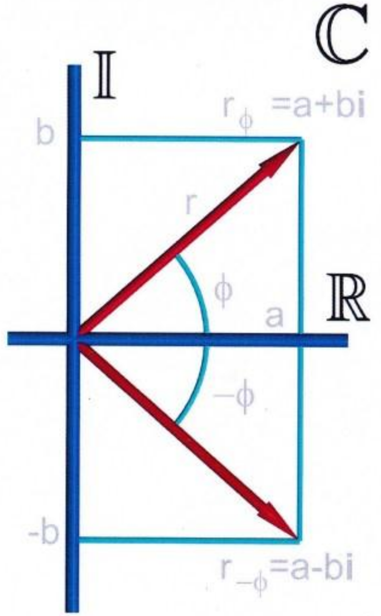
Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького

М. В. Босовський
О. Г. Демченко

Елементи комплексного аналізу
(навчально-методичний посібник)



Черкаси – 2015

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.55я73-1
Б 85

Рецензенти:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики та методики навчання математики
Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Д. М. Лила
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики
Черкаського державного технологічного університету
О. М. Кондратьєва

Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 11 від 22 лютого 2015 року)

Босовський М. В., Демченко О. Г.
Б 85 Елементи комплексного аналізу (навчально-методичний посібник) / М. В. Босовський, О. Г. Демченко – Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – 124 с.
ISBN 978-966-353-396-4

Навчально-методичний посібник охоплює обов'язкову частину курсу «Комплексний аналіз» і адресується студентам денної і заочної форми навчання відповідних спеціальностей вузів.

Посібник містить необхідні теоретичні відомості і основні типи практичних задач, що відносяться до цього курсу. Методика розв'язання базових задач ілюструється на численних прикладах. Пропонується достатня кількість задач для самостійного опрацювання.

Можна використати для організації роботи студентів.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.55я73-1

ISBN 978-966-353-396-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Перехід до вивчення функцій комплексної змінної такий же природний як і перехід від поля дійсних чисел до алгебраїчно замкненого поля комплексних чисел. Це дає можливість глибше вивчити елементарні функції і встановити можливі зв'язки між ними; з'ясувати природу багатозначності функцій і побудувати бездоганну їх теорію; створити ефективні методи обчислення інтегралів, отримання асимптотичних оцінок, дослідження розв'язків диференціальних рівнянь; описати найбільш важливі для застосувань плоскі векторні поля, тощо.

Комплексний аналіз знаходить численні застосування у різних галузях. Його поняття служать основою і джерелом багатьох досліджень у функціональному аналізі, алгебрі, топології, диференціальній геометрії, рівняннях з частинними похідними та інших розділах математики.

Мета вивчення курсу комплексного аналізу: освоїти загальні ідеї і методи теорії функцій комплексної змінної; детально вивчити факти, що їх ілюструють.

Завдання: оволодіти методами і основним апаратом комплексного аналізу. Сюди відносяться: представлення аналітичних функцій рядами та інтегралами; загальні методи обчислення інтегралів за допомогою теорії лишків; асимптотичні методи; набуття навичок обчислення значень найважливіших елементарних функцій комплексної змінної.

Знання, уміння і навички, здобуті в сфері комплексного аналізу, можна використати при вивченні суміжних дисциплін та в подальшій самоосвітній діяльності.

Модуль 1

Поле комплексних чисел. Геометрія комплексної площини

Ця тема відноситься до курсу алгебри, тому передбачається нагадати тут основні визначення і результати.

Алгебраїчна форма комплексного числа. Правила додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі. Операція спряження, її властивості.

Геометричне зображення комплексних чисел на площині. Тригонометрична форма комплексного числа. Правила множення, ділення, піднесення до степеня комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі. Добування кореня з комплексного числа, геометрична інтерпретація.

Стереографічна проекція. Сфера Рімана. Розширена комплексна площина.

Після опрацювання теми “Поле комплексних чисел. Геометрія комплексної площини” за підручником [1] потрібно:

1) знати різні форми запису комплексних чисел (алгебраїчна, тригонометрична, показникова), правила виконання дій над числами у різних формах і відповідні геометричні інтерпретації цих дій;

2) мати практичні навички виконання операцій над комплексними числами. Якщо числа подані в алгебраїчній формі, то зручно виконувати додавання, віднімання, множення і ділення; при піднесенні до степеня і добуванні кореня варто перейти до тригонометричної (показникової) форми комплексного числа.

Основні практичні задачі, що відносяться до теми «Поле комплексних чисел. Геометрія комплексної площини»:

1) подати у тригонометричній формі число $z = a + bi$;

2) виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі: додати, відняти, помножити, поділити, добути квадратний корінь;

3) виконати дії над комплексними числами у тригонометричній формі: помножити, поділити, піднести до степеня, добути корінь (знайти всі значення кореня);

4) розв'язати рівняння. Ця задача є комплексною, бо об'єднує пп. 1) – 3). Потрібно набути навички розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами та двочленних рівнянь $u^n = v^n$.

Приклади розв'язування основних задач.

Задача 1. Подати у тригонометричній формі числа:

1) $z = -1 - i$; 2) $z = -2 + 7i$.

Розв'язання.

1) *а*) Зображаємо задане число $z = -1 - i$ на комплексній площині вектором (рис. 1.*а*).

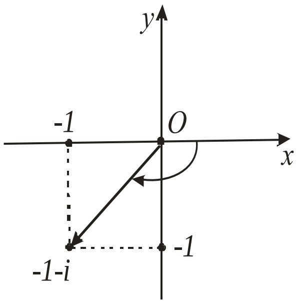


рис.1.а.

б) Знаходимо модуль комплексного числа (довжину цього вектора):

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

в) Вказуємо на рисунку кут від додатної півосі *Ox* до вектора $z = -1 - i$ (стрілкою). Це і є аргумент комплексного числа. Знаходимо його на основі рівностей: $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \sin\varphi = \dfrac{y}{r}$ і правила знаків для аргументу.

У даному випадку: $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Оскільки кут відраховується за стрілкою годинника, то аргумент від’ємний; він дорівнює $\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Таким чином: $r = |-1-i| = \sqrt{2}$; $\varphi = \arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $-1-i = r(\cos\varphi + \sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

– тригонометрична форма заданого комплексного числа.

Зауваження. Рисунок виконується для правильного визначення аргументу.

