові топографічні образи цих понять. Якщо ці образи мають певні вади, то звідси випливають і труднощі в застосуванні учнями тих понять, яким вони відповідають. Наприклад, аналітичною конфігурацією означення арифметичного кореня *n*-го степеня з невід'ємного числа у випадку парного *n* є: $\sqrt[n]{a}=b$, де $b^n=a$ і $b>0, a\geq 0$.

Втрачаючи деякі з цих умов, школярі часто запам'ятовують аналітичну конфігурацію в такому вигляді: $\sqrt[n]{a}=b$, де $b^n=a$.

З огляду на це, під час застосування окресленого поняття в розв'язуванні задач в учнів виникають певні труднощі, через що вони часто роблять помилки. Наприклад, учні обчислюють значення виразу так: $\sqrt[4]{16}=-2$ замість правильного $\sqrt[4]{16}=2$.

Не менш важливу роль, ніж названі вище ЗСЗ, у класах СГН відіграють *математичні запитання*, що наявні в різних засобах навчання (підручниках, посібниках, наочних матеріалах, ППЗ). Їх застосовують вчителі на уроці та учні під час самостійної роботи.

Для того щоб правильно відповісти на запитання, учневі необхідно спочатку декодувати його зміст. Успіх декодування залежить від того, в яку оболонку загорнуто запитання. Відповідно до міркувань Н. А. Тарасенкової [84], виокремимо три групи запитань, залежно від їхніх знаково-символічних оболонок:

1) запитання, що мають повну змістову опору для відповіді (наприклад, «Чи правильно, що відстанню між двома площинами називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до другої?»);

2) запитання, що мають неповну змістову опору для

відповіді (наприклад, «Довжину якого перпендикуляра називають відстанню між двома площинами?»);

3) запитання, що не мають змістової опори (наприклад, «Як формулюється означення відстані між двома площинами?»).

Працюючи з учнями класів СГН, на відміну від роботи зі школярами класів природничо-математичного або технічного напряму навчання, у ході засвоєння нового матеріалу та його повторення доцільно вибудовувати систему запитань так, щоб поступово переходити від запитань першої, другої груп до запитань третьої групи. Деякі запитання потрібно супроводжувати відповідними рисунками-підказками.

У курсі математики старших класів математичний матеріал насичений великою кількістю невербальних ЗСЗ. Уміння учнів працювати з ними, оперувати оболонками, у які вони загорнуті, декодувати та перекодовувати їх, безперечно, сприяють успішній навчальній діяльності.

У старших класах школярі вивчають елементи просторової геометрії (стереометрії). Вивчення геометричних понять незмінно супроводжується їхніми *графічними інтерпретаціями* або *змістово-графічними інтерпретаціями*, якщо зображення містить додаткові змістові відомості. Зображення просторових фігур та їхніх елементів на площині ускладнене тим, що воно відрізняється від реального об'єкта, не зберігаються кути та деякі відстані. Тому важливо на етапі ознайомлення з геометричними фігурами в просторі та початкового закріплення вивчених властивостей аналізувати разом з учнями *реальні предмети* та їхні *макети*; порівнювати їх із відповідними зображеннями. Корисно також використовувати в процесі навчання вправи за готовими рисунками.

Проте не потрібно обмежуватися лише застосовуванням готових зображень, оскільки в такому разі навчальний процес проходить дещо однобічно. Під час самостійного зображення того чи того математичного об'єкта учень спочатку аналізує всю інформацію про цей об'єкт, яку отримує з умови задачі, намагається приєднати додаткову інформацію, необхідну для побудови зображення, і тільки потім виконує рисунок. Найчастіше цей процес відбувається без словесного супроводу, тому він стимулює учнів до активної розумової діяльності.

Особливе місце серед невербальних ЗСЗ посідають *графіки*. У курсі алгебри та початків аналізу провідною є функціональна лінія, тому вивчення нових функцій (тригонометричних, логарифмічних, показникових, степеневих) необхідно обов'язково супроводжувати побудовою графіків. Оскільки вони повинні зберігати основну інформацію про особливості функцій і їхні властивості, тому важливо доповнювати побудову графіків аналітичними записами. Подані в такій інтерпретації графіки належать до змістово-графічних інтерпретацій функцій.

Крім цього, у процесі вивчення математичних понять учні класів СГН часто мають справу зі схематичними графіками функцій. Наприклад, для з'ясування розміщення графіків логарифмічної чи показникової функції у випадках, коли $a > 1$ та $0 < a < 1$ тощо.

Математичні факти. Під час вивчення математичних фактів використовують такі ЗСЗ: об'єктні тексти, термінологія, символіка, математичні речення, навчальні тексти, запитання, графічні інтерпретації, таблиці, схеми та ін.

До *об'єктних текстів*, що вивчаються під час опанування математичних фактів у шкільному курсі математики, зараховують: формулювання аксіом, теорем, властивостей, ознак, правил, алгоритмів, евристичних схем, словесні описи формул, співвідношень тощо. Формулювання аксіом, теорем, властивостей, ознак тощо, із семіотичного погляду дещо відрізняється від формулювання означень. Н. А. Тарасенкова [83] наголошує на основній відмінності в таких формулюваннях, а саме: основні відомості про об'єкт можуть бути як відкритими, так і завуальованими. Текстові оболонки формулювань можуть бути розгорнутими та напіврозгорнутими.

Завуальованість може виникати в разі, якщо математичний факт побудовано за категоричним (стверджувальним) принципом, тоді розгорнута текстова оболонка факту здатна мати лінійну або нелінійну будову. Важливим моментом у процесі засвоєння теорем, ознак, властивостей є виокремлення їхнього засновку та висновку.

Наприклад, формулювання теореми (ознаки паралельності прямої і площини) [8] побудовано лінійно: якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і власне площині. Досвід засвідчує, що з такою будовою формулювання теореми учням працювати значно легше, оскільки засновок зазвичай розміщено після слова «якщо», а висновок – після слова «то». У курсі стереометрії більшість теорем сформульовано імплікативно, тобто у формі «Якщо ..., то ...».

Попри це застосовують й інші формулювання. Наприклад, формулювання нижчеподаних теорем мають напіврозгорнуту текстову оболонку: теорема про переріз кулі площиною – «Будь-який переріз кулі площиною є круг» [8]; ознака паралельності прямих – «Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою» [8].

Унаслідок проведеного дослідження з'ясовано, що в ході формулювання фактів із напіврозгорнутою текстовою оболонкою в учнів класів СГН виникають певні труднощі, пов'язані з виявленням засновку та висновку конкретного факту.

Крім текстів-формулювань, у курсі математики старшої школи зафіксовано й тексти-описи, що докорінно відрізняються від перших як за логічною структурою, так і змістово та візуально. Найбільше труднощів для учнів класів СГН становить формулювання словесного аналогу формул. Останнім часом під час вивчення формул учителі мало звертають уваги на їхній словесний аналог, унаслідок чого учні сприймають формулу лише на візуальному рівні. Змістовий компонент формули нерідко залишається поза увагою учнів. У зв'язку з цим, на етапі застосування формули під час розв'язування задач учні роблять багато помилок. Охарактеризуємо приклади формул та їхніх словесних аналогів (табл. 2.2).

Деякі зі словесних інтерпретацій формул подано в курсі математики старших класів як теореми. Наприклад, формули площ поверхонь та об'ємів піраміди, призми, конуса, циліндра тощо.

Для систематизації та узагальнення навчального матеріалу з математики, зокрема математичних фактів, ефективними невербальними ЗСЗ є *таблиці*. Таблиці, що використовують у шкільному курсі математики, поділяють на структуровані та неструктуровані. Структуровані таблиці мають заголовок (рядок або стовпчик, у якому зазначено основні компоненти таблиці). До неструктурованих зараховують таблиці з довідників, посібників та ін., складених автором за певною логікою, але про яку не зазначено власне в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Приклади словесних аналогів деяких формул

Формула	Словесний аналог
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	Косинус різниці двох кутів дорівнює сумі добутків косинусів цих кутів та їхніх синусів.
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	Сума косинусів двох кутів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми цих кутів на їхню піврізницю.
$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$, $a\geq 0$	Значення кореня з невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня помножити на одне й те саме число.
$V=\frac{1}{3}S_{осн}H$	Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.

Н. А. Тарасенкова [83] серед структурованих таблиць розрізняє такі види: класифікаційні, порівняльні та функціональні. Велику кількість класифікаційних таблиць зазвичай пропонують автори посібників та довідників для вступників до ВНЗ, а в останні роки – автори посібників для підготовки до ЗНО. У таких таблицях узагальнено та систематизовано математичний матеріал за певними темами, з ними зручно працювати під час повторення матеріалу.

Порівняльні таблиці найчастіше використовують для порівняння деяких математичних об'єктів, які мають схожі властивості (наприклад, паралельні прямі на площині та в просторі, логарифмічна та показникова функції тощо). Вони є особливо корисними для формування відповідного ПРД. У підручниках з математики (для класів СГН [2; 26; 8]) для опрацювання учням запропоновано найбільше функціональних таблиць, оскільки в курсі алгебри та початків аналізу вивчають переважно різні функції та їхні властивості. Також, у зв'язку з оволодінням елементами математичної статистики, учні ознайомлюються зі статистичними таблицями та методами їх опрацювання.

Крім використання готових таблиць, доцільно пропонувати учням самостійно заповнювати та складати таблиці. У процесі такої роботи учні аналізують, порівнюють, класифікують, узагальнюють та систематизують вивчений матеріал, що сприяє розвитку їхньої розумової діяльності.

Одним із різновидів невербальних ЗСЗ, що застосовують у курсі математики старших класів, є *схеми*. Розрізняють вербальні (алгоритмічні приписи, евристичні схеми, плани діяльності тощо) та невербальні схеми. Схеми слугують допоміжним засобом у процесі засвоєння та застосування деяких математичних фактів. Самостійна побудова схем учнями сприяє систематизації (класифікації) того чи того навчального матеріалу. Наприклад, на етапі систематизації навчального матеріалу з теми «Многогранники» (Геометрія, 11 клас) для загальної класифікації геометричних тіл, класифікації видів та ознак окремих геометричних тіл (призма, паралелепіпед, піраміда тощо) доцільно використовувати схеми.

Під час використання та перетворення ЗСЗ учні виконують певну діяльність. Такий вид діяльності називають знаково-символічною діяльністю (ЗСД). Н. Г. Салміна [52] виокремлює чотири види ЗСД: заміщення, кодування (декодування), схематизація та моделювання.

Як стверджує Н. А. Тарасенкова [84], *заміщення* – це ЗСД, що спрямована на функціональне відтворення реальності за допомогою ЗСЗ. Наприклад, замість абстрактного геометричного тіла піраміди (заміщуване) у навчанні математики використовують або словесні конструкції (означення піраміди), логіко-математичні конструкції, матеріальні предмети (макет піраміди).

Кодування (*декодування*) – це ЗСД із передачі чи зі сприйняття інформації [84]. Під час кодування (декодування) використовують кілька видів зв'язків заміщуваного: 1) позначення; 2) зображення; 3) розкриття сутності; 4) вираження відношення до реальності.

Метою *схематизації* є орієнтування в реальності [84]. Під час схематизації учень може працювати зі схемами як з орієнтирами реальності або зі схемами як з окремими об'єктами.

Моделювання – це ЗСД, що зорієнтована на отримання нової інформації шляхом використання ЗСЗ [84].

Особливості цілеспрямованого формування прийомів розумової діяльності під час опанування основними об'єктами курсу математики класів СГН тісно пов'язані не лише зі змістом об'єктів засвоєння, але й із тим, у які оболонки цей зміст загорнуто.

Вивчаючи математичні поняття, доводячи теореми та твердження, розв'язуючи задачі тощо, учні старших класів аналізують і синтезують засвоювані об'єкти, порівнюють їх, класифікують, систематизують та узагальнюють, тобто в них формуються відповідні прийоми розумової діяльності.

2.4. Критерії та рівні сформованості прийомів розумової діяльності в учнів класів СГН (суспільно-гуманітарного напряму)

У програмі з математики для класів СГН [49] вимоги до засвоєння навчального матеріалу сформульовано через перелік умінь, які подано в додатку Л. Як засвідчують результати анкетування (бесіди) учителів, формування загальнопредметних способів діяльності, зокрема і прийомів розумової діяльності, у межах вивчення курсу математики в класах СГН часто має стихійний, неконтрольований характер. Як наслідок, більшість учнів лише несвідомо використовують уміння аналізувати, порівнювати, узагальнювати, систематизувати тощо. Проте свідоме використання в навчальній діяльності ПРД, згідно з даними наших досліджень, приводить до значно кращих результатів.

Кожен ПРД як різновид діяльності має змістовий та операційний складники. Змістовий складник – це знання про те, які дії й операції необхідно виконати, щоб застосувати ПРД. Операційний складник – безпосереднє виконання дій та операцій для застосування того чи того ПРД. Показником сформованості ПРД є певні уміння учнів його застосовувати, тому вимоги до рівня сформованості ПРД доцільно подати через перелік умінь. Опанування учнями переліком умінь та вміння їх використовувати самостійно в процесі навчання математики свідчить про рівень сформованості в них ПРД. Доцільно виокремлювати чотири рівні сформованості в учнів ПРД: початковий, репродуктивний, реконструктивно-варіативний, творчий.

Аналогічно до того, як здійснюють вивчення об’єктів засвоєння математики в активному та фоновому режимах [190], варто організовувати методику формування ПРД. Формування ПРД в активному режимі передбачає безпосереднє ознайомлення зі змістовим (гносеологічним) компонентом. ПРД є предметом діяльності та її засобом, тобто формування вміння застосовувати ПРД слугує свідомою метою діяльності учня. Наприклад, перед учнем стоїть завдання класифікувати взаємне розміщення прямих у просторі. Тоді використання учнем ПРД класифікації відбувається в активному режимі. Він повинен знати, що таке класифікація, до яких об’єктів її застосовують, правила-орієнтири, за якими її виконують.

Організація формування ПРД у фоновому режимі більш складна. За часом цей процес може проходити: протягом кількох уроків; протягом вивчення навчальної теми; протягом вивчення програмової теми; протягом вивчення всього курсу математики старшої школи. У ході формування ПРД у фоновому режимі слід виділити два компоненти: пропедевтичний і формуючий. Залежно від мети використання та домінування того чи того компонента формування ПРД у процесі навчання математики буде мати характер пропедевтики або безпосереднього формування ПРД.

Наприклад, проаналізуємо виконання поданих нижче завдань.

Завдання 1 [7, с. 111]. Порівняйте з одиницею додатну основу *a*, якщо $a^3 < a^4$.

Завдання 2 [7, с. 111]. Порівняйте додатні *a* і *b*, якщо $a^{1,5} > b^{1,5}$.

У обох завданнях ПРД порівняння зазначено в умовах, тому використання його проходить у активному режимі. Проте виконання даного завдання носить пропедевтичний характер для формування ПРД узагальнення, оскільки у ході його розв’язання учні повторюють властивості показникової функції.

Якщо певний ПРД використовується під час виконання завдання неявно, то його змістовий компонент залишається у фоновому режимі, а формуються лише певні уміння його застосовувати. Тобто ПРД не є предметом діяльності та її засобом, а формується разом з основним предметом засвоєння.

Для того щоб учні свідомо могли застосовувати ПРД, їх формування не повинно бути стихійним. Якщо учень класу СГН спроможний застосувати ПРД лише за допомогою вчителя, підказки, вказівки, то це свідчить про *початковий рівень сформованості* ПРД. Вимоги до рівнів сформованості ПРД планують, починаючи з репродуктивного рівня, а початковий рівень виявляється як наслідок недосформованості в учнів умінь використовувати той чи той ПРД. Тобто учень володіє певними вміннями застосовувати ПРД, але не повністю, а з певними вадами, тоді цей стан кваліфікують як початковий рівень сформованості ПРД.

На *репродуктивному* рівні учень може назвати ПРД, який потрібно застосувати в зазначеній ситуації, уміє виконувати певні дії з його застосування, але робить це переважно за допомогою вчителя або певних підказок.

На *реконструктивно-варіативному* рівні сформованості ПРД учень може застосовувати певний ПРД самостійно у знайомих ситуаціях та в дещо змінених ситуаціях за допомогою вчителя.

На *творчому* рівні учень може самостійно визначати, який ПРД і як його застосувати в різних ситуаціях.

Показники репродуктивного, реконструктивно-варіативного, творчого рівнів сформованості ПРД подано в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Рівні сформованості ПРД

Рівень	**Показники**
Репродуктивний	– просте відтворення знань про ПРД; – усвідомлення їх змісту; – спроможність ототожнювати зміст за різними оболонками за допомогою вчителя або підказок; – самостійне відтворення знань про ПРД відбувається лише в знайомих ситуаціях, здебільшого за допомогою вчителя або підказок чи

Рівень	Показники
	вказівок; – усвідомлення мети виконання зазначеного ПРД; осмислення його операційного складу; – спроможність змінювати оболонки об’єкта, до якого застосовують ПРД, не пошкоджуючи зміст, за допомогою вчителя або підказок; – пошук способів виконання дій із застосування ПРД відбувається здебільшого за допомогою вчителя або підказок чи вказівок.
Реконструктивно-варіативний	– реконструктивно-варіативне відтворення знань про зазначений ПРД, наближене до повного усвідомлення їх змісту; – спроможність самостійно ототожнювати зміст за різними оболонками; – самостійне застосування знань про ПРД відбувається в знайомих ситуаціях та частково змінених відомих ситуаціях на основі використання загальних рекомендацій учителя; – усвідомлення мети виконання зазначеного ПРД; – осмислення його операційного складу; – спроможність самостійно змінювати оболонки об’єкта, до якого застосовують ПРД, не пошкоджуючи зміст; – пошук способів виконання дій із застосування ПРД відбувається на основі загальних рекомендацій учителя.
Творчий	– реконструктивно-варіативне відтворення знань про зазначений ПРД, повне усвідомлення їх змісту; – спроможність вільно оперувати з різними оболонками з різним змістом; – самостійне застосування знань про ПРД відбувається в незнайомих ситуаціях, на основі самостійного цілеутворення, побудови власних схем діяльності, а також нестандартного вибору і творчого використання відомих схем діяльності в незнайомих ситуаціях зі значною варіативністю умов; – усвідомлення мети виконання вказаного ПРД; – осмислення його операційного складу; усвідомлення мотивів та засобів вибору способів діяльності із застосування ПРД; – спроможність самостійно змінювати оболонки об’єкта, до якого застосовують ПРД, не

Рівень	Показники
	пошкоджуючи зміст у незнайомих ситуаціях; – самостійний вибір та творче використання різноманітних засобів і прийомів застосування ПРД у незнайомих ситуаціях зі значною варіативністю умов

У ході дослідження з'ясовано, що репродуктивний рівень сформованості ПРД корелює із середнім рівнем навчальних досягнень учнів, реконструктивно-варіативний – із достатнім рівнем, а творчий – із високим рівнем навчальних досягнень учнів.

2.5. Методичні вимоги до організації навчання математики в класах СГН, що спрямоване на формування в учнів прийомів розумової діяльності

Основні положення особистісно орієнтованого навчання учнів спрямовані на розвиток індивідуальних здібностей школярів. Для цього вчитель використовує різні форми, методи та засоби викладання шкільного предмета з метою найбільш ефективного його засвоєння. В умовах профільного навчання завжди актуалізуються предмети основного циклу, тобто профільні предмети. Натомість дещо знецінюється роль і місце інших, непрофільних предметів, зокрема математики, у загальному розвитку учня та його індивідуальних особливостей. Проте вивчення основних об'єктів засвоєння курсу математики учнями класів СГН на рівні стандарту, по-перше, забезпечує учням виконання державних вимог для отримання середньої освіти, по-друге, сприяє розвиткові мислення, що важливо для загального становлення особистості учнів. У процесі вивчення математики розумова діяльність учнів є специфічною, тому створення належних умов для цілеспрямованого формування ПРД – обов'язкова умова навчання математики учнів класів СГН.

Охарактеризуємо основні «больові точки» навчання математики в класах СГН та специфічні завдання організації навчання, які постають у зв'язку з цим.

Зменшення кількості годин на вивчення математики в старших класах шляхом збільшення кількості годин для *викладання деяких гуманітарних предметів.* Від учителя математики в такій ситуації вимагають більш ретельної підготовки до уроків, урахування під час добору задач і вправ для розв'язування профілю класу, здібностей дітей; урізноманітнення типів і видів уроків, а можливо, і методичних впливів у ході вивчення деяких тем. Оскільки вимоги до учнів класів СГН дещо знижуються, не потрібно витрачати багато часу на уроках для перевірки доведень усіх теорем (особливо в процесі вивчення розділів стереометрії), формування точних знань про факти, означення і теореми. Доцільніше звернути увагу на розуміння учнями геометричних та фізичних властивостей, уміння використовувати знання під час розв'язування задач.

Різке зниження зацікавленості учнів класів СГН математикою. Практика доводить, що учнів класів СГН поділяють на дві категорії: ті, які вважають, що вивчення математики їм узагалі не потрібно, оскільки вони – гуманітарії, і ті, яким математика легко дається, але вони навчаються в профільних класах (найчастіше з поглибленим вивченням іноземних мов) заради вдосконалення своїх філологічних та інших здібностей. В обох випадках перед учителем математики постає складне завдання – зацікавити учнів. Це можна зробити за допомогою використання на уроках математики цікавих історичних фактів, історичних задач, а можливо, навіть шляхом проведення спільних уроків у вигляді бесіди, семінару або дискусії. На цих уроках доцільно запропонувати учням дослідити спільні «риси» математики та інших наук, ширше використовувати порівняння в обох його виявах – зіставлення і протиставлення.

Психологічні та інтелектуальні особливості учнів класів СГН. Психологічні та розумові здібності учнів впливають на рівень засвоєння навчального математичного матеріалу, швидкість засвоєння та його відтворення. Для якісного навчання вчителю важливо застосовувати диференційований підхід як під час підготовки завдань на урок, так і під час проведення уроку, а також у ході самостійної роботи учнів. За цих умов актуалізується особистісно орієнтоване навчання. На жаль, дидактичних матеріалів саме для класів СГН недостатньо, тому вчителеві доводиться самостійно розробляти систему вправ, самостійних, контрольних завдань для учнів, залежно від рівня їхньої підготовки, рівня сформованості прийомів розумової діяльності тощо. Аналіз таких матеріалів свідчить, що вони не завжди є дидактично досконалими, тому науковий пошук у цьому напрямі є необхідним.

Згідно з А. М. Пишкало [50], методична система навчання, зокрема математики, включає п’ять основних компонентів: цілі, зміст, форми, методи та засоби навчання.

Г. П. Бевз [3] убачає мету вивчення дисципліни в міцному і свідомому оволодінні системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні для загального розвитку учнів, їхньої практичної діяльності, вивчення споріднених шкільних предметів і для продовження освіти. У зв’язку з цим розрізняють загальноосвітні, практичні, виховні та розвивальні цілі навчання математики.

Під загальноосвітніми цілями розуміють оволодіння учнями науковими методами дослідження, розвиток пізнавальних інтересів учнів, основних психічних процесів, загальних та спеціальних здібностей. Практичні цілі передбачають підготовку учнів до застосування отриманих знань із математики в практичній діяльності. Виховні цілі навчання математики спрямовують на розвиток в учнів культури мислення, виховання світогляду, наполегливості тощо.

Обґрунтовуючи зміст навчання математики, М. І. Бурда [9] пропонує враховувати такі принципи:

1) *соціальної ефективності* (обсяг математичних знань повинен відповідати єдиному державному стандартові базової математичної освіти);

2) *пріоритету розвивальної функції навчання* (процес навчання має бути інтенсивним, сприяти інтелектуальному розвиткові учнів та бути організованим на засадах діяльнісного підходу);

3) *диференційованої реалізованості* (зміст математики, що вивчають у школі, повинен бути спрямований на реалізацію основних видів диференціації: за змістом навчального матеріалу; за рівнями програмних вимог до математичної підготовки учнів, тобто реалізація рівневої диференціації);

4) *модульності* (урахування в конструюванні курсу математики та доборі методичних матеріалів до уроків, що стосуються інваріантної та варіативної частин курсу математики);

4) *концентризму* (математичної підготовки досягають концентричним розвитком основних змістових ліній курсу шкільної математики);

5) *фузіонізму* (вивчення курсу математики в школі повинно бути єдиним, інтегрованим).

Навчання математики в класах СГН має свою специфіку. Для того щоб процес навчання сприяв формуванню в учнів прийомів розумової діяльності, необхідним є дотримання низки методичних вимог, які виокремлені нами для кожного компонента методичної системи. Щонайперше, методична система має реалізовувати принципи рівневої диференціації.

В. М. Монахов, В. А. Орлов, В. В. Фірсов [40] розрізняють кілька принципів рівневої диференціації: 1) формування опори, тобто всі учні повинні засвоїти обов'язковий мінімум знань, визначений відповідними нормативними документами; 2) обґрунтування і відкрите представлення всім учням рівня обов'язкової підготовки; 3) визначення рівня обов'язкових вимог та рівня навчання; 4) добровільний вибір кожним учнем рівня засвоєння та звітності; 5) відповідність змісту, контролю й оцінювання знань рівневому підходу. Беручи за основу окреслені положення, наголосимо, що їх необхідно враховувати в доборі й структуруванні змісту навчання.

Цільовий компонент. Аналіз чинної програми [34] дає змогу стверджувати, що перелік державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учнів доцільно розділити на дві категорії. До першої з них зарахуємо ті вимоги, що стосуються вмінь, безпосередньо пов'язаних із ПРД і для яких оволодіння учнями такими прийомами є невід'ємним складником опанування вміннями. До другої категорії державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учнів належить решта вмінь, поданих у програмі. Тут ПРД чітко не виокремлені, але поза їх формуванням досягнення належних результатів навчання не є можливим. Отже, необхідно уточнити, деталізувати державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів у контексті особливостей формування ПРД. Наведемо перелік вимог першої категорії.

Алгебра та початки аналізу, 10 клас. Учень:

– *розрізняє* види чисел (тема «Функції, їхні властивості та графіки»);

– оцінює та *порівнює* значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені (тема «Функції, їхні властивості та графіки»).

Алгебра та початки аналізу, 12 клас. Учень:

– *розрізняє* класи рівнянь, нерівностей, їхніх систем, методи їх розв'язання (тема «Рівняння, нерівності та їхні системи»).

Геометрія, 10 клас. Учень:

– *розрізняє* означувані й неозначувані поняття, аксіоми й теореми (тема «Паралельність прямих і площин у просторі»);

– *класифікує* взаємне розміщення прямих і площин, площин у просторі за кількістю їхніх спільних точок (тема «Паралельність прямих і площин у просторі»).

Геометрія, 11 клас. Учень:

– вдається до *аналогії* між векторами і координатами на площині й у просторі (тема «Вектори і координати»);

– *розпізнає* рівняння площини, сфери (тема «Вектори і координати»);

– *розпізнає* основні геометричні тіла, їхні елементи (тема «Геометричні тіла та поверхні»).

Отже, у вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки учнів не представлено безпосередніх вимог до формування таких ПРД, як «аналізує», «узагальнює», «систематизує», «зіставляє», «протиставляє» тощо. Водночас їх формування є необхідною умовою якісного виконання. Наприклад, державні вимоги до результатів вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» (алгебра та початки аналізу, 10 клас) пов'язані з такими ПРД (їх ми наводимо в дужках):

– обчислює за формулами значення величин, використовуючи різні системи одиниць вимірювання (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *аналогія*);

– виконує відсоткові розрахунки (*аналіз–синтез*);

– знаходить природну область визначення функціональних залежностей (*аналіз–синтез*);

– користується різними способами задання функцій (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *абстрагування, узагальнення*);

– встановлює за графіком функції її найважливіші властивості (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *абстрагування, аналогія*, *класифікація*, *узагальнення, конкретизація*);

– досліджує властивості функцій (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *абстрагування, аналогія*, *класифікація*, *узагальнення*, *конкретизація, систематизація*);

– розпізнає та зображує графіки степеневих функцій (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *абстрагування, аналогія*, *узагальнення, конкретизація*);

– моделює реальні процеси за допомогою степеневих функцій (*аналіз–синтез*, *порівняння*, *аналогія*, *абстрагування, узагальнення*, *систематизація*).

У критеріях для підсумкового (тематичного) оцінювання навчальних досягнень учнів безпосередньо згадано лише кілька ПРД.

Початковий рівень:

– *розпізнає* один із кількох запропонованих об’єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), виокремлюючи його серед інших;

– *зіставляє* дані або словесно описані математичні об’єкти за їхніми суттєвими властивостями;

– *впізнає* окремі математичні об’єкти і пояснює свій вибір.

За іншими критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів на всіх рівнях (початковому, середньому, достатньому та високому) також передбачено, хоч і небезпосередньо, володіння учнями певними прийомами розумової діяльності. Наприклад, на достатньому рівні учень:

– *застосовує* означення математичних понять та їхніх властивості для розв’язання завдань у знайомих ситуаціях; для виконання такого завдання учень застосовує ПРД: аналіз–синтез, порівняння, аналогію, абстрагування.

– *самостійно виправляє* виявлені помилки; для виконання такого завдання школяр застосовує ПРД: аналіз–синтез, порівняння, аналогію.

З огляду на вищезазначене, наголосимо, що під час постановки цілей навчання математики в класах СГН потрібно враховувати: ієрархію цілей; вимоги державного стандарту; вимоги програми з математики для старшої школи (рівень стандарту); рівень сформованості в учнів прийомів розумової діяльності.

Цілі навчання математики реалізують: на рівні вивчення всього курсу; на рівні вивчення окремої програмової теми; на рівні вивчення окремої навчальної теми. В організації навчання – відповідно: протягом навчального року; протягом вивчення програмової теми; протягом вивчення навчальної теми; на окремому уроці; на певних етапах уроку.

Аналіз чинних підручників із математики для класів СГН [2; 7; 8] доводить, що в навчальних текстах підручників закладено основу для формування ПРД, проте безпосередніх вказівок на формування того чи того прийому, на нашу думку, недостатньо. Наприклад, у підручнику [2] подання теми «Пряма і площина у просторі» побудовано описаним нижче чином.

Спочатку автори підручника пригадують можливі випадки розміщення прямої і площини (пряма і площина мають безліч спільних точок, одну спільну точку, не мають спільних точок). Далі пропонують проаналізувати випадок, коли пряма і площина не мають спільних точок, формулюють означення паралельних прямої і площини; формулюють і доводять теорему (ознаку паралельності прямої і площини). Потім у тексті підручника подано означення прямої, перпендикулярної до площини; формулювання та доведення теореми (ознаку перпендикулярності прямої і площини); означення перпендикуляра, похилої до площини, проекції похилої на площину, відстані від точки до площини; формулювання та доведення теореми про три перпендикуляри. У тексті параграфа, крім означень та теорем, учням запропоновано запитання після викладу матеріалу та запитання для контролю знань, приклади, малюнки, задачі для самостійного розв’язування.

У підручнику [8] подання теми «Пряма і площина у просторі» побудовано по-іншому. Текст параграфа розбито на п’ять пунктів: 1) паралельність прямої і площини; 2) перпендикулярність прямої і площини; 3) перпендикуляр і похила; 4) теорема про три перпендикуляри; 5) кут прямої з площиною.

Кожен пункт параграфа, крім формулювання означень та теорем, супроводжується прикладами розв'язування задач, правилами та вказівками до дій. До всього параграфу учням запропоновано запитання для самоперевірки, рівневі задачі для самостійного розв'язування (три рівні – початковий, середній та високий). Проте в тексті параграфа немає додаткових навідних запитань.

У тексті параграфів обох підручників недостатньо орієнтирів для учнів, що сприяли б цілеспрямованому формуванню ПРД. Наприклад, «проаналізуйте … абзац тексту», «порівняйте властивості …», «проаналізуйте доведення теореми …», «з яких етапів складається доведення теореми …» «який висновок ви можете зробити з …», «які властивості аналізованого поняття можна застосувати для …», «складіть порівняльну таблицю …» тощо.

Отже, добираючи зміст та розробляючи способи його подання учням, необхідно враховувати, щоб навчальні тексти містили еталони застосування ПРД. Це означає, що в тексті підручника мають бути такі формулювання: «проаналізуємо …», «порівняємо …», «узагальнимо …», «конкретизуємо …», «проведемо аналогію з …», «систематизуємо …», «покласифікуємо …» тощо.

Важливим компонентом для створення ефективних умов вивчення курсу математики в класах СГН є вдалий добір учителем методів навчання. Поділяємо міркування А. І. Кузьмінського [30] про те, що критеріями добору методів навчання є: 1) провідні завдання виховання особистості; 2) мета і завдання навчання взагалі й конкретного етапу зокрема; 3) закономірності й принципи навчання; 4) зміст навчального матеріалу; 5) навчальні можливості школярів; 6) наявність засобів навчання; 7) психолого-педагогічні можливості педагога.

Ураховуючи індивідуальні особливості учнів класів СГН, необхідність створення умов, які б сприяли формуванню прийомів розумової діяльності, особливості змісту курсу математики в класах СГН, наголосимо, що структура уроків потребує деякого уточнення. Оскільки теоретичний матеріал курсу математики старших класів великий за обсягом та складний для сприймання, особливо для учнів класів СГН, то потрібно подавати його невеликими частинами (міні-блоками). Організовувати засвоєння міні-блоку доцільно як завершений дидактичний цикл. Наприклад, під час проведення уроку з теми «Розв'язування показникових рівнянь» (алгебра та початки аналізу, 11 клас) варто розбити навчальний матеріал на міні-блоки:

– розв'язування найпростіших показникових рівнянь;

– розв'язування показникових рівнянь способом зведення обох частин показникового рівняння до спільної основи;

– розв'язування показникових рівнянь способом зведення показникового рівняння до квадратного;

– розв'язування показникових рівнянь способом винесення спільного множника за дужки.