2) *а*) Зображаємо число $z = -2 + 7i$ на комплексній площині вектором (рис. 1.*б.*)

б) Знаходимо модуль комплексного числа (довжину вектора):

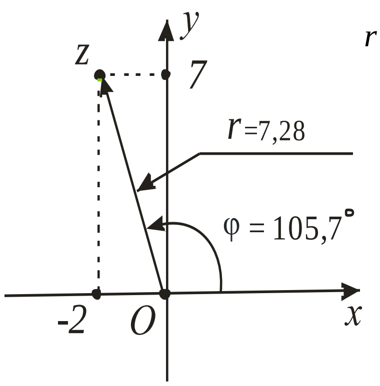


рис.1.б.

$r = |-2+7i| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$.

в) Знаходимо аргумент φ комплексного числа (кут від *Ox* до вектора):

$\sin\varphi = \dfrac{7}{7{,}28} = 0{,}96$; $\cos\varphi = \dfrac{-2}{7{,}28} = -0{,}27^0$;

$\varphi = 105{,}7^0$.

г) Подаємо задане число у тригонометричній формі:

$-2 + 7i = 7{,}28\left(\cos 105{,}7^0 + i\sin 105{,}7^0\right)$.

Задача 2. Обчислити квадратний корінь із заданого числа: $\sqrt{-\sqrt{3} + i}$.

Розв’язання.

а) Невідоме значення кореня подаємо в алгебраїчній формі

$$z = \sqrt{-\sqrt{3} + i} = x + iy;$$

б) Підносимо до квадрату обидві частини рівності:

$$-\sqrt{3}+i=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+i\cdot 2xy;$$

в) Складаємо систему на основі рівності комплексних чисел:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-\sqrt{3}, \\ 2xy=1 \end{cases}$$

г) Розв'язуємо цю систему методом підстановки:

$$y=\frac{1}{2x};\ x^2-\frac{1}{4x^2}=-\sqrt{3};$$

$$4x^4+4\sqrt{3}x^2-1=0;\ x^2=\frac{1}{2}\left(-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+4}\right)=-\sqrt{3}\pm 2.$$

Оскільки $x^2\geq 0$, то $x^2=2-\sqrt{3}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$; $x=\pm\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

Відповідно: $y=\dfrac{1}{2x}=\pm\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$$z=x+iy=\pm\left(\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)\frac{1}{2}.$$

<u>*Відповідь.*</u> $\sqrt{-\sqrt{3}+i}=\pm\left(\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)\dfrac{1}{2}=\pm(0{,}37+1{,}37i)$.

Задача 3. Розв'язати рівняння: $z^2-(4+i)z+5+5i=0$.

Розв'язання.

а) Дискримінант рівняння:

$$D=(4+i)^2-4(5+5i)=16+8i-1-20-20i=-5-12i;$$

б) Корінь із дискримінанта (див. задачу 2): $\sqrt{D}=\sqrt{-5-12i}=x+iy$;

$$\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=-12. \end{cases}$$

$$y=-\frac{6}{x};\ x^2-\frac{36}{x^2}=-5;\ x^4+5x^2-36=0;\ x^2=\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}=\frac{-5+13}{2}=4;$$

$$x_1=2;\ x_2=-2;\ y_1=-3;\ y_2=3.\ \sqrt{D}=\pm(2-3i).$$

в) Корені рівняння (за формулою коренів квадратного рівняння):

$$z_1=\frac{4+i+(2-3i)}{2}=3-i;\ z_2=\frac{4+i-(2-3i)}{2}=1+2i.$$

Відповідь. $z_1 = 3 - i; z_2 = 1 + 2i.$

Задача 4. Знайти всі значення кореня: $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

Розв'язання. *а*) Подаємо число $z = -1 + i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі (див. задачу 1): $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2};\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

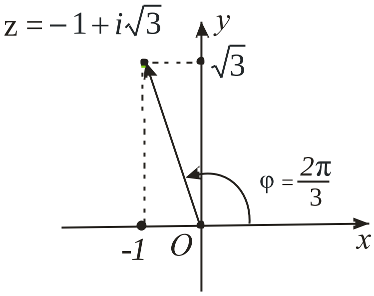


Рис.2.

б) Знаходимо всі значення кореня за формулою: $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

У даному випадку маємо: $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} =$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right),$$

$k = 0, 1, 2, 3.$

$$k = 0: z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right);$$

$$k = 1: z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right);$$

$$k=2: z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);$$

$$k=3: z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Геометрична інтерпретація. Точки z_0, z_1, z_2, z_3 є вершинами правильного чотирикутника (квадрата), вписаного в коло $|z|=\sqrt[4]{2}$; початковий промінь Oz_0 відділяє від аргументу заданого числа ($\varphi=\frac{2\pi}{3}$) четверту частину ($\varphi_0=\frac{\pi}{6}$) (див. рисунок 3).

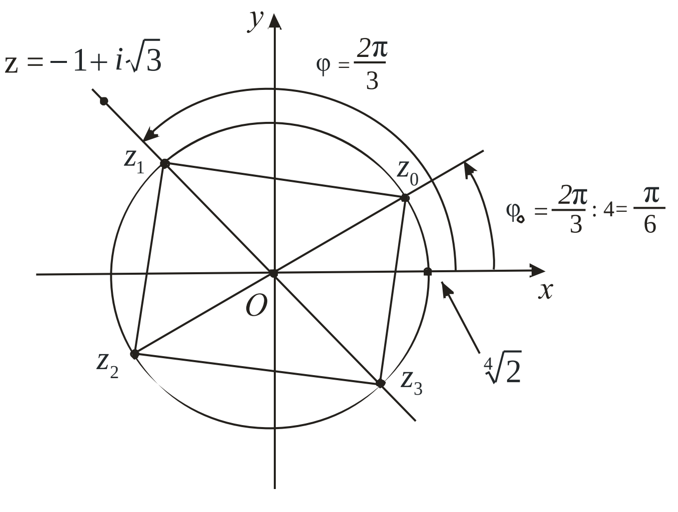


Рис. 3

Задача добування кореня із комплексного числа рівносильна задачі про поділ кола на рівні частини.