Засвоєння кожного міні-блоку доцільно проводити за такою схемою:

– сприймання та усвідомлення нового матеріалу;

– засвоєння нового матеріалу;

– закріплення вивченого матеріалу;

– відпрацювання навичок і вмінь під час розв'язування задач.

На уроках математики в класах СГН слід використовувати загальні форми організації навчання (групова, індивідуальна, фронтальна).

Наше дослідження довело, що групові форми організації навчання є корисними на уроках засвоєння знань, узагальнення і систематизації, робота в малих групах – на уроці формування навичок і вмінь; на уроці застосування знань, навичок і вмінь; на комбінованому уроці; на уроці корекції знань, навичок і вмінь. Проте не можна відмовлятися і від індивідуальної форми організації навчання, оскільки вона ефективна на етапах закріплення знань, самостійного відпрацювання навичок і вмінь, розв'язування вправ. Застосовуючи індивідуальні форми навчання, важливо враховувати ступінь потрібної допомоги учням із боку вчителя. Дидактично виважене дозування цієї допомоги слугує додатковим засобом керування навчальнопізнавальною діяльністю учнів. У такий спосіб можна досягти кращих результатів цілеспрямованого формування ПРД в учнів.

Фронтальну форму навчання доцільно використовувати на етапах актуалізації знань, перевірки домашнього завдання, перевірки і знань, навичок і вмінь, наприкінці уроку або наприкінці вивчення теми тощо.

Оскільки на вивчення математики в класах СГН виділяється всього 3 години на тиждень, тому вчитель постійно прагне підвищити ефективність засвоєння програмового матеріалу, зокрема, за рахунок інноваційних методів навчання. Одним із шляхів, які сприяють інтенсифікації й оптимізації навчального процесу, є використання інтерактивних методів навчання. О. І. Пометун [127] наголошує, що суть інтерактивного навчання полягає в тому, що навчальний процес відбувається тільки шляхом постійної, активної взаємодії усіх учнів. Як відомо, школярі молодшої та середньої ланки є більш активними учасниками навчального процесу, аніж учні-старшокласники. У зв'язку зі зниженням рівня активності учнів старших класів під час навчального процесу у більшості школярів знижується і рівень засвоєння знань, навичок і вмінь. Традиційні методи навчання не завжди виявляються досить ефективними.

Наприклад, у старших класах під час вивчення великих за наповненням тем із алгебри та стереометрії вчителі часто використовують уроки-лекції. Вони намагаються за короткий час викласти якомога більше матеріалу, але цей матеріал складний для сприймання учнями. У класах природничо-математичного чи технічного напрямів урок такого типу може бути ефективним. Проте в класах СГН, як відомо, ефективність уроків-лекцій з математики невисока. Уроки закріплення знань й відпрацювання навичок і вмінь також часто за браком часу та складністю матеріалу не приносять бажаних результатів. Тому під час вивчення та закріплення окремих тем з математики (наприклад, «Тригонометричні функції», «Показникові рівняння та нерівності», «Логарифмічні рівняння та нерівності», «Піраміда. Властивості піраміди» тощо) можна проводити інтерактивні уроки.

Структура такого уроку наступна: а) мотивація; б) оголошення, представлення теми та очікуваних навчальних результатів; в) надання необхідної інформації; г) інтерактивна вправа; д) підбиття підсумків, оцінювання результатів. Одним із етапів інтерактивного уроку є надання необхідної інформації. Її учитель може запропонувати учням опрацювати самостійно як домашнє завдання до попереднього уроку. Потім на самому уроці лише коротко повторити основні означення теореми, формули, правила за допомогою роздаткового матеріалу, або таблиць, або технічних засобів. При цьому учитель допомагає учням не просто пригадати те чи інше правило чи то означення, а й вказує на основні особливості його застосування.

Звичайно, для того, щоб ефективно проводити інтерактивні уроки, учителю необхідно поступово підготувати клас для такої діяльності. Однак нехтувати традиційними методами навчання також не варто. Тільки вдале їх поєднання приведе до гарних результатів у вигляді міцних та глибоких знань учнів.

До засобів навчання, що дають змогу унаочнювати зміст на кожному етапі уроку, ставлять особливі вимоги. Серед предметних засобів навчання виокремимо засоби наочності, які сприятимуть кращому засвоєнню математичного матеріалу учнями-гуманітаріями на певних етапах уроку, а саме: таблиці, схеми, макети, наочні посібники, ПК, ППЗ тощо.

Потрібно також ураховувати те, що на різних етапах уроку можна варіювати використання різних видів наочності. Наприклад, під час вивчення теми «Призма» учням-математикам чи технікам варто спочатку сформулювати означення призми та її елементів, потім прочитати відповідний матеріал у підручнику. Проте у класах СГН, перш ніж уводити поняття певних геометричних тіл, доцільно проаналізувати з учнями їхні макети. Важливо при цьому запропонувати школярам відповісти на такі запитання, які б підвели їх до означення запропонованих для вивчення многогранників та виявлення деяких їхніх властивостей, а саме:

– назвіть усі многокутники, з яких складається цей многогранник;
– назвіть види цих многокутників;
– які з многокутників лежать у паралельних площинах?
– які з цих многокутників будуть рівними?
– назвіть усі відрізки, із яких складаються ці многокутники;

– які з цих відрізків лежать на паралельних прямих?

Отже, за допомогою аналізу запропонованого учням макета призми та серії запитань ми підводимо їх до формулювання означення поняття призми та її елементів.

На етапі первинного закріплення матеріалу, наприклад властивостей призми чи іншого геометричного тіла, доцільно використати такий засіб наочності, як таблиці. Досвід переконливо доводить, що учні легше запам'ятовують факти, записані в таблицях, аніж ті, які подані в тексті підручника. Можна пропонувати учням готові таблиці або ж заповнювати їх разом із ними. Ефективними для засвоєння теоретичного матеріалу є порівняльні таблиці властивостей кількох геометричних тіл, наприклад, прямої і похилої призми, призми і паралелепіпеда тощо.

Закріплюючи матеріал, рекомендовано використовувати педагогічні програмні засоби, а саме: GRAN 3D, DG, ППЗ «Алгебра, 10 клас», «Геометрія, 10 клас», «Алгебра, 11 клас», «Геометрія, 11 клас» та ін.

Для виконання домашнього завдання можна запропонувати учням нижчеподані вправи.

Завдання 1. Створіть макет: а) правильної трикутної призми зі стороною основи 5 см та висотою 8 см; б) прямої чотирикутної призми зі сторонами основи 6 см і 8 см та висотою 9 см; в) правильної п'ятикутної призми зі стороною основи 3 см та висотою 4 см. Знайдіть площі основи призми та її бічних граней. Для кожної призми зазначте рівні многокутники та рівні ребра.

Завдання 2. Виміряйте розміри своєї кімнати. Зобразіть її модель у своєму робочому зошиті, використовуючи масштаб 1:100.

Учням класів СГН краще пояснювати властивості геометричних тіл на моделях, об'єктах навколишнього середовища. І лише після цього спробувати разом із ними зобразити певне геометричне тіло на рисунку. Засвоюючи та закріплюючи матеріал доцільно, на нашу думку, використовувати завдання за готовими малюнками.

Змістовий компонент. Під час вивчення математики учні опановують методику формування математичних понять, фактів, способів діяльності. При цьому в школярів формуються загальні (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення та ін.) та спеціальні розумові дії, що необхідні їм для вивчення інших профільних предметів.

Основні дидактичні положення методики вивчення математичних понять описані в працях Г. П. Бевза [3], М. І. Бурди [10], В. О. Гусєва [19], П. М. Ерднієва, Ю. М. Колягіна, Г. Л. Луканкіна та ін. [38], М. В. Метельського [37], В. М. Осинської [45], Г. І. Саранцева [53; 54], З. І. Слєпкань [71; 72; 73], І. М. Смирнової [78], Н. А. Тарасенкової [82; 83; 196], А. В. Усової [200; 88], О. С. Чашечникової [91] та ін. Процес формування наукових понять в учнів досліджували відомі психологи: Д. М. Богоявленський [4], Л. С. Виготський [12], В. В. Давидов [20], Г. С. Костюк [28], Є. М. Кабанова-Меллер [26], В. А. Крутецький [88], Н. О. Менчинська [35], Н. Ф. Тализіна [80] та ін.

Г. І. Саранцев [53] обґрунтовує кілька етапів формування математичних понять: 1) мотивація введення поняття; 2) з'ясування суттєвих ознак поняття; 3) синтез виокремлених суттєвих ознак, формулювання означення поняття; 4) розуміння змісту слів в означенні поняття; 5) засвоєння логічної структури означення поняття; 6) запам'ятовування дефініції поняття; 7) вивчення зв'язків певного поняття з іншими поняттями; 8) використання поняття в конкретних ситуаціях.

Перший етап формування поняття, а саме мотивація введення поняття, за Г. І. Саранцевим [53], – порівняно самостійний і обмежений у часі період. Етапи 2–6, на нашу думку, дуже роздрібнені, їх можна об'єднати в один етап, оскільки всі вони безпосередньо стосуються введення поняття. Натомість останній етап досить розмитий і за часом може тривати не один рік, хоч, звичайно, є також важливим. З огляду на те, що конкретне завдання формування того чи того поняття стоїть перед учителем під час вивчення певної теми і на це передбачено обмежений час на уроці, ми дотримуємося нижчеподаної класифікації етапів формування поняття:

I етап – мотивація введення поняття;

II етап – уведення поняття та формулювання означення;

III етап – застосування певного поняття під час розв'язування задач.

Отже, кожен етап формування поняття чітко окреслений і обмежений у часі. При цьому вчитель має змогу прослідкувати на уроці за тим, які утруднення виникають в учнів на кожному з цих етапів, допомогти їм та проаналізувати отримані результати їхньої роботи.

Кожен етап своєю чергою поділяють на кроки. Наприклад, на етапі введення поняття та формулювання означення учні виконують такі кроки: формулювання означення, з’ясування суттєвих властивостей поняття, формулювання інших ознак, підведення під поняття, виведення наслідків. Так, після з’ясування суттєвих властивостей поняття «відстані між паралельними площинами» доцільно запропонувати учням подані нижче завдання.

Завдання 1. У наведеному означенні відстані між паралельними площинами є помилка. Яке слово дасть змогу її виправити?

1) Відстанню між площинами називають довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї площини на іншу. *Очікувана відповідь*: відстанню між *паралельними* площинами називають довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї площини на іншу.

2) Відстанню між паралельними площинами називають перпендикуляр, опущений із будь-якої точки однієї площини на іншу. *Очікувана відповідь*: відстанню між паралельними площинами називають *довжину перпендикуляра*, опущеного з будь-якої точки однієї площини на іншу.

3) Відстанню між паралельними площинами називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки однієї площини на іншу. *Очікувана відповідь*: відстанню між паралельними площинами називають довжину перпендикуляра, опущеного з *будь-якої* точки однієї площини на іншу.

4) Відстанню між паралельними площинами називають довжину відрізка, проведеного з будь-якої точки однієї площини на іншу. *Очікувана відповідь*: Відстанню між паралельними площинами називають довжину *перпендикуляра*, проведеного з будь-якої точки однієї площини на іншу.

Завдання 1 запропоновано учням для кращого засвоєння означення поняття, оскільки учні класів СГН часто лише запам'ятовують формулювання поняття, не заглиблюючись у його змістові особливості. Унаслідок цього у них виникають труднощі застосування цих понять. У кожному пункті завдання акцентовано увагу учня на певному змістовому компоненті означення. Після кожного запитання подано правильну відповідь, курсивом виділено слово або вираз, які потрібно вставити.

Завдання 2. Учні по-своєму сформулювали означення відстані між паралельними площинами. Чи правильне означення вони подали?

1) Відстанню між площинами називають довжину відрізка, проведеного з певної точки однієї площини до іншої.

2) Перпендикуляр, опущений із будь-якої точки однієї з двох паралельних площин на іншу, називають відстанню між паралельними площинами.

3) Відстанню між паралельними площинами називають перпендикуляр, опущений із певної точки однієї площини на іншу.

За допомогою завдання 2 перевіряють здатність учнів оперувати різними оболонками означення та з'ясовувати при цьому їхнє змістове наповнення. Тобто учні повинні виявити, які зміни оболонки ведуть до зміни сутності означення, а які – ні.

Завдання 3. Із точок A, B, C площини α опустили перпендикуляри AA_1, BB_1, похилу CC_1 до площини β, яка паралельна площині α.

1) Чи можна за даними, запропонованими в умові завдання, визначити відстань між площинами α і β?

2) Чи буде відстанню між площинами α і β довжина відрізка: а) AA_1; б) BB_1; в) CC_1?

3) Порівняйте довжини перпендикулярів.

4) Знайдіть BB_1, якщо $AA_1 = 6$ см.

Завдання 3 передбачає відпрацювання навичок і вмінь застосовувати вивчене означення.

Як свідчить практика, на етапі введення поняття, за браком часу на уроці, нерідко нехтують такими комплексними ПРД, як «*підведення під поняття*» та «*виведення наслідків*». Але якщо цього не зробити, то процес формування нового поняття відбуватиметься з певними вадами. Часто в шкільній практиці учні лише «зазубрюють» означення понять та їхніх властивостей, не усвідомлюючи їхньої сутності. Як наслідок, діти не можуть застосувати їх під час розв'язування задач чи доведення теорем. Тому ці кроки вкрай важливі, повноцінно сформувати в учнів наукове поняття, не дотримуючись їх, неможливо.

У курсі математики класів СГН учням необхідно засвоїти велику кількість складних математичних формул та, головне, навчитися правильно їх використовувати під час розв'язування різноманітних завдань. Саме тут у школярів часто виникають труднощі через те, що вони:

1) неточно запам'ятовували формули;
2) замінюють правильну формулу на схожу за формою;
3) неправильно використовують зміст формули;
4) не вміють правильно (раціонально) обирати потрібну формулу відповідно до змісту завдання.

Дуже часто під час вивчення різних математичних формул в учнів класів СГН зорове упізнавання формули та розпізнавання її змісту не збігається. Тобто один із складників змістового аналізу – візуальний або смисловий – залишається для учнів нерозкритим зовсім або розкритим частково, що приводить, зокрема, до утворення так спайки між формою і змістом. Лише за умови повноцінного візуального та смислового аналізу певної математичної формули учні зможуть не просто запам'ятати її, але й правильно використовувати в різних завданнях.

Для запобігання появі помилок й утворенню спайок між змістом і формою доцільно запропонувати учням усні та письмові вправи з візуальними акцентами на тому чи на тому елементі формули, яку необхідно засвоїти. На етапі засвоєння нового матеріалу важливо пропонувати учням класів СГН спочатку завдання на упізнавання, а потім – на розпізнавання формул. У завданнях на упізнавання формул варто використовувати візуальні аналогії, що допоможе учням в подальшому не зупинятися на етапі візуального аналізу, а поступово переходити і до змістового аналізу. Доцільно пропонувати учням завдання, що передбачають:

1) кількісний аналіз формули (у цих завданнях варіюється кількісний склад формули);

2) покомпонентний аналіз формули (у таких завданнях кількість елементів формули залишається незмінною, а варіюється значення одного чи кількох компонентів формули);

3) зіставний аналіз принаймні двох формул, які є різними за змістом, але мають схожі оболонки.

Наприклад, під час вивчення формули об'єму піраміди доцільно запропонувати учням завдання на зразок поданих чотирьох завдань. Їх виконання важливо не розривати в часі. Завдання 1 передбачає кількісний аналіз формули, що вивчають, завдання 2 і 3 – покомпонентний аналіз (у завданні 2 варіюється один компонент, а в завданні 3 – два), завдання 4 – порівняння двох формул (формули об'єму піраміди та конуса), які мають схожі оболонки.

Вихідні дані. Дано піраміду, у якої S – площа основи піраміди, H –висота піраміди, h – висота однієї з бічних граней піраміди, l – бісектриса однієї з бічних граней піраміди.

Завдання 1. У якій із запропонованих формул кількість компонентів збігається з кількістю компонентів формули для обчислення об'єму піраміди?

А. $V = \frac{1}{3}S \cdot H \cdot l$. **Б.** $V = \frac{1}{3}S$. **В.** $V = \frac{1}{3}S \cdot H \cdot l \cdot h$.

Г. $V = \frac{1}{2}S \cdot H$. **Д.** $V = S \cdot H \cdot l$.

Завдання 2. Оберіть формулу, у якій числовий коефіцієнт є таким самим, як у формулі для обчислення об'єму довільної піраміди.

А. $V = \frac{1}{2}S \cdot H$. **Б.** $V = \frac{1}{6}S \cdot H$. **В.** $V = \frac{2}{3}S \cdot H$. **Г.** $V = \frac{1}{3}S \cdot H$. **Д.** $V = S \cdot H$.

Завдання 3. Доповніть формулу для обчислення об'єму довільної піраміди $V = \frac{1}{3}....$

А. $S \cdot H$. **Б.** $S \cdot h$. **В.** $h \cdot H$. **Г.** $S \cdot l$. **Д.** $l \cdot H$.

Завдання 4. Порівняйте формули для обчислення об'ємів піраміди й конуса. Яка частина цих формул у них спільна?

А. $\frac{1}{2}S \cdot H$. **Б.** $S \cdot h$. **В.** $\frac{1}{3}S \cdot H$. **Г.** $\frac{1}{3}S$. **Д.** $l \cdot H$.

Завдання на розпізнавання доцільно розпочинати лише після того, як учні добре засвоїли кількісний склад формули. У таких завданнях важливо, щоб зміст формули був загорнутий в іншу оболонку (вербальну, графічну тощо).

Для роботи з теоремами варто запропонувати учням класів СГН систему усних запитань та вправ, що спрямована на засвоєння теореми. Наприклад, під час вивчення теореми про відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами, слід подавати учням запитання та завдання на зразок представлених нижче.

Завдання 1. У наведеному формулюванні теореми про відрізки паралельних прямих, які лежать між паралельними площинами, є помилка. Яке слово уможливить її виправлення?

1)Відрізки будь-яких прямих, які лежать між двома паралельними площинами, рівні. *Очікувана відповідь*: відрізки *паралельних* прямих, які лежать між двома паралельними площинами, рівні.

2)Відрізки паралельних прямих, які лежать між двома площинами, рівні. *Очікувана відповідь*: відрізки паралельних прямих, які лежать між двома *паралельними* площинами, рівні.

3) Відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами, різні. *Очікувана відповідь*: відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами, *рівні*.

Завдання 1 запропоновано учням для кращого засвоєння формулювання теореми. Після кожного запитання зазначено правильну відповідь, курсивом виділено правильне слово, яке потрібно вставити.

Завдання 2. Учні по-своєму сформулювали теорему про відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами. Чи правильне твердження вони подали?

1) Відрізки паралельних прямих, які лежать між будь-якими двома площинами, рівні.

2) Відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами, рівні.

3) Відрізки будь-яких двох прямих, які лежать між двома паралельними площинами, рівні.

Завдання 2 перевіряє здатність учнів оперувати різними оболонками формулювання теореми та визначати при цьому їхнє змістове наповнення. Тобто учні повинні виявити, які зміни оболонки приводять до зміни змістового наповнення теореми, а які – ні.

Завдання 3. Яка умова теореми про відрізки паралельних прямих, що лежать між двома паралельними площинами? *Очікувана відповідь*: відрізки паралельних прямих лежать між двома паралельними площинами.

Завдання 4. Яка вимога теореми про відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами? *Очікувана відповідь*: ці відрізки рівні.

Завдання 5. Що дано і що треба довести в теоремі про відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами?

Завдання 3–5 доцільно пропонувати учням для засвоєння ними основних компонентів теореми.

Завдання 6. Чи правильно, що відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами: 1) різні? 2) рівні?

Завдання 7. Чи можуть відрізки паралельних прямих, які лежать між двома паралельними площинами, дорівнювати:

1) 5 см і 7 см?

Очікувана відповідь: ні.

2) 5 см і 5 см?

Очікувана відповідь: так.

3) 7 см і 7 см?

Очікувана відповідь: так.

Завдання 6–7 сформульовано для відпрацювання навичок і вмінь застосування теореми до розв'язування задач.

Структуру виконання загальних ПРД у процесі навчання математики описано в роботах Н. А. Глузман [15], І. В. Гончарової [47], О. І. Скафи [169], З. І. Слєпкань [171; 173]. Науковці виокремлюють операційний склад дій, або правил-орієнтирів, прийомів розумової діяльності. Проте існують фактори, які впливають на хід та результати формування того чи того прийому й у зв'язку з якими воно може проходити з певними особливостями. Тому загальна схема застосування ПРД потребує внесення деяких змін. До таких факторів зарахуємо:

1) зміст об'єкта засвоєння;

2) оболонка, у яку загорнуто цей об'єкт засвоєння;

3) спроможність учнів оперувати різними оболонками, зіставляти їх, переходити від однієї до іншої;

4) досвід несвідомого використання певного прийому учнем;

5) початковий стан сформованості ПРД.

Основним прийомом розумової діяльності, до якого вдаються учні, вивчаючи математику, згідно з даними спостереження, є «аналіз-синтез». З урахуванням семіотичного компонента доцільно уточнити операційний склад виконання подвійної розумової дії «аналіз-синтез», а саме: 1) з'ясувати мету аналізу; 2) окреслити можливі напрями аналізу, у зв'язку з поставленою метою; 3) визначити змістову та візуальну оболонки об'єкта (семіотичний компонент); 4) виокремити з погляду вивчених об'єктів логічно завершені частини в конкретного об'єкта; 5) проаналізувати перехід від об'єкта до його характерних властивостей і навпаки; 6) вивчити нові властивості об'єкта з урахуванням його семіотичного компонента; 7) охарактеризувати наслідки з комплексу виокремлених властивостей; 8) переосмислити об'єкт у контексті інших понять з урахуванням його семіотичного компонента; 9) сформулювати висновок. Пропонуємо приклад використання зазначеного ПРД під час розв'язування задачі.

Задача 1 [8, с. 207]. OM – перпендикуляр до площини кола з центром O. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра 4 см, а відстань від точки M до точок кола 5 см.

Розв'язання. За умовою задачі, $OM = 4$ см. Нехай A – довільна точка кола, тоді $AM = 5$ см. Оскільки OM – перпендикуляр до площини кола, то $OM \perp OA$, а отже, $\Delta\ MOA$ – прямокутний. У цьому трикутнику OM і OA – катети, AM – гіпотенуза. Тоді, за теоремою Піфагора, $OM^2 + OA^2 = AM^2$. Звідси $OA^2 = AM^2 - OM^2$, $OA^2 = 25 - 16 = 9$, $OA = 3$ см.

У поданій задачі відрізок OM потрактовано як перпендикуляр до площини кола і як катет прямокутного трикутника. Унаслідок аналізу ми вичленили його серед усіх відомих елементів та зіставили з іншими елементами задачі (синтез). В процесі аналізу для одного елемента ми дібрали різні оболонки залежно від того, який зміст у нього вкладали. А цей зміст відповідає цілям, поставленим у задачі.

У процесі виконання ПРД *порівняння* доцільно розрізняти такі дії: 1) з’ясувати мету порівняння; 2) визначити змістову та візуальну оболонки об’єкта (семіотичний компонент); 3) охарактеризувати різні властивості об’єктів; 4) вивчити загальні суттєві властивості, які відповідають меті порівняння; 5) проаналізувати основу для порівняння з урахуванням семіотичного компонента; 6) зіставити об’єкти за поданою основою з урахуванням семіотичного компонента; 7) сформулювати висновок про схожість або про розбіжність об’єктів. Пропонуємо приклад використання зазначеного ПРД під час розв’язування задач.

Задача 1 [8, с. 84]. Порівняйте формули: $y=\sqrt[4]{x^4}$ і $y=x$. Чи задають вони одну й ту саму функцію?

Задача 2 [8, с. 84]. Порівняйте вирази: $3\sqrt{32}$ і $2\sqrt{50}$.

У задачах 1 і 2 для порівняння запропоновано об’єкти, загорнуті в різні оболонки. Для того щоб порівняти їхні змістові складники, потрібно виконати деякі перетворення, тобто подати ці об’єкти в іншому вигляді. Отже, важливим для прийому порівняння є вміння учнів оперувати різними оболонками, залежно від їхнього змістового наповнення.

У процесі виконання ПРД *абстрагування* варто розмежовувати такі дії: 1) з’ясувати мету абстрагування; 2) визначити змістову та візуальну оболонки об’єкта (семіотичний компонент); 3) вивчити різні властивості об’єктів; 4) виокремити ті властивості, від яких потрібно відволіктися відповідно до поставленої мети; 5) знайти ці властивості в інших предметах з урахуванням семіотичного компонента; 6) сформулювати назву цих властивостей математичною мовою.

У процесі виконання ПРД *узагальнення* виокремлено дії: 1) з’ясувати мету узагальнення; 2) визначити змістову та візуальну оболонки об’єкта (семіотичний компонент); 3) окреслити сукупність конкретних об’єктів засвоєння згідно з поставленою метою; 4) зіставити сукупність об'єктів вивчення для виявлення загальних суттєвих ознак з урахуванням семіотичного компонента; 5) об'єднати об'єкти вивчення за загальною суттєвою ознакою; 6) сформулювати висновок відповідно до поставленої мети.

У процесі виконання ПРД *аналогії* потрібно розрізняти такі дії: 1) з'ясувати мету аналогії; 2) визначити змістову та візуальну оболонки об'єкта (семіотичний компонент); 3) проаналізувати деякі властивості або відношення об'єкта засвоєння; 4) знайти, якщо це можливо, схожий об'єкт, який вивчали раніше, та охарактеризувати його властивості з урахуванням семіотичного компонента; 5) порівняти властивості першого та другого об'єктів з урахуванням семіотичного компонента; 6) перенести властивості другого об'єкта, які не були визначені в першому, на перший; 7) сформулювати висновок відповідно до поставленої мети.

Під час вивчення нових тем із математики в учнів нерідко є нагода скористатися своїми попередніми знаннями, навичками й вміннями, тобто діяти за аналогією. У деяких випадках така діяльність спричинює позитивні результати, тобто учні правильно розв'язують ті чи ті завдання. Але, як свідчить практика, іноді дії, що учні виконують за аналогією з попереднім досвідом, дають неправильний результат. Найчастіше таких помилок припускаються учні класів СГН, оскільки вони не звикли проводити глибокий аналіз того математичного матеріалу, який вивчають.

Аналогії, які дають правильний результат, слідом за висловом Н. А. Тарасенкової називатимемо безконфліктними [83]. Якщо ж аналогія провокує неправильний результат, то вважатимемо її конфліктною. Наприклад, під час вивчення теми «Основні тригонометричні формули» учням запропоновано нижчеподане завдання.

Завдання 1 [26, с. 60]. Перетворіть суму тригонометричних функцій у добуток: $\sin 78° + \sin 42°$.

Дехто з учнів розв'язує його так:

$$\sin 78° + \sin 42° = \sin\left(78° + 42°\right) = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Провівши візуальний аналіз завдання, учні діють за відомою їм аналогією:

$$78x + 42x = x(78 + 42) = 120x.$$

Хоч, як відомо, цей приклад потрібно розв'язувати, використовуючи тригонометричну формулу суми синусів двох кутів.

Правильне розв'язання прикладу 1:

$$\sin 78^\circ + \sin 42^\circ = 2\sin\frac{78^\circ + 42^\circ}{2}\cos\frac{78^\circ - 42^\circ}{2} = 2\sin 60^\circ \cos 18^\circ$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 18^\circ = \sqrt{3}\cos 18^\circ.$$

Звичайно, правильне розв'язання прикладу 1 є значно складнішим, ніж неправильне, оскільки потребує додаткового смислового аналізу конкретної ситуації. Проте учні часто діють за принципом «найменшого опору», що й призводить не тільки до неправильного розв'язання конкретного прикладу, а й до неправильного розуміння і трактування тригонометричної формули, як наслідок, у подальшому до неправильного її застосування.

Для запобігання активізації такої конфліктної аналогії під час розв'язування завдань, зокрема із використанням тригонометричних формул, необхідно, щоб в учнів було правильно сформоване поняття тригонометричної функції. Школярі повинні розуміти, що, наприклад, $\sin x$ – це єдина функція, x – її аргумент, його не можна виносити за дужку чи виконувати якісь інші дії, які не відповідають властивостям цієї тригонометричної функції.

Оскільки такі помилки поширені не тільки серед учнів класів СГН, то саме в цьому випадку доцільно наводити учням парні приклади: правильний і його неправильну аналогію. Школярі повинні усвідомити, що візуальна схожість двох завдань не завжди породжує аналогічний шлях до їх розв'язання. Можна при цьому супроводжувати аналіз ситуації такими запитаннями:

– Чи можна розв'язувати завдання 1 так само, як завдання 2?

– Поясніть, чому так або чому ні?

– Яку тригонометричну формулу слід використати, щоб *правильно* розв'язати завдання 1.

Усвідомивши на початковому етапі засвоєння формули різницю між неправильним і правильним її використанням, учень надалі зможе уникати таких помилок. За умови систематичної роботи з виявлення конфліктних аналогій навіть зможе самостійно запобігати їм.

У процесі виконання *класифікації* доцільно враховувати такі дії: 1) з’ясувати мету класифікації об’єктів; 2) визначити змістову та візуальну оболонки об’єктів (семіотичний компонент); 3) виявити спільні властивості об’єктів, що класифікують; 4) порівняти об’єкти за загальними та спеціальними властивостями, зважаючи на семіотичний компонент; 5) вибрати основу (суттєву властивість) для класифікації; 6) розділити за цією основою всю сукупність об’єктів на класи відповідно до обраної класифікації; 7) побудувати класифікаційну систему та відобразити її у формі таблиці чи у вигляді діаграми.

Розумові дії «підведення під … (поняття, факт, спосіб діяльності)» та «виведення наслідків» доцільно вважати комплексними ПРД. У ході дослідження з’ясовано, що сутність комплексного прийому розумової діяльності «підведення під … (поняття, факт, спосіб діяльності)» полягає в тому, щоб перевірити наявність в аналізованого об’єкта системи відповідних ознак та на їхній підставі зробити висновок про належність або про неналежність цього об’єкта до певного поняття (факту, способу діяльності). Для цього потрібно виконати такі операції: 1) проаналізувати означення (формулювання, відношення, послідовність дій) та виділити в ньому всі ознаки поняття (факту, способу діяльності); 2) визначити змістову та візуальну оболонки об’єкта (семіотичний компонент); 3) з’ясувати, як пов’язані між собою ці ознаки (логічний зв’язок «і» чи «або»); 4) якщо ознаки пов’язані логічним зв’язком «і», то послідовно перевірити наявність у предмета всіх ознак: якщо хоча б одна з них не виконується, то об’єкт не належить до поняття (факту, способу діяльності); 5) якщо ознаки пов’язані логічним зв’язком «або», то для належності об’єкта поняттю (факту, способу діяльності) достатньо довести наявність у предмета хоча б однієї із названих ознак.

Виконання комплексного прийому «виведення наслідків» передбачає таку послідовність дій: 1) виокремити основні поняття (твердження, правила); 2) сформулювати означення поняття (формулювання факту, опис послідовності дій); 3) охарактеризувати ознаки поняття (факту, способу діяльності); 4) навести властивості поняття (факту, способу діяльності), що доводяться у вигляді теорем; 5) назвати інші властивості поняття (факту, способу діяльності), пов'язані з іншими поняттями (фактами, способами діяльності).

Зміст курсу математики старшої школи побудовано таким чином, що основні об'єкти засвоєння відображені в ньому відкрито або неявно. Використання прийомів розумової діяльності під час навчання математики в класах СГН може відбуватися:

1) безпосередньо, прямо під час виконання певного завдання (наприклад, «порівняйте середні значення двох вибірок»), тобто в активному режимі;

2) неявно, коли вказівка для використання конкретного ПРД не ставиться в умові завдання, але розв'язання цього завдання передбачає використання цього ПРД (наприклад, «у скільки разів один кавун важчий від другого, якщо їхні діаметри відносяться як 2 : 1?»), тобто у фоновому режимі.

В обох випадках домінантним ПРД є прийом порівняння. Але у першому випадку у завданні прямо вказано на його використання, а в другому випадку виконання завдання передбачає використання цього ПРД, проте у формулюванні завдання термін «порівняйте» не вжито.

Доцільно виокремити дві групи ПРД: відкриті та неявні. Наприклад, якщо перед учнями поставлено завдання класифікувати прямі у просторі стосовно їх розміщення, то використання ПРД класифікації відбувається відкрито. Якщо ж використання ПРД не є безпосередньою ціллю, тобто не сформульовано прямо, але виконання завдань передбачає використання того чи того ПРД, то, в такому випадку, ПРД є неявним для учнів.

У процесі дослідження виявлено функції (інваріантну, прогностичну, рефлексивну) прийомів розумової діяльності в математичному та загальному розвитку учнів.

Виконання завдань загального розвитку учнів безпосередньо пов'язане з формуванням ПРД – інваріантом процесу навчання як дисциплін гуманітарного, так і природничо-математичного циклу. Проте на матеріалі шкільного курсу математики ПРД можуть формуватися більш інтенсивно й результативно. Отже, ПРД можуть виконувати *інваріантну* функцію.

Прогностична функція використання ПРД у процесі навчання математики виявляється у: 1) прогнозуванні результатів застосування учнями того чи того ПРД; 2) передбаченні можливих факторів впливу на формування в учнів ПРД; 3) плануванні результатів вивчення основних об'єктів засвоєння курсу математики; 4) взаємозалежності між формуванням ПРД та отриманням необхідних знань, навичок і вмінь, передбачених програмою з математики на рівні стандарту.

Рефлексивна функція полягає в тому, що як у класній, так і в домашній та самостійній роботі з математики учні набувають досвід самооцінювання та самоаналізу перебігу й результатів їхньої навчальної діяльності.

Отже, особливості змісту навчання та оболонок, які використовують для його фіксації, зумовлюють специфіку цілеспрямованого застосування прийомів розумової діяльності під час вивчення курсу математики, що натомість впливає на методику формування цих прийомів.

Список використаних джерел до розділу 2

1. Атанов Г. А. Деятельносный подход в обучении / Г. А. Атанов. – Донецк: ЕАИ-пресс, 2001. – 324 с.
2. Бевз Г. П. Математика: пробний підручник для 10–11 кл. шк., ліцеїв, гімназій гуманіт. профілю / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: ТОВ «Бліц», 2005. – 256 с.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посіб. / Г. П. Бевз. – [3-е вид., перероб. і доп.]. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
4. Богоявленский Д. Н. Психология усвоения знаний в школе / Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская. – М., 1959. – 347 с.
5. Бондар В. І. Навчальна діяльність / В. І. Бондар // Енциклопедія освіти. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – С. 535–536.
6. Бондар В. І. Процес навчання / В. І. Бондар // Енциклопедія освіти. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – С. 745.
7. Бурда М. І. Математика, 10–11: Навчальний посібник для шкіл, ліцеїв та гімназій гуманіт. профілю / М. І. Бурда, О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований. – К. : Освіта, 2004. – 223 с.

8. Бурда М. І. Математика, 10–11: Навчальний посібник для шкіл, ліцеїв та гімназій гуманіт. профілю / М. І. Бурда, О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований. – К. : Освіта, 2006. – 287 с.
9. Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М. І. Бурда // Педагогіка і психологія, 1996. – № 1. – С. 40–45.
10. Бурда М. І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи : дис. … доктора пед. наук : 13.00.02 / Бурда Михайло Іванович. – К., 1994. – 347 с.
11. Володько В. М. Індивідуалізація й диференціація навчання: понятійно-категорійний аналіз / В. М. Володько // Педагогіка і психологія . – 1997. – № 4. – С. 9–17.
12. Выготский Л. С. Педагогическая психология / Под ред. В. В. Давыдова. – М., 1991. – 480 с.
13. Гамезо М. В. Психологические аспекты методологии и общей теории знаков и знаковых систем / М. В. Гамезо, Б. Ф. Ломов, В. Ф. Рубахин // Психологические проблемы переработки знаковой информации. – М. : Наука, 1977. – С. 5–49.
14. Глобін О. І. Інтегруюча функція математики в умовах профільної диференціації навчання / О. І. Глобін / «Диференціація навчання на різних ступенях загальної середньої освіти: теорія, практика, перспективи»: Матеріали методологічного семінару (Київ, АПН України, 19.11.2008р.). – Київ, 2008. – С. 63–65.
15. Глузман Н. А. Формирование обобщенных приемов умственной деятельности у будущих учителей начальных классов в процессе изучения дисциплин математического цикла : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Глузман Неля Анатольевна. – Ялта, 2003. – 223 с.
16. Гончаренко С. У. Проблеми індивідуалізації процесу навчання / С. У. Гончаренко, В. М. Володько // Педагогіка і психологія. – 1995. – № 2. – С. 63–71.
17. Гончарова І. В. Методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики : автореф. дис. ... канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «теорія та методика навчання (математика)» / Ірина Володимирівна Гончарова. – Донецьк, 2009. – 20 с.
18. Гузеев В. В. О новых формах организации обучения / В. В. Гузеев // Математика в школе. – 1988. – № 4. – С. 47–49.
19. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы дифференцированного обучения математике / В. А. Гусев. – М. : ООО Изд-во «Вербум–М» : ООО Изд. центр «Академия», 2003. – 432 с.
20. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В. В. Давыдов. – М. : Педагогика, 1972. – 424 с.
21. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – № 2. – С. 2–5.
22. Дидактика средней школы. Некоторые проблемы современной школы / Под ред. М. А. Данилова, М. Н. Скаткина. – М. : Просвещение, 1975. – 204 с.
23. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / под ред. М. Н. Скаткина. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Просвещение, 1982. – 319 с.
24. Дорофеев Г. В. Дифференциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. В. Фирсов // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 15.
25. Закон України про загальну середню освіту : Прийнято 13 травня 1999 р. // Голос України. – 1999. – № 65. – 23 червня. – С. 4–7.

26. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е. Н. Кабанова-Меллер. – М. : Просвещение, 1968. – 288 с.
27. Коваленко В. Г. Математична символіка : Посібник для самоосвіти вчителів / В. Г. Коваленко, І. Ф. Следзінський. – К. : Радянська школа, 1981, – 80 с.
28. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Г. С. Костюк; за ред. Л. М. Проколієнко – К. : Радянська школа, 1989. – 608 с.
29. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. / В. А. Крутецкий. – М., «Просвещение», 1968. – 432 с.
30. Кузьмінський А. І. Педагогіка : підручник / А. І. Кузьмінський, В. Л. Омеляненко. – [2-ге вид., перероб. і доп.]. – К. : Знання-Прес, 2004. – 445 с.
31. Лернер И. Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1978. – 48 с.
32. Лященко Е. И. Методика обучения математики в IV−V классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. − Мн.: «Нар. асвета», 1976. – 223 с.
33. Мальований Ю. І. Урок: Енциклопедія освіти / Акад. пед. наук України; головний ред. В. Г. Кремень. – К.: Юрінком Інтер, 2008. – С. 946–947.
34. Математика. 5–12 класи. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. – К : «Перун», 2005. – 64 с.
35. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды / Н. А. Менчинская. – М. : Педагогика. – 1989. – 224 с.
36. Менчинская Н. А. Психология усвоения понятий / Н. А. Менчинская // Известия ФПН РСФСР, 1950. – Вып. 28.
37. Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы : [учебное пособие для вузов] / Н. В. Метельский. – [2-е изд., перераб.]. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.
38. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : [учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов] / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Просвещение, 1980. – 368 с.
39. Микиша А. М. Толковый математический словарь. Основные термины : около 250 терминов / А. М. Микиша, Б. В. Орлов. – М. : Рус. яз., 1988. – 244 с.
40. Монахов В. М. Дифференциация обучения в средней школе / В. М. Монахов, В. А. Орлов, В. В. Фирсов // Советская педагогика. – 1990. – № 8. – С. 42–47.
41. Моторина В. Г. Дифференцированный подход в обучении математике учащихся средней школы. Метод. рекомендации / В. Г. Моторина, В. И. Евдокимов, О. Н. Василенко. − Х.: ХГПИ, 1993. – 44 с.
42. Моторіна В. Г. Підготовка майбутнього вчителя математики до роботи в умовах диференціації навчання учнів / В. Г. Моторіна // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. – Херсон, 2001. – Вип. 21. – С. 48–55.
43. Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики. Навчальний посібник / В. Г. Моторина. – Х.: ХНПУ імені Г. С. Сковороди, Скорпіон, 2008. – 112 с.
44. Онищук В. А. Урок в современной школе / В. А. Онищук. – М. : Просвещение, 1986.
45. Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике : Кн. для учителя / В. Н. Осинская. – К. : Рад. шк., 1989. – 192 с.

46. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л. О. Денищева, Л. В. Кузнецова, И. А. Лурье и др.; Сост. В. В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1989. – 237 с.
47. Подмазин С. И. Личностно-ориентированное образование: Социально-философское исследование / С. И. Подмазин. – Запорожье : Просвіта, 2000. – 250 с.
48. Пометун О. І. Інтерактивні методики та системи навчання / О. І. Пометун. – К. : Шк. світ, 2007. – 112 с.
49. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Київ. «Навчальна книга», 2003. – 302 с.
50. Пышкало А. М. Средства обучения – один из важнейших компонентов методики обучения математике / А. М. Пышкало / Средства обучения математике : Сб. статей / Сост. А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1980. – С. 3–12.
51. Савченко О. Я. Особистісно орієнтоване навчання : енциклопедія освіти / Академ. пед. наук України ; головний ред. В. Г. Кремінь. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – 1040 с.
52. Салмина Н. Г. Знак и символ в обучении / Н. Г. Салмина. – М. : Изд-во МГУ, 1988. – 286 с.
53. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
54. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев / [2-е изд., дораб.] – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
55. Саранцев Г. И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях // Математика в школе. – 1999. – № 6.– С. 36–40.
56. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии : учебное пособие / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 255 с.
57. Сердюк З. О. Вивчення математичних формул в курсі математики гуманітарних класів / З. О. Сердюк // Евристичне навчання математики // Збірник матеріалів третьої міжнародної науково-методичної конференції. (1–3 жовтня 2009 р.). – Донецьк: Вид-во: ДонНУ, 2009. – С. 92 – 93.
58. Сердюк З. О. Використання аналогій під час вивчення математики / З. О. Сердюк // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2009), м. Черкаси, 7-9 квітня 2009 р. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – С. 86 – 87.
59. Сердюк З. О. Використання наочності на уроках математики в класах суспільно-гуманітарного профілю / З. О. Сердюк // Якісна освіта століття: проблеми і пошуки // Збірник матеріалів Всеукраїнської науково-методичної конференції 14 березня 2009 року (за заг. ред. докт. пед. наук Н. М. Лосєвої). – У 2-х томах. – Том 1. – Донецьк: Вид-во: ДонНУ, 2009. – С. 390 – 393.
60. Сердюк З. О. Використання усних вправ на уроках математики в класах гуманітарного профілю / З. О. Сердюк // Тези Міжнародної науково-практичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє», м. Київ, 16-18 жовтня 2007 р. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – С. 106 – 107.
61. Сердюк З. О. Деякі особливості вправ з математики для учнів класів суспільно-гуманітарного напряму / З. О. Сердюк // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики : матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції 3-4 грудня 2009 р., м. Суми. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2009. – С. 84–86.

62. Сердюк З. О. Деякі особливості формування прийому порівняння в учнів-гуманітаріїв під час вивчення функцій та їх властивостей / З. О. Сердюк // Вісник Черкаського університету: Серія «Педагогічні науки». – Вип. 155. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2009. – С. 155 – 161.
63. Сердюк З. О. Окремі шляхи підвищення ефективності вивчення стереометрії учнями-гуманітаріями / З. О. Сердюк // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи», м. Полтава, 8-9 квітня 2008 р. – Полтава: АСМІ, 2008. – С. 141–142.
64. Сердюк З. О. Особливості вивчення математики учнями класів (шкіл) суспільно-гуманітарного профілю в умовах особистісно орієнтованого навчання / З. О. Сердюк // Вісник Черкаського університету: Серія «Педагогічні науки». – Вип. 111. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2007 . – С. 124–129.
65. Сердюк З. О. Особливості організації навчання математики у школах і класах гуманітарного профілю / З. О. Сердюк // Вісник Черкаського університету: Серія «Педагогічні науки». – Вип. 85. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2006. – С. 128–136.
66. Сердюк З. О. Роль доведення при вивченні математики у класах суспільно-гуманітарного напряму / З. О. Сердюк // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2007), м. Черкаси, 16-18 квітня 2007 р. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – С. 77.
67. Сердюк З. О. Тренувальні вправи з математики для класів суспільно-гуманітарного напряму / З. О. Сердюк // Дидактика математики: Проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 30. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. – С. 158–162.
68. Сердюк З. О. Формування деяких розумових дій у процесі вивчення математичних понять / З. О. Сердюк // Дидактика математики: Проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 29. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. – С. 95–99.
69. Сікорський П. І. Збірник наукових праць (середня освіта) Т. 2 / П. І. Сікорський. – Л. : ФООПП Корпан Б. І., 2009. – 396 с.
70. Скаткин М. Н. О методах обучения / М. Н. Скаткин, И. Я. Лернер // Советская педагогика. – 1965. – № 3. – С. 21–26.
71. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие / З. И. Слепкань. – К. : Рад. школа, 1983. – 192 с.
72. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студ. мат. спец. пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – К. : Зодіак–Еко, 2000. – 512 с.
73. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
74. Слєпкань З. І. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту // Математика в школі: Наук.-метод. журнал. – 2002. – № 2. – С. 29–30.
75. Словник-довідник педагогічних і психологічних термінів / за ред. А. І. Кузьмінського. – Черкаси : Вид. від. ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2002. – 112 с.
76. Смирнова И. Исторические аспекты дифференциации обучения / И. М. Смирнова // Математика: Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». – 2000.– № 44. – С. 1–8.

77. Смирнова И. М. Геометрия. 10-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений (гуманитарный профиль) / И. М. Смирнова. – М. : Мнемозина, 2004. – 223 с.
78. Смирнова И. М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения : дис. … докт. пед. наук : 13.00.02 / Смирнова Ирина Михайловна. – Москва, 1994. – 364 с.
79. Столяр А. А. Методы обучения математике / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1966. – 191 с.
80. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология / Н. Ф. Талызина. – М. : Академия, 1999. – 288 с.
81. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. – Издательство Московского университета, 1975. – 343 с.
82. Тарасенкова Н. А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях лекционно-практической системы обучения математике в школе : дис. … канд. Пед наук : 13.00.02 – методика преподавания математики / Нина Анатольевна Тарасенкова. – Киев, 1991. – 211 с.
83. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : [монографія] / Н. А. Тарасенкова. – Черкаси : Відлуння-плюс, 2002. – 400 с.
84. Тарасенкова Н. А. Теоретико-методичні основи використання знаково-символічних засобів у навчанні математики учнів основної школи : дис. … докт. пед. наук : спец. 13.00.02 «теорія та методика навчання математики» / Ніна Анатоліївна Тарасенкова. – Черкаси, 2003. – 630 с.
85. Тарасенкова Н. А. Использование вопросов в обучении математике / Н. А. Тарасенкова // Математика в школе. – 2005. – № 4. – С. 59–62.
86. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И. Э.Унт. – М. : Просвещение, 1990. – 192 с.
87. Усова А. В. Формирование у учащихся учебных умений / А. В. Усова, А. А. Бобров. – М. : Знание, 1987. – 80 с.
88. Усова А. В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения / А. В. Усова.– М. : Педагогика, 1986. – 176 с.
89. Утеева Р. А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы / Р. А. Утеева. – М. : Прометей, 1996. – 117 с.
90. Фіцула М. М. Педагогіка : Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. / М. М. Фіцула. – К. : Видавничий центр «Академія», 2000. – 544 с.
91. Чашечникова О. С. Розвиток математичних здібностей учнів основної школи: автореф. дис. ... канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / О. С. Чашечникова. – К., 1997. – 19 с.
92. Щербань П. М. Прикладна педагогіка : Навч.-метод. посіб. / П. М. Щербань. – К. : Вища школа, 2002. – 215 с.
93. Якиманская И. С. Дифференцированное обучение: внешние и внутренние формы / И. С. Якиманская // Директор школы. – 1995. – № 3. – С. 39–45.
94. Якса Н. В. Основи педагогічних знань: Навч. посіб. / Н. В. Якса. – К.: Знання, 2007. – 358 с.
95. Методи за решаване на задачи: от училищния курс по математика / под научната редакция на доц. д-р В. Б. Милушев. – Пловдив: «Макрос 2001», 2001. – 227 с.

РОЗДІЛ 3

ЛЕКЦІЙНО-ПРАКТИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

3.1. Про сутність лекційно-практичної системи навчання математики в школі

Одним із напрямів удосконалення шкільної математичної освіти є широке впровадження таких технологій навчання, які спрямовані на формування в учнів системи дієвих знань, підвищують активність, усвідомленість та зацікавленість у навчанні, створюють умови для розвитку особистості кожного учня. На розв'язання саме таких завдань націлена лекційно-практична система.

Лекційно-практична (лекційно-семінарська) форма організації освітнього процесу є основною в системі вищої освіти. У шкільну практику університетські форми роботи стали проникати в результаті пошуків шляхів і засобів оптимізації та інтенсифікації навчального процесу, забезпечення наступності навчання математики в системі середньої і вищої освіти [31; 47; 80 та ін.]. Проте університетський і шкільний варіанти лекційно-практичної системи навчання математики мають істотні відмінності. Недооцінка цих відмінностей, що веде до прямого, механічного перенесення системи університетського навчання в шкільні стіни, як показує практика, не оптимізує, а часто значно ускладнює навчання математики школярів. В той же час, досвід творчо працюючих учителів [2; 24; 74; 75; 76 та ін.], які всебічноураховують специфіку навчання математики в школі, свідчить про доцільність використання лекційно-практичної системи й доводить не лише її дієвість і ефективність, а й значні переваги порівняно з традиційними формами навчання.

Термін «лекційно-практична система навчання» увійшов до практики разом з терміном «лекційно-практична форма навчання». Про правомірність вживання кожного з них піде мова в подальшому викладі.

Дана система навчання математики націлена на ширше залучення учнів до самостійної навчально-пізнавальної діяльності, на її активізацію, на інтенсифікацію навчального процесу. Для досягнення цієї мети основний стратегічний упор робиться на збільшення долі самостійної роботи учнів над навчальним матеріалом. Додатковий час для неї вивільняється за рахунок викладу змісту укрупненими порціями.

Багаторічний досвід вищих навчальних закладів орієнтує на використання таких організаційних форм, як лекції, практикуми з розв'язування математичних задач, семінари, лабораторні роботи, консультації, різні види підсумкових контрольних занять. Можливість використання аналогічних форм у школі доведена педагогічною наукою [12; 31; 50; 51; 80; 81 та ін.] і шкільною практикою. Проте в умовах лекційно-практичної системи навчання математики в школі такі форми навчальних занять не є єдино можливими і строго обов'язковими. Про це свідчать численні творчі знахідки учителів. Крім того, аналогічні форми можуть використовуватись і при традиційному навчанні. Із цього випливає, що лекції, семінари тощо не є істотною ознакою лекційно-практичної системи навчання. Вибір послідовності навчальних занять, їх кількості й різноманітності є тактикою організації навчання, яка кожного разу визначається відповідно до дидактичних і методичних потреб, тобто варіативна. Тому представляти лекційно-практичну систему за допомогою опису якої б то не було послідовності організаційних форм також недоцільно.

Отже, інваріантом університетської і шкільної форм лекційно-практичної системи навчання математики є стратегія організації навчання:

- виклад укрупненої порції змісту, що підлягає засвоєнню;
- система самостійної роботи;
- підсумковий контроль.

Сутність же відмінностей цих систем полягає, передусім, у цілях і самому змісті освіти, в особливостях віку учнів. Звідси випливає, що університетський і шкільний варіанти лекційно-практичної системи навчання математики мають базуватися на різних підходах до поділу змісту на порції, визначенню обсягу кожної порції та обсягу навчального часу, що відводиться на вивчення певної порції. Отже, об'єктивно потрібні різні дидактичні та методичні підходи до організації навчальних занять, до вибору їхньої кількості й різноманітності, до способу структурування навчального процесу та організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів і школярів.

Результати проведеного нами анкетування учителів математики Київської, Кіровоградської і Черкаської областей свідчать про те, що учителі розуміють необхідність розрізнення університетського і шкільного варіантів лекційно-практичної системи навчання математики, проте мають недостатньо чіткі уявлення про суть цих відмінностей. Частина учителів потерпіла невдачу при першій же спробі використовувати неадаптований до шкільних умов університетський варіант і відмовилася від такої форми роботи. Багато вчителів використовують лише окремі види навчальних занять, властивих лекційно-практичній системі, помилково вважаючи, що використовують систему в цілому. Тільки деякі учителі мають найбільш наближене до повного уявлення про особливості такої системи навчання математики в школі. Переважна більшість учителів черпали інформацію про лекційно-практичну систему навчання математики з власного студентського досвіду і різних нечисленних публікацій.

Одна з причин, що перешкоджають правильному розумінню учителями сутності лекційно-практичної системи навчання математики в школі, пов’язана з її укоріненою назвою. На думку більшості вчителів, у назві системи відображені її істотні ознаки, тобто в навчальному процесі обов’язково мають бути присутніми лекції, семінари тощо. Але, як було показано вище, такі судження є помилковими.

Додаткові утруднення в учителів викликає довільність термінології, що зустрічається в різних публікаціях, відсутність єдності в ній. Вживаються наступні терміни: а) прикметники – лекційно-практична [31; 79; 80 та ін.], лекційно-семінарська [12; 27; 46 та ін.], лекційно-залікова [59 та ін.], теоретико-практическая [80]; б) іменники – система [12; 27; 38 та ін.], форма [16; 31; 79 та ін.], метод [13; 46; 47 та ін.].

Етимологія таких назв системи навчання, як «лекційно-практична», «лекційно-семінарська», «лекційно-залікова», пов’язана з видами навчальних занять, які доцільно використовувати в цих умовах навчання математики. Тому вживання кожного з них вважаємо допустимим. Але прийнятнішим слід визнати назву «лекційно-практична», оскільки вона відображає основний (але не єдино можливий) спосіб ознайомлення учнів із новим матеріалом (лекції) та організації подальшої роботи над ним (практикуми з розв'язування математичних задач). Така назва, як «теоретико-практична», підкреслює можливість різноманітних підходів до ознайомлення учнів із новими знаннями, але через свою непоширеність надалі нами не використовується.

Терміни «система», «форма», «метод» зустрічаються в публікаціях у різних поєднаннях із термінами «навчання», «організаці» навчання», «організації занять», «занять», «викладання». Можливість вживання тих чи тих комбінацій вимагає особливого розгляду.

У сучасній дидактиці навчання розглядається як двосторонній взаємозумовлений процес викладання та учіння. Внутрішня, змістова сторона цього процесу безпосередньо пов'язана з формами і методами навчання, зовнішня – з необхідністю його організації та управління. Тому в термін «система навчання» (наприклад, класно-урочна) вкладається смисл «організація» (навчання, навчального процесу, системи навчальних занять) [22]. Водночас, реалізація системи навчання пов'язана із способом утворення самої системи, тобто з її формою. У зв'язку з цим, вважаємо за можливе ототожнити терміни «форма організації навчального процесу», «організаційна система навчання» і «система навчання» (маючи на увазі її зовнішню, організаційну сторону). Таким чином, у термін «лекційно-практична система навчання» вкладається смисл «специфічна форма організації навчального процесу», що допускає використання термінів і «лекційно-практична система навчання», і «лекційно-практична форма навчання». Використання термінів «лекційно-практична форма організації занять», «лекційно-практичні заняття», «лекційно-практична система викладання», «лекційно-практичний метод навчання» вважаємо неправомірним.

Проведений нами аналіз дидактичної і методичної літератури за цією темою показав, що рядом авторів робилися спроби виділити структуру і закономірності організації навчання в умовах лекційно-практичної системи. Проте у більшості публікацій переважає прагнення авторів представити структуру лекційно-практичної системи навчання математики через опис повного складу навчальних занять та їх послідовності. При цьому дидактична суть системи або не розкривається, або розкривається лише на рівні стратегії навчання математики в цих умовах. У зв’язку з цим, більшість методичних рекомендацій щодо організації вивчення конкретних програмових тем носять в основному декларативний, а не конструктивний характер, що не дозволяє учителям вийти за рамки пропонованих рекомендацій, самостійно спланувати вивчення інших програмових тем.

Один з підходів, розроблений О. О. Хмурою [80] і адаптований В. Г. Коваленко до сучасних умов навчання математики в школі, передбачає наступне. На основі виділеної О. О. Хмурою структури процесу навчання математики [80, с.74] складено послідовність навчальних занять певних типів:

1) підготовчі уроки;
2) уроки засвоєння нових знань і умінь;
3) уроки закріплення знань, формування умінь і навичок;
4) уроки-семінари;
5) контрольно-залікових уроків.

Цій послідовності присвоєно статус системи навчальних занять. Кожне навчальне заняття має строго визначену структуру, але зв’язок між ними відображає лише загальну логіку побудови навчального процесу, тобто є формальною. Істотне значення за такого підходу до побудови навчального процесу має тип уроку і його місце в системі уроків.

В інтерпретації В. Г. Коваленка класифікація уроків за типами повинна здійснюватися не за основними етапами навчального процесу, а відповідно до форми організації занять, враховуючи загальнодидактичну мету та їхнє місце в системі уроків [41, с.5]. При цьому названі вище типи уроків доповнюються уроками корекції знань (консультації), які слідують за уроками-семінарами і передують контрольно-заліковим урокам. Прообраз таких уроків фігурує і в інтерпретації О. О. Хмури [80, с.165].

Фактично, ці доповнення не змінюють загальної суті даного підходу.

При усій правильності ідеї О. О. Хмури, на якій базується цей підхід (будувати процес навчання математики, виходячи з його закономірностей), реалізація її учителями-практиками у більшості випадків (84 % опитаних) є докорінно неправильною. Вважаючи, що тільки такі уроки й тільки в такій послідовності необхідно проводити в умовах лекційно-практичної системи навчання математики, учителі не форму навчального заняття визначають відповідно до змісту, а навпаки. Труднощі методичного характеру, що виникають при цьому, учителя схильні відносити до недоліків самої системи навчання, тоді як викликані вони не особливостями системи, а акцентами, які розставлені в інтерпретації цих авторів, недостатньо розкритим механізмом реалізації такого підходу до навчання.

Посилює утруднення учителів також непослідовність між обгрунтованою теоретично системою уроків і практичними рекомендаціями, які дають ці автори щодо вивчення конкретних тем. Наприклад, при вивченні теми «Похідна» В. Г. Коваленко пропонує [41, с.7-9] провести єдиний підготовчий урок перед вивченням усієї теми, навчальний матеріал теми розділити на три блоки, відповідно до чого провести три контрольно-залікові уроки, урок корекції знань провести лише перед останньою контрольною роботою. У блоці ж «Правила обчислення похідних» планується два уроки засвоєння нових знань, між якими проводиться урок удосконалення знань, навичок і вмінь.

План вивчення теми «Первісна та інтеграл» зовсім інший. Назвемо послідовність уроків у ньому [43, с.24]:

1) підготовчий урок;
2) урок засвоєння нових знань;
3) урок застосування знань, формування навичок і вмінь;
4) урок засвоєння нових знань;
5) урок застосування знань, формування навичок і вмінь;
6) підготовчий урок;
7) урок засвоєння нових знань;
8) урок застосування знань, формування навичок і вмінь;
9) контрольно-заліковий урок;
10) урок засвоєння нових знань;
11) урок застосування знань, формування навичок і вмінь;
12) урок застосування знань, формування навичок і вмінь;
13) урок узагальнення і систематизації знань;
14) контрольно-заліковий урок.

На якій основі складаються такі послідовності уроків, за яким принципом навчальний матеріал ділиться на блоки, чому для вивчення виділених блоків використовуються не всі уроки системи залишається неясним.

Дещо інші й універсальні, на думку їх авторів, послідовності уроків висвітлені в публікаціях [2; 34; 59; 77; 79 та ін.]. Але, по суті, підхід цих авторів до процесу навчання математики аналогічний попередньому. У цьому ж руслі будує свою роботу учитель хімії Н. П. Гузик, досвід якого відомий і учителям математики [18; 19]. Такий же підхід розробляється в методиці біології [28].

Інший підхід до побудови навчального процесу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики [16] передбачаає таку його стратегію: зміст навчального матеріалу – якість викладу матеріалу в підручнику з методичної точки зору – спосіб нівелювання недоліків підручника – форма і послідовність навчальних занять. Такий підхід явно помилковий, оскільки якість викладу матеріалу в навчальному посібнику – випадкова величина, орієнтуючись на яку неможливо виділити загальну, інваріантну структуру навчального процесу, у якій враховуються закономірності засвоєння знань.

Низка публікацій [1; 8; 17; 20; 26; 35; 40; 42 та ін.] присвячена особливостям конкретних видів уроків, які можна використовувати в умовах лекційно-практичної системи навчання математики. Проте будувати навчальний процес, виходячи з особливостей конкретних видів уроків, як було показано вище, недоцільно.

Інші причини утруднень учителів, на наш погляд, пов’язані з розбіжністю в трактуванні істотних ознак лекційно-практичної системи навчання математики в школі. Пояснимо це.

Інваріантом вивчення програмового матеріалу за лекційно-практичною системою є така стратегія організації навчання: укрупнений виклад нового матеріалу; система самостійної роботи; підсумковий контроль. Саме в цьому полягає одна з істотних ознак лекційно-практичної системи, її відмінність від так званого традиційного навчання, коли матеріал програмової теми вивчається поступово невеликими порціями. Ця теза міститься майже в усіх публікаціях, які стосуються лекційно-практичної системи, з нею погодилась більшість опитаних нами вчителів математики.

Щодо наявності інших істотних ознак лекційно-практичної системи та їх суті в педагогічній науці та шкільній практиці єдиного погляду нами не встановлено. Найбільш поширені, наприклад, такі думки:

а) лекційно-практична система має єдину істотну ознаку – виклад навчального матеріалу укрупненими порціями. Учителі математики, які поділяють цю думку, здебільшого вважають, що новий матеріал, який викладався протягом цілого уроку або кількох уроків, учні вивчали за лекційно-практичною системою. Але тут не враховуються принаймні три моменти. По-перше, чи не завадили вчасному викладу нового матеріалу суб'єктивні причини, по-друге, чи відповідає укрупнена порція матеріалу критеріям цілісності й системності, а по-третє, чи сплановано процес вивчення цієї порції як завершений дидактичний цикл;

б) лекційно-практична система має дві істотні ознаки, першу з яких наведено вище. Другою істотною ознакою лекційно-практичної системи є форма викладу нового матеріалу (лекція), форма його опрацювання (практикум з розв'язування математичних задач, семінар тощо), форма підсумкового контролю (залік). Така думка пов'язана з назвою системи, що укорінилась. Схильні до неї вчителі вважають, що читання лекцій, або проведення заліків – то вже застосування лекційно-практичної системи. Але численні творчі знахідки передових педагогів, результати проведеного нами дослідження свідчать про те, що такі форми не є єдино можливими й строго обов'язковими за таких умов навчання. Крім того, аналогічні форми нерідко використовуються й за традиційного навчання. Із цього випливає, що форми занять не є істотними ознаками лекційно-практичної системи взагалі;

в) лекційно-практична система має дві істотні ознаки, першу з яких наведено вище, але другою її істотною ознакою виступає наявність деякої незмінної послідовності навчальних занять певних видів. Але універсальна їх послідовність, яка здатна реалізувати зміст будь-якого навчального матеріалу, ще не знайдена. На нашу думку, це взагалі неможливо тому, що вибір послідовності навчальних занять, їх кількості й різноманітності являє собою тактику організації навчання, яка кожний раз визначається згідно з дидактичними й методичними потребами, тобто варіативна.

Отже сутність лекційно-практичної системи навчання не пов'язана ані з тривалістю викладу навчального матеріалу, ані з формами навчальних занять, ані з будь-якою їх послідовністю.

До істотних ознак лекційно-практичної системи навчання математики в школі, на наш погляд, потрібно віднести:

1) наявність цілісної проблеми в тому фрагменті, який підлягає вивченню;
2) організація пізнання цієї проблеми як одного цілого, як системи;
3) повнота та завершеність дидактичного циклу.

Подання лекційно-практичної системи навчання математики через систему навчальних занять, яке є найпоширенішим, припускає її подальший розвиток шляхом удосконалення методики окремо взятих уроків. При цьому на практиці спостерігається переорієнтація цілей діяльності учителя, яка спрямовується в такому разі лише у вузькопрактическое русло. Результати опитування учителів показують, що за такого підходу значна частина зусиль учителем докладається до того, щоб знайти та вдало реалізувати «сценарій» певного уроку, а не до того, як забезпечити досягнення цілей вивчення теми в цілому.

Із сказаного випливає, що сутність лекційно-практичної системи навчання математики необхідно розкривати глибше, пов'язуючи її з психолого-педагогічними особливостями організації навчально-пізнавальної діяльності учнів у таких умовах, і саме в цьому напрямі потрібно шукати шляхи вдосконалення системи.

На нашу думку, адекватну структуру навчального процесу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики можна виділити, виходячи з даних психологічної науки про структуру учіння як діяльності та про загальні його закономірності [29], дидактики – про дидактичний цикл і його структуру [25], методики навчання математики – про особливості математики як навчального предмета в школі та психолого-педагогічних основ її вивчення школярами [15; 54; 78 та ін.], а також досвіду творчо працюючих учителів. Основним орієнтиром при цьому мають виступати сучасні цілі шкільної математичної освіти – формування різнобічно розвиненої особистості кожного учня, створення максимально сприятливих умов для розвитку його здібностей, схильностей, інтересів.

3.2. Структура дидактичного циклу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики в школі

Учіння в психології розглядається як діяльність, що спрямована на перетворення особистого досвіду учня, що є предметом і продуктом цієї діяльності. Засобами учіння виступають соціальний досвід і знання [29]. У процесі привласнення історично вироблених математичних знань, навичок і вмінь відбувається розвиток учнів. При цьому привласнення виступає як результат активної відтворювальної діяльності дитини, що опановує вироблені способи орієнтації і засоби перетворення, які поступово стають формами його самостійності [53, с.18].