Задача 5. Розв’язати рівняння: $(ix+1)^n+(x+i)^n=0.$

Розв'язання. Ділимо обидві частини рівняння на другий доданок. При цьому корені не втрачаються, бо при $x+i=0$ $x=-i$; тоді перший доданок $(ix+1)^n=(i\cdot(-i)+1)^n=(1+1)^n=2^n\neq 0.$

а) $\left(\dfrac{ix+1}{x+i}\right)^n=-1=\cos\pi+i\sin\pi;$

$$\frac{ix+1}{x+i}=\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{n},k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Позначимо $\varphi_k=\dfrac{\pi+2\pi k}{n}$, тоді $\dfrac{ix_k+1}{x_k+i}=e^{i\varphi_k}$, $k=0,1,...,n-1.$

б) Розв'язуємо попереднє рівняння відносно x_k:

$$x_k=\frac{ie^{i\varphi_k}-1}{i-e^{i\varphi_k}}==\frac{\left(ie^{i\varphi_k}-1\right)\left(\overline{i-e^{i\varphi_k}}\right)}{\left(i-e^{i\varphi_k}\right)\left(\overline{i-e^{i\varphi_k}}\right)}=\frac{\left(ie^{i\varphi_k}-1\right)\left(-i-e^{-i\varphi_k}\right)}{\left(i-e^{i\varphi_k}\right)\left(-i-e^{-i\varphi_k}\right)}=$$

$$=\frac{e^{i\varphi_k}-i+i+e^{-i\varphi_k}}{1-ie^{-i\varphi_k}+ie^{i\varphi_k}+1}=\frac{e^{i\varphi_k}+e^{-i\varphi_k}}{2+i\left(e^{i\varphi_k}-e^{-i\varphi_k}\right)}=$$

$$=\frac{2\cos\varphi_k}{2+i\cdot 2i\sin\varphi_k}=\frac{\cos\varphi_k}{1-\sin\varphi_k}=\frac{\cos\frac{\pi+2\pi k}{n}}{1-\sin\frac{\pi+2\pi k}{n}},\ k=0,1,2,...,n-1.$$

Тут ми використали формули Ейлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi;$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right);$$

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)$$

та правило ділення комплексних чисел: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}.$

Всі корені заданого рівняння дійсні.

<u>*Відповідь.*</u> $x_k=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(2k+1)}{1-\sin\frac{\pi}{n}(2k+1)},k=0,1,...,n-1.$

Задача 6. Виразити через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ функції: а) $\cos 5\varphi$; б) $\sin 5\varphi$.

Розв'язання. Нехай $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Знайдемо z^5 двома способами: за формулою Муавра і за допомогою бінома Ньютона:

а) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$;

б) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi \cdot i\sin\varphi + 10\cos^3\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi +$

$+10\cos^2\varphi \cdot i^3\sin^3\varphi + 5\cos\varphi \cdot i^4\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \cdot \sin^2\varphi +$
$+5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\left(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi \cdot \sin^3\varphi + \sin^5\varphi\right)$

в) З умови рівності комплексних чисел дістаємо відповідь.

Відповідь.

а) $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$;

б) $\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cos^4\varphi$.

Задача 7. Виразити через тригонометричні функції кратних кутів функцію $\cos^5\varphi$.

Розв'язання.

а) Подаємо $\cos\varphi$ за формулою Ейлера $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$.

б) Підносимо обидві частини останньої рівності до п'ятого степеня використовуючи формулу бінома Ньютона:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{2^5}\left(e^{5i\varphi} + 5e^{4i\varphi}e^{-i\varphi} + 10e^{3i\varphi}e^{-2i\varphi} + 10e^{2i\varphi}e^{-3i\varphi} + 5e^{i\varphi} \cdot e^{-4i\varphi} + e^{-5i\varphi}\right)$$
$$= \frac{1}{2^5}\left(\left(e^{5i\varphi} + e^{-5i\varphi}\right) + 5\left(e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi}\right) + 10\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)\right).$$

в) Використовуємо знову формулу Ейлера для косинуса і отримуємо відповідь.

Відповідь. $\cos^5\varphi = \frac{1}{2^4}\left(\cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi + 10\cos\varphi\right)$.

Аналогічно розв'язується задача для $\sin^5\varphi$.

Задача 8. Дві послідовні вершини квадрата в точках z_1 і z_2. Знайдіть дві інші вершини.

Розв'язання.

а) Геометричний спосіб:

- будуємо вектор $z_1 z_2$;
- здійснюємо поворот вектора $z_1 z_2$ на кут $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (проти стрілки годинника), дістаємо точку z_4;
- здійснюємо поворот вектора $z_1 z_2$ на кут $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ (за стрілкою годинника), дістаємо вершину z'_4;

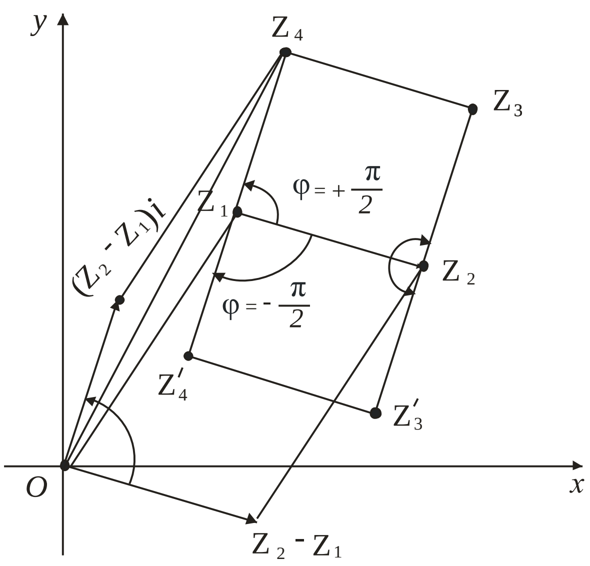


Рис. 4

- будуємо вектор $z_2 z_1$, повертаємо його на кут $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, дістаємо вершини z'_3, z_3 відповідно. (рис 4.)

б) Аналітичний спосіб. Цей спосіб фактично є перекладом на формальну алгебраїчну мову описаних вище кроків геометричної побудови. При цьому потрібно пам'ятати, що комплексне число тлумачиться як зв'язаний вектор (початок вектора – завжди в початку координат), тому результатом кожної дії над комплексними числами є вектор, що виходить з початку координат. У зв'язку з цим процедура формального розв'язання задачі буде така:

- знаходимо різницю $z_2 - z_1$ (вектор $z_1 z_2$);
- множимо цю різницю на i (поворот на 90^0 проти стрілки годинника) $(z_2 - z_1)i$;

- додаємо до результату число z_1 (паралельний перенос на вектор z_1) і дістаємо точку z_4 (див. рис. 4)

$z_4 = (z_2 - z_1)i + z_1$.

Аналогічно знаходимо:

$z_4' = (z_2 - z_1)\cdot(-i) + z_1$; $z_3' = (z_2 - z_1)\cdot i + z_2$; $z_3 = (z_2 - z_1)\cdot(-i) + z_2$.