У структурі учіння виділяють два макрокомпоненти [29]: з'ясування (сприйняття, осмислення) змісту знань і способів діяльності, які засвоюються в учінні, та їхнє відпрацювання (закріплення, застосування). Процес учіння полягає в послідовно-паралельному функціонуванні цих макрокомпонентів при деякому випередженні в часі першим з них, тобто в процесі з'ясування змісту відбувається його мимовільне часткове опанування, а в процесі відпрацювання зміст з'ясовується на новому якісному рівні.

При вивченні математики учні повинні опанувати поняття та їх означення, математичні факти (аксіоми, теореми, формули), зміст способів діяльності (алгоритми, евристичні схеми, методи розв'язування математичних задач і доведення тверджень). Особлива роль у пізнанні математики належить задачам [7]. Усією практикою навчання математики доведено, що тільки в процесі розв'язування задач можна досягти повного і глибокого з'ясування змісту і тільки в такий спосіб можливе набуття повноцінних навичок і вмінь.

Психологами встановлено, що процес відпрацювання найуспішніше протікає у вправах шляхом поетапного формування знань і дій [10; 11; 60 та ін.], а значить обов'язково має пройти стадії «застосування з опорою на допомогу» – «самостійне застосування». У зв'язку з особливостями пізнання математики з'ясування змісту нового матеріалу і його застосування з опорою на допомогу доцільно розглядати як єдиний компонент діяльності учня. Саме такий підхід простежується в досвіді вдомих педагогів Р. Г. Хазанкіна, Н. П. Нікітенко та ін. Цими учителями виділяється особливий масив задач і відводиться спеціальний час для їх розв'язування одразу після ознайомлення з новими знаннями. Під час розв'язування таких задач учням дозволяється користуватися будь-якими підказками, оскільки тут важлива не самостійність розв'язування, а усвідомленість дій школяра. Лише після того, як учитель і учень переконаються в тому, що новий матеріал є достатньо зрозумілим, пропонується наступний масив задач, призначений для відпрацювання навичок і вмінь.

Як відображення закономірностей процесу учіння, у сучасній дидактиці розглядається поняття «дидактичний цикл» і виділяється його структура, що містить п'ять ланок [25, с. 21]. Дидактичному циклу привласнюється статус одиниці процесу навчання, яка слугує передаванню порції змісту освіти і засвоєння його до необхідного рівня застосування. За часом дидактичний цикл може становити урок або ланцюжок уроків залежно від обсягу навчального матеріалу, який доцільно подавати одночасно. За традиційного навчання математики матеріал програмової теми розбивається на невеликі порції, процес опанування кожної з яких – це окремий дидактичний цикл, а процес вивчення всієї теми – це серія дидактичних циклів. Питання про те, що приймати за дидактичний цикл в умовах лекційно-практичної системи і яка його структура, вимагає особливого розгляду.

Як відомо, вікові особливості старшокласників дозволяють значно збільшити обсяг порцій навчального матеріалу. Саме на цьому базується стратегія навчання математики в умовах лекційно-практичної системи. Проте єдиних принципових позицій в тому, як збільшувати цей обсяг і до яких меж, в існуючих описах такої системи навчання та в роботі вчителів, які її застосовують, нами не виявлено. Частіше укрупнення порції здійснюється лише за кількісним показником, тобто збільшується кількість нових математичних понять, фактів, що вводяться одночасно, не змінюючи логіки подання матеріалу в навчальному посібнику. При цьому спостерігається як хаотичне збільшення за принципом «скільки встигнемо за урок», так і цілеспрямоване, що передбачає поділ програмової теми на навчальні. При цьому кожна навчальна тема розглядається як самостійна одиниця змісту, а процес її опанування – як окремий дидактичний цикл. Вивчення програмової теми загалом забезпечується серією дидактичних циклів. Фактично, у такий спосіб реалізується індуктивний підхід до навчання, хоча і дещо укрупненими порціями.

Ефективнішим для навчання й розвитку старшокласників у психології і дидактиці визнається дедуктивний підхід до навчання. Стратегія такого підходу заснована на дидактичних [23; 48 та ін.] і психологічних [30 та ін.] принципах розвивального навчання й полягає в русі від загальних уявлень про ті явища і зв'язки між ними, які розкриваються у рамках певної одиниці змісту, до розкриття суті цих явищ, до пізнання їхніх конкретних властивостей [21; 57 та ін.]. Така стратегія навчання математики припускає поступове проникнення в суть проблеми, що вивчається, шляхом усебічного залучення учнів до самостійної навчально-пізнавальної діяльності, а також дозволяє індивідуалізувати глибину занурення в проблему. У такий спосіб створюються ширші можливості для реалізації рівневої диференціації та надання диференційованої допомоги учням.

Оскільки в межах кожної програмової теми з математики розглядається відносно самостійна проблема (наприклад, паралельність прямих і площин у просторі, властивості многогранників тощо), то саме такий відрізок змісту доцільно прийняти за одиничний. При цьому необхідно на основі логіко-математичного аналізу [35] заздалегідь переструктурувати зміст теми з метою його систематизації, виділення блоків інформації. У таких блоках інформації мають відображатися або окремі сторони проблеми, що вивчається (наприклад, лінійні й кутові співвідношення між елементами многогранника, площа бічної поверхні), або властивості конкретної групи явищ (наприклад, властивості призм і властивості пірамід) тощо.

Структура дидактичного циклу в трактуванні Л. Я. Зоріної [25] по суті узгоджується із загальною стратегією побудови навчального процесу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики. Перша ланка дидактичного циклу відповідає створенню первинного уявлення учнів про зміст програмової теми як про систему, постановку цілей вивчення теми та його мотивації. Друга й третя ланки забезпечують засвоєння укрупненої одиниці змісту та набуття необхідних навичок і вмінь. Четверта ланка дидактичного циклу відповідає підсумковому контролю, а в межах п'ятої ланки підводяться підсумки вивчення теми та визначаються шляхи використання отриманих результатів у подальшому навчанні й самоосвіті.

Фактично, саме така структура прогядається в описах лекційно-практичної системи О. О. Хмури, В. Г. Коваленка та ін. Проте, як було показано вище, таку структуру слід визнати занадто загальною й такою, що вимагає подальшого уточнення. Зокрема детальніше слід розглянути особливості другої і третьої ланок.

Якщо в систематизованому матеріалі програмової теми виділено кілька блоків інформації й опановувати їх доцільно окремо, то друга і третя ланки дидактичного циклу мають бути подані через систему підциклів опанування блоків інформації. У структурі кожного із цих підциклів доцільно виділити також п'ять ланок:

перша ланка – постановка мети вивчення блоку, його місце в системі та значущість результатів опанування для формування системи знань, набуття комплексу навичок і вмінь;

друга й третя ланки – опанування блоку інформації до необхідного рівня застосування;

четверта ланка – контроль за результатами опанування блоку;

п'ята ланка – зіставлення результатів опанування блоку із запланованими підсумковими.

Для завершення процесу формування комплексу умінь з усієї теми систему підциклів опанування окремих блоків інформації у такому разі необхідно доповнити ще одним, інтеграційним підциклом. Його структура може бути подана аналогічним чином.

Особливо слід зупинитися на специфіці четвертої і п'ятої ланок інтеграційного підциклу. Саме на цьому етапі переслідується мета виявлення прогалин у системі знань учнів, їх корекції, підготовки до підсумкового тематичного звіту, організація якого відповідає четвертій ланці, але вже усього дидактичного циклу.

Теоретичний аналіз і вивчення досвіду творчо працюючих учителів привели нас до висновку про те, що така міра деталізації структури дидактичного циклу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики також недостатня. Зокрема залишається нез'ясованим:

а) місце актуалізації базових знань, необхідність якої доведена психологами, дидактами і шкільною практикою;
б) механізм організації з'ясування змісту блоку інформації;
в) особливості організації відпрацювання знань і дій;
г) місце здійснення корекції, яка не повинна проводитися тільки наприкінці вивчення теми;
д) місце й характер контролю.

Із цього випливає, що другу і третю ланки підциклу опанування блоку інформації необхідно представити через особливу структуру.

Психологи стверджують, що кожного разу, коли учень засвоює новий матеріал, він зіставляє його із засвоєним раніше, зв'язує з ним, перебудовує його [29, с.134]. Отже, для успішного опанування учнями блоку інформації необхідно заздалегідь актуалізувати й відкоригувати базові знання, усунути прогалини. Особливо це важливо в уміннях. При цьому необхідно, щоб під керівництвом учителя учні усвідомлено готували себе до вивчення нового матеріалу – розуміли мету і значущість такої підготовки, свідомо відновлювали знання, навички і вміння, які знадобляться для роботи над новим матеріалом, цілеспрямовано усували прогалини в них. Іншими словами, актуалізацію й корекцію базових для цього блоку знань, навичок і вмінь необхідно розглядати як перший етап опанування блоку інформації, який має п'ятиланкову структуру самостійного дидактичного циклу. У підциклі опанування блоку інформації такий цикл відіграє роль внутрішнього підготовчого підциклу.

Ураховуючи структуру учіння як діяльності, процес вивчення блоку інформації необхідно розглядати як систему двох самостійних підциклів: 1) з'ясування змісту блоку інформації і формування умінь застосовувати знання з опорою на допомогу (в зоні «найближчого розвитку»); 2) відпрацювання нових знань і дій до рівня самостійного застосування в знайомій і незнайомій ситуаціях, а також у ситуаціях, що вимагають творчого підходу (перехід на рівень актуального розвитку).

Ці підцикли також є внутрішніми для підциклу опанування блоку і також мають п'ятиланкову структуру. Підцикл опанування блоку в такому разі можна назвати зовнішнім.

Отже, дидактичний цикл в умовах лекційно-практичної системи навчання математики має складну, розгалужену структуру (рис. 1). Друга і третя ланки дидактичного циклу – це варіативний компонент, який може складатися з низки підциклів опанування блоків навчальної математичної інформації та інтеграційного підциклу (якщо в програмовій темі виділено кілька блоків) або одного підциклу (якщо програмова тема утворює єдиний блок інформації). Друга і третя ланки кожного підциклу опанування блоку реалізується за допомогою незмінної системи трьох внутрішніх підциклів – підциклу актуалізації, підциклу з'ясування й підциклу відпрацювання.

За допомогою такої структури можна довести невипадковість творчих знахідок учителів, їх об'єктивну детермінованість закономірностями навчання математики в умовах лекційно-практичної системи. Наприклад, уроки консультації і корекції, які проводять Н. П. Нікітенко, Р. С. Петрова та ін. услід за уроками-лекціями, дозволяють учителеві повністю реалізувати підцикл з'ясування знань і дій, тобто досягти повного розуміння матеріалу учнями, своєчасно виявити й усунути неправильні уявлення учнів, сформувати уміння орієнтуватися в матеріалі, підготувати базу для цілеспрямованого вдосконалення навичок і вмінь школярів.

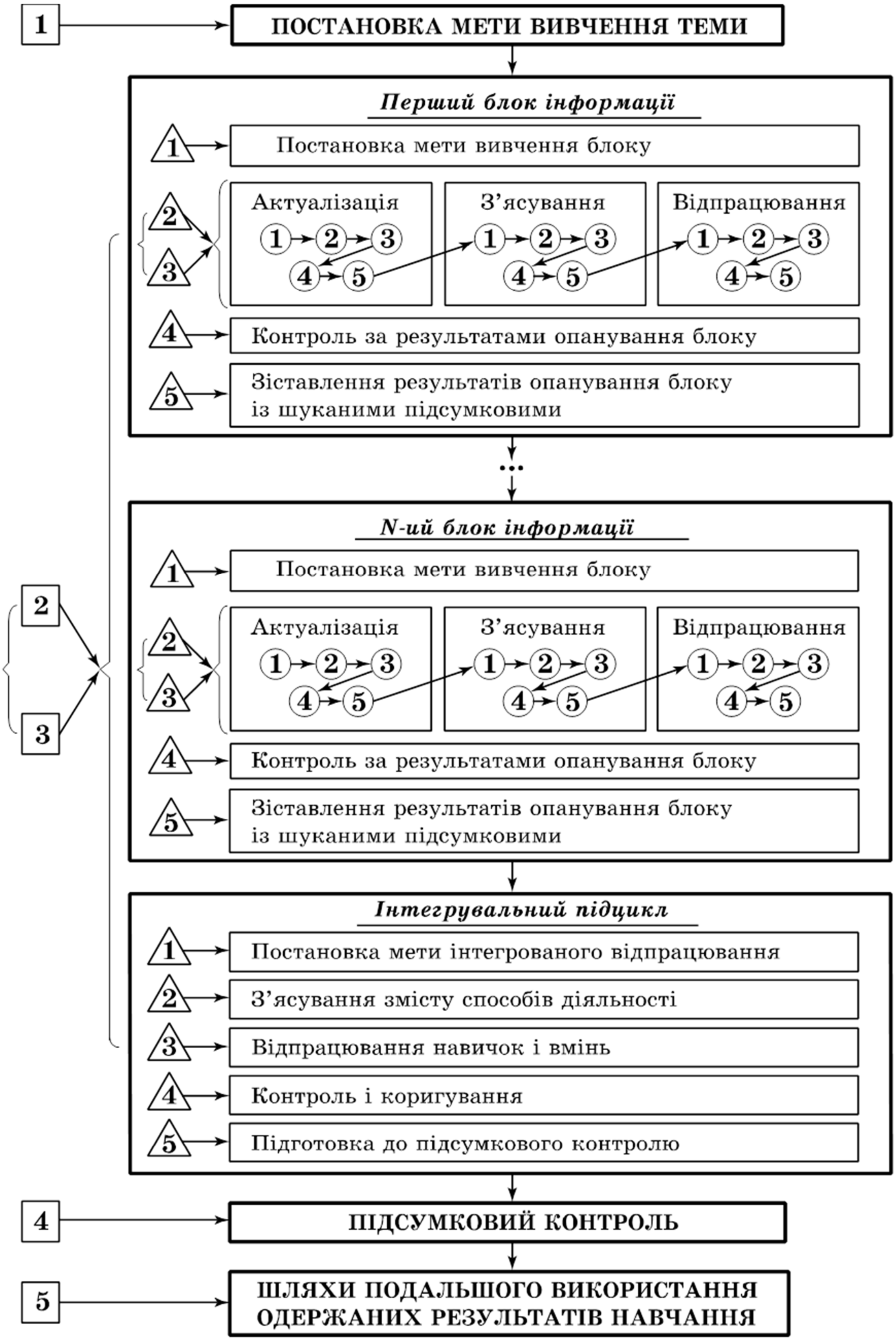


Рис. 1. Тут: 1 - ланка дидактичного циклу; 1 - ланка зовнішнього підциклу; 1 - ланка внутрішнього подциклу.

З іншого боку, за допомогою такої структури можна пояснити причини невдач окремих учителів. Вони пов’язані з тим, що в існуючих описах лекційно-практичної системи навчання математики, у шкільній практиці нерідко відбувається штучне поєднання схожих за формою елементів різних підциклів, порушується доцільний порядок у підциклах, деякі елементи підциклів випадають із поля зору, а послідовне переведення знань і дій учнів із зони «найближчого розвитку» до зони «актуального розвитку» взагалі спеціально не планується.

На підтвердження сказаного можна навести такий приклад. Форми і методи контролю, що використовуються в шкільній практиці, з перших же уроків вивчення теми спрямовані на встановлення міри опанування учнями знань і дій у зоні «актуального розвитку». При цьому учителі часто нарікають на спроби учнів скористатися підказками, шпаргалками тощо, виникають конфлікти. У подібних фактах яскраво виражено два моменти. По-перше, у внутрішній підцикл з’ясування знань, їх відпрацювання й опанування в зоні «найближчого розвитку» уклинюється елемент третього внутрішнього підциклу, а по-друге, відповідний елемент другого підциклу випадає зовсім. Іншими словами, використання своєрідних «шпаргалок» на цьому етапі є об’єктивною необхідністю й зумовлено не негативними якостями учнів, а закономірностями учіння. Приклад використання таких шпаргалок (опорних конспектів) та їх ефективність відомі з досвіду роботи В.Ф. Шаталова [14; 83].

Використовуючи виділену нами структуру дидактичного циклу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики неважко довести безплідність спроб скласти універсальну послідовність навчальних занять. Залежно від цілого ряду чинників реалізація найменшої структурної одиниці циклу (ланки внутрішнього підциклу) може зайняти за часом як етап уроку, цілий урок, так і серію уроків (наприклад, подання учням нового матеріалу). Але такі ж відрізки навчального часу можуть знадобитися і для реалізації цілого підциклу (наприклад, підциклу актуалізації і корекції).

На нашу думку, поділ процесу вивчення теми на навчальні заняття необхідно здійснювати лише після того, як наповнена конкретним змістом кожна ланка дидактичного циклу та його підциклів (і зовнішніх, і внутрішніх), тобто складено схему навчання цієї конкретної теми. За результатами такого аналізу необхідно додатково визначити:

1) складність реалізації кожної ланки крізь призму її змістової наповненості, можливостей учнів та оптимального способу організації їх діяльності;
2) орієнтовний час, необхідний для реалізації кожної ланки окремо;
3) доцільну неперервність між ланками й можливість об'єднати їх у групи за часовим показником;
4) відрізки навчального часу (урок, серія уроків), які необхідні для реалізації кожної групи ланок;
5) провідну ланка за її дидактичним значенням в групі й відповідно до нього тему навчального заняття та його мету;
6) оптимальне співвідношення способів діяльності учнів в межах навчального заняття;
7) можливий вид навчального заняття.

Таким чином, поділ процесу вивчення програмової теми з математики на навчальні заняття не є жорстко наперед заданим, а функціонально й варіативно залежить від змісту теми, особливостей класу та адекватних цілям способів організації діяльності учнів. Навчальне заняття не аморфне, його структура задається утілюваним на цьому навчальному занятті фрагментом структури всього дидактичного циклу.

У контексті вищевикладеного дещо змінюється смисл, який традиційно вкладається в поняття «урок».

У сучасній дидактиці урок розуміється як обмежена в часі організаційна одиниця навчального процесу, функція якої полягає в досягненні завершеної, але часткової мети навчання [22, с. 226], тобто урок представляє логічну одиницю теми. Але в умовах лекційно-практичної системи навчання математики для досягнення, наприклад, такої часткової мети, як ознайомлення зі змістом блоку інформації, може знадобитися не один, а серія сорокап'ятихвилинних відрізків навчального часу. Іншими словами, за змістовим показником уроком у цій ситуації є серія уроків як відрізків навчального часу.

На наш погляд, в умовах лекційно-практичної системи навчання математики доцільно за терміном «урок» закріпити значення «відрізок навчального часу», а смисл «організаційна одиниця навчального процесу» вкласти в термін «навчальне заняття». Таким чином, навчальне заняття, мета якого полягає в ознайомленні учнів зі змістом блоку інформації, може бути проведеним впродовж уроку, спареного уроку або серії уроків.

Отже, лекційно-практична форма організації навчального процесу при вивченні математики в школі є жорсткою за структурою й гнучкою, варіативною за способами реалізації системою навчання. Її принципову основу становить дедуктивний підхід до організації вивчення програмової теми як системного утворення. Об'єктивні передумови для досягнення учнями запланованих результатів вивчення теми містяться в схемі навчання, яка складається на основі структури дидактичного циклу з урахуванням індивідуальних особливостей (рівня навченості й научуваності, загального розвитку) учнів конкретного класу. У складанні оптимальної схеми навчання програмової теми полягає один із шляхів інтенсифікації навчання математики в умовах лекційно-практичної системи. Механізм складання такої схеми буде розкритий нами нижче (3.3).

3.3. Структурування навчального змісту в умовах лекційно-практичної системи

Сутність структурування навчального матеріалу пов'язана з реалізацією системного підходу до вивчення змісту теми і полягає в наданні йому такої структури, «...яка сприяла б засвоєнню знань у цілісній системі» [21, с. 92]. Важливість системного підходу до навчання математики підкреслюється тим, що його реалізація є однією з умов функціонування розвивального компонента навчання [53]. У сучасній дидактиці розглядаються два шляхи здійснення системного підходу до навчання: від загального до окремого (від системи до її елементів) і від вивчення конкретних проявів системи до утворення системного знання про неї [21], або, відповідно, дедуктивний та індуктивний шлях.

В умовах лекційно-практичної системи навчання математики реалізується дедуктивний підхід до організації вивчення програмової теми як системного утворення.

Структурування програмового матеріалу в такому випадку являє собою переструктурування його змісту, виконане на основі результатів логічного і математичного аналізу [35].

Реконструйований зміст (його стрижень) має надати можливість учням ясно представляти:

1) яка проблема розглядається в темі;
2) які сторони цієї проблеми необхідно пізнати, щоб скласти повне (у межах шкільної програми з математики) уявлення про суть проблеми;
3) як пізнати суть проблеми, тобто як розкрити характер взаємозв'язків між елементами системи.

Логіка розгортання змісту теми в такому випадку стає зрозумілою учням, створюється можливість поєднати доступність і науковість викладу.

Однак логіко-математичне структурування змісту теми – це лише необхідна, але недостатня умова перетворення навчального матеріалу в засіб активізації пізнавальної діяльності школярів. Як зазначалося вище, у систематизованому матеріалі теми можуть бути виділені блоки навчальної математичної інформації. Для складання дидактично виваженої схеми вивчення теми особливо важливо з'ясувати такі питання:

- як ознайомити учнів із системою знань і змістом дій – одразу розкривати загальне і конкретне на необхідному рівні строгості, тобто звести воєдино всі блоки інформації, або спочатку створити уявлення в учнів про загальне і конкретне, а потім окремо розглянути кожний блок, уже глибоко проникаючи в його суть;
- який шлях обрати для відпрацьовування знань і дій – комплексний, коли учні вчаться застосовувати одразу систему знань з теми, або роздільний, коли відпрацьовуються вміння застосовувати знання, що входять до окремого блоку, після чого здійснюється відпрацювання;
- як саме взаємопов'язані спосіб ознайомлення із системою знань і шлях відпрацьовування.

Іншими словами, логіко-математичне структурування має доповнюватися дидактичним структуруванням.

У ході дослідження нами було встановлено, що найбільш істотним компонентом дидактичного структурування є встановлення зв'язку між способом ознайомлення учнів із новим матеріалом і шляхом його опанування. Також з'ясувалося, що в умовах лекційно-практичної системи навчання математики реально здійсненними з усіх можливих є комбінації:

а) комплексне ознайомлення – комплексне відпрацювання;
б) роздільне ознайомлення – роздільне відпрацювання.

Детермінантним у комбінації є шлях відпрацьовування, а не спосіб ознайомлення з новим матеріалом.

Зроблений висновок ґрунтується на тому, що переструктурований зміст навчальної теми з математики завжди дозволяє ознайомити з ним комплексно. Але специфіка шкільної математики така, що зміст дій, які опановуються при вивченні теми, не завжди дозволяє відпрацьовувати їх спільно. Крім того, рівень розвитку учнів може не дозволяти їм оперувати одразу комплексом знань або через їхню складність, або через великий обсяг тощо. Із цього випливає, що схема навчання тої самої теми в класах із різним рівнем математичної підготовки учнів може мати принципові розбіжності. Зокрема різною буде структура варіативного компонента дидактичного циклу (див. рис. 1).

Наприклад, у матеріалі навчальної теми «Поняття про об'єм тіла. Об'єм прямокутного паралелепіпеда» (геометрія, 11 клас) можна виділити три блоки інформації:

1) поняття об'єму тіла та його основні властивості;
2) теорема про об'єм прямокутного паралелепіпеда та її доведення;
3) відношення об'ємів подібних паралелепіпедів.

Якщо клас слабкий, то може бути використана комбінація «роздільне ознайомлення – роздільне відпрацювання». У такому випадку варіативний компонент дидактичного циклу буде містити три підцикли опанування блоків та інтеграційний підцикл. Якщо в класі переважає кількість учнів із середнім і високим рівнем навчальних досягнень, то реалізувати потенціал школярів удасться повніше, використовуючи комплексне ознайомлення і комплексне відпрацювання. У такому випадку варіативний компонент дидактичного циклу буде представлений єдиним зовнішнім підциклом. При цьому перша, четверта і п'ята ланки дидактичного циклу в обох випадках не розрізнятимуться: перша ланка покликана створити системне уявлення учнів про тему, мотивувати необхідність її вивчення, четверта ланка – підвести підсумки вивчення теми, а п’ята – показати зв’язок навчального матеріалу з іншими предметами, виходи на практику.

Із сказаного вище випливає, що зміст навчальної теми з математики може стати специфічним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів в умовах лекційно-практичної системи навчання. Це є можливим, якщо, по-перше, на основі логіко-математичного аналізу зміст навчання переструктурований і поданий як єдина система, а по-друге, на основі дидактичного структурування обраний найбільш доцільний шлях його опанування. Результати такого структурування, як було показано вище, є базою для виявлення конкретної структури дидактичного циклу, відповідно до якої визначаються проміжні (етапні) цілі вивчення теми, з’ясовуються завдання самостійної роботи учнів, особливості контролю тощо.

Розподіл змісту програмової теми між ланками дидактичного циклу і добір найбільш доцільних для реалізації кожної ланки засобів навчання (систем вправ, систем контрольних питань і завдань, наочності тощо) становлять суть методичного структурування змісту теми, яким завершується побудова конкретної схеми вивчення теми. На основі цієї схеми вже може бути складений тематичний план вивчення теми.

Однак поетапно переструктурований зміст програмової теми (на математичному, дидактичному і методичному рівнях) не вичерпує всіх можливостей удосконалення ходу й результатів навчання математики, тобто є лише потенційним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів. Складена в такий спосіб схема вивчення теми ще не може бути визнана дидактично виваженою, оскільки не відображає особливостей роботи з учнями різних груп. Іншими словами, навчальний зміст може стати реально діючим засобом активізації лише в комплексі з особливими методами і прийомами активізації навчання школярів, що відбираються з урахуванням потреб диференціації та індивідуалізації навчання.

3.4. Методи навчання і прийоми активізації пізнавальної діяльності учнів в умовах лекційно-практичної системи

У сучасній дидактиці метод навчання розглядається як спосіб досягнення цілей навчання, виховання й розвитку учнів у процесі їхньої спільної діяльності з учителем. Складність цього явища, що обумовлює можливість різних підходів до розкриття його суті, пояснює одночасне існування в дидактиці різних концепцій і класифікацій методів навчання (традиційна, І. Я. Лернера, М. І. Махмутова, Ю. К. Бабанського, В. О. Онищука та ін.).

Нашим методичним задумам найбільше відповідає концепція, розроблена І. Я. Лернером. Відповідно до цієї концепції, у методі навчання провідними елементами є зміст освіти і способи його засвоєння [22, с.188], на підставі чого виділяють п’ять загальдидак-тичних методів навчання. До них відносяться пояснювально-ілюстративний (інформаційно-рецептивний), репродуктивний, проблемного викладу, частково-пошуковий (евристичний) і дослідницький методи. Перші два методи пов’язуються з репродуктивною діяльністю учнів, четвертий і п’ятий – із творчою, а проблемний виклад – з обома видами діяльності однаковою мірою.

Шкільна математична освіта передбачає формування в учнів математичних понять, фактів і способів діяльності як об’єктів засвоєння, навчання доведень математичних тверджень, навчання розв’язування задач. Досягнення кожної мети та їхнього комплексу може бути організоване за допомогою різних методів навчання. Раціональне поєднання репродуктивних і творчих методів у навчанні математики спроможне вплинути на характер діяльності учнів, тобто виступити в ролі засобу активізації навчання школярів [82].

В умовах лекційно-практичної системи, на відміну від традиційного навчання, розв’язання кожного з наведених вище завдань навчання математики підкоряється більш загальній меті – формуванню в учнів системного уявлення про зміст програмової теми. У зв’язку з цим особливого значення набуває зміщення акцентів у ставленні учнів до кожного компонента змісту математичної освіти. Наприклад, важливість вивчення тої чи тої теореми в такому випадку обумовлюється місцем факту, який установлюється цією теоремою, у системі знань про досліджувану цілісну проблему, його значенням для розкриття інших властивостей системи, задачі виступають як засоби уточнення й поглиблення уявлень учнів про досліджувану проблему та як засоби набуття дієвих знань. Однак це зовсім не означає, що навчання методів доведення математичних тверджень і методів розв'язування задач утрачає свою актуальність. Навпаки, оволодіння цими методами усвідомлюється учнями як необхідний спосіб опанування засобів пізнання змісту навчальної теми.

Таким чином, особливий спосіб мотивації вивчення теми в умовах лекційно-практичної системи є одним із прийомів активізації пізнавальної діяльності учнів.

У зв'язку з особливостями переструктурованого змісту теми і можливістю різними способами організувати її вивчення в умовах лекційно-практичної системи навчання математики необхідно розглядати мотивацію в двох проявах, що відрізняються якісно: як формування ставлення до змісту знань і дій, що здобуваються, та їхній якості; як формування ставлення до способу набування знань і дій заданої якості. Іншими словами, учні повинні чітко розуміти не тільки те, чого вони зможуть навчитися, вивчивши тему, а й те, як краще організувати свою навчально-пізнавальну діяльність, чому саме так, а не інакше буде побудований процес вивчення теми. Отже, необхідна комплексна мотивація.

Для її здійснення важливо, по-перше, виділити ієрархію цілей:

- вивчення теми;
- вивчення кожного блоку інформації;
- актуалізації базових для даного блоку знань, навичок і вмінь;
- з'ясування змісту блоку інформації;
- відпрацювання знань і способів діяльності, що опановуються як при вивченні окремого блоку, так і при інтегрованому відпрацюванні.

По-друге, такі цілі необхідно пред'явити учням і забезпечити їхнє прийняття школярами.

Отже, мотивація має здійснюватися на наступних рівнях:

1) на рівні теми; 2) на рівні блоку; 3) на рівні етапу опанування блоку.

Така мотивація не суперечить мотивації початку окремого навчального заняття, його ходу й кінця [39], а доповнює і конкретизує її.

Для формування позитивного ставлення учнів до цілей особливого значення набуває форма їхнього пред'явлення – *популярно-описова*, *описова*, *конкретна*. Так, у ході дослідно-експериментальної роботи було встановлено, що не завжди конкретна форма пред'явлення цілей, до якої найчастіше звертаються на практиці, активізує навчання школярів. Зокрема у ході експерименту з'ясувалося, що на початковому етапі вивчення теми більш доцільна популярно-описова форма, оскільки учні в даний момент ще не мають певних знань з теми, а конкретне перерахування цілей (пам'ятати ..., знати ..., уміти...) може стати причиною прояву поведінкової активності в деяких з них.

Активізації пізнавальної діяльності учнів сприяє не тільки здійснення комплексної мотивації в процесі вивчення теми, за допомогою якої створюються умови для підключення механізмів саморегуляції школярів, а й забезпечення прогностичної діяльності в процесі навчання.

Найбільш успішно такий підхід до організації навчання математики в умовах лекційно-практичної системи можна реалізувати, якщо побудувати процес вивчення теми в запитаннях і відповідях (тут під відповідями розуміється пояснення, дидактична концепція якого розроблена А. М. Сохором [56]). Запитання, спрямовані на розкриття причинно-наслідкових зв'язків та які стають у такий спосіб ланцюжком взаємозалежних проблем, виступають у такому випадку стимулятором і регулятором пізнавальної діяльності учнів. Постійно звертаючись до запитань, учитель зможе цілеспрямовано формувати в тому числі й уміння учнів самостійно формулювати запитання, бачити проблеми й тим самим розвивати наукове мислення учнів. Кожне нове запитання, обумовлене логікою пізнання і сформульоване учнем самостійно, може стати стимулом до прояву активності учня на найвищому, навчально-креативному рівні. При цьому значну роль відіграє план викладу, різні схеми, таблиці, опорні конспекти, за допомогою яких може бути пред'явлений і план, і система запитань до теми. Не менш важливе значення має готовність учнів до здійснення прогностичної діяльності – сформоване загальне уявлення про тему, актуалізовані базові знання.

Навчання в запитаннях і відповідях, з одного боку, можна розглядати як реалізацію проблемного методу навчання. Але з іншого боку, постановка кожного нового запитання обумовлена змістом матеріалу і логікою пізнання і може бути зовсім не пов'язана зі створенням проблемної ситуації. Тобто, таке навчання спрямоване на розкриття внутрішньої взаємозумовленості установлюваних фактів, а не на обов'язкове створення суперечностей. Кожне запитання розглядається нами як орієнтир пізнавального процесу, а не як бар'єр, який необхідно здолати для того, щоб пізнати.

В іншому положенні знаходяться способи відповідей на запитання (тобто способи пояснення, які тісно пов'язані з формою пояснення – опис, роз'яснення, обґрунтування [56]). Якщо постановка запитань пов'язується нами з аналізом того, що може бути отримане як наслідок відомого, то відповідь має бути пов'язана з тим, що саме має бути отримане і як саме. Організувати ж пошук відповіді можна за допомогою будь-якого методу навчання. Ефективність того чи того методу в даному випадку безпосередньо залежить від конкретного змісту навчального матеріалу й особливостей учнів. Отже, висувати жорсткі вимоги до того, який метод або комбінацію методів потрібно використовувати, на нашу думку, недоцільно. Водночас, необхідно і можливо виділити деякі загальні орієнтири, що сприяють більш раціональній побудові навчального процесу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики.

1. Вибір методів навчання не повинен здійснюватися без урахування результатів структурування змісту навчальної теми з математики, проведеного в повному обсязі.

2. На основі логіко-математичного структурування має бути побудована канва, за якою складається система взаємозалежних запитань, що направляють навчання школярів.

3. Відповідно до результатів дидактичного структурування створювана система запитань має бути розділена на групи:

а) запитання для створення загального уявлення про зміст програмової теми і спосіб його опанування;
б) запитання, спрямовані на розкриття суті досліджуваного;
в) запитання, що стимулюють якісне відпрацьовування знань і дій.