Відповідь. Існує два квадрати із заданими послідовностями $z_1 z_2$:

а) $z_1; z_2; z_3 = (z_2 - z_1)i + z_2; z_4 = (z_2 - z_1)i + z_1$;

б) $z_1; z_2; z_3' = (z_1 - z_2)i + z_2; z_4' = (z_1 - z_2)i + z_1$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Дайте відповіді на всі запитання для контролю (стор. 18).

2. Запишіть у тригонометричній формі числа: а) 1+і; б) $1+i\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{3}-i$; г) $1+\sin\alpha - i\cos\alpha$; д) $1+4i$; е) $-2+i$; є) $3{,}1-2{,}7i$.

3. Обчисліть (виконайте дії): а) $i^{27}; i^{139}$;

б) $\dfrac{4-7i}{5+6i}$; в) $\dfrac{(3+2i)(1+i)}{(4i-5)(2-i)}$; г) $(1+i)^4$; д) $\sqrt{i}$; е) $\sqrt{3+4i}$; є) $\sqrt{-7+24i}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+(5-2i)x+5(1-i)=0$; б) $x^2+(1-2i)x-2i=0$;

в) $x^2-3x+11+3i=0$; г) $(1+i)x^2-6x+2i=0$.

5. Знайдіть всі значення коренів:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$; в) $\sqrt[6]{-64}$; г) $\sqrt[6]{64}$; д) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}+i}$; е) $\sqrt[3]{-2+7i}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x+i)^n+(x-i)^n=0$; б) $\left(\dfrac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\dfrac{1+i}{1-i}$; в) $\left(\dfrac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$;

г) $(x+i)^n-(x-i)^n=0$; д) $(1+i)(xi+1)^n-(1-i)(xi-1)^n=0$.

7. Виразіть через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ функції:

а) $\cos 3\varphi$; б) $\sin 3\varphi$; в) $\cos 4\varphi$; г) $\sin 4\varphi$; д) $\sin 5\varphi$; е) $\cos 5\varphi$.

8. Виразіть через тригонометричні функції кратних кутів такі функції: а) $\cos^3\varphi$; б) $\sin^3\varphi$; в) $\cos^4\varphi$; г) $\sin^4\varphi$; д) $\cos^5\varphi$; е) $\sin^5\varphi$.

9. Обчисліть суми:

а) $1+2\cos x+2\cos 2x+\ldots+2\cos nx$;

б) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

в) $\cos\varphi+a\cos 3\varphi+\ldots+a^n\cos(2n+1)\varphi$;

г) $1+2a\cos\varphi+2a^2\cos 2\varphi+\ldots+2a^n\cos n\varphi$.

10. Дві вершини правильного трикутника – в точках $z_0=1$ і $z_1=2+i$. Знайдіть третю вершину.

11. Кінці відрізка – в точках z_1 і z_2. Знайдіть середину.

12. Три послідовні вершини паралелограма – в точках z_1, z_2, z_3. Знайдіть четверту вершину.

13. Обчисліть вирази: а) $(1+i)^{10}$;

б) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; в) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{25}$; г) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{33}$; д) $\left(3+10i\right)^{25}$; е) $(2+9i)^{17}$.

Запитання для контролю.

1. Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній, та показниковій формах?

2. Які комплексні числа називаються рівними?

3. Як формулюються правила додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі?

4. Як перемножити, поділити, піднести до степеня комплексні числа, записані в тригонометричній формі?

5. Запишіть формулу для кореня $n-$го степеня з комплексного числа; скільки різних значень він має? Який геометричний зміст операції добування кореня?

6. Який геометричний зміст операцій додавання, віднімання і множення комплексних чисел?

7. Який геометричний зміст множення комплексного числа на число:

а) $e^{i\alpha}$ (α є R);

б) i;

в) $-i$?

Завдання для самостійного опрацювання.

1. Нескінченність і стереографічна проекція.

2. $\overline{C}$ як метричний простір.

Виконайте вправи 26-31 із [1], § 1.5, стор.22.

Література: [1], § 1.5.

Модуль 2.

Функції комплексної змінної. Поняття і геометрична ілюстрація функції комплексної змінної

Множини точок на площині. Область. Поняття функції комплексної змінної. Дійсна та уявна частини функції. Геометрична ілюстрація поняття функції. Координатні лінії (декартової чи полярної системи координат) і їх образи на площинах Z і W. Поверхня модуля (рельєф) функції комплексної змінної.

Похідна функції комплексної змінної, диференційованість. Означення похідної. Правила диференціювання. Необхідні і достатні умови диференційованості. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Поняття про конформне відображення. Диференційованість і конформність відображення. Аналітичність функції в області і в точці. Гармонічні в області функції, їх зв’язок з аналітичними.

Елементарні функції комплексної змінної. Лінійна функція. Дробово-лінійна функція. Показникова,тригонометричні і гіперболічні функції комплексної змінної. Формули Ейлера. Зв’язок між показниковою і гіперболічними функціями. Зв’язок між тригонометричними і гіперболічними функціями. Теореми додавання для показникової, тригонометричних і гіперболічних функцій. Періодичність.

Логарифми комплексних чисел. Степені з комплексними основами і комплексними показниками.

Обернені тригонометричні і гіперболічні функції.

§1. Загальні зауваження, рекомендації та вказівки.

У модулі «Функції комплексної змінної» вводяться фундаментальні поняття всього комплексного аналізу: поняття функції комплексної змінної, її похідної і поняття аналітичної функції. Центральне місце посідають тут умови диференційованості функції комплексної змінної (умови Коші-Рімана-Ейлера-Даламбера).

Систематичне вивчення функцій комплексної змінної розпочинається з опису основних множин точок комплексної площини. Найважливішими серед них є області. Область – це відкрита і зв’язна множина. Множина називається відкритою, якщо разом з кожною своєю точкою вона містить і достатньо малий круг з центром у цій точці (властивість відкритості); множина називається зв’язною, якщо кожні дві її точки можна з’єднати ламаною, що складається із точок цієї множини (властивість зв’язності). Якщо межа області D складається з однієї зв’язної частини, то D називається однозв’язною областю.

Поняття функції комплексної змінної.

Будемо говорити, що на множині M точок площини Z задана функція $W = f(z)$ якщо задано правило, за яким кожній точці Z з M ставиться у відповідність комплексне число W. Згідно з цим визначенням розглядаємо тільки однозначні функції. Поняття многозначної функції вивчається окремо.

Дійсна та уявна частини функції. Якщо у формулу $w = f(z)$ замість z написати $x+iy$, виконати всі дії і результат подати в алгебраїчні формі $u+iv$, то дістанемо $w = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, де $u\left(x,y\right)$ та $v\left(x,y\right)$ називаються відповідно дійсною та уявною частинами функції $w = f(z)$. Задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ рівносильне заданню двох функцій двох дійсних змінних:

$$u = u(x,y), v = v(x,y).$$

Якщо Z подати в тригонометричній формі $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$, то дійсна та уявна частини будуть функціями r і φ:

$$u = u(r,\varphi), v = v(r,\varphi).$$

Геометрична ілюстрація поняття функції. Ми постійно будемо користуватися геометричною ілюстрацією поняття функції. Задання дійсної та уявної частини функції $u = u(z),\ v = v(z)$ наводить на думку ілюструвати f у вигляді двох поверхонь $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ в тривимірному просторі; однак цей спосіб незручний, оскільки не ілюструє пару (u, v) як комплексне число. Тому обмежимося уявленням про функцію f як про відображення однієї множини в іншу. Домовимось при цьому відкладати значення z на одній комплексній площині, а значення W – на іншій. Щоб зробити уявлення про відображення більш наочним, будемо рисувати окремі множини, які відповідають одна одній при заданому відображенні. Найчастіше будемо рисувати координатні лінії (декартові чи полярної системи координат) і їх образи на площинах z і W. Забезпечивши ці множини числовими показниками, у простіших випадках одержимо досить добре геометричне уявлення про функцію. Іноді користуються іншим способом геометричного уявлення функції: в просторі (x, y, ρ) рисують поверхню $\rho = |f(z)|$, яка називається поверхнею модуля або рельєфом функції f. На цій поверхні іноді зображають множини рівня $Arg\, f = const$. У найпростіших випадках ці множини являють собою лінії, і, маючи достатньо густу їх сітку, можна скласти уявлення про розподіл значень функції в полярних координатах.

Похідна функції комплексної змінної. Комплексна диференційованість.

Визначення похідної від функції комплексної змінної словесно нічим не відрізняється від звичайного визначення похідної функції дійсної змінної і подається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо останній прямує до нуля. Спосіб прямування приросту аргументу до нуля – довільний, тому похідна, якщо вона існує, не залежить від цього способу.

Всі правила знаходження похідних для функцій комплексної змінної переносяться без зміни з дійсного аналізу (похідна суми, різниці, добутку, частки, похідна складної функції).

Функція яка має скінченну похідну в заданій точці, називається диференційованою в цій точці.

Якщо функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційована в точці $z_0=x_0+iy_0$, то виконуються умови:

1) функції $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ диференційовані в точці $\left(x_0,y_0\right)$ (як функції двох дійсних змінних);

2) в точці $\left(x_0,y_0\right)$ мають місце рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\ (*)$$

Умови 1), 2) є водночас і достатніми для комплексної диференційованості функції $f(z)$ в точці z_0.

При виконанні цих умов похідна $f'(z_0)$ може бути подана в одній з наступних форм:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умови (*) мають основне значення в теорії функцій комплексної змінної. Вони називаються умовами (або рівняннями) Коші-Рімана (C-R).

В полярних координатах умови (C-R) записуються так:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial \varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Функція, диференційована в кожній точці деякої області, називається аналітичною (інакше, регулярною або моногенною) в цій області.

Функція називається аналітичною в точці, якщо вона диференційована в деякому околі цієї точки. Таким чином, поняття «аналітична в області» і «диференційована в області» співпадають; поняття ж «аналітична в точці» і «диференційована в точці» – різні: аналітичність в точці передбачає диференційованість як у самій точці, так і поблизу неї.

Гармонічні в області функції, їх зв'язок з аналітичними.

Функція двох дійсних змінних $u(x;y)$, визначена в області, називається ***гармонічною*** в цій області, якщо виконуються умови:

1) $u(x;y)$ має в заданій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно;

2) $u(x;y)$ задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Між аналітичними і гармонічними функціями існує простий зв'язок: *дійсна та уявна частини кожної аналітичної функції є функціями гармонічними*.

У випадку однозв'язної області справедливе також і обернене твердження: кожна гармонічна в однозв'язній області функція є дійсною частиною деякої аналітичної в цій області функції.

Якщо $u(x;y)$ – гармонічна функція в області D, то можна знайти таку функцію $v(x;y)$, що функція $u(x;y)+v(x;y)$ є аналітичною в області D. Функція $v(x;y)$ називається спряженою для гармонічної функції $u(x;y)$.

Якщо $u(x;y)$ – гармонічна, то вираз $-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ являється повним диференціалом і задача відшукання спряженої гармонічної функції є задачею інтегрування цього повного диференціала.

Спряжена гармонічна функція визначена з точністю до довільного сталого доданка.

Елементарні функції.

Лінійна функція $w = az + b \ (a \neq 0)$**.** Точка z_0 називається нерухомою при відображенні $w = f(z)$, якщо $f(z_0) = z_0$. Для лінійної функції нерухома точка знаходиться з рівняння: $z_0 = az_0 + b;\ z_0(1-a) = b.$ Якщо $a = 1, b = 0$, то нерухомими є всі точки, бо при цих умовах відображення тотожне: $w = z.$ Якщо $a = 1, b \neq 0$, то нерухомих точок немає (паралельний переніс). Якщо $a \neq 1$, то $z_0 = \frac{b}{1-a}$. Тоді

$$w - z_0 = (az + b) - (az_0 + b) = a(z - z_0).$$

Вектор $w - z_0$ отримується із $z - z_0$ множенням на a, тобто поворотом вектора $z - z_0$ на кут $\arg a$ і розтягом його в $|a|$ раз (рис 5).

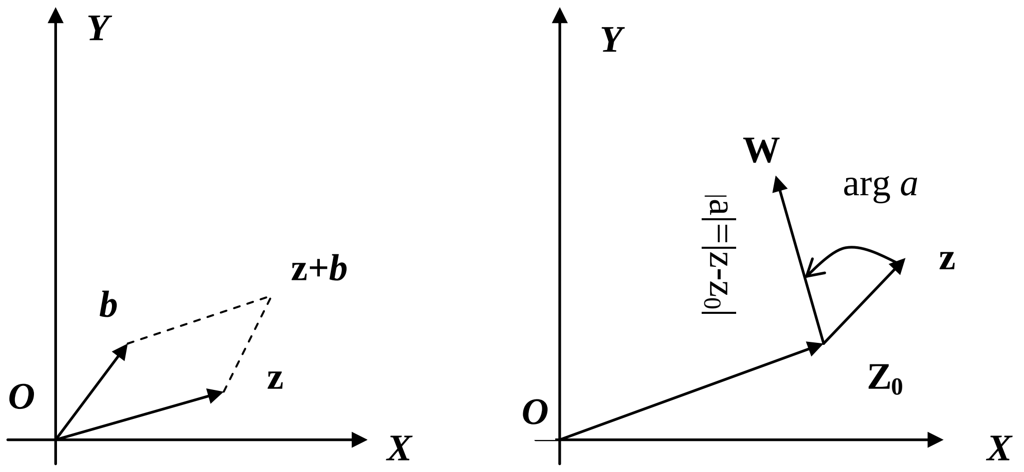


рис 5

Кожне лінійне відображення є перетворенням подібності – воно зводиться або до перетворення паралельного перенесення, або до повороту навколо нерухомої точки , а потім і гомотетії.