Незалежно від того, який шлях опанування змісту теми обраний (комплексний або роздільний), перша група запитань зберігається незмінною, друга ж і третя групи можуть бути розділені на відповідні підгрупи.

4. Складання конкретної системи запитань здійснюється з урахуванням результатів методичного структурування змісту програмової теми. Така система запитань повинна сприяти реалізації кожного структурного компонента дидактичного циклу (див. рис. 1). Іншими словами, за допомогою цієї системи запитань перед учнями розкриваються не лише кінцеві, а й проміжні цілі вивчення теми, формується орієнтована основа їхньої діяльності.

5. При конструюванні способів відповіді на кожне запитання необхідно враховувати наступне:

а) важливість відповіді для досягнення цілей вивчення теми;
б) доцільність тієї або іншої глибини і ступеня обґрунтованості відповіді;
в) можливість учнів самостійно одержати результат заданої якості;
г) доцільність самостійного пошуку відповіді;
д) можливість інших способів організації пошуку відповіді.

Розподіл процесу вивчення теми на навчальні заняття (з урахуванням наведеного вище) та реалізація на кожному із занять найбільш доцільного комплексу методів навчання здатні вплинути на підвищення свідомості й активності учнів.

Однак структурування змісту і вибір методів навчання ще не дозволяють створити необхідні й достатні умови для активізації пізнавальної діяльності всіх учнів, оскільки при виборі цих засобів активізації враховувалися лише середньостатистичні можливості школярів. Розв’язати цю проблему поза реалізацією диференційованого та індивідуального підходів, як показує практика, не представляється можливим.

3.5. Рівнева диференціація навчання математики в умовах лекційно-практичної системи

Навчання учнів на високому рівні трудності розглядаються в психології, дидактиці, методиці навчання математики як одну з найбільш важливих умов розвитку учнів і пов’язується з організацією навчання в «зоні найближчого розвитку» школярів (за Л. С. Виготським, Л. В. Занковим). Іншими словами, навчання має бути трудним, але посильним для учнів. Цю суперечність спроможна нівелювати рівнева диференціація навчання.

Сутність рівневої диференціації в дидактиці й методиці навчання математики пов’язується з диференціацією вимог до результатів опанування теми, зокрема шляхом виділення результатів навчання на рівні стандарту [49 та ін.], зі здійсненням диференційованого та індивідуального підходу до учнів у процесі організації їхньої самостійної роботи, зокрема за допомогою диференційованих за змістом й обсягом завдань [54 та ін.], а також із наданням диференційованої допомоги учням на всіх етапах навчання [55 та ін.]. Таким чином, використання рівневої диференціації у процесі навчання математики дозволяє:

а) диференціювати цілі вивчення теми, що сприяє формуванню позитивних мотивів навчання;
б) створити адекватні умови для досягнення цілей;
в) підтримувати впевненість учнів у досяжності мети протягом усього процесу вивчення теми.

Отже, рівнева диференціація може виступити в якості засобу активізації пізнавальної діяльності учнів.

В умовах лекційно-практичної системи навчання математики використання даного засобу активізації пізнавальної діяльності учнів набуває особливої важливості, оскільки реалізація дедуктивного підходу до вивчення програмової теми як системного утворення неминуче пов’язана з підвищенням рівня трудності навчання. Але якщо однозначно задавати цей рівень, наприклад, орієнтуючись на можливості тільки середніх учнів, тобто відбирати зміст, методи, форми і засоби навчання так, щоб рівень навчання відповідав «зоні найближчого розвитку» середніх учнів, то для слабких школярів такий рівень може виявитися непосильним, а для сильних – занадто легким. Іншими словами, рівень трудності навчання, що задається однозначно, може бути оптимальним тільки для однієї групи учнів класу.

У зв'язку з цим вважаємо за необхідне для кожної групи учнів класу (слабких, середніх і сильних) визначити відповідний рівень роботи над темою – рівень стандарту, достатній і високий рівні. Під такими рівнями роботи над темою ми розуміємо міру глибини і широти вивчення програмового матеріалу, що гарантують досягнення відповідних результатів, які оцінюються балами «4-6», «7-9» і «10-12». У такому випадку підвищення рівня трудності навчання буде здійснюватися диференційовано. Це дозволить організувати навчання в «зоні найближчого розвитку» школярів, тобто на оптимальному для кожного з них рівні трудності.

Для забезпечення рівневої диференціації, а отже, і доступності навчання математики в умовах лекційно-практичної системи необхідним є таке.

1. Провести додатковий аналіз переструктурованого змісту програмової теми, у результаті якого з'ясувати:

- обсяг змісту, необхідний і достатній для роботи над темою на рівні стандарту, достатньому і високому рівнях;
- склад дій, що дозволяють пізнати суть змісту відповідного обсягу;
- склад дій, що свідчать про опанування змісту.

На підставі цього доцільно сформулювати розгорнуту систему вимог до кінцевих і проміжних результатів опанування матеріалу теми з точною вказівкою нижньої границі кожного рівня опанування. Така система вимог має відображати:

- результати вивчення теми, диференційовані як за змістовим, так і за операціональним показником;
- характеристику загального уявлення про тему, що вивчається, як про систему;

- результати опанування блоків навчальної математичної інформації, які також диференційовані за змістовим та операціональним показниками;
- диференційовані результати актуалізації базових знань, з'ясування суті навчального матеріалу та відпрацювання знань і дій у рамках кожного блоку інформації.

З урахуванням розгорнутої системи диференційованих вимог необхідно переглянути результати методичного структурування змісту навчального матеріалу, забезпечуючи тим самим змістову базу для досягнення кожної мети.

2. Внести корективи в систему запитань до теми, доповнивши її запитаннями, що відображають диференційовані вимоги до кінцевих і проміжних результатів вивчення теми.

3. Відкритість цілей, що досягається вищезгаданим способом, використовувати для формування адекватної самооцінки учнів і самостійного вибору оптимального рівня роботи над темою.

4. Додатково проаналізувати ефективність певного способу відповіді на кожне запитання до теми з урахуванням потреб кожної групи учнів.

5. Забезпечити можливість учням змінити вибір рівня роботи над темою в процесі її вивчення. Для цього необхідно зробити відкритими для учнів не тільки цілі, а й змістову та операційну базу для досягнення кожної з них. Крім того, доцільно створити вільний доступ до засобів навчання будь-якого рівня кожному учню незалежно від того, на якому рівні він працює.

6. Доповнити диференційовану систему засобів контролю засобами організації наступного самоаналізу, у процесі якого досягнутий у даний момент результат зіставляється з необхідним на цьому етапі й очікуваним в остаточному підсумку. Використовувати комплекс «контроль-самоаналіз» для формування в учнів навичок самоконтролю, позитивного ставлення до корекції і потреби в ній.

7. Надавати диференційовану допомогу учням у двох напрямах: на шляху до кожної мети й у процесі корегування результатів. Для цього в першому випадку доцільно

використовувати систему контрзапитань і контрзавдань у комплексі із системою «підказок», що може містити як прямі відповіді, так і навідні запитання, а також вказівку на джерела, з яких можна почерпнути правильну інформацію. Таку допомогу можна здійснити, задіявши зокрема можливості мережі Інтернет. У другому випадку диференційована допомога учням є доповняльною до комплексу «контроль-самоаналіз» і реалізується шляхом використання системи диференційованих завдань для корекції.

Таким чином, рівневу диференціацію ми розглядаємо як необхідну та найбільш важливу умову, що дозволяє організувати навчання учнів на оптимальному рівні трудності. Дієвим же засобом активізації пізнавальної діяльності учнів в умовах лекційно-практичної системи навчання математики вона може стати тільки в комплексі зі структуруванням навчального матеріалу та раціональним використанням методів навчання, що становлять її змістову й операційну базу.

На основі такого аналізу може бути складена дидактично виважена схема вивчення теми, у якій враховуються не лише об’єктивні характеристики лекційно-практичної системи навчання, особливості змісту програмової теми, найбільш доцільний шлях її опанування, а й потреби учнів із різним рівнем навченості та научуваності.

Наприклад, при вивченні теми «Поняття про об’єм тіла. Об’єм прямокутного паралелепіпеда» у випадку роздільного ознайомлення з блоками інформації та їхнього роздільного відпрацювання можна обмежитися задачами рівня стандарту при відпрацьовуванні навичок і вмінь у підциклах опанування блоків, а більш складні задачі винести в інтеграційний підцикл. Можна діяти й по-іншому – у кожному підциклі здійснювати відпрацювання не тільки на обов’язкових, а й на більш складних задачах. Залежно від обраної тактики будуть неоднаковими часові межі, які плануються для опанування блоків. Для того, щоб не стримувати можливості більш сильних учнів, доцільними в такому випадку будуть індивідуальні плани опанування ними програмової теми. Такий план складається на основі схеми вивчення теми, але передбачає особливий набір задач і, можливо, індивідуальні терміни звіту про результати роботи над темою.

Для активізації пізнавальної діяльності учнів особливо важливу роль відіграє доцільне використання групових та індивідуальних форм роботи. Передовий педагогічний досвід дає численні приклади організації таких форм навчання:

- створення особливого інституту консультантів із числа найбільш підготовлених учнів та залучення їх до роботи з менш підготовленими школярами (парне консультування, проведення заліку тощо);
- створення груп учнів із рівними можливостями, для яких виділяються особливі масиви задач (рівня стандарту, достатнього і високого рівнів);
- створення груп учнів із різними можливостями для розв'язування однієї, спільної для групи, задачі практичного або наукового змісту; тощо.

Дієву допомогу в організації індивідуальної роботи з учнями можуть надати сучасні інформаційно-комунікаційні технології та персональні комп'ютери й гаджети, на які можна покласти роль і консультанта, і тренажера, і контролера. Планування і проведення занять із комп'ютерною підтримкою – важливий шлях до оптимізації та інтенсифікації навчання математики.

Особливості дидактичного циклу в умовах лекційно-практичної системи навчання математики порушують питання про необхідність розробки нових, нетрадиційних форм організації спільної діяльності вчителя та учнів.

Зокрема в кожному підциклі опанування блоку (див. рис. 1) передбачається внутрішній підцикл з'ясування змісту блоку та формування вмінь застосовувати знання з опорою на допомогу (у знайомій і незнайомій ситуаціях). Повна реалізація цього підциклу вимагає проведення особливого контролю, наприклад, заліку «з підказкою», а п'ята ланка цього підциклу передбачає проведення аналізу результатів такого контролю та складання плану корегування, який може бути реалізований у рамках наступного внутрішнього підциклу – відпрацювання навичок і вмінь у зоні «актуального розвитку».

У зв'язку з тим, що кожен учень, незалежно від рівня підготовленості, має пройти повний цикл вивчення теми, а вчителю необхідно створити для цього всі умови, виникає потреба внести істотні корективи й у методику організації традиційних форм роботи в умовах лекційно-практичної системи навчання математики, зокрема в методику лекційних і практичних занять, спираючись при цьому на досягнення передових учителів.

Для забезпечення цілісності навчально-виховного процесу особливо важливою стає доцільна безперервність між навчальними заняттями, що повинно стати предметом спеціальної уваги вчителя після того, як розроблений тематичний план. Із цією метою можна, по-перше, спеціально організувати домашню роботу учнів, а по-друге, використовувати гнучкий графік проведення уроків алгебри й геометрії. Наприклад, якщо при вивченні теми «Поняття про об’єм тіла. Об’єм прямокутного паралелепіпеда» обрано шлях комплексного ознайомлення з блоками інформації, то для викладу теоретичного матеріалу може знадобитися три уроки. Розрив між цими уроками має бути мінімальним і не більшим, ніж один день, тобто необхідно задіяти і час, відведений для уроків алгебри.

На наш погляд, методика навчання математики в умовах лекційно-практичної системи, побудована з урахуванням оцінок і висновків, висловлених у даному параграфі, здатна створити сприятливі умови для активізації пізнавальної діяльності учнів. Вплив при цьому на мотиваційну сферу кожного з них дозволить підключити механізми саморегуляції, підвищити свідомість навчання. Загалом, таке навчання математики в умовах лекційно-практичної системи надасть можливості всім учням досягти обов’язкових результатів вивчення програмового матеріалу і буде сприяти досягненню більш високих результатів тим учням, хто має стійкий інтерес до предмета математики.

Список використаних джерел до розділу 3

1. Активные формы организации процесса обучения: Метод. рекомендации / Сост. В.Н.Осинская. – Ворошиловград, 1988. – 143 с.
2. Ананченко К.О., Перлин Д.Е. Система уроков М.Н.Волкова / К.О. Ананченко // Матем. в шк. – 1988. – №6. – С. 26-31.
3. Ауліна В.О. Зародження лекційно-практичної системи навчання на Кіровоградщині / В.О. Ауліна // Наукові записки КДПУ імені Володимира

Винниченка. Серія: Педагогічні науки. – 2003. – Вип. 49, Ч.1. – С. 24 – 28.
4. Ауліна В.О. Сучасний погляд на цінний досвід вчителів Кіровоградщини II половини XX ст. / В.О. Ауліна // Теоретичні питання культури, освіти та виховання: Збірник наукових праць. – 2003. – Вип. 24, Ч.2. – С. 93 – 98.
5. Ауліна В.О. Хмура О.О. – педагог-новатор Кіровоградщини (1923-1970) / В.О. Ауліна // Шлях освіти. – 2004. – № 4. – С. 52 – 55.
6. Бачу А. Г. Лекційно-практична система організації навчання на уроках фізики та математики : [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://timso.koippo.kr.ua/hmura13/bachu-alona-hennadijivna-lektsijno-praktychna-systema-orhanizatsiji-navchannya-na-urokah-fizyky-ta-matematyky/
7. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посіб. / Г.П. Бевз; 3-є вид., перероб. і доп. – К. : Вища школа, 1989. –367 с.
8. Берсенева Т.А. Зачетные формы организации контроля знаний старшеклассников / Т.А. Берсенева //Матем. в шк. – 1988. – №6. – С. 21-24.
9. Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.
10. Бочкарев В.Н. Методы обучения при закреплении знаний и действий и их сравнительная эффективность: Автореф. дис. ... канд. психол. наук. / В.Н. Бочкарев. – М.,1986. – 21 с.
11. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П.Я. Гальперин //Исследование мышления в советской психологии; под ред. Е.В.Шороховой. – М., 1965. – С. 259-276.
12. Глейзер Г.Д., Макейчик С.Т., Саакян С.М. Лекционно-семинарская система организации занятий по математике / Г.Д. Глейзер, С.Т. Макейчик, С.М. Саакян //Современный урок. Вечерние сменные школы. – М., 1972. – С.89-98.
13. Глейзер Г.Д., Саакян С.М. Лекционно-семинарский метод обучения и система зачетов по математике / Г.Д. Глейзер, С.М. Саакян // Вечерняя средняя школа. – 1970. – №2.
14. Гладкий А.В. О методической системе В.Ф.Шаталова / А.В. Гладкий //Матем. в шк. – 1988. – №4. – С. 38-43.
15. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я.И. Груденов. – М. : Педагогика, 1987. – 158с.
16. Гузеев В.В. О новых формах организации обучения / В.В. Гузеев //Матем. в шк. – 1988. – №4. – С. 47-49.
17. Гузеев В.В. Одна из форм урока-семинара / В.В. Гузеев //Матем в шк. – 1988. – №2. – С. 9-11.
18. Гузик Н.П. Учить учиться: Из опыта работы учителя химии ананьевской средней школы №2 Одесской обл. / Н.П. Гузик. – М. : Педагогика, 1981. – 88с.
19. Гузик Н.П., Пучков Н.П. Лекционно-семинарская система обучения химии / Н.П. Гузик, Н.П. Пучков. – К. : Рад. школа, 1979. – 94с.
20. Деребалюк Л.В. Виды зачетов в старших классах / Л.В. Деребалюк // Матем. в шк. – 1989. – №1. – С. 37-39.
21. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / В.С. Кобзарь, Г.Ф. Кумарина, Ю.А.Кусый и др.; под ред. В.А. Онищука. – К. : Рад. школа, 1987. – 351 с.
22. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики. ... /Под ред. М.Н. Скаткина; 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1982. – 319 с.
23. Занков Л.В. Дидактика и жизнь / Л.В. Занков. – М. : Просвещение, 1968. – 176 с.
24. Зильберберг Н.И. Приобщение к математическому творчеству: Из опыта учителя /

Н.И. Зильберберг. – Уфа : Башкирское кн. изд., 1988. – 96 с.
25. Зорина Л.Я. Слово учителя в учебном процессе / Л.Я. Зорина. – М. : Знание, 1984. – 80 с.
26. Иванова Т.А. Как подготовить уроки-практикумы / Т.А. Иванова // Матем. в шк. – 1990.– №6. – С. 37-40.
27. Иванова Т.А. Лекционно-семинарская система преподавания математики / Т.А. Иванова //Матем. в шк. – 1987. – №3. – С. 11-14.
28. Иванова Т.В. Повышение эффективности лекционно-семинарской формы обучения биологии: Автореф. дис. ... канд. пед. наук / Т.В. Иванова. – М., 1989. – 16 с.
29. Ильясов И. И. Структура процесса учения / И.И. Ильясов. – М. : Изд-во МГУ, 1986. – 200 с.
30. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения / З.И. Калмыкова. – М., 1979. – 48 с.
31. Коваленко В.Г. Лекційно-практична форма навчання математики учнів 9-10 класів / В.Г. Коваленко. – К. : Рад. школа, 1983. –73 с.
32. Корецька В.О. Лекційно-практична система навчання: історія і сьогодення [Текст] / В.О. Корецька // Наукові записки КДПУ імені Володимира Винниченка. Серія: Педагогічні науки. – 2004. – Вип. 54. – С. 77 – 81.
33. Корецька В.О. Раціоналізація навчального процесу засобами лекційно-практичної системи навчання [Текст] / В.О. Корецька // Наукові записки КДПУ імені Володимира Винниченка. Серія: Педагогічні науки. – 2006. – Вип. 68. – С. 87 – 90.
34. Куценок В.Е. Еще раз о системе уроков / В.Е. Куценок //Матем. в шк. – 1989. – №6. – С. 29-32.
35. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И.Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.
36. Лекционно-практическая система в обучении математике (фрагменты из опыта) [Текст] : метод. реком. / Запорож. обл. ин-т усовершенствования учителей ; подгот. Л. П. Канакина. - 2. изд., перераб. и доп. - Запорожье : [б.в.], 1995. - 53 с.
37. Лекционно-семинарская система обучения : [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ifreestore.net/1238/54/
38. Лекційно-практична система навчання: Метод. рек. / Укл. Л.А. Терлецький. – Кіровоград, 1988. – 12 с.
39. Маркова А.К., Матис Т.А., Орлов А.Б. Формирование мотивации учения / А.К. Маркова, Т.А. Матис, А.Б. Орлов. – М. : Просвещение, 1990. – 192 с.
40. Методичні рекомендації до проведення контрольно-залікових уроків з математики в старших класах средньої школи / Укл. В.Г. Коваленко. – Черкаси, 1985. – 47 с.
41. Методичні рекомендації до проведення спецкурсу «Лекційно-практична система навчання математики в старших класах средньої школи» / Укл. В.Г. Коваленко. – К. : РУМК, 1988. – 36 с.
42. Методичні рекомендації до проведення уроків-семінарів з геометрії у IX-X класах / Укл. В.Г. Коваленко, Л.І. Левіт. – Черкаси, 1984. –39 с.
43. Методичні рекомендації до запровадження лекційно-практичної форми навчання математики в старших класах / Укл. В.Г. Коваленко. – Черкаси, 1981. – 65 с.
44. Методические рекомендации по изучению темы «Решение треугольников» (геометрия, 9 класс) в условиях лекционно-

практической системы обучения математике / Сост. Н.А. Тарасенкова. – Киев, 1991. – 26 с.
45. Методические рекомендации по проведению уроков обобщения и систематизации знаний по теме «Функция» / Сост. М.А. Родионов. – М. : АПН СССР, 1989. – 23 с.
46. О лекционно-семинарском методе обучения математике в старших классах // Алгебра и начала анализа в 9-10 классах : Пособ. для учителя / Л.О. Денищева, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев и др. – М. : Просвещение, 1988. –С. 237-254.
47. О лекционно-семинарском методе преподавания математики / Сост. Г.С. Реминник. – М., 1967. – 31 с.
48. Обучение и развитие: Экспериментально-педагогическое исследование / Под ред. Л.В. Занкова. – М., 1975. – 440 с.
49. Планирование обязательных результатов обучения / Л.О.Денищева, Д.В.Кузнецова, И.А.Лурье и др.; Сост. В.В.Фирсов. – М. : Просвещение, 1989. – 237 с.
50. Римаренко В.Е. Семинарские занятия в школе / В.Е. Римаренко. – К. : Рад. школа, 1981. – 127 с.
51. Саакян С.М. Лекционно-семинарская система преподавания математики / С.М. Саакян // Матем. в шк. – 1987. – №3. – С. 8-11.
52. Ситар І.Д. Лекційно-практична система навчання математики в школі : навч.-метод. посібник для вчителів та керівників загальноосвіт. шкіл, ліцеїв, гімназій, проф.-техн. училищ, серед. спец. навч. закл. / І. Д. Ситар; Закарпатський ін-т методики навчання і виховання, підвищення кваліфікації педагогічних кадрів. – Ужгород : Закарпаття, 1998. – 113 с.
53. Слепкань З.И. Методическая система реализации развивающей функции обучения математике в средней школе: Дис. в форме науч. доклада ... док. пед. наук. / З.И. Слепкань. – М., 1987. – 47 с.
54. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике / З.И. Слепкань. – К. : Рад. школа, 1983. – 192 с.
55. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы уровневой дифференциации при обучении математике в основной школе / З.И. Слепкань // Тез. Всесоюз. науч.-практич. конф. «Дифференциация в обучении математике», г. Кутаиси, 24-27 октября 1989 г. – Кутаиси, 1989. – С. 24-27.
56. Сохор А.М. Объяснение в процессе обучения: Элементы дидактической концепции : [Педагогическая наука – реформе школы]. – М. : Педагогика, 1988. – 128 с.
57. Стрезикозин В.П. Организация процесса обучения в школе / В.П. Стрезикозин; 2-е изд. – М. : Просвещение, 1968. – 254 с.
58. Суховерхова Л.П. Організаційно-педагогічні умови запровадження лекційно-практичної системи викладання математики як засобу активізації пізнавальної діяльності та розвитку творчих здібностей учнів : Метод. розробка / Л.П. Суховерхова : [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://docs.google.com/document/d/1ViKbwLfiGo-7eQ2IKKZQzlFmY6_vk4wpZOq9V4UZ1v8/edit?pli=1
59. Сытина Т.Л. Лекционно-семинарская система преподавания математики / Т.Л. Сытина // Матем. в шк. – 1987. – №3. – С. 14-15.
60. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 343 с.
61. Тарасенкова Н. А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях лекционно-практической системы обучения математике в школе: дис.

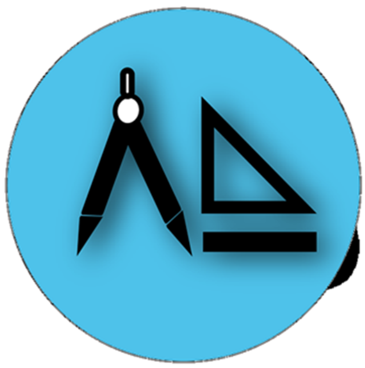
... канд. пед. н. : 13.00.02 / Тарасенкова Нина Анатольевна. – Киев, 1991. – 211 с.

62. Тарасенкова Н. А. Актуализация базовых знаний / Н. А. Тарасенкова // Математика в школе (Россия). – 1994. – № 4. – С. 9-11.
63. Тарасенкова Н. А. Деякі причини невдач використання передового педагогічного досвіду / Н. А. Тарасенкова // Міжвузівська науково-теоретична конференція "Соціально-політичний портрет сучасного молодого спеціаліста", м. Умань, 5-6 травня 1992 р. – Секція II: Психолого-педагогічні основи формування творчої особистості педагога оновленої національної школи: Тези доповідей. – Умань, 1992. – С. 135-137.
64. Тарасенкова Н. А. Использование вопросов в обучении математике / Н. А. Тарасенкова // Математика в школе (Россия). – 2005. – № 4. – С. 59-62.
65. Тарасенкова Н. А. Комплексный подход к изучению учителями-стажерами особенностей лекционно-практической системы обучения математике в школе / Н. А. Тарасенкова // Межвуз. науч. конф. „Повышение эффективности формирования профессионально-педагогических умений и навыков учителя", Тула, 4-7 февраля 1991 г.: Тез. докладов; под общ. ред. д.п.н. проф. А.А. Орлова. – Тула: ТГПИ, 1991. – С. 164-165.
66. Тарасенкова Н. А. Лекційно-практична система і тематичне планування / Н. А. Тарасенкова // Радянська школа. – 1990. – № 10. – С. 61-67.
67. Тарасенкова Н. А. Лекційно-практична система навчання математики в школі / Н. А. Тарасенкова // Міжвузівська науково-практична конференція молодих викладачів та аспірантів „Інтеграція науки у систему підготовки учителів", м. Черкаси, 18-19 квітня 1995 р.: Матеріали конференції. – Ч. 2. – Черкаси, 1995. – С. 296-298.
68. Тарасенкова Н. А. Найти ошибку / Н. А. Тарасенкова // Математика в школе (Россия). – 1997. – №2. – С. 19-23.
69. Тарасенкова Н. А. Некоторые способы организации практической работы / Н. А. Тарасенкова // Математика в школе (Россия). – 1993. – № 1. – С. 27-28.
70. Тарасенкова Н. А. Організація вступного уроку під час вивчення теми «Взаємне розміщення двох площин у просторі» / Н. А. Тарасенкова, З. О. Сердюк // Вісник Черкаського університету : № 11 : серія "Педагогічні науки"]. – Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького, 2016. – С. 100-106.
71. Тарасенкова Н. А. Про сутність лекційно-практичної системи навчання математики в школі / Н. А. Тарасенкова // Міжвузівська науково-теоретична конференція „Педагогічна спадщина Я.А. Коменського і перспективи розвитку народної освіти", Переяслав-Хмельницький, 16-18 квітня 1992 р.: Тези доповідей. – Переяслав-Хмельницький, 1992. – Ч. 1. – С. 234-235.
72. Тарасенкова Н. А. Сущность и уровни активности в познавательной деятельности учащихся при обучении математике / Н. А. Тарасенкова // Евристика та дидактика точних наук: Міжнар. збірн. наук. робіт. – Вип. 10. – Донецьк, 1999. – С. 51-55.
73. Тарасенкова Н. А. Формування умінь майбутнього вчителя математики конструювати диференційовану систему вимог до тематичних результатів навчання / Н. А. Тарасенкова, О. М. Коломієць, Є. І. Боркач // Сучасні інфомаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр. – Вип. 28 / Редкол.: І. А. Зязюн (голова) та ін. – Київ–Вінниця: ТОВ «Планер», 2011. – С. 477-482.
74. Третьякова Г.Ф., Шарова О.П. Есть такой учитель: О системе работы И.В.Чуя / Г.Ф. Третьякова, О.П. Шарова // Матем. в шк. – 1990. – №5. – С. 31-34.
75. Третяк Б.В., Шиян Л.Д. Важно отказаться от шаблонов: О системе работы Л.Т.

Кухарчук / Б.В. Третяк, Л.Д. Шиян // Рад. школа. – 1989. – №10. – С. 72-73.
76. Фещук М.Ф. З досвіду запровадження лекційно-групової форми навчання учнів на уроках фізики / М.Ф. Фещук // Учителі-методисти радять і пропонують : посіб. для вчителя; укл. А.Я. Самардак; за ред. А.І. Бугайова. – К.: Рад. школа, 1990. – С. 86-93.
77. Федоров В.П. Как реализовать содержание образования / В.П. Федоров //Рад. школа. – 1989. – №10. – С. 42-44.
78. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л.М. Фридман. – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.
79. Хмелик В.И. Планирование лекционно-практических занятий в старших классах / В.И. Хмелик // Матем. в шк. – 1988. – №4. – С. 22-23.
80. Хмура А.А. Организация и методика учебных занятий по математике в старших классах средней школы: Дис. ... канд. пед. наук / А.А. Хмура. – К., 1964. – 447 с.
81. Хмура О.О. Урок з математики в школі / О.О. Хмура. – К. : Рад. школа, 1965. – 259 с.
82. Шамова Т.И. Активизация учения школьников / Т.И. Шамова. – М. : Педагогика, 1982. – 208 с.
83. Шаталов В.Ф. За чертой привычного: Ответы учителя-новатора / В.Ф. Шаталов. – Донецк: Донбасс, 1988. – 69 с.
84. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний рівень] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : Зодіак-ЕКО, 2010. – 176 с.
85. Бурда М. І. Геометрія : [підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний та профільний рівні] / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2011. – 320 с.
86. Бурда М. І. Математика : [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів; рівень стандарту] / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2011. – 288 с.

РОЗДІЛ 4

КУРСИ ЗА ВИБОРОМ ДЛЯ ПРОФІЛЬНОГО РІВНЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ



4.1. Цілі організації курсів за вибором з математики у допрофільній підготовці школярів і в старшій профільній школі

Реалізація профільного навчання математики у старшій профільній школі забезпечується додатково системою курсів за вибором. У відповідності до концепції профільного навчання [3] курси за вибором (елективні курси) є обов’язковим складником сучасного навчально-виховного процесу в школі. Вони створюють вагоме підґрунтя для забезпечення особистісно орієнтованого навчання й проходження учнем індивідуальною освітньою траєкторією.

Індивідуальна освітня траєкторія (за Законом України «Про освіту», ухваленим 05.09.2017 [29]) – персональний шлях реалізації особистісного потенціалу здобувача освіти, що формується з урахуванням його здібностей, інтересів, потреб, мотивації, можливостей і досвіду, ґрунтується на виборі здобувачем освіти видів, форм і темпу здобуття освіти, суб’єктів освітньої діяльності та запропонованих ними освітніх програм, навчальних дисциплін і рівня їх складності, методів і засобів навчання.

Курси за вибором [3] – це навчальні курси, що складаються з невеликих за змістом навчальних модулів. Їх навчальний зміст враховує різноманіття інтересів і можливостей учнів, доповнює (поглиблює чи розширює) зміст основного курсу навчальної дисципліни у відповідності до профілю навчання. Курси за вибором поглиблюють та розширюють межі профільних предметів, розвивають і доповнюють (або інтегрують) їхній зміст. Вони створюються за рахунок варіативного компонента змісту освіти і входять до складу як допрофільної підготовки, так і профільного навчання.

4.1.1. Цілі організації курсів за вибором з математики у допрофільній підготовці школярів

Основна ***мета курсів за вибором у допрофільній підготовці учнів*** – сприяти самовизначенню школяра щодо профілю подальшого навчання, зацікавити учня певною галуззю знань, виявити його схильність до вивчення окремих профільних предметів [3].

У зв'язку із прийняттям концепції Нової української школи [30] вважаємо, що серед ***основних завдань курсів за вибором з математики у допрофільній підготовці*** учнів варто виокремити такі:

- забезпечення додаткових навчальних і організаційних умов для реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти;
- сприяння формуванню таких ключових компетентностей учнів основної школи, як: уміння вчитися, ініціативність і підприємливість, екологічна грамотність і здоровий спосіб життя, соціальна та громадянська компетентності;
- поглиблення чи розширення обсягу математичних знань учнів, посилення їхньої практичної і прикладної спрямованості;
- забезпечення правильного вибору школярами профілю подальшого навчання, усвідомлення учнями своїх особистісних переваг чи застережень стосовно майбутньої навчальної діяльності у старшій профільній школі;
- сприяння визначенню напрямів майбутніх професійних устремлінь (інтересів) школярів.

У проектуванні курсів за вибором для учнів основної школи необхідно враховувати такі ***вимоги*** до них:

- варіативний характер;
- достатня (надлишкова) кількість (для забезпечення можливості реального вибору для учнів);
- короткотривалість (для надання можливості школярам протягом навчального року змінити, у разі потреби, кілька курсів за вибором);
- завершеність змісту.

Допрофільні курси за вибором обираються учнями добровільно, вони є короткотривалими (9-17 годин). Науковці (М.Є Терещенко [] та ін.) додатково виділяють такі їхні особливості як варіативність, короткотривалість і не стандартизованість.

Зміст курсів за вибором з математики для допрофільної підготовки не повинен дублювати зміст математичної освіти в основній школі, містити не лише інформацію, що розширює знання з математики, а й знайомить учнів зі способами діяльності, необхідними для успішного опанування програмового матеріалу з різних навчальних дисциплін. Для формування інтересу і позитивної мотивації учнів до вивчення математики через опанування нових аспектів змісту і складніших способів діяльності, зміст математичних курсів за вибором у допрофільній підготовці школярів має містити цікавий пізнавальний і розвивальний матеріал, можливо такий, що виходить за рамки навчальної програми.

Перелік програм математичних курсів за вибором для використання в основній школі схвалено науково-методичною комісією з математики науково-методичної Ради МОН України (наказ МОН України № 1021 від 28.10.2010 р.) [1].

4.1.2. Цілі організації курсів за вибором з математики у старшій профільній школі

Курси за вибором у старшій профільній школі входять до обов'язкової частини навчального плану. Їх можуть обирати учні не тільки відповідно до профілю навчання, а й для поглиблення знань з певних (непрофільних) дисциплін (наприклад, «Психологія» для математичного профілю тощо). Кількість годин на курси за вибором чи факультативи (5 годин на тиждень), визначається навчальним закладом за рахунок додаткових годин.

З огляду на основні положення концепції Нової української школи [30] вважаємо, що в ***старшій профільній школі курси за вибором з математики мають на меті***:

- забезпечити поглиблення чи розширення змісту профільних предметів та забезпечення профільної прикладної і початкової професійної спеціалізації навчання;
- реалізувати додаткові навчальні й організаційні можливості для реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти й формування в учнів ключових компетентностей;

- забезпечити реалізацію інтегрувальних міжпредметних зв'язків у відповідності до наскрізних ліній ключових компетентностей («Екологічна безпека й сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість і фінансова грамотність»), що спрямовані на формування в учнів здатності застосовувати знання й уміння у реальних життєвих ситуаціях;
- сприяти опануванню учнями методології пізнання навколишнього світу;
- забезпечити формування індивідуальної освітньої траєкторії школярів;
- орієнтувати учнів на усвідомлений і відповідальний вибір майбутньої професії;
- моделювати різні види діяльності людини як у межах обраного профілю навчання, так і поза ним.

Елективні курси або курси за вибором, як цілком вмотивовано зазначає А. Каспржак [8], виконують три основні функції: 1) «надбудови» профільного курсу, коли профільний курс стає повною мірою поглибленим; 2) розвивають зміст одного з базових курсів, вивчення якого здійснюється на академічному рівні, що дозволяє підтримувати вивчення суміжних предметів на профільному рівні або отримати додаткову підготовку з певних дисциплін, для проходження зовнішнього оцінювання; 3) сприяють задоволенню пізнавальних потреб та інтересів в різних областях людської діяльності.

На сучасному етапі розбудови вітчизняної шкільної математичної освіти ***курси за вибором з математики у старшій профільній школі*** мають виконувати такі ***функції***:

- гносеологічну (формування уявлень учнів про напрями і можливості доповнення (поглиблення і розширення) змісту курсу математики як профільної навчальної дисципліни);
- праксеологічну (забезпечення максимізації суб'єктного досвіду учнів із виконання різних видів математичної діяльності, формування математичної компетентності як ключової);
- аксіологічну (формування ціннісного ставлення учнів до ідей і методів математики як універсальної мови науки і

техніки, ефективного засобу моделювання й дослідження процесів і явищ навколишнього світу);

- світоглядно-методологічну (формування уявлень учнів про ідеї, методи, принципи, закони побудови й оперування математичними абстракціями з метою дослідження й вивчення явищ навколишнього світу, пізнання закономірностей його функціонування);
- культурологічну (формування уявлень про математику як невід'ємну складову загального культурного суспільного надбання, необхідної умови повноцінного життя людини в сучасному суспільстві);
- розвивальну (сприяння розвиткові учнів й задоволенню їхніх інтересів у різних сферах пізнання, що виходять за межі обраного профілю).

Система організації і проведення курсів за вибором з математики у старшій профільній школі, у межах якої кожен учень протягом навчання у обирає для вивчення не менше 4-5-ти курсів за вибором, актуалізує самостійну творчу роботу учнів через систему індивідуальних, групових чи колективних завдань, спрямованих на розвинення професійних схильностей учнів, їхнього інтересу до застосування математики.

У проектуванні системи курсів за вибором (у тому числі з математики) для старшокласників необхідно забезпечити можливість зміни учнями обраного курсу за вибором. Цим самим забезпечується гнучка система профільного навчання, яка дає змогу обрати кожному старшокласнику індивідуальну освітню траєкторію.

Реалізація функцій курсів вибором з математики у профільному навчанні залежить від наявності в учнів знань, умінь і навичок з математики, необхідних для засвоєння змісту відповідного курсу і мотивації вивчення курсу (задоволення особистих потреб учнів, інтерес до пропонованого змісту і т.ін.)

Навчальні програми курсів за вибором можуть розроблятися навчальними закладами і використовуватися в цих і в інших навчальних закладах після відповідного розгляду предметними комісіями Науково-методичної ради з питань освіти Міністерства освіти і науки України.

У [2] представлені схвалені для використання у загальноосвітніх навчальних закладах (наказ МОН України № 1021 від 28.10.2010 р.) програми факультативів і математичних курсів за вибором в старшій профільній школі. Їх перелік наведено у додатках (додаток 1).

4.2.Типологія курсів за вибором

Проблематику курсів за вибором у допрофільній підготовці й у профільному навчанні школярів науковці й учителі-практики розробляють у різних напрямах:

- визначають принципи й загальні закономірності добору змісту математичних курсів за вибором у допрофільній підготовці та профільному навчанні (М. Бурда, О.Глобін [10], О. Вашуленко [5], Н. Новожилова, М. Фірсова [18], О. Шаран [22], Н. Прокопенко і О. Єргіна [1; 2] та ін.);
- розробляють проблематику проектування елективних курсів (Л. Артемова [14], В. Далінгер [9], Г. Дорофеєв [11], А. Каспржак [8], М. Крутіхіна [11], І. Смірнова [13]);
- розглядають їх роль і місце в структурі профільного навчання (В. Кизенко, Л. Орищак, В. Чернега [4] та ін.);
- обґрунтовують загальні положення щодо змістового наповнення програм курсів та їх експертизи (Д. Єрмаков, Г. Петрова [15], Л. Липова, В. Малишев, П. Замазкіна [20] та ін.);
- обгрунтовують специфіку організації і проведення математичних курсів за вибором у класах різних профілів (М. Симонова [7], О. Шаран [21; 22] та ін.);
- розробляють програми та навчально-методичне забезпечення математичних курсів за вибором у класах різних профілів (Г. Апостолова, О. Морозов, В. Цибко, Г. Лиходєєва, Т. Грицик, О. Єргіна, Д. Требенко, О. Требенко, Л. Канакіна, В. Бевз, Л. Ліпчевський, Ю. Ткач [1; 2] та ін.).

У наукових розвідках (В. Далінгер [9, с.214], В.Кизенко, Л.Орищак, В.Чернега [4] та ін.) виділяють такі типи курсів за вибором: предметні, міжпредметні і такі, що не входять до базового навчального плану.

I. ***Предметні курси***, завданням яких є поглиблення та розширення знань з предметів, що входять до базового плану закладу освіти. Предметні курси за вибором (або предметно-зорієнтовані), є пропедевтичними стосовно профільних навчальних дисциплін, які вивчаються на профільному рівні й надають можливість учневі реалізувати свої здібності та інтереси в обраній освітній галузі, пересвідчитися у власній здатності засвоювати предмети цієї галузі в старшій школі на профільному рівні. Зміст і форма організації предметних курсів мають бути спрямовані на поглиблене вивчення окремих тем.

Своєю чергою, предметні курси за вибором розподіляють на кілька груп:

1) елективні курси підвищеного рівня, спрямовані на поглиблення того чи іншого предмету, що мають як тематичне, так і тимчасове узгодження з цим предметом. Вибір такого елективного курсу дозволить вивчити обрану дисципліну не на профільному, а на поглибленому рівні. У цьому випадку всі розділи курсу поглиблюються більш менш рівномірно;

2) елективні курси, в яких поглиблено вивчаються окремі розділи основного курсу, що входять в обов'язкову програму даного предмету;

3) елективні курси, в яких поглиблено вивчаються окремі розділи основного курсу, що не входять в обов'язкову програму даного предмету;

4) прикладні елективні курси, метою яких є ознайомлення учнів з важливими шляхами і методами застосування знань на практиці, розвиток інтересу до сучасної техніки та виробництва;

5) елективні курси, присвячені вивченню методів пізнання природи;

6) елективні курси, що поглиблюють знання з історії предмету;

7) елективні курси, метою яких є вивчення методів розв'язування певного типу задач, складання і вирішення завдань на основі експерименту.

II. Міжпредметні елективні курси, метою яких є інтеграція знань учнів. Мета таких курсів – інтеграція знань учнів про природу та суспільство. В профільній школі такі курси з математики можуть виконувати подвійну функцію: бути коригувальним курсом для класів гуманітарного та соціально-економічного профілів, бути узагальнюючим курсом для класів природничо-математичного напряму. Міжпредметні курси за вибором допомагають школярам зорієнтуватися в сучасному світі професій, познайомитися зі специфікою різних видів діяльності.

ІІІ. Елективні курси з предметів, що не входять до базового навчального плану. Це курси, присвячені психологічним, соціальним, культурологічним, мистецтвознавчим проблемам.

4.3. Реалізація інтеграційних міжпредметних зв'язків у змісті міжпредметних математичних курсів за вибором

4.3.1. Принципи добору змісту курсів за вибором

Згідно з Концепцією Нової української школи методологічною основою визначення змісту шкільної освіти є загальнолюдські й національні цінності, центрованість на актуальних і перспективних інтересах дитини. Зміст визначається на засадах його фундаменталізації, науковості й системності знань, їх цінності для соціального становлення людини, гуманізації й демократизації шкільної освіти, ідей полікультурності, взаємоповаги між націями і народами, світського характеру школи. У доборі змісту враховуються його доступність, науковість, наступність і перспективність, практичне значення, потенційні можливості для загальнокультурного, наукового, технологічного розвитку особистості, індивідуалізації, диференціації навчання.

Принципи добору змісту курсів за вибором з математики ґрунтуються на принципах добору змісту математичної освіти, сучасних цілях і вимогах до навчальних досягнень учнів профільної школи з математики, особливостях навчально-пізнавальної діяльності старшокласників. Розглянемо деякі з них, спираючись на наукові розвідки О. Вашуленко [5] та ін.

1. Принцип прогностичності й соціальної ефективності. Зміст курсів за вибором, пропонованих для учнів старшої профільної школи, має бути суспільно значущим і особистісно вагомим, актуальним для старшокласників. Він визначається з урахуванням сучасних суспільних потреб щодо результатів математичної підготовки школярів старшої профільної школи, а також тенденцій розвитку науки, виробництва тощо. Перелік пропонованих старшокласникам елективних курсів має задовольняти їхні запити, враховувати індивідуальні можливості й потреби учнів, а також особливості розвитку регіону.

Соціальна ефективність змісту курсу за вибором зумовлена його розвивальним потенціалом стосовно досягнення учнями метапредметних навчальних результатів (наприклад, з оволодінням способів отримання й аналізу інформації, створення презентацій, навичок розв'язання проблем і спільної діяльності). Результативність курсу має співвідноситися із переліком очікуваних навчальних результатів учнів.

2. Принцип науковості. Навчальний зміст курсів за вибором з математики у профільній школі має відповідати рівневі сучасної математичної науки, подаватися відповідно до наукової системи у певній послідовності, зберігати зв'язки понять, тем, розділів усередині кожного курсу, між курсами, а також міжпредметні зв'язки, показувати перспективи розвитку науки, знайомити з історією відкриттів і найціннішим практичним досвідом людства, пов'язаним із математикою.

3. Модульний принцип добору змісту. Зміст курсів за вибором з математики у профільній школі компонується в модулі, що містять завершені порції навчального матеріалу, дібраного і структурованого відповідно до етапів навчального процесу. Набір незалежних за змістом модулів у системі курсів за вибором уможливлює варіативність порядку поглиблення чи розширення змісту профільного предмета. Обсяг змісту курсу має бути розрахований на короткострокове вивчення (17–34 години). При доборі змісту курсу за вибором слід ураховувати відповідність обсягу змісту навчальному часу, відведеному на його засвоєння. Зменшення обсягів курсів з математики можливе за рахунок якісної переробки змісту. Традиційний підхід до конструювання змісту навчальних предметів ґрунтується на логіці базової науки. Інший підхід може полягати у доборі проблем, явищ, процесів, ситуацій, що мають інтеграційний характер.

4. Принцип наступності. Зміст курсів має ґрунтуватися на поняттях, відомих учням з базових предметів, але якісно відрізнятися від змісту шкільної математики. Результатом вивчення елективних курсів має бути, зокрема, розвиток в учнів розумових і особистісних якостей, систематизація уявлень про навколишній світ, здобутих під час вивчення обов'язкових предметів. Зміст курсу за вибором з математики має задавати раціональну послідовність здобуття нових знань – вивчення нового матеріалу має спиратися на щойно пройдений матеріал, який легко відновлюється в пам'яті. Незважаючи на те, що зміст елективних курсів з математики не стандартизується, необхідно, щоб сам курс працював на досягнення цілей освіти, визначених у стандарті.

5. Принцип мотиваційності. Зміст курсу за вибором у процесі його вивчення має допомогти учням оцінити свої потреби й можливості, зробити обґрунтований вибір свого подальшого освітнього шляху після закінчення школи. Назва курсу, його зміст мають бути привабливими для старшокласників, адже його обирають. Бажаною є наявність посилань до позашкільних джерел і досвіду учня. Важливою є методика проведення курсу. Цікавість викладу матеріалу допомагає розкрити зміст складних наукових понять і проблем, ідей і методів математичної науки, активізує розумову і творчу діяльність. Мета вчителя – домогтися розуміння учнями того, що вони підготовлені до роботи над складними проблемами, але для цього потрібні зацікавленість предметом, працьовитість, володіння навичками організації своєї роботи.

6. Принцип доступності. Зміст курсу за вибором з математики має бути доступним для його вивчення школярами відповідної вікової категорії з урахування наявних знань і вмінь. Однак, слід забезпечити матеріал для навчальної діяльності учнів у зоні їхнього найближчого розвитку. Програма курсу за вибором з математики бажано орієнтувати на конкретний профіль навчання. Кількість навчальних годин, відведених на виконання програми курсу, має відповідати можливостям якісного засвоєння знань учнями і отримання запланованих навчальних досягнень. Темп вивчення курсу (розподіл змісту за темами, параграфами) має бути адекватним складності й актуальності навчального матеріалу – на якомусь матеріалі зосередитися, а щось розглянути побіжно.

*7. **Принцип реалізації інтеграційних внутріпредметних і міжпредметних зв'язків.*** Зміст курсів за вибором формується на основі дидактично виваженого доцільного поєднання його структурних елементів (об'єктів засвоєння) у єдину цілісність, що ґрунтоване на органічному взаємопроникненні, природному взаємозв'язку провідних наукових ідей і положень з різних розділів математики, а також зв'язків математичних понять, фактів, способів діяльності, що вивчаються у курсі за вибором, з елементами змісту інших навчальних предметів.

Останній із зазначених принципів є визначальним у контексті методології формування й структурування змісту міжпредметних курсів за вибором. Зупинимося на ньому більш детально.

4.3.2.Інтеграція як методологічна основа для визначення змісту міжпредметних курсів за вибором.

Методологічною основою для формування й структурування змісту міжпредметних курсів за вибором є інтегрований підхід. «Енциклопедія освіти» визначає [23, с. 356] інтегрований підхід в освіті як такий, що веде до інтеграції змісту освіти, тобто доцільне об'єднання його елементів у цілісність, коли результатом можуть бути цілісні знання різних рівнів: про дійсність, про природу, з тієї чи іншої освітньої галузі, предмета, курсу, розділу, теми. Зазначений підхід реалізується під час вивчення інтегрованих курсів чи окремих предметів з освітньої галузі, коли цілісність знань формується завдяки інтеграції їх на основі спільних для всіх предметів понять, застосуванню методів і форм навчання, контролю і корекції навчальних досягнень учнів, що спрямовують навчальний процес на об'єднання знань. Інтегрований підхід означає реалізацію принципу інтеграції в будь-якому компоненті освітнього процесу, забезпечує його цілісність і системність.

Визначаючи інтегрований підхід як методологічну основу для формування змісту міжпредметних курсів за вибором вбачаємо поняття «інтеграції» вихідним поняттям. Розглянемо кілька його трактувань.

У філософії [24, с. 210] інтеграція розуміється як сторона процесу розвитку, що пов'язана з об'єднанням у ціле раніше різнорідних частин і елементів на основі їх взаємозалежності і взаємодоповнюваності. Процеси інтеграції можуть мати місце в межах уже сформованої системи – у цьому випадку вони ведуть до підвищення рівня її цілісності й організованості, так само, як і при виникненні нової системи з раніше незв'язаних елементів. Результатом інтеграції є поява якісно нової інтегративної властивості системи, яка не зводиться до суми властивостей об'єднаних елементів і забезпечує більш високу ефективність функціонування усієї цілісності.

У дидактиці інтеграцію розглядають [25, с.12] як процес встановлення зв'язків між структурними компонентами змісту освіти з метою формування у кожного учня цілісного уявлення про світ, виховання орієнтованої на розвиток і саморозвиток особистості.

У результаті контент-аналізу наукових джерел, де представлено тлумачення поняття «інтеграція» у різних галузях знань, М. Прокоф'єва виокремлює [26] такі сутнісні характеристики цього поняття:

- явище, що має двоєдину природу і виступає, з одного боку, як процес, а з іншого – як результат;
- стан цілісності, що має такі якісні характеристики, як взаємозв'язок, взаємодія і взаємопроникнення, взаємозалежність;
- процес злиття в єдине ціле раніше диференційованих елементів, що приводить до нових якісних і потенційних можливостей цієї цілісності, а також до змін властивостей самих елементів;
- функціональна умова існування й рівноваги системи, а також механізму її розвитку.

К. Крутій розглядає [27] інтеграцію як природний динамічний процес, що охоплює взаємопроникнення та взаємозв'язок елементів, розділів та освітніх напрямів на основі системного і всебічного розкриття процесів і явищ, спрямованих на забезпечення цілісності знань і вмінь.

Педагогічна інтеграція (за В. Безруковою [28]) це – вища форма взаємозв'язку (розділів освіти, етапів освіти), якій притаманна нерозривність компонентів, нова об'єктивність, монооб'єкт, нова структура, нова функція об'єктів, що вступають у зв'язок. Ми поділяємо позицію О. Глобіна, який трактує [25, с. 15] інтеграцію у шкільному навчанні як органічне взаємопроникнення, природний взаємозв'язок навчальних предметів (розділів і тем різних навчальних предметів) на основі провідних наукових та положень із послідовним, глибоким і багатогранним розкриттям процесів і явищ, що вивчаються.

У наукових студіях К. Крутій виділено [27] такі види інтеграції: міжпредметна інтеграція (міждисциплінарна); внутрішньопредметна інтеграція (внутрішньодисциплінарна); інтеграція дидактичних принципів; методична інтеграція (взаємодія методів і прийомів навчання, виховання й організації безпосередньої освітньої діяльності дітей); інтеграція різних видів дитячої діяльності; інтеграція форм організації спільної діяльності дорослого і дітей та самостійної діяльності дошкільників тощо.

М. Лазарєва виокремлює [31] такі напрями інтеграції: міжпредметна (міжвидова) інтеграція, яка виражається в синтезі змісту різних розділів освітньої програми за наявності природних зв'язків між її компонентами. На основі міжпредметної інтеграції, на думку дослідниці, можуть об'єднуватися практично всі розділи будь-якої освітньої програми, проте, існують деякі обмеження. Другий напрям – внутрішньопредметну (внутрішньовидову) інтеграцію – дослідниця визначає на основі взаємозв'язків компонентів змісту всередині кожного розділу освітньої програми дошкільної освіти дітей. Третій напрям синтезує два перших і визначається як міжвидовими, так і внутрішньовидовими зв'язками компонентів змісту. Напрями інтеграції (за М. Лазарєвою) реалізуються на різних рівнях.

Перший, нижчий рівень – рівень міжпредметних зв'язків – корелює, на думку науковця, із розв'язуванням таких дидактичних завдань як актуалізація знань дітей, їх узагальнення та систематизація. Основне джерело інтеграції – загальні структурні елементи змісту освіти, перенесення яких може здійснюватися в напрямку будь-яких розділів освітньої програми для дошкільників. Стосовно змісту дошкільної освіти цей рівень характеризується встановленням взаємозв'язків між окремими заняттями як із одного розділу освітньої програми для дошкільників, так і між заняттями з різних її розділів.

Другий рівень – рівень дидактичного синтезу – є вищим, згідно з М.Лазарєвою, відносно першого. Він характеризується не тільки інтеграцією змісту розділів програми, а й визначається процесуальним синтезом, передбачає утворення інтегрованих форм організації навчання (інтегроване заняття, інтегрований цикл занять). Домінуючим дидактичним завданням на цьому рівні інтеграції є вивчення навчального матеріалу на інтегративній основі, коли зміст має більшу інформативну щільність, відображає не тільки частини й деталі цілого, а й взаємозв'язки між ними, дає більш цілісне уявлення про предмет, об'єкт або явища навколишнього світу.

Третій (найвищий у трактуванні М.Лазарєвої) – рівень цілісності – формує новий розділ освітньої програми для дошкільників, нову предметну область у навчанні дошкільнят. На рівні цілісності має місце повна змістова й процесуальна інтеграція.

Поділяємо позицію дослідниці щодо доцільності виокремлення напрямів і рівнів інтеграції в шкільному навчанні, однак у контексті нашої проблематики вважаємо, що її основою є реалізація міжпредметних та внутріпредметних зв'язків у змісті і процесі навчання, зокрема у процесі навчання курсів за вибором.

Якщо відбувається органічне взаємопроникнення, природний взаємозв'язок провідних наукових ідей та положень з різних розділів, тем однієї навчальної дисципліни (елементи алгебри і математичного аналізу, геометрії), що вивчається в шкільному курсі, говоритимемо про горизонтальну (внутрішньопредметну) інтеграцію. Якщо ж ці процеси пов'язують об'єкти засвоєння з різних навчальних дисциплін, мова йтиме про вертикальну (міжпредметну) інтеграцію. Виокремлення цих напрямів є досить умовним, оскільки у реальному навчальному процесі вони можуть поєднуватися у межах вивчення теми, розділу або на окремому навчальному занятті.

Критеріями для рівневої диференціації напрямів інтеграції, на наш погляд, можуть виступати типи (змістовно-інформаційні; операційно-діяльністні; організаційно-методичні) і обсяг реалізації міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків у навчальному процесі.

Під внутрішньопредметними зв'язками розумітимемо різноманітні відношення взаємної залежності, зумовленості, взаємодії між об'єктами засвоєння в межах одного навчального предмета. Під реалізацією внутрішньопредметних зв'язків – використання цих зв'язків у визначенні цілей, змісту, процесу й результату навчання.

Більш детально зупинимося на міжпредметних інтеграційних зв'язках у навчанні міжпредметних курсів за вибором.

4.3.4. Міжпредметні інтеграційні зв'язки у навчанні міжпредметних курсів за вибором.

Дидактична категорія міжпредметних зв'язків характеризується поліфункціональністю, варіативністю, відносністю її смислових значень. Міжпредметні зв'язки (за З.Слєпкань) – це зв'язки між елементами знань і умінь з різних навчальних предметів, що сприяють формуванню всебічно розвиненої творчої особистості, яка оволоділа системними знаннями, загальнонауковими уміннями та навичками і вміє застосовувати міжпредметне перенесення знань й умінь для розв'язування нових пізнавальних задач. У наукових студіях виділяють світоглядну, загальнопедагогічну, дидактичну, методичну, психологічну складові цього поняття. Міжпредметні зв'язки є визначальними у вирішенні проблеми інтеграції та координації навчання.

Цілком поділяємо позицію О.Глобіна, який підкреслює [25, с. 17], що в єдності методологічної конструктивної і формувальної функцій міжпредметні зв'язки визначають сучасний (інтегрований) підхід до побудови змісту, процесу й результату навчання предмету, зокрема математики, з позицій загальних принципів системності і комплексності.

Науковець визначає [25, с.19] міжпредметні зв'язки як узгоджену конструкцію змісту начального матеріалу двох або більше навчальних предметів, основними характеристиками якої є: 1) смислове співвідношення елементів змісту, що входять до складу навчальних предметів; 2) адекватність методичних прийомів, а також форм організації навчальної діяльності школярів тим предметам, між якими встановлюється зв'язок; 3) забезпечення цілеспрямованого формування в учнів умінь і навичок комплексного використання знань у ході розв'язування навчальних задач.

З позиції цілісності процесу навчання О.Глобін виділяє [25, с.21] такі типи міжпредметних зв'язків:

- змістовно-інформаційні;
- операційно-діяльністні;
- організаційно-методичні.

Кожний з названих типів міжпредметних зв'язків науковець пропонує диференціювати на види.

Змістовно-інформаційні міжпредметні зв'язки (основа поділу – види знань, що входять в інформаційну структуру навчального предмета):

1) наукові – за складом наукових знань: фактологічні (факти), понятійні (поняття), теоретичні (теорії, закони, проблеми);

2) методологічні – за знаннями про пізнання: гносеологічні (філософія і методи науки), історико-наукові (історія науки), семіотичні (мова науки), логічні (логіка, структура наукових теорій);

3) світоглядні – за знаннями про ціннісні орієнтації: діалектико-матеріалістичні, ідейно-політичні, політико-економічні, етичні, естетичні, правові.

До операційно-діяльністного типу міжпредметних зв'язків належать зв'язки між способами навчально-пізнавальної діяльності й уміннями учнів, які формуються в них у навчанні різних предметів. До міжпредметних зв'язків названого типу О.Глобін відносить наступні їх види:

1) практичні, які сприяють виробленню трудових, конструктивно-технічних, обчислювальних, експериментальних, мовних умінь;

2) пізнавальні, які сприяють формуванню загальнонаукових узагальнених умінь розумової, творчої, навчальної, пізнавальної, самоосвітньої діяльності;

3) ціннісно-орієнтаційні, необхідні для вироблення умінь оцінної, комунікативної, художньо-естетичної діяльності, що має велике значення у формуванні світогляду школяра.

Організаційно-методичні міжпредметні зв'язки зумовлені специфікою прийомів, методів, організаційних форм і засобів навчання різних дисциплін. Організаційно-методичні міжпредметні зв'язки О. Глобін розподіляє на види, приймаючи різні основи класифікації.

1. За часом здійснення: хронологічні – зв'язки за послідовністю їх здійснення (попередні (ретроспективні), супутні (синхронні), перспективні (випереджувальні)); хронометричні – зв'язки за тривалістю взаємодії системоутворюючих елементів (локальні, середньої дії, тривалої дії).

2. За широтою здійснення (міжкурсові, внутрішньоциклові, міжциклові).

3. За способами засвоєння зв'язків у різних видах знань (репродуктивні, пошукові, творчі).

4. За способом взаємозв'язку предметів (двобічні, багатосторонні, системні (коли зв'язки математики з іншими предметами реалізуються в методичних системах, націлених на формування систем загальнонаукових понять, на розкриття комплексних навчальних проблем)).

5. За напрямом (прямі, зворотні, відновні).

6. За постійністю реалізації (епізодичні, постійні, систематичні).

7. За рівнем планування навчально-виховного процесу (поурочні, тематичні та ін.).

8. За загальнопредметними уміннями (навчальні, пізнавальні, оцінні, прикладні), які формуються на основі узгоджених між учителями суміжних предметів єдиних підходів до розвитку в учнів умінь навчальної діяльності.

9. За формами організації роботи учнів і вчителя (індивідуальні, групові, колективні, комплексні семінари, екскурсії, інтегровані уроки тощо), в яких реалізуються

комплексні міжпредметні зв'язки, тобто зв'язки різних видів, об'єднані загальною навчальною метою.

Способи інтеграції перелічених вище видів міжпредметних зв'язків у змісті і процесі навчання міжпредметних курсів за вибором будемо диференціювати на основі смислового співвідношення елементів змісту, що входять до різних навчальних предметів. Елементи змісту, що реалізують міжпредметні зв'язки, можуть інтегруватися у єдину структуру різними способами, будучи рівнозначними чи підпорядкованими одне одному.

Виділятимемо, слідом за М. Лазарєвою [31], деякі способи інтеграції елементів змісту, що реалізують міжпредметні зв'язки, які розподілимо на дві групи за критерієм: змістовна рівноправність елементів змісту. До першої групи віднесемо такі способи інтеграції змісту, як: «склеювання», «симбіоз», «розмивання». Їхньою спільною характеристикою є те, що елементи змісту різних навчальних предметів є змістовно рівноправними. До другої групи віднесемо такі способи інтеграції, як: «підпорядкування», «поглинання», «ретрансляційне сполучення». Для них характерною є нерівноправність елементів змісту різних навчальних предметів.

«Склеювання» має місце тоді, коли елементи змісту різних навчальних предметів є змістовно рівноправними, об'єднаними у вивченні певної теми, однак не пов'язані між собою способами навчальної діяльності учнів, вони є різними і залучаються до навчальної діяльності школярів послідовно.

«Симбіоз» характеризується рівноправністю елементів змісту різних навчальних предметів, наявністю певного «інтегративного» ядра, спільного для всіх компонентів, однак є і відносно самостійні елементи змісту, які розв'язують власні, відносно відокремлені навчальні задачі.

«Розмивання» – спосіб інтеграції, коли елементи змісту є рівноправними, однак настільки глибоко взаємопов'язаними, що формують єдину цілісність. Зміст елементів настільки поєднано, що самі вони виокремлюються тільки шляхом наукового логіко-математичного аналізу змісту.

«Підпорядкування» – спосіб інтеграції, коли визначено провідний (стрижневий) елемент змісту і другорядний

(допоміжний). Другорядний елемент відіграє службову роль по відношенню до стрижневого, підвищує ступінь цілісності. Навчальні завдання скеровані на опанування чи застосування провідного елемента змісту за ситуативного звернення до допоміжного елемента (у разі необхідності).

«Ретрансляційне сполучення» – спосіб інтеграції, коли другорядний (допоміжний) елемент змісту відіграє роль «каталізатора» для опанування провідного елемента змісту. Зміст допоміжного елемента є засобом опанування провідного елемента змісту.

«Поглинання» – спосіб інтеграції, коли один елемент змісту (стрижневий) ніби поглинає, асимілює інший (допоміжний). Допоміжний елемент, який підвищує ступінь цілісності будь-якого фрагмента стрижневого змісту, можна виокремити, однак він не розв'язує свої відокремлені навчальні задачі.

Отже, критеріями для рівневої диференціації напрямів інтеграції під час вивчення міжпредметних курсів за вибором, на наш погляд, можуть виступати типи і види міжпредметних зв'язків, а також спосіб інтеграції елементів змісту, що їх реалізують, у процесі вивчення міжпредметних курсів за вибором. Ці проблеми потребують подальших наукових розвідок і експериментальної верифікації.

4.4.Міжпредметний (математика та інформатика) курс за вибором «Основи криптології»

Наведемо приклад реалізації інтеграційних міжпредметних зв'язків у межах міжпредметного (математики та інформатика) курсу за вибором «Основи криптології» для учнів 9-х класів із поглибленим вивченням математики або учнів 10-х класів, які вивчають математику (інформатику) на профільному рівні. Цей курс за вибором схвалений до використання у ЗНЗ рішенням комісії з математики Науково-методичної ради з питань освіти МОН України (лист Інституту модернізації змісту освіти від 22.12.2016 № 2.1/12-Г-901).

Актуальність запровадження даного курсу за вибором. У концепції нової української школи, з-поміж основних детермінант модернізації змісту й організації навчання в основній і старшій профільній школі виокремлено трансформацію змісту освіти на компетентнісних та інтеграційних засадах та створення нових організаційно-педагогічних систем, що розширюють можливості вільного переміщення учнів між різноманітними освітніми та професійними напрямами підготовки. Відповідно, актуалізується такий обов’язковий складник сучасного навчально-виховного процесу в школі як курси за вибором. Оскільки однією із визначальних характеристик навчально-виховного процесу на курсах за вибором є його спрямованість на забезпечення цілісності змісту освіти, універсальності знань, тому зростає роль і значення міжпредметних курсів за вибором.

Зміст міжпредметних курсів за вибором, пов’язаних із математикою, розширює й поглиблює зміст базової математичної освіти, мотивує учнів до опанування нових (прикладних) аспектів математичних знань, до вдосконалення способів математичної діяльності, усвідомлення глибинних зв’язків математики з іншими галузями знань. Однією з таких галузей знань є захист інформації. У школярів доцільно й можливо формувати початкові уявлення про класичні й актуальні способи захисту інформації, а також про можливості їх програмної реалізації з використанням сучасних мов програмування. Зауважимо, що хоча ці проблеми та способи їхнього розв’язування на сучасному етапі розвитку суспільства і комп’ютерних технологій ґрунтовані на досить складних математичних алгоритмах, однак викликають щиру зацікавленість в учнів. Тому вважаємо за доцільне упровадити в навчальний процес основної/профільної школи міжпредметний (математика та інформатика) курс за вибором «Основи криптології».

Теоретичною основою курсу є основи теорії захисту інформації, основи теорії подільності й теорії конгруенцій в кільці цілих чисел (програмовий матеріал 8-го класу з поглибленим вивченням математики), теорії ймовірностей і комбінаторики (програмовий матеріал 9-го класу з поглибленим вивченням математики), основи алгоритмізації та програмування (курс інформатики 8-9 клас). Тому він призначений для учнів 9-х класів із поглибленим вивченням математики або для учнів 10-х класів, які вивчають математику (інформатику) на профільному рівні. Також курс може бути використаний у відповідних профільних групах багатопрофільної школи.

Метою курсу є формування математичної та інформатичної компетентності учнів, забезпечення цілісного й систематизованого засвоєння учнями змісту окремих математичних понять і фактів, що застосовуються у криптології, удосконалення відповідних способів математичної діяльності, а також навичок і вмінь з програмування, розширення математичного світогляду школярів, підвищення їхнього інтересу до математики та її прикладних аспектів.

Досягнення зазначеної мети забезпечується шляхом реалізації таких ***завдань***:

1) формування уявлень про способи захисту інформації, про напрями розвитку сучасної математики та класичних математичних теорій, про взаємозв'язки між окремими розділами математики та про зв'язки сучасної математики з іншими галузями знань;
2) засвоєння учнями теоретичних математичних основ для окремих видів шифрів;
3) формування інтересу до вивчення математичних засад алгоритмів шифрування, поглиблення та розширення їх знань і вмінь з програмування, розвиток алгоритмічного мислення;
4) розвиток творчої активності та індивідуальних здібностей, креативності мислення, інтуїції, пам'яті, уваги.