Лінійне перетворення зберігає кути.

Дробово-лінійна функція.

Дробово-лінійною називається функція $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$,

де a, b, c, d , – фіксовані комплексні числа, причому хоча б одне із чисел c і d відмінне від нуля. На коефіцієнти a, b, c, d накладається умова $ad - bc \neq 0$. Якщо ж $ad - bc = 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$, тоді $a = ck,\ b = dk$ і $w = k = const$.

Основні властивості дробово-лінійної функції:

1. Дробово-лінійна функція здійснює взаємно однозначне і конформне відображення розширеної площини на себе;

2. Образи прямих і кіл при довільному дробово-лінійному відображенні є також прямі або кола (кругова властивість);

3. При дробово-лінійному відображенні довільні дві точки , симетричні відносно прямої чи кола, переходять в точки, симетричні відносно образу цієї

прямої чи кола, тобто симетрія точок зберігається при дробово-лінійному відображенні.

Дві точки називаються *симетричними* відносно кола, якщо виконуються дві умови:

а) точки лежать на одному промені з вершиною в центрі кола;

б) добуток відстаней точок до центра кола дорівнює квадратові радіуса кола.

Симетрія відносно кола називається також *інверсією* відносно кола.

Геометричні побудови симетричних відносно кола точок відомі з геометрії.

4. Існує одне і тільки одне дробово – лінійне відображення, яке переводить довільні три точки z_1, z_2, z_3 площини Z в довільні три точки w_1, w_2, w_3 площини W. Це відображення визначається співвідношенням $\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ (*).

Ця властивість дозволяє знаходити дробово-лінійне відображення, яке перетворює довільну пряму або коло площини Z в довільно задану пряму або коло площини W.

Зауваження:

Якщо серед прообразів, образів або ж тих та інших одночасно зустрічається нескінченно віддалена точка, то у рівнянні (*) потрібно замінити одиницею ті різниці, які містять нескінченність, а все інше залишити без зміни.

Наприклад, якщо $z_3=\infty$, $w_2=\infty$, а всі інші числа скінченні, то матимемо $\frac{w-w_1}{1}:\frac{w_3-w_1}{1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{1}{1}$

Тобто $\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}$ і т.д.

Показникова, тригонометричні і гіперболічні функції комплексної змінної

Для довільного комплексного числа Z визначаємо функції e^z, $\cos z$, $\sin z$, $ch\, z$, $sh\, z$ як суми тих степеневих рядів, в які розкладались ці функції, коли змінна z була дійсною. Оскільки відповідні степеневі ряди були збіжними на всій числовій прямій, то (в силу теореми Абеля) вони будуть збіжними на всій комплексній площині.

Таким чином, покладаємо за означенням для довільного

комплексного числа z:

$$e^Z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$ch\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$sh\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

З цього визначення видно, що для дійсних значень z ці функції дістають вже відомі значення.

Функції $\cos z$ і $ch\, z$ – парні, а $\sin z$ і $sh\, z$ − непарні.

Формули Ейлера. При довільному комплексному z мають місце такі рівності:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Ці формули називаються формулами Ейлера.

За допомогою першої формули Ейлера тригонометрична форма комплексного числа $z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ набуває вигляду $z=re^{i\varphi}$,

де r – модуль z, а φ – аргумент z.

Останній вираз називається показниковою формою комплексного числа.

Зв'язок між показниковою і гіперболічними функціями. Для довільного комплексного числа z виконуються рівності:

$$e^{Z}=ch\,z+sh\,z,$$
$$e^{-Z}=ch\,z-sh\,z,$$
$$ch\,z=\frac{1}{2}(e^{Z}+e^{-Z}),$$
$$sh\,z=\frac{1}{2}(e^{Z}-e^{-Z}).$$

Зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями. Для довільного комплексного числа z виконуються такі рівності:

$$\cos(iz)=ch(z), \qquad ch(iz)=\cos(z)$$
$$\sin(iz)=ish(z), \qquad sh(iz)=i\sin(z).$$

При множенні аргументу на i круговий косинус переходить в гіперболічний; таку властивість має і гіперболічний косинус. При цій же операції круговий синус переходить в гіперболічний з наступним множенням на i; таку ж властивість має і гіперболічний синус.

Теореми додавання. Для довільних z_1 і z_2 мають місце такі рівності:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}ge^{z_2};$$
$$\cos(z_1+z_2)=\cos(z_1)g\cos(z_2)-\sin(z_1)g\sin(z_2);$$
$$\sin(z_1+z_2)=\sin(z_1)g\cos(z_2)+\cos(z_1)g\sin(z_2);$$
$$ch(z_1+z_2)=ch(z_1)gch(z_2)+sh(z_1)gsh(z_2);$$
$$sh(z_1+z_2)=sh(z_1)gch(z_2)+ch(z_1)gsh(z_2).$$

Періодичність. Показникова, тригонометрична і гіперболічна функції періодичні:

1) показникова функція e^z має період *2πi*;

2) тригонометричні функції $\cos z$, $\sin z$ мають період 2π;

3) гіперболічні функції $ch\ z$, $sh\ z$ мають період *2πi*.

Логарифми комплексних чисел.

Число w називається логарифмом комплексного числа z (за основою e), якщо $e^w = z$.

Позначення: $w = Ln(z)$.

$Ln(z)$ ($z \neq 0$) має безліч значень. Всі вони отримуються за формулою:

$$Ln(z) = \ln z + i(\varphi + 2\pi k)$$

де r – модуль комплексного числа z,

φ – аргумент числа z;

k – ціле число.

Звичайні правила логарифмування залишаються в силі.

Степені з комплексними основами і комплексними показниками. Нехай a і b довільні комплексні числа (де $a \neq 0$).

Покладаємо за означенням $a^b = e^{bLn(a)}$.

Степінь має безліч значень. У випадку, коли b є дійсним цілим числом, значення показника $bLn(a)$ правої частини відрізняються між собою на кратні $2\pi i$, тому a^b має у цьому випадку одне значення.