Розрахований курс за вибором на 17 годин навчального часу.

Орієнтовне календарно-тематичне планування наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ ЗА ВИБОРОМ «ОСНОВИ КРИПТОЛОГІЇ» (17 год.)

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття
Тема 1. Класичні шифри		
1		Перше знайомство з шифрами
2		Поліграмні шифри
3		Комбінації шифрів
4		Криптографічний квест

Тема 2. Афінні шифри		
5		Шифри Цезаря, Віженера, шифр з автоключем
6-7		Лінійні шифри
8-9		Афінні шифри
10		Шифр одноразового блокноту
Тема 3. Асиметричні криптосистеми		
11		Функція Ейлера
12		Теорема Ейлера. Теорема Ферма
13		Шифр RSA
14		Конгруенції другого степеня. Квадратичні лишки і нелишки за простим модулем
15		Конгруенції другого степеня за складеним модулем. Китайська теорема про остачі. Квадратні корені за складеним модулем
16		Шифр Рабіна
17		Підсумковий урок. Криптографічний квест «Золота підкова Черкащини»

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА НАВЧАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ УЧНІВ

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні результати учнів
4	Тема 1. Класичні шифри Основні поняття теорії захисту інформації (криптологія, криптоаналіз, алфавіт, відкритий текст, криптотекст, шифр заміни, шифр перестановки, паліндроми), деякі класичні способи шифрування й дешифрування. Шифри перестановки (шифр частоколу, матричний шифр обходу). Монограмні й поліграмні шифри (шифр простої заміни, шифр «Танцюючих чоловічків», шифр чотирьох квадратів, загальний триграмний шифр). Композиції шифрів (шифр Кардано для квадрата, шифр ADFGVX). *Математична складова* Кількість ключів для різних видів шифрів. *Інформатична складова* Цикли з умовою, цикл з лічильником та вкладені цикли.	Учень (учениця): *Наводить приклади* шифрів перестановки і шифрів заміни. *Пояснює,* що таке криптологія, криптоаналіз, відкритий текст, криптотекст. *Пояснює* постановку задачі в криптології. *Пояснює правила* застосування шифрів простої заміни, шифру частоколу, матричного шифру обходу, шифру чотирьох квадратів, шифру Кардано для квадрата, шифру ADFGVX. *Класифікує* вивчені види шифрів за різними основами. *Записує і обґрунтовує* формули для знаходження кількості можливих ключів для різних шифрів. *Описує* спосіб міркувань для знаходження кількості можливих ключів для різних шифрів. *Розв’язує* вправи на шифрування й дешифрування, що передбачають застосування розглянутих видів шифрів.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні результати учнів
	Одновимірні та двовимірні масиви. Класичні алгоритми для роботи з масивами. Символьні та рядкові величини. Стандартні підпрограми для опрацювання символьних та рядкових величин.	*Пояснює* особливості використання одновимірних і двовимірних масивів, символьних масивів та стандартних алгоритмів опрацювання значень елементів рядкових величин, необхідних для програмної реалізації класичних шифрів. *Обґрунтовує* вибір операторів циклу для програмної реалізації різних шифрів. *Створює* програми (програмні проекти) у середовищі програмування, які реалізують алгоритми шифрування й дешифрування для шифрів простої заміни, частоколу, чотирьох квадратів, матричного обходу і ADFGVX. *Оцінює* достовірність результатів роботи розроблених програм за допомогою власних тестових прикладів.
6	Тема 2. Афінні шифри Шифри Цезаря, Віженера і шифр з авто ключем. Лінійні шифри, афінні шифри. *Шифр одноразового блокноту.* *Математична складова* Конгруенції, властивості конгруенцій, повна система лишків, зведена система лишків за модулем. Число, обернене до даного за модулем Лінійні конгруенції з одним невідомим, розв'язок лінійної конгруенції. Рівносильні конгруенції, елементарні перетворення конгруенцій. Способи розв'язування лінійних конгруенцій (метод «спроб», штучний метод, метод оберненого елемента). Алгоритм Евкліда, лінійне представлення найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел. Система лінійних конгруенцій з одним невідомим. Способи розв'язування систем лінійних конгруенцій з одним невідомим. *Двійкова та шістнадцяткова*	Учень (учениця): *Пояснює, що таке* повна система лишків, зведена система лишків, розв'язок лінійної конгруенції, рівносильні конгруенції, елементарні перетворення конгруенцій, система лінійних конгруенцій, наводить відповідні приклади. *Формулює* означення лінійної конгруенції, властивості конгруенцій. *Називає* елементарні перетворення конгруенцій. *Пояснює правила* застосування шифру Цезаря, шифру Віженера, шифру з автоключем, лінійного шифру, афінного шифру для шифрування відкритих повідомлень та правила дешифрування криптотекстів, що отримані за допомогою вказаних шифрів, застосування алгоритму Евкліда для знаходження НСД двох натуральних чисел, числа, оберненого до даного за модулем, різних способів для розв'язування лінійних конгруенцій (методу «спроб», штучного методу, методу оберненого елемента). *Характеризує* аналогії у способах розв'язування лінійних рівнянь і лінійних конгруенцій, аналогії у дослідженні лінійних рівнянь і лінійних конгруенцій. *Обґрунтовує* спосіб знаходження НСД двох натуральних чисел та числа,

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні результати учнів
	системи числення. *Інформатична складова* Рекурсивні алгоритми. Допоміжні алгоритми, підпрограми, формальні та фактичні параметри. *Використання текстових файлів для введення та виведення даних.*	оберненого до даного за модулем, за допомогою алгоритму Евкліда. *Досліджує* кількість розв'язків лінійної конгруенції. *Розв'язує вправи, що передбачають:* шифрування й дешифрування повідомлень за допомогою шифрів Цезаря і Віженера, шифру з автоключем, лінійного шифру, афінного шифру, знаходження ключа для шифру Віженера за відомими відкритим повідомленням і криптотекстом; знаходження повної і зведеної системи лишків за модулем, лінійного представлення НСД двох натуральних чисел, числа, оберненого до даного за модулем; розв'язування лінійних конгруенцій методом «спроб», штучним методом, методом оберненого елемента, систем лінійних конгруенцій з одним і двома невідомими. *Виконує переведення з десяткової системи числення в двійкову й шістнадцяткову та навпаки.* *Пояснює* необхідність та доцільність використання рекурсії при реалізації розширеного алгоритму Евкліда, *способи організації виведення даних у текстовий файл при реалізації шифру одноразового блокноту*. *Створює* програми (програмні проекти) у середовищі програмування, які реалізують алгоритми шифрування й дешифрування для шифрів Цезаря, Віженера та афінного шифру і *шифру одноразового блокноту*. *Оцінює* достовірність результатів роботи розроблених програм за допомогою тестових прикладів
7	Тема 3. Асиметричні криптосистеми Криптосистема з відкритим ключем. Криптосистема RSA. Шифр Рабіна. *Математична складова* Канонічний розклад натурального числа. Функція Ейлера. Конгруенції другого степеня за простим модулем та їхні розв'язки. Конгруенції другого степеня за	Учень (учениця): *Наводить приклади* канонічного розкладу натурального числа, конгруенції другого степеня за простим (складеним) модулем, квадратичних лишків (нелишків) за простим модулем. *Пояснює, що таке* канонічний розклад натурального числа, функція Ейлера, квадратичні лишки і нелишки за простим модулем, конгруенції другого степеня за простим (складеним) модулем, розв'язки

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні результати учнів
	складеним модулем та їхні розв'язки. Квадратичні лишки і нелишки за простим модулем, їхні властивості. Квадратні корені за простим і складеним модулем. Теорема Ейлера, теорема Ферма (мала). Теорема про кількість лишків і нелишків у зведеній системі лишків. Критерій Ейлера для квадратичних лишків за простим модулем. Теорема про кількість розв'язків конгруенції другого степеня за простим модулем. Китайська теорема про остачі. *Інформатична складова* Цілочислові типи даних (для зберігання великих чисел), логічний тип. Генератори випадкових чисел. Способи представлення алгоритмів.	конгруенції другого степеня за простим (складеним) модулем, квадратні корені за простим модулем. *Пояснює способи* розв'язування конгруенцій другого степеня за простим і складеним модулем. *Описує,* як застосовувати критерій Ейлера для встановлення кількості розв'язків конгруенції другого степеня за простим модулем. *Формулює* теореми Ейлера і Ферма, критерій Ейлера для лишків і нелишків за простим модулем, китайську теорему про остачі. *Записує* формулу для обчислення функції Ейлера для довільного натурального числа, критерій Ейлера для квадратичних лишків за простим модулем. *Розв'язує вправи*, що передбачають: знаходження канонічного розкладу натурального числа, значення функції Ейлера для натурального числа, знаходження натурального числа за значенням функції Ейлера, використання теореми Ейлера для визначення остачі від ділення степеня з великим показником на деяке натуральне число, генерування ключів шифру RSA, шифрування й дешифрування за допомогою системи RSA, застосування різних способів для розв'язування конгруенцій другого степеня за простим модулем (спосіб спроб, зведення конгруенції до двочленного виду), дослідження кількості розв'язків конгруенцій другого степеня за простим модулем за допомогою критерію Ейлера, розв'язування конгруенцій другого степеня за складеним модулем із використанням китайської теореми про остачі, знаходження квадратних коренів за простим (складеним) модулем, шифрування повідомлень за допомогою криптосистеми Рабіна, дешифрування криптотектів, зашифрованих шифром Рабіна, за відомим відкритим ключем. *Називає* цілочислові типи даних для зберігання великих чисел. *Наводить* функції для генерації

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні результати учнів
		випадкових цілих чисел. *Використовує* способи представлення алгоритмів у вигляді псевдокоду та блок-схем *Створює* програми (програмні проекти) у середовищі програмування, які реалізують алгоритми шифрування й дешифрування у криптосистемах RSA і Рабіна, алгоритм обчислення значення функції Ейлера, алгоритми пошуку та генерації великих простих чисел, тест простоти (шляхом перебору дільників) і ймовірнісний тест Ферма. *Оцінює* достовірність результатів роботи розроблених програм

РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖПРЕДМЕТНИХ ІНТЕГРАЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У КУРСІ ЗА ВИБОРОМ «ОСНОВИ КРИПТОЛОГІЇ»

У процесі вивчення курсу за вибором передбачено формування у школярів уявлень про основні класичні способи шифрування й дешифрування за допомогою окремих шифрів, як от: шифр частоколу, чотирьох квадратів, матричний шифр обходу, шифр Кардано для квадрата й шестикутника, шифр ADFGVX, та їх комбінацій, а також знань щодо їх математичних основ.

Передбачено формування уявлень учнів про такі симетричні шифри, як шифри зсуву (Цезаря, Віженера, шифр з автоключем) та афінні монограмні, зокрема лінійні шифри, розгляд відповідних математичних основ.

Окрім уявлень про симетричні криптосистеми передбачено формування уявлень школярів про асиметричні криптосистеми на прикладі шифру RSA та шифру Рабіна, розгляд математичних основ цих шифрів, формування вмінь учнів виконувати шифрування й дешифрування повідомлень за допомогою цих шифрів та аналізувати надійність шифрів за допомогою відомого їм математичного апарату.

Готуючись до перших занять учителю доцільно провести певну пропедевтичну роботу, виокремивши інтеграційні міжпредметні зв'язки у математичній і інформативній складовій змісту курсу. Крім того, важливо виокремити елементи змісту криптології, з якими необхідно буде ознайомити учнів. Зокрема доцільно попередньо ознайомити учнів зі змістом тих основних понять, які є загальноприйнятими в криптології. Варто зауважити, що криптологія – наука про захист інформації шляхом її перетворення. Ця галузь знань поєднує два напрямки – криптографію й криптоаналіз. Криптографія займається розробкою методів перетворення інформації з метою приховання її змісту, криптоаналіз – дослідженням можливості розшифровування інформації, пошуком слабких місць та доведення стійкості шифрів. Основні напрями використання криптографічних методів – передача конфіденційної інформації, встановлення цілісності переданих повідомлень.

На першому етапі вивчення курсу для успішного засвоєння процедури шифрування й дешифрування за допомогою шифрів частоколу, чотирьох квадратів, Скітала, матричного шифру обходу чи шифру Кардано та ADFGVX, залучення додаткових математичних відомостей не є необхідним. Для мотивації навчально-пізнавальної діяльності школярів на цьому етапі навчання вчителю доцільно обирати задачі, що уможливлюють створення проблемних ситуацій, зокрема послуговуючись прикладами з художніх творів. Наприклад, пригадати з учнями відоме оповідання Артура Конан Дойля «Танцюючі чоловічки». Школярі разом із учителем прослідковують за ходом міркувань автора оповідання, у результаті яких встановлюють зміст зашифрованих повідомлень. У такий спосіб у фоновому режимі формуються основні поняття теорії захисту інформації (алфавіт, відкритий текст, криптотекст, шифр заміни, шифр перестановки), та уявлення учнів про окремі класичні способи шифрування відкритого тексту й дешифрування криптотексту.

Приклади і вправи для закріплення доцільно добирати у такий спосіб, щоб поступово формувати в учнів уявлення про шифри заміни й перестановки. Серед шифрів заміни пропонуємо виокремити монограмні й поліграмні шифри. Прикладами монограмних шифрів є шифр «Танцюючих чоловічків» та інші шифри простої заміни, поліграмних – біграмний (шифр чотирьох квадратів) та триграмний (загальний триграмний шифр) шифри.

Із шифрами перестановки доцільно знайомити учнів на прикладах шифру частоколу й матричного шифру обходу. Вагоме додаткове навчальне навантаження цих видів шифрів вбачаємо в тому, що під час дослідження кількості їхніх ключів школярі застосовують знання елементів комбінаторики. Реалізувати при цьому доцільно конкретно-індуктивну схему навчання: від розгляду окремих випадків, а саме, кількості можливих ключів, наприклад, для шифру Кардано розміром 2×2, 4×4, 6×6, 8×8, до узагальнень, а саме, визначення кількості ключів для решітки Кардано розміром $k \times k$. На етапі узагальнення можливо запропонувати учням встановити відповідність між шифрами (шифр простої заміни над n-символьним алфавітом (де ключ – це перестановка символів алфавіту), матричний шифр обходу над n-символьним алфавітом з k-символьним ключем (літери у ключовому слові можуть повторюватися), шифр Кардано з квадратною решіткою $n \times n$, де n – парне число, шифр Кардано з квадратною решіткою $n \times n$, де n – непарне число, шифр частоколу, при умові, що ним шифрується повідомлення довжини n, шифр 4-х квадратів (над алфавітом із 25 символів), шифр ADFGVX з n-символьним ключовим словом (літери у слові не можуть повторюватися, і в алфавіті 36 символів, що більше ніж n)) та формулами, що описують кількість можливих ключів до них.

У подальшому пропонуємо зосередитися на вивченні симетричних і асиметричних шифрів. Особливості симетричних криптосистем пропонуємо розглядати на прикладі афінних шифрів. Вивчення *афінних шифрів* доцільно організовувати у такій послідовності:

1) мотивувати введення лінійного шифру;

2) мотивувати вивчення лінійних конгруенцій для успішного дешифрування криптотекстів, що зашифровані лінійним шифром;

3) ввести основні поняття, факти та способи діяльності стосовно розв'язування лінійних конгруенцій;

4) закріпити вміння учнів застосовувати метод спроб і штучний метод у розв'язуванні лінійних конгруенцій, сформувати уявлення про лінійне представлення найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел і використання

алгоритму Евкліда для знаходження лінійного представлення НСД двох натуральних чисел та знаходження числа, оберненого до даного за модулем, довести відповідні математичні факти;

5) сформувати вміння учнів застосовувати теоретичні знання щодо властивостей та способів розв’язування лінійних конгруенцій для дешифрування повідомлень, зашифрованих лінійним шифром;

6) мотивувати вивчення афінних шифрів як композиції лінійного шифру та шифру зсуву;

7) розглянути приклади на дешифрування криптотекстів, що зашифровані афінним шифром із невідомим ключем.

На етапі, коли вивчаються афінні шифри, зі школярами необхідно актуалізувати основні поняття теорії подільності та теорії конгруенцій в кільці цілих чисел, з якими вони знайомилися у 8-му класі. Оскільки дешифрування криптотекстів, що отримані за допомогою афінних шифрів, спирається на поняття лінійної конгруенції та її розв’язку, на алгоритм встановлення наявності й кількості розв’язків лінійних конгруенцій та теорему про лінійне представлення найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел, на опановані способи розв’язування лінійних конгруенцій тому на наступному етапі цей навчальний матеріал необхідно додатково розглянути на заняттях курсу за вибором. Вагоме значення мають сформовані вміння учнів застосовувати алгоритм Евкліда для знаходження класу лишків, що є оберненим до даного за модулем, застосовувати спосіб перебору, штучний спосіб та спосіб оберненого класу лишків у розв’язуванні лінійних конгруенцій та їх систем.

Перехід до вивчення *асиметричних криптосистем* пропонуємо здійснити за такою методичною схемою:

1) систематизувати знання учнів про прості і складені натуральні числа, повторити теорему про канонічне представлення складеного числа;

2) актуалізувати поняття функції Ейлера, довести її мультиплікативність та деякі її властивості для простих натуральних чисел, вивести формулу для знаходження значення функції Ейлера для довільного натурального числа, додаткову увагу зосередити на формуванні вмінь учнів її застосовувати;

3) навести формулювання й доведення теорем Ейлера та Ферма, закріпити їх і сформувати вміння учнів застосовувати теореми Ейлера і Ферма для знаходження розв'язків лінійних конгруенцій;

4) сформувати уявлення учнів про шифр RSA, навести приклади застосування процедури шифрування RSA;

5) ввести поняття конгруенції другого степеня за простим модулем та їхніх розв'язків, квадратичних лишків і нелишків за простим модулем, розглянути окремі їхні властивості, виявити аналогії та відмінності у розв'язуванні квадратних рівнянь і конгруенцій другого степеня за простим модулем, сформувати вміння учнів встановлювати наявність розв'язків та розв'язувати найпростіші конгруенції другого степеня виділенням повного квадрата;

6) розглянути конгруенції другого степеня за складеним модулем, довести китайську теорему про остачі, розглянути особливості її застосування в ході розв'язування конгруенцій другого степеня за складеним модулем;

7) сформувати уявлення учнів про шифрування за допомогою шифру Рабіна.

Наведемо приклади за посібником [32] авторів І. Акуленко, Н. Красношлик, Ю. Лещенко.

Оскільки сучасний етап розвитку криптографії пов'язують із винайденням і запровадження концепції шифрування з відкритим ключем, тому вважаємо за доцільне у курсі за вибором особливу увагу приділити цій концепції і, відповідно, асиметричним криптосистемам. Концепцію шифрування з відкритим ключем було запропоновано Уїтфілдом Діффі (Whitfield Diffie народ. 1944 р. у США) та Мартіном Хеллманом (Martin Hellman народ. 1945 р. у США) і, незалежно, Ральфом Меркле (Ralph Merkle). В основу цієї концепції покладено ідею Клода Шеннона (Claude Shannon, 1916–2001 р.р., – американський математик та електротехнік, один із творців математичної теорії інформації, значною мірою визначив результатами своїх досліджень розвиток загальної теорії дискретних автоматів). Клод Шеннон запропонував будувати (генерувати) шифри у такий спосіб, щоб завдання щодо його зламу було еквівалентне до певної математичної задачі, що потребує недосяжного для сучасних комп'ютерів обсягу обчислень. В основі концепції шифрування з відкритим ключем є те, що процедура шифрування є загальнодоступною, а от дешифрування надзвичайно складним, що спричинено відсутністю ефективного алгоритму для цієї процедури.

Нині асиметричне шифрування застосовується для ідентифікації та автентифікації користувачів, захисту каналів передавання даних від нав'язування помилкових даних, захисту електронних документів від копіювання та підробки.

У криптографічній системі з відкритим ключем кожен учасник користується як відкритим ключем (public key), так і секретним ключем (secret key), ці ключі учасники створюють (генерують) самостійно. Секретний ключ кожен тримає в секреті, а відкритий ключ є у вільному доступі. Для генерування ключів застосовують математичний апарат теорії чисел: функцію Ейлера, теореми Ферма, Ейлера, китайську теорему про остачі. Оскільки ці поняття й факти або не розглядалися в курсі математики поглибленого рівня, або розглядалися частково у 8 класі (теорема Ферма та її доведення), вважаємо за необхідне більш детально зупинитися на математичних основах асиметричного шифрування, що зумовило вибір теми «Функція Ейлера» для заняття №11 курсу за вибором.

Мотивацію вивчення теми пропонуємо провести у вигляді короткого «журналістського розслідування» щодо витоків сучасних асиметричних криптосистем (наприклад, системи RSA). Для того, щоб з ознайомитися з такими системами треба розглянути необхідний мінімум з теорії чисел: пригадати теорему Ферма, познайомитися з функцією Ейлера й формулою, за якою знаходять її значення, теоремою Ейлера, китайською теоремою про остачі.

Введення нового матеріалу (пропонуємо здійснити абстрактно-дедуктивним методом, а повторення й актуалізацію необхідних відомостей реалізувати під час закріплення нового матеріалу).

Повідомлення вчителя. У теорії чисел розглядають кілька функцій, що пов'язані з дільниками натурального числа. Такими функціями є функція $\tau(n)$, що визначає кількість всіх додатних дільників натурального *n*, функція $\sigma(n)$, що визначає суму таких дільників *n,* і функція $\varphi(n)$, що визначає кількість невід'ємних цілих чисел, менших від n і взаємно простих з n. Остання з цих функцій названа на честь видатного математика Л. Ейлера, який використав її у 1760 році в своїх роботах з теорії чисел. Для асиметричних криптосистем важливою є саме функція Ейлера, тому на ній доцільно зупинитися детальніше.

Означення 1. Функція Ейлера $\varphi(n)$, визначається для всіх натуральних n і показує кількість невід'ємних цілих чисел, менших від n і взаємно простих з n; при цьому $\varphi(1) = 1$.

Для невеликих значень натуральних n значення функції $\varphi(n)$ можна знайти простим підрахунком кількості невід'ємних цілих чисел, менших від n і взаємно простих з n, наприклад: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(9) = 6$ і т.д.

Але такий спосіб знаходження $\varphi(n)$, очевидно, стає дуже громіздким для великих чисел. Тому бажано б мати формулу для знаходження значень $\varphi(n)$. Для її знаходження зупинимося на деяких властивостях цієї функції.

Теорема 1. *Для будь-яких взаємно простих натуральних чисел m і n виконується рівність* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. (Ця властивість називається *мультиплікативністю* функції Ейлера)

Доведення. Доведення проведемо конструктивно. Нехай m і n взаємно прості натуральні числа. Знайдемо, скільки є чисел менших від добутку mn і взаємно простих з ним. Випишемо натуральні числа від 1 до mn у таблицю (таблиця 4.2).

Таблиця 4.2

1	2	3	…	m
$m+1$	$m+2$	$m+3$	…	$2m$
$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	…	$3m$
…	…	…	…	…
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	$(n-1)m+3$	…	nm

Число a є взаємно простим із добутком mn тоді, і тільки тоді, коли НСД$(a;n) = 1$ і НСД$(a;m) = 1$. Знайдемо спочатку в таблиці числа, що взаємно прості з m. В першому рядку, де всі числа від 1 до m, взаємно простих з m рівно $\varphi(m)$ штук. Вони утворюють зведену систему лишків (ЗСЛ) за модулем m. Числа, розміщені в кожному стовпчику, належать до одного і того ж самого класу лишків за модулем m. Тому, якщо число b взаємно просте з m, то і будь-яке число зі стовпчика, що містить елемент b, також взаємно просте з модулем. Відтак, у кожному рядку є рівно $\varphi(m)$ чисел, взаємно простих з m. Позначимо їх b_i. Випишемо стовпчики із числами b_i, де НСД$(b_i; m) = 1$ (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3

b_1	b_2	b_3	…	$b_{\varphi(m)}$
$m + b_1$	$m + b_2$	$m + b_3$	…	$m + b_{\varphi(m)}$
$2m + b_1$	$2m + b_2$	$2m + b_3$	…	$2m + b_{\varphi(m)}$
…	…	…	…	…
$(n-1)m + b_1$	$(n-1)m + b_2$	$(n-1)m + b_3$	…	$(n-1)m + b_{\varphi(m)}$

Тепер знайдемо, скільки у кожному з отриманих стовпчиків є чисел, що є взаємно простими з *n*. Розглянемо довільний стовпчик:

b_i
$m + b_i$
$2m + b_i$
…
$(n-1)m + b_i$

Ми маємо *n* різних чисел. Загальний вигляд цих чисел $mx + b$, *x* набуває послідовно значень від 0 до $(n-1)$, іншими словами, *x* «пробігає» повну систему лишків (ПСЛ). Доведемо, що всі вони дають різні остачі при діленні на *n*, тобто, лінійний вираз $mx + b$ також «пробігає» (ПСЛ). Скористаємося ознакою повної системи лишків (вона має містити рівно *n* елементів й усі вони мають бути попарно не конгруентні за модулем).

Отримана система складається з *n* чисел, оскільки *x* у виразі $mx + b$ набуває *n* різних значень. Доведемо, що всі ці *n* отриманих значень не конгруентні між собою за модулем n. Припустимо супротивне. Нехай x_1 та x_2 не конгруентні за модулем *n*, але $mx_1 + b \equiv mx_2 + b \pmod n$. Але оскільки (m, n)

$= 1$, тому $x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod}\, n)$. Отримали суперечність. Отже, кожен із стовпчиків є повною системою лишків за модулем *n*. Відтак, кожен із них містить рівно $\varphi(n)$ чисел взаємно простих з *n*. Загалом чисел у таблиці 2 буде $\varphi(n) \cdot \varphi(m)$. Усі вони є меншими за добуток mn і взаємно простими з цим добутком, тобто, значення функції Ейлера для добутку mn визначається рівністю $\varphi(mn) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

Очевидно, що це твердження можна узагальнити на довільну кількість співмножників, тобто $\varphi(p_1 p_2 \dots p_k) = \varphi(p_1)\varphi(p_2) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k)$.

Наступну властивість функції Ейлера можна довести у ході евристичної бесіди з учнями, скеровуючи їх на пошук способу доведення.

Теорема 2. *Якщо p – просте число і $k \in N$ то*

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Доведення виконують учні, даючи відповіді на запитання вчителя.

1) Запишіть у вигляді таблиці, що містить p стовпчиків, усі натуральні числа від 1 до p^k.

Очікувана відповідь учнів (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4

1	2	3	…	p
$p+1$	$p+2$	$p+3$	…	$2p$
$2p+1$	$2p+2$	$2p+3$	…	$3p$
…	…	…	…	…
…	…	…	…	p^2
…	…	…	…	…
…	…	…	…	p^k

2) Визначте, які числа в таблиці взаємно прості з p і скільки їх.

Очікувані міркування учнів. Числа з останнього стовпчика діляться на p, тому вони не є взаємно простими із числом *p,* Всі інші числа таблиці не діляться на число *p,* а, отже, взаємно прості з ним.

3) Зробіть висновок про кількість чисел, що є взаємно простими з числом p^k.

Очікувані міркування учнів. Числа з останнього стовпчика не є взаємно простими з числом *p,* а відтак, не є взаємно простими з числом p^k. Всі інші числа таблиці взаємно прості з p, тому вони взаємно прості з p^k. Оскільки чисел у таблиці p^k, а в останньому стовпчику їх p^{k-1}, тому чисел, що не перевищують p^k і є взаємно простими з ним буде $p^k - p^{k-1}$.

4) Зробіть висновок щодо значення функції Ейлера $\varphi(p^k)$.

Очікувані міркування учнів. Отже,

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Пропонуємо учням дати відповіді на запитання, а також сформулювати й записати відповідні отримані твердження.

1) Чому дорівнює значення функції Ейлера, $\varphi(p)$, якщо p – просте число?

Очікувані міркування учнів. Якщо p – просте число, то за теоремою 11.2 можна записати рівність:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Якщо $k = 1$, то маємо $\varphi(p) = p - 1$.

Наслідок 1. *(формулюють учні самостійно) Якщо p – просте число, то $\varphi(p) = p - 1$.*

2) Як обчислити функцію Ейлера для натурального числа $n > 1$, що задано в канонічному вигляді $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$?

Очікувані міркування учнів. Оскільки функція Ейлера мультиплікативна, то згідно зауваження до попередньої теореми, виконується рівність:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}\right) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \varphi(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_s^{k_s}) =$$
$$= p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{k_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) =$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Наслідок 2. *(формулюють учні самостійно) Якщо натуральне число $n > 1$ задано в канонічному вигляді $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, то*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Для закріплення й застосування нового матеріалу пропонуємо учням дати відповіді на запитання:

1) які поняття й факти було використано у доведеннях теорем і наслідків з них;
2) які числа називають взаємно простими;
3) яка функція визначає кількість невід'ємних цілих чисел, менших від n і взаємно простих з n;
4) яким є значення $\varphi(1)$, обґрунтуйте;
5) що називають канонічним розкладом натурального числа;
6) яка властивість функції Ейлера визначає її мультиплікативність;
7) яку систему чисел називають повною системою лишків, зведеною системою лишків;
8) скільки чисел містить ПСЛ, ЗСЛ;
9) сформулюйте правило-орієнтир для знаходження значення $\varphi(n)$, коли: а) n – просте число, б) n – довільне натуральне число і $n > 1$.

Наступні тести призначені для *усного* виконання.

1. Яке з тверджень НЕ є правильним?

I. Функція Ейлера $\varphi(n)$ визначена для всіх натуральних чисел і визначає кількість натуральних чисел, взаємно простих з n.

II. Функція Ейлера мультиплікативна, тобто, $\varphi(mn) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

III. Кількість чисел у ЗСЛ за модулем *n* дорівнює $\varphi(n)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
жодне	лише I і III	лише II і III	лише I і II	лише I

2. Якщо $\frac{a}{b} > 0$, то правильних нескоротних дробів при фіксованому знаменнику b буде:

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\varphi(a)$	$\varphi(b)$	$\varphi(a) + \varphi(b)$	$\varphi(a) \cdot \varphi(b)$	∞

3. Якщо $\frac{a}{b} > 0$ і $0 < b \leq n$, то правильних нескоротних дробів буде:

А	Б	В	Г	Д
$\varphi(a)$	$\varphi(b)$	$\varphi(a) + \varphi(b)$	$\varphi(a) \cdot \varphi(b)$	$\varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n)$

4. Якщо $n = 17$, тоді $\varphi(n)$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
15	16	17	19	20

5. Якщо n – просте число і $n > 3$, тоді $\varphi(n)$ можна подати формулою:

А	Б	В	Г	Д
$3k + 1,$ $k \in \mathbb{Z}_+$	$3k - 1,$ $k \in \mathbb{Z}_+$	$2k,$ $k \in \mathbb{Z}_+$	$2k - 1,$ $k \in \mathbb{Z}_+$	Інша відповідь

6. Знайдіть канонічний розклад числа 144 і оберіть правильну відповідь:

А	Б	В	Г	Д
$2^3 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3$

7. Встановіть відповідність між поняттями 1) – 4) і фактами А) – Г), у записі яких заповніть пропуски:

1) Лінійне представлення НСД двох чисел	А) НСД$(a;\ b)$ =1 тоді, і тільки тоді, коли існують такі цілі числа *u, v,* що виконується рівність …
2) Функція Ейлера	Б) Запис $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, де …
3) Числа a і b є взаємно простими	В) Для будь-яких двох … чисел a і b ми можемо знайти … v і u, що матиме місце рівність: $au + bv =$ НСД(a, b)
4) Канонічний розклад натурального числа n	Г) Якщо … і $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ – канонічний розклад числа n, то $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$.

Вправи для письмового виконання.

Вправа 3. Знайдіть канонічний розклад чисел:

а) 1001; б) 31; в) 339; г) 12600.

Вправа 4. Знайдіть $\varphi\ (n)$ для чисел: а) 26; б) 375; в) 360.

Розв'язання. Знайдемо канонічний розклад чисел і використаємо формулу, виведену в наслідку 2:

а) $26 = 2 \cdot 13$; $\varphi(26) = \varphi(2) \cdot \varphi(13) = 1 \cdot 12 = 12$.

б) $325 = 3 \cdot 5^3$; $\varphi(325) = \varphi(3) \cdot \varphi(5^3) = 2 \cdot 5^3 \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 200$.

в) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $\varphi(360) = 360(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 96$.

Вправа 5. Розв'яжіть рівняння:
а) $\varphi(10^x) = 4000$; б) $\varphi(6^x) = 72$.

Розв'язання.

а) $\varphi(10^x) = 10^x\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10^x \cdot \frac{2}{5} = 4000,\ 10^x = 1000$. Звідки $x = 3$;

б) $\varphi(6^x) = 6^x\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6^x \cdot \frac{1}{3} = 72$. Звідки $6^x = 246$ і $x = 3$.

Вправа 6. Знайдіть натуральне число *n*, якщо:

а) $n = 2^s \cdot 3^m \cdot 5^k, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}, \varphi\ (n) = 3600$;

Розв'язання.