Обернені тригонометричні функції.

Нехай z – довільне комплексне число. За означенням $Arc\sin(z)$ є таке комплексне число w, що $\sin(w) = z$.

Подаючи $\sin(w)$ за формулою Ейлера, приходимо до рівняння

$$\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) = z, \text{ або } e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

розв'язавши яке, дістаємо

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2};$$
$$w = \frac{1}{i} Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогічно визначаються останні обернені тригонометричні функції.

Обернені гіперболічні функції.

За означенням $Arsh(z)$ (читається: ареа-синус гіперболічний z) є таке комплексне число w, що $shw = z$. Далі маємо:

$$\frac{1}{2}(e^w - e^{-w}) = z,\ e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0;\ e^w = z + \sqrt{z^2 + 1};$$
$$w = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right);$$
$$Arsh(z) = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right).$$

Інші обернені гіперболічні функції визначаються аналогічно.

Зауваження. При знаходженні значень обернених тригонометричних (гіперболічних) функцій не обов'язково пам'ятати остаточний результат. Потрібно знати методику розв'язання задачі:

1) перейти від обернених до прямих функцій;

2) подати останні через показникову функцію;

3) розв'язати квадратне рівняння;

4) виконати логарифмування.

§2 Основні практичні задачі, що відносяться до розділу «Функції комплексної змінної», та методика їх розв'язання.

Базовими задачами зазначеного розділу є такі:

Задача 1. Записати область, зображену на рисунку, за допомогою нерівностей, зобразити на рисунку область, задану нерівностями.

При розв'язуванні цієї задачі потрібно розуміти геометричний зміст дійсної та уявної частини комплексного числа, його модуля та аргументу.

Задача 2. Виділити дійсну та уявну частини заданої функції $w = f(z)$.

Щоб розв’язати цю задачу потрібно:

а) подати комплексне число z в алгебраїчній (або тригонометричній) формі $z = x + iy$;

б) підставити цей вираз у формулу $w = f(z)$ і виконати всі передбачені там дії;

в) результат виконання дій подати в алгебраїчній формі $w = u(x,y) + iv(x,y)$;

г) виписати частину результату, що не містить уявної одиниці – це дійсна частина функції $\mathrm{Re}\, w = u(x,y)$;

д) виписати коефіцієнт біля уявної одиниці – це уявна частина функції: $\mathrm{Im}\, w = v(x,y)$;

е) записати *відповідь*. $\begin{cases} u = \ldots \\ v = \ldots \end{cases}$;

якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

то $u = u(r,\varphi),\ v = v(r,\varphi)$ – функції змінних $r,\ \varphi$.

Задача 3. Знайти образ лінії $F(x;y) = 0$ при відображенні $w = f(z)$.

Розв’язання цієї задачі можна здійснити двома способами:

І спосіб:

а) розв’язати рівняння $w = f(z)$ відносно z: $z = \varphi(w)$;

б) виділити дійсну та уявну частини функції $z = \varphi(w)$ (Задача 2): $x = x(u,v);\ y = y(u,v)$;

в) підставити знайдені величини в рівняння заданої лінії і виконати відповідні дії. Дістанемо шукане рівняння: $F(x(u,v), y(u,v)) = F_1(u,v) = 0$;

г) записати відповідь: $F_1(u,v) = 0$.

ІІ спосіб:

а) виділити дійсну та уявну частини функції $w = f(z)$ (Задача 2): $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$;

б) скласти систему: $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$;

в) виключити із останньої системи x та y. Дістанемо рівняння образу лінії $\varphi(u,v)=0$;

г) записати <u>*відповідь*</u> $\varphi(u,v)=0$.

Часто буває так, що виключення x та y із останньої системи пов'язане з технічними труднощами. Тоді зручнішим стає перший спосіб.

Задача 4. Знайти прообраз лінії $\varphi(u,v)=0$ при відображенні $w = f(z)$.

Задача ***розв'язується*** у такий спосіб:

а) виділити дійсну та уявну частини функції $w = f(z)$ (Задача 2):

$u = u(x, y),\ v = v(x, y)$;

б) підставити знайдені величини у рівняння образу лінії, виконати всі зазначені там дії і дістати рівняння прообразу:

$f(u(x, y),\ v(x, y)) = F(x, y) = 0$;

в) записати <u>*відповідь*</u> $F(x, y) = 0$.

Задача 5. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $w = f(z)$. Знайти похідну $f'(z)$, якщо функція $f(z)$ диференційована.

Щоб *розв'язати* цю задачу потрібно:

а) виділити дійсну та уявну частини заданої функції (Задача 2):

$u = u(x, y),\ v = v(x, y)$;

б) знайти частинні похідні першого порядку від знайдених функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}.$$

в) скласти і розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases};$$

г) сформулювати *відповідь* умови Коші-Рімана виконуються у тих точках, які є розв'язками попередньої системи;

д) у випадку, коли в знайдених точках функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ диференційовані як функції двох дійсних змінних, комплексну похідну $f'(z)$ знайти шляхом диференціювання по z заданої функції, використовуючи відомі правила диференціювання, або знайти похідну за формулою:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

а потім перейти у правій частині до змінної z, використовуючи рівності:

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Аналогічно перевіряються умови Коші-Рімана в полярних координатах.

Задача 6. Задано функцію двох дійсних змінних $u = u(x, y)$. Знайти функцію $v = v(x, y)$, спряжену для $u = u(x, y)$, і скласти аналітичну функцію $w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$.

Розв'язання задачі передбачає здійснення таких кроків:

а) записати умови Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}.$$

Невідома функція $v = v(x, y)$ міститься у лівих частинах;

б) Знайти частинні похідні від заданої функції $u = u(x, y)$: $\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}$; записати знайдені вирази у правих частинах попередньої системи;

в) проінтегрувати перше рівняння системи по y; при цьому довільна стала буде функцією від x:

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(x);$$

Продиференціювати по x обидві частини останньої рівності і результат підставити у друге рівняння системи.

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\partial u}{\partial x}dy+\varphi(x)\right)=-\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{gathered};$$

д) з останнього рівняння знайти $\varphi(x)$ шляхом інтегрування по x і підставити у пункт в). Дістанемо функцію $v(x,y)$.

е) скласти вираз $w=u(x,y)+iv(x,y)$, перейти до змінної z за формулами $x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ і знайти аналітичну функцію

$$f(z)=u\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)+iv\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right).$$

Функція $f(z)$ визначається з точністю до сталої. Щоб цю сталу знайти, потрібно задати значення w_0 функції $f(z)$ у деякій точці z_0: $f(z_0)=w_0$.