а) $\varphi(n) = \varphi(2^s \cdot 3^m \cdot 5^k) =$

$$= 2^s \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= 2^s \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2^{s+2} \cdot 3^{m-1} \cdot 5^{k-1}.$$

За умовою $\varphi\ (n) = 3600$. Знайдемо канонічний розклад числа 3600: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Отримали рівність: $2^{s+2} \cdot 3^{m-1} \cdot 5^{k-1} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Унаслідок єдиності канонічного розкладу натурального числа можемо записати систему

$$\begin{cases} s + 2 = 4; \\ m - 1 = 2; \\ k - 1 = 2; \end{cases} \text{звідки} \begin{cases} s = 2; \\ m = 3; \\ k = 3. \end{cases}$$

Отже, $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 13500$.

Підсумки уроку (пропонуємо провести за допомогою «Сходинок успіху» (рис. 4.1). У ході фронтальної бесіди учні здійснюють рефлексію змісту, процесу й результату своєї роботи під час уроку)

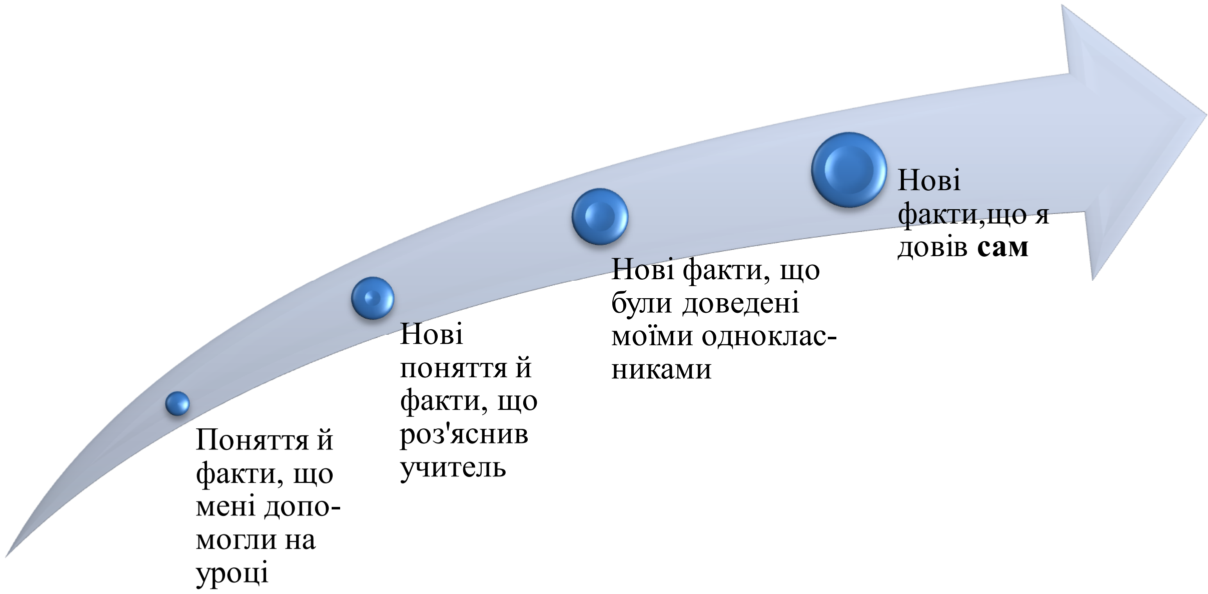


Рис. 4.1. Сходинки успіху

Курс за вибором «Основи криптології» має значний потенціал у інтегрованому навчанні математики та інформатики учнів основної школи на основі реалізації міждисциплінарних зв’язків між цими навчальними дисциплінами.

Реалізувати *інформатичну* складову курсу за вибором доцільно шляхом розв’язування вправ з програмування. Такі вправи сприяють розвитку в учнів логічного й алгоритмічного мислення, формуванню вміння використовувати аналіз та синтез, робити висновки та узагальнення. Ці вправи мають бути різного рівня складності за своїм змістом, кількістю використаних відомих теоретичних математичних і інформатичних понять, фактів.

Окремий напрям диференціації вправ – необхідність пошуку додаткової інформації у мережі Internet у ході їхнього розв’язування. Окрім того, доцільно диференціювати допомогу вчителя: від показу зразків способу діяльності під час розв’язування до надання повної самостійності учням у виконанні вправ. Тому на заняттях курсу вчитель може пропонувати учням як готові фрагменти програм, що реалізують розглянуті на уроці алгоритми шифрування, так і задачі, що передбачають розробку школярами власних програм. У таких задачах учням пропонується розшифрувати криптотекст, якщо невідомий ключ, його частина чи саме ключове слово, або ж у криптотексті втрачено окремі символи чи його розділено на частини, при цьому може бути використаним довільний алфавіт. У такий спосіб формується підґрунтя для формування спроможності учнів застосовувати на практиці отримані знання з програмування.

Наведемо кілька вправ для програмування до розглянутого вище заняття.

Вправа 💻.1. За допомогою програми, яка реалізує обчислення значення функції Ейлера знайдіть:

а) $\varphi(1000)$, $\varphi(1000001)$, $\varphi(1234567890)$;

б) $\varphi(5186)$, $\varphi(5187)$, $\varphi(5188)$.

Вправа 💻.2. За допомогою програми побудуйте таблицю значень функції $\varphi(n)$ для n від 1 до 100. За даною таблицею побудуйте графік функції Ейлера у MS Excel.

Вправа 💻.3. Реалізуйте альтернативний варіант програми для обчислення значення функції Ейлера.

Підказка: При обчисленні $\varphi(n)$ використайте допоміжну функцію `nsd(a,b)`, яка дозволяє знайти НСД двох чисел.

Наведемо фрагменти програм, які реалізують обчислення значення функції Ейлера за формулою

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$$

мовами програмування Pascal і Python.

Лістинг 1. Функція Ейлера (Pascal)

```
// n - задане натуральне число
  function phi(n : longword) : longword;
    var
      d : real;
      i : longword;
    begin
      d := n;
      for i := 2 to trunc(sqrt(n)) do
```

```
      if (n mod i = 0) then begin
        d := d * (1 - 1/i);
        while (n mod i = 0) do
          n := n div i;
      end;
    if (n > 1) then
      d := d * (1 - 1/n);
    phi := trunc(d);
  end;
```

Лістинг 2. Функція Ейлера (Python)

```
# n - задане натуральне число
def phi(n):
    d = n
    i = 2
    while i**2 <= n:
        if n % i == 0:
            d -= d/i
            while n % i == 0:
                n /= i
        i += 1
    if n > 1:
        d -= d/n
    return int(d)
```

Ефективність занять курсу за вибором значною мірою залежить від форм організації навчально-пізнавальної діяльності учнів на заняттях. Важливо, щоб був реалізований діяльнісний і особистісно орієнтований підходи в навчанні. Тому вважаємо необхідним застосування ігрових та інтерактивних форм організації навчання, що сприяють підвищенню пізнавального інтересу до математики та її міжпредметних зв'язків, удосконаленню способів математичної діяльності.

Пропонуємо застосовувати такі інтерактивні вправи як «ажурна пилка», «один-два-чотири», «мікрофон» тощо. Окрім того, доцільно використовувати такі нестандартні форми організації занять як урок-криптографічний квест, урок-подорож до криптографічного бюро тощо.

Наведемо приклад організації уроку-подорожі до криптографічного бюро (за матеріалами посібника [32].

1. Після вивчення афінних шифрів пропонуємо учням об'єднатися у групи «Криптографічні бюро». Перше з назвою «`FUNCTION`», друге – «`EQUATION`» (назва бюро відкривається тільки його членам).

Назву бюро треба зашифрувати спочатку лінійним шифром з ключем $a = 13$, а потім шифром зсуву з ключем $b = 4$ (шифрування відбувається над англійським алфавітом із 26 символів). Групи обмінюються криптотекстами й розшифровують їх. Перемагає бюро, яке першим вкаже назву бюро суперників.

2. *«Мозковий штурм».* Дайте відповіді на запитання:

а) сформулюйте загальне правило для шифрування лінійним шифром з ключем a, запишіть відповідну формулу, яка додаткова вимога має виконуватися для ключа a;

б) сформулюйте загальне правило для шифрування шифром зсуву з ключем b, запишіть відповідну формулу, чи має виконуватися аналогічна вимога для ключа b;

в) сформулюйте загальне правило та запишіть відповідну формулу для послідовного шифрування лінійним шифром з ключем a та шифром зсуву з ключем b, пригадайте, як називається такий вид шифрування;

г) сформулюйте алгоритм для дешифрування криптотексту, що був зашифрований афінним шифром з ключем $(a;\ b)$. Чи можливо записати формулу для відповідного дешифрування?

Очікувані міркування учнів. Для того, щоб дешифрувати криптотекст необхідно із конгруенції $y \equiv ax + b \pmod{n}$ знайти найменше додатне значення x:

$$ax \equiv y - b \pmod{n};\ x \equiv a^{-1}y - a^{-1}b \pmod{n}.$$

3. Пропонуємо зашифрувати за допомогою афінного шифру з ключем $a = 5,\ b = 13$ таємні повідомлення «`DIFFERENTIAL`» та «`DISCRIMINANT`», обмінятися криптотекстами й розшифрувати отриманий криптотекст. Перемагає бюро, яке першим розшифрує запропонований суперником криптотекст.

Вчитель пропонує учням розглянути кілька проблемних ситуацій, коли необхідно дешифрувати криптотексти із невідомим ключем. Під час обговорення способу розв’язання проблемної ситуації варто узагальнити спосіб міркувань у вигляді правила-орієнтиру.

Проблемна ситуація 1. Каналом зв’язку передаються повідомлення, зашифровані за допомогою монограмного лінійного шифру. Перехоплювачам відомо, що використовується українська абетка (із 33 символів) без пропусків і розділових

знаків. За результатами частотного аналізу в потоці криптотекстів найчастіше зустрічається літера «Е». З-поміж інших перехоплено криптотекст:
«ВАОТЦИКЕГИЕЗЄВАШЮЕГАЖТКАЕЗФТЖФКТЛПЇЕРЄВІКАВУ».

Розшифруйте його, спираючись на той факт, що найпоширенішою літерою в україномовних текстах є літера «О».

Розв'язання запропонованої проблемної ситуації можливо здійснити у ході евристичної бесіди, у якій беруть участь усі школярі. Запитання вчителя можуть бути такими.

1) Який номер в українській абетці мають літери «О» і «Е»?

Очікувані міркування учнів. Літера «О» має номер 18, а «Е» – 6.

2) Яке співвідношення можна записати, враховуючи дані умови задачі й визначені вами номери літер «О» і «Е» в українській абетці?

Очікувані міркування учнів. За даними умови задачі можна записати співвідношення:

$$18a \equiv 6 \pmod{33}.$$

3) Якими є найменші додатні розв'язки цієї конгруенції?

Очікувані міркування учнів. $\text{НСД}(18, 33) = 3$ і $6 \vdots 3$, тому конгруенція має три розв'язки. Найменші додатні представники класів лишків, що є її розв'язками: $a = 4$, $a = 15$, $a = 26$.

4) Знайдіть дешифруючий ключ a^{-1} для кожного зі знайдених значень a. Чи для всіх знайдених значень a це можна зробити? Відповідь обґрунтуйте.

Очікувані міркування учнів. Для значення $a = 15$ обернений за модулем 33 клас лишків за алгоритмом Евкліда не знайдемо, оскільки 15 і 33 не взаємно прості.

Для значення $a = 4$ за алгоритмом Евкліда знаходимо найменший невід'ємний представник із оберненого класу лишків:

$$\begin{aligned} 33 = 4 \cdot 8 + 1 \;&\Rightarrow\; 1 = 33 + 4 \cdot (-8) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; 1 \equiv 4 \cdot (-8) \pmod{33} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; 4^{-1} \equiv -8 \pmod{33} \equiv 25 \pmod{33} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; a^{-1} (\text{mod } 33) = 25. \end{aligned}$$

Дешифрування за допомогою цього ключа дає результат «НАСТУПРОЗПОЧИНАЄМОЗАВТРАОЧЕТВЕРТІЙГОДИНІРАНКУ».

Цей текст природно вважати правильним. Інші варіанти значень *a* можна і не розглядати.

Особливу увагу у навчанні курсу за вибором необхідно приділяти етапу рефлексії, оскільки саме на цьому етапі учні здійснюють рефлексію змісту, процесу та результату своєї навчальної діяльності, а вчитель отримує варіант «зворотного зв'язку», що уможливлює виконання ним контролювальної, коригувальної та прогнозувальної функцій. Ефективними вважаємо вправи на заповнення «екрану рефлексії», структурування або заповнення пропусків у «технологічній карті уроку», вправа «3-2-1» тощо.

Наприклад.

1. Пригадайте, який із шифрів, вивчених вами на попередніх заняттях, не знайшов відображення у квесті.

2. Серед тверджень, представлених на «Екрані рефлексії», оберіть ті, що відображають особисто Ваше ставлення до своєї роботи під час уроку (табл. 4.6).

Таблиця 4.6.

«Екран рефлексії».

Позитивне ставлення	*Ставлення занепокоєння*
□ Сьогодні я дізналася ... □ Мені було цікаво ... □ Мені сьогодні вдалося ... □ Тепер я можу ... □ Я відчула, що ... □ Я придбала ... □ Я навчилася ... □ Я зможу ... □ Мене здивувало ... □ Я спробую ... □ Урок посприяв ...	□ Мені захотілося ... □ Мені було важко ... □ Для мене було відкриттям, що ... □ На мій погляд, вдалося ... □ Я б врахувала на майбутнє ... □ На уроці було важливим ... □ Завтра я хочу на уроці ... □ Я вважаю, що ми даремно провели ці хвилини разом … □ Що врахувати на майбутнє? … □ Навіщо нам був потрібен урок? …

3. Заповніть пропуски і доповніть структурно-логічну схему «Симетричні шифри», так, щоб на ній були відображені всі розглянуті на попередніх заняттях шифри (рис. 2.6).

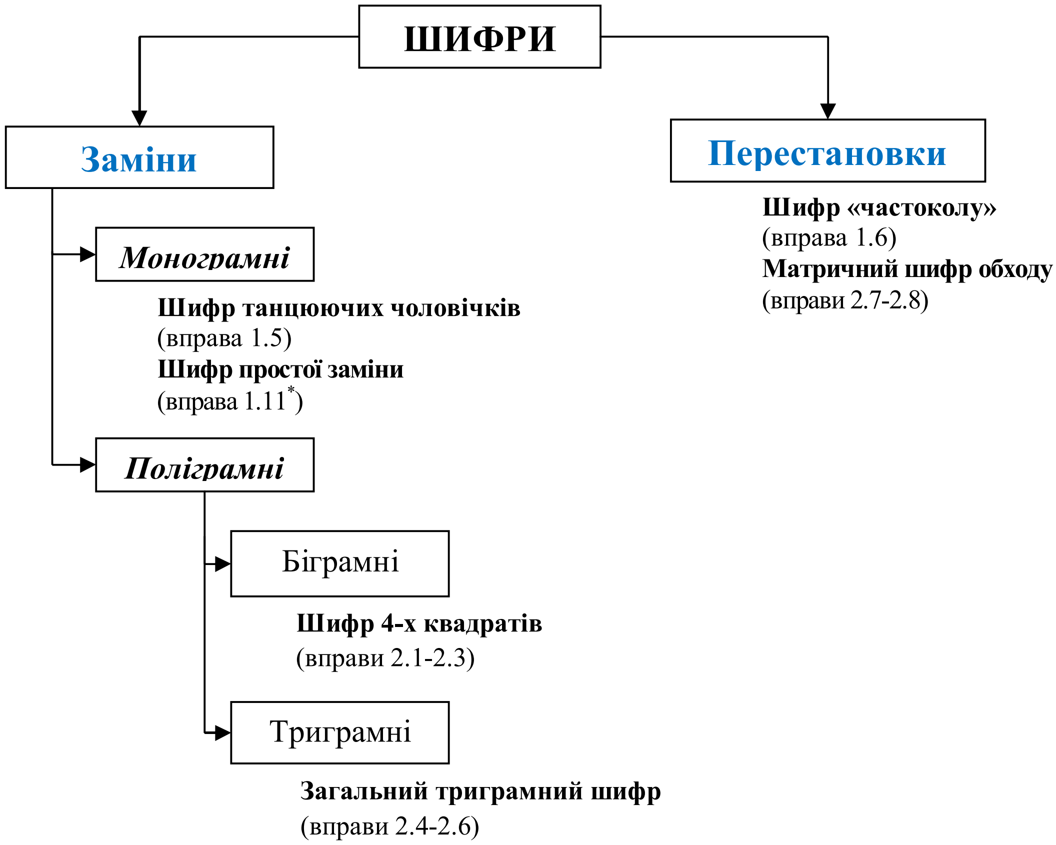


Рис. 4.2. Технологічна карта уроку (класифікація шифрів).

Більшість занять курсу за вибором доцільно проводити у формі інтегрованих уроків, оскільки з їх допомогою цілісно реалізують загальноосвітню, спеціалізувальну та професійно пропедевтичну функцію такі навчальні дисципліни як математика й інформатика. На цій основі за рахунок інтеграції цілей і змісту, методів і прийомів навчання формується цілісність знань про дійсність, про різноманітні сфери застосування знань з цих навчальних дисциплін. Лініями інтегрування виступають мета їхнього вивчення, зміст та методи навчання.

Загалом метою інтегрованих уроків є: підвищення якості засвоєння матеріалу; активізація навчально-пізнавальної діяльності шляхом підвищення інтересу учнів до нових застосувань (у інших дисциплінах) матеріалу, що вивчається; створення творчої атмосфери в навчанні; формування цілісного світогляду школярів про навколишній світ. Предметом вивчення (аналізу) на такому уроці виступають об’єкти, інформація про зміст яких міститься в різних навчальних дисциплінах. Блоки навчальної інформації з різних навчальних предметів об'єднуються навколо розв'язування однієї проблеми, забезпечуючи використання міжпредметних зв'язків при різнобічному розгляді (з позицій різних навчальних дисциплін) об'єктів пізнання. Об'єкти засвоєння на інтегрованих уроках із математики та інших дисциплін: 1) поняття, факти, способи діяльності (математичні й із інших галузей знань і навчальних дисциплін); 2) міжпредметні зв'язки (попередні, супутні, перспективні); 3) прикладні аспекти математичних знань; 4) досвід діяльності з математичного моделювання; 5) досвід творчої діяльності й емоційно-ціннісного маркування різних способів математичної діяльності.

Інтегрований урок має своєрідну структуру, оскільки поєднує методи, прийоми і засоби навчання, що застосовуються в різних навчальних дисциплінах. Щоб дидактично виважено поєднати компоненти, вчителю необхідно здійснити підготовчу роботу за таким етапами:

1) визначити мету й завдання проведення інтегрованого уроку, лінії інтегрування, тобто сукупність інтегрованих компонентів, провідний і супровідний компоненти, форму інтегрування;

2) встановити характер зв'язків між поєднуваними компонентами, зміст і послідовність розгортання навчального матеріалу, методи, прийоми й засоби його представлення учням і забезпечення його засвоєння учнями;

3) продумати способи унаочнення навчального матеріалу, форми організації різних видів діяльності учасників інтегрованого уроку (вчителів, учнів), критерії оцінювання ефективності уроку, форми й види контролю навчальних досягнень учнів на даному уроці.

Обов'язковим елементом підготовчої роботи має бути виділення провідного й супровідного навчального матеріалу, а також проблеми, навколо розв'язування якої відбуватиметься інтеграція можливих методів дослідження з різних дисциплін.

Перш, ніж проводити інтегрований урок, вчителю необхідно сформулювати його цілі. Вони, наприклад, можуть бути такими: систематизація знань, їх узагальнення, виявлення причинно-наслідкових зв'язків, розширення системи понять і уявлень, навчання прийомам і способам перенесення знань з однієї предметної області в іншу, виявлення прикладних аспектів математичних знань, формування навичок математичного моделювання тощо.

Визначивши мету вчитель добирає матеріал для його об'єднання в одному уроці, тобто визначає склад інтегрування. На цьому етапі доцільно здійснити добір навчальних тем, їхніх окремих частин, що складуть змістову основу інтеграції. Після цього попередньо відібраний матеріал треба розподілити на основний і допоміжний. Основний матеріал стає провідним системоутворювальним компонентом уроку [34].

Форми інтегрування залежать від мети уроку й системоутворювального компонента, тобто від того, навколо чого проводитиметься інтеграція. Вони бувають різними: 1) предметно-образна, що використовується при відтворенні більш широкого й цілісного уявлення про предмет пізнання; 2) понятійна, коли проводиться аналіз обсягу поняття, яким послуговуються інтегровані дисципліни; 3) світоглядна, коли базою інтегрування стає методологія (закони, закономірності, принципи, методи досліджень тощо) кількох дисциплін; 4) діяльнісна, коли проводиться процедура узагальнення способів діяльності, їхнє перенесення в нові умови; 5) концептуальна, при якій учні практикуються в розробці нових ідей, пропозицій, способів розв’язування навчальних проблем.

Після цього необхідно встановити зв'язки між інтегрованими блоками знань. Вони можуть бути різними, як от [34; 37; 38]: зв'язки походження, зв'язки породження, зв'язки побудови (при систематизації та узагальненні знань), зв'язки керування.

Зв'язки походження («імпорт – зв’язки») встановлюються там, де системоутворювальний компонент виступає наслідком, причини якого вивчаються в допоміжних компонентах. Учень навчається виявляти причини, залежності подій, фактів, явищ у системоутворювальному компоненті уроку. Введені з іншої дисципліни знання виконують пояснювальну функцію. Відбувається не просто поєднання знань із різних навчальних дисциплін, а тільки тих їх фрагментів, що розкривають витоки, причини або умови походження досліджуваних об'єктів у системоутворювальному компоненті.

Зв'язки породження («експорт – зв'язки») дуже схожі на зв'язки походження, але мають ту специфіку, що розглядають системоутворювальну дисципліну причиною, що породжує наслідки, які досліджуються в іншому навчальному предметі. Так, якщо вчитель математики проводить інтегрований урок з хімією, то він залучає матеріал з біології. Умовно кажучи, його матеріал служить підставою для появи біологічних наслідків, розгляд яких не входить до складу знань із хімії чи математики.

Зв'язки керування найчастіше мають місце там, де відбувається вивчення способів розумової й практичної діяльності, що можуть бути перенесені з одного предмета в інший. Крім того, зв'язки керування виникають там, де використовується знання однієї науки для оволодіння іншою.

Послідовність вивчення, викладу й опанування матеріалу інтегрованого уроку визначається типами зв'язків.

Структура інтегрованого уроку може бути різноманітною. Інтегровані уроки у курсі за вибором «Основи криптології» пропонуємо укладати різними способами. Можливо його спланувати як один великий урок з міні-уроків, побудованих на матеріалі з математики та інформатики. Можна його зробити цілісним з єдиною методичною структурою. Є варіант побудови інтегрованого уроку як серії модулів (алгоритмів, проблем, навчальних завдань), що комплексно поєднані. Відповідні приклади можна знайти у посібнику [32].

Для успішного засвоєння учнями змісту нових понять, фактів чи способів діяльності необхідне відповідне навчально-методичне забезпечення. Серед засобів навчально-методичного забезпечення вивчення курсу «Основи криптології» виокремимо навчально-методичний посібник для вчителя [32] та сайт [33], який містить дидактичні матеріали, необхідні для організації й проведення уроків. Навчально-методичний посібник містить поурочні розробки занять із відповідними методичними і навчальними коментарями. Також у посібнику наведено допоміжні навчально-методичні матеріали у вигляді лістингів програм на мовах на двох мовах програмування PascalABC.NET (версія 1.8) і Python (2.7). Це зумовлено тим, що, з одного боку, нині у загальноосвітніх навчальних закладах базовою платформою для вивчення основ алгоритмізації та програмування є, як правило, мова Pascal, однак, на нашу думку, мова Python має певні переваги завдяки своїй простоті та лаконічності. Крім того, в останні роки саме вона виходить на лідируючі позиції у рейтингу мов програмування, що вивчаються на початкових курсах у багатьох провідних вищих навчальних закладах світу, що готують фахівців з комп'ютерних наук.

На допомогу вчителю додатково розроблено сайт [33]. До кожного уроку даного курсу на сайті описано його мету, вид уроку та представлено електронні матеріали: мультимедійну презентацію, роздатковий матеріал, необхідний для розв'язування учнями вправ, та програми, що реалізують розглянуті алгоритми шифрування.

Список використаних джерел до розділу 4

1. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.І. Допрофільна підготовка / Упоряд. Н.С.Прокопенко, О.П.Вашуленко, О.В.Єргіна. – Х. : Вид-во «Ранок», 2011. – 320 с.
2. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С.Прокопенко, О.П.Вашуленко, О.В.Єргіна. – Х. : Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с.
3. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі [Електронний ресурс] / Наказ МОН України від 21 жовтня 2013 р. № 1456. – Режим доступу: http://mon.gov.ua/content/Нормативно-правова%20база/1456.pdf. – Дата звернення 01.10.2017.
4. Кизенко В.І. Курси за вибором у структурі профільного навчання [Електронний ресурс] / В.І.Кизенко, Л.Л.Орищак, В.Г Чернега // Профільне навчання: теорія і практика / За ред. канд. пед. наук Липової Л.А. – К. : ВВП «Компас», 2007. – С. 5. – Режим доступу: https://sites.google.com/site/smcprofil/programs/requirements?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1 – Дата звернення 01.10.2017.
5. Профільне навчання: нормативно-правові й теоретико-методичні засади / упоряд. Л.А.Липова, М.Є.Терещенко. – Тернопіль : Мандрівець, 2010. – 160 с.
6. Вашуленко О.П. Принципи добору змісту до навчального посібника для елективних курсів з математики у профільній школі [Електронний ресурс] / О.П.Вашуленко. – Режим доступу: http://chito.in.ua/principi-doboru-zmistu-do-navchalenogo-posibnika-dlya-elektivn.html. – Дата звернення 01.10.2017.
7. Симонова М.Г. Індивідуалізація навчання математики учнів гуманітарного профілю засобами елективних курсів [Рукопис] : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 : захищена 29.12.2016 / М. Г. Симонова ; наук. кер В.Г.Моторіна ; М-во освіти і науки України, Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди. – Харків, 2012. – 267 с.

8. Элективные курсы в профильном обучении / Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров ; под общ.ред. А. Г. Каспржака. – М. : Вита–Пресс, 2004. – 144 с.
9. Далингер В. А. Курсы по выбору и элективные курсы по математике в системе предпрофильного и профильного обучения / В. А. Далингер // Актуальные проблемы профилизации математического образования в школе и в вузе: сборник научных трудов и методических работ. – Арзамас : АГПИ, 2004. – С. 214–222.
10. Бурда М. І. Особливості організації навчання математики в 10–12 класах на профільному рівні / М. І. Бурда, О. І. Глобін // Вісник Черкаського університету. – Серія «Педагогічні науки». – Вип. 150. – Черкаси, 2009. – С. 24–31.
11. Дорофеев Г. В. Профилированная школа в концепции школьного математического образования [Электронный ресурс] / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова // Интернет–журнал "Эйдос". – 2003. – 15 апреля. – Режим доступу: http://www.eidos.ru/journal/2003/0415–02.htm. – Дата звернення 01.10.2017.
12. Крутихина М. В. Элективные курсы по математике : учебно-методические рекомендации / М. В. Крутихина, З. В. Шилова. – Киров. : Издательство ВятГТУ, 2006. – 40 с.
13. Смирнова И. М. Профильная модель обучения математике / И. М. Смирнова // Математика в школе. – 1997. – №1. – С. 32 – 36.
14. Артемова Л. К. Профильное обучение: опыт, проблемы, пути решения // Школьные технологии. 2003. – № 4. – С. 22-31.
15. Ермаков Д. С., Создание элективных учебных курсов для профильного обучения / Д. С. Ермаков, Г. Д. Петрова // Школьные технологии. 2003. – №6. – С. 23-29.
16. Зепнова Н. Н. Формирование и развитие пространственного мышления учащихся на элективных курсах по геометрии : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Н.Н.Зепнова ; Иркутский государственный университет. – Иркутск, 2005. – 17 с.
17. Каспржак А. Г. Место элективных курсов в учебном плане школы / А. Г. Каспржак // Элективные курсы в профильном обучении / Министерство образования РФ НФПК. – М.: Вита-Пресс, 2004. – С. 68-85.
18. Новожилова Н. В. Курсы по выбору: отбор содержания и технологии проведения / Н. В. Новожилова, М. М. Фирсова // Школьные технологии. 2003. – №5. – С. 23-33.
19. Орлов В. А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения [Электронный ресурс] / В.А.Орлов // Интернет-журнал "Эйдос". 2003. – 16 апреля. – Режим доступу: http://www.eidos.ru/journal/2003/0416.htm. – Дата звернення 01.10.2017.
20. Липова Л. Програма спецкурсів профільного навчання: дидактичні засади створення та експертиза / Л.Липова, В.Малишев, П.Замазкіна // Практика управління закладом освіти. – 2008. – № 1(18). – С. 14-23.
21. Шаран О. В. Методи та організаційні форми проведення курсів за вибором [Електронний ресурс] / О. В. Шаран // Перспективні розробки науки і техніки : міжнар. наук.-практ. конф., 16-17 листопада 2007 р.: тези доп. – Перемишль : Наука і освіта, 2007. – Т. 7. – С. 97-100. – Режим доступу: http://www.rusnauka.com/20_PRNiT_2007/Pedagogica/23722.doc.htm. – Дата звернення 01.10.2017.
22. Шаран О. В. Курси за вибором як важливий компонент особистісно-орієнтованої системи навчання / О. В. Шаран // Особистісно-орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи : всеукр. наук.-практ. конф., Полтава, 6-7 грудня 2005 р. : тези доп. – Полтава, 2005. – С. 31-33.
23. Енциклопедія освіти / [гол. редактор В.Г. Кремень] / Акад. пед. наук України. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – 1040 с.

24. Філософський словник / За ред. В. І. Шинкарука. – 2-е вид., перероб. і доп. – К. : Голов. ред. УРЕ, 1986. – 800 с.
25. Глобін О.І. Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики : методичний посібник / О.І.Глобін. – Київ : Педагогічна думка, 2012. – 88 с.
26. Прокофьєва М. Ю. Интеграция педагогической подготовки будущих воспитателей дошкольных учреждений и учителей начальных классов : дис. … канд. пед. наук: 13.00.04 / М. Ю. Прокофьева. – Ялта, 2008. – 268 с.
27. Крутій К. Інтеґрація в дошкільній освіті як інноваційне явище, або що треба знати про інтеґрацію? [Електронний ресурс] / К.Крутій. – Режим доступу: https://mail.ukr.net/attach/get/15073200133725681655/1/Стаття_проф.Крутій-К._Інтеграція.pdf. – Дата звернення 01.10.2017.
28. Безрукова В.С. Интеграционные процессы в педагогической теории и практике / В.С.Безрукова. – Екатеринбург, 1994. – С.15-33.
29. Закон «Про освіту» [Електронний ресурс] / Режим доступу : http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/2145-19. – Дата звернення 01.10.2017.
30. Концепція «Нова українська школа» [Електронний ресурс] / Режим доступу : http://mon.gov.ua/Новини%202016/12/05/konczepcziya.pdf – Дата звернення 01.10.2017.
31. Лазарева М.В. Интегрированное обучение детей в дошкольных образовательных учреждениях : дис….д-ра пед. наук : 13.00.01 «Общая педагогика, история педагогики и образования» / Мария Васильевна Лазарева ; Московский государственный университет культуры и искусств. – М., 2010. – 479 с.
32. Акуленко І.А. Основи криптології. Матеріали курсу за вибором для учнів 9-х класів із поглибленим вивченням математики або 10-х класів, які вивчають математику (інформатику) на профільному рівні : навчально-методичний посібник / І.А. Акуленко, Н.О. Красношлик, Ю.Ю. Лещенко. – Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2016 – 228 с.
33. Основи криптології [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://cryptology2015.wordpress.com. – Дата звернення 01.10.2017
34. Акуленко І. А. Моделювання студентами елементів технології інтегрованих уроків в умовах компетентнісно орієнтованої методичної підготовки / І. А. Акуленко // Дидактика математики / редкол.: О. І. Скафа (наук. ред.) та ін. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2013. – Вип. 40. – С. 170–178.
35. Гончаренко С.У. Інтегроване навчання. За і проти / С. У. Гончаренко, Ю. І. Мальований // Освіта. – 1994. – № 15-16. – С.5.
36. Ільченко В. Г. Інтегративний підхід в освіті / В. Г. Ільченко // Енциклопедія освіти / Акад. пед. наук України ; гол. ред. В. Г. Кремень. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – С. 356.
37. Козловська І. М. Метапредметна інтеграція як засіб формування змісту професійної освіти / І. М. Козловська // Інформаційно-телекомунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, перспективи : зб. наук. праць. Частина 2. – Львів : ЛДУ БЖД, 2009. – С.71-73.
38. Семиченко В. А. Идеи интеграции и системности в теории и практике высшей школы / В. А. Семиченко, Е. С. Барбина. – К.-Херсон, 1996. – 278 с.

Наукове видання

ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна
АКУЛЕНКО Ірина Анатоліївна
ЛОВ'ЯНОВА Ірина Василівна
СЕРДЮК Зоя Олексіївна

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Монографія

Науковий редактор Н. А. Тарасенкова

Підписано до друку 20.11.2017. Формат 60х84/16
Папір офсетний. Гарнітура Book Antiqua. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 12.55
Наклад 100 прим.

Видавець ФОП Гордієнко Є.І.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовників і
розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 4518 від 04.04.2013
Україна, 18000, м. Черкаси
тел./ факс: (0472) 56-56-12, (067) 444-28-94