У полярних координатах задача розв'язується аналогічно.

Задача 7. Перевірити основні властивості елементарних функцій.

Методика розв'язання цієї задачі подається для конкретних функцій окремо (див. §3).

Задача 8. Подати в алгебраїчній (тригонометричній) формі значення основних елементарних функцій в заданих точках.

Розв'язання цієї задачі ґрунтується на означеннях елементарних функцій і їх властивостях (див. §1).

§3 Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Виділити дійсну та уявну частини функції $w = z^2 + z - 1$.

Розв'язання. I спосіб.

а) подаємо z в алгебраїчній формі: $z = x + iy$;

б) підставляємо це значення в задану формулу і виконуємо справа зазначені операції:

$$w = 2(x+iy) + (x+iy) - 1 = x^2 + 2xiy + 2(iy) + x + iy - 1 = x^2 + 2xiy + y^2 + x + iy - 1 =$$
$$= (x^2 - y^2 + x - 1) + i(2xy + y)$$

в) перша група доданків, яка не містить уявної одиниці, утворює дійсну частину заданої функції, коефіцієнт біля числа i уявну.

$v = 2xy + y,\ u = x^2 - y^2 + x - 1$:

<u>*Відповідь*</u>. $u = u(x,y) = x^2 - y^2 + x - 1;$
$v = v(x,y) = 2xy + y.$

II спосіб. а) подаємо z у тригонометричній формі: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

б) підставляємо це значення в задану формулу і виконуємо справа всі зазначені там операції (піднесення до степеня здійснюємо за формулою Муавра):

$$w = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1 =$$
$$= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1 =$$
$$= (r^2\cos 2\varphi + r\cos\varphi - 1) + i(r^2\sin 2\varphi + r\sin\varphi);$$

в) група доданків, вільна від множника i, утворює дійсну частину, а коефіцієнт біля уявної одиниці – уявну частину функції.

<u>*Відповідь.*</u> $\begin{cases} u = u(r,\varphi) = r^2\cos 2\varphi + r\cos\varphi - 1, \\ v = v(r,\varphi) = r^2\sin 2\varphi + r\sin\varphi. \end{cases}$

Приклад 2. Виділити дійсну та уявну частини функції $w=\frac{\overline{z}}{z+1}$.

Розв'язання. а) $z=x+iy$; $\overline{z}=x-iy$;

б) $w=\frac{x-iy}{x+iy+1}=\frac{x-iy}{(x+1)+iy}$.

в) Для виконання ділення чисельник і знаменник дробу домножуємо на число, спряження до знаменника; при цьому враховуємо, що добуток двох взаємно спряжених комплексних чисел дорівнює сумі квадратів дійсної та уявної частин

$$w=\frac{(x-iy)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x(x+1)-ixy-iy(x+1)+i^2y^2}{(x+1)^2+y^2}=$$

$$=\frac{(x(x+1)-y^2)+i(-xy-y(x+1))}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x(x+1)-y^2}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{-xy-y(x+1)}{(x+1)^2+y^2}=$$

$$\frac{x^2+x-y^2}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{-2xy-y}{(x+1)^2+y^2}.$$

<u>*Відповідь.*</u> $u=\frac{x^2+x-y^2}{(x+1)^2+y^2}; v=\frac{-2xy-y}{(x+1)^2+y^2}$.

Зауваження. Операцію ділення у правій частині заданої формули можна було б здійснити у загальний спосіб, використовуючи при цьому властивості операції спряження:

$$w=\frac{\overline{z}}{z+1}=\frac{\overline{z}(\overline{z+1})}{(z+1)(\overline{z+1})}=\frac{\overline{z}(\overline{z}+\overline{1})}{(z+1)(\overline{z}+\overline{1})}=\frac{\overline{z}(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)}=$$

$$=\frac{\overline{z}^2+\overline{z}}{z\overline{z}+\overline{z}+z+1}=\frac{\overline{z}^2+\overline{z}}{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}.$$

Якщо тепер покласти

$z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy; z+\overline{z}=2x$; $z\overline{z}=x^2+y^2$; $\overline{z}^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-i2xy$;

то, отримуємо те ж саме, що і в пункті в):

$$w=\frac{x^2-y^2+i(-2xy)+x-iy}{x^2+y^2+2x+1}=\frac{x^2-y^2+x}{x^2+y^2+2x+1}+i\frac{-2xy-y}{x^2+y^2+2x+1}.$$

Приклад 3. Функція задана формулою $w=\frac{z+1}{z-i}$. Потрібно:

а) розв’язати останнє рівняння відносно z;

б) виділити дійсну та уявну частини z як функції від w.

Розв’язання.

а) $w(z-i)=z+1,\ wz-iw=z+1,\quad wz-z=iw+1,\quad z(w-1)=iw+1;$

$$z=\frac{iw+1}{w-1}.$$

б) $z=x+iy;\ w=u+iv;$

$$x+iy=\frac{i(u+iv)+1}{u+iv-1}=\frac{iu-v+1}{(u-1)+iv}=\frac{((1-v)+iu)((u-1)-iv)}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{(1-v)(u-1)-iv(1-v)+iu(u-1)+uv}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{(1-v)(u-1)+uv+i(u(u-1)-v(1-v))}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{u+v-1}{(u-1)^2+v^2}+i\frac{u^2-u+v^2-v}{(u-1)^2+v^2}.$$

$$x=\frac{u+v-1}{(u-1)^2+v^2};\ y=\frac{u^2-u+v^2-v}{(u-1)^2+v^2}.$$

<u>*Відповідь.*</u> а) $z=\frac{iw+1}{w-1}$. б) $x=\frac{u+v-1}{(u-1)^2+v^2}$; $y=\frac{u^2-u+v^2-v}{(u-1)^2+v^2}$.

Приклад 4.1. Знайти образ лінії $2x-y=4$ при відображенні $w=\frac{z-1}{z-2}$.

Розв’язання. а) Рівняння $w=\frac{z-1}{z-2}$. розв’язуємо відносно z:

$$w(z-2)=(z-1),\ wz-2w=z-1,\ wz-z=2w-1,\ z(w-1)=2w-1$$

$$z=\frac{2w-1}{w-1}$$

б) виділяємо дійсну та уявну частини z як функції від w:

$$z=x+iy;\ w=u+iv;$$

$$x+iy=\frac{2(u+iv)-1}{u+iv-1}=\frac{(2u-1)+2iv}{(u-1)+iv}=\frac{((2u-1)+2iv)((u-1)-iv)}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{2u(u-1)-iv(2u-1)+2iv(u-1)+2v^2}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{(2u^2-2u+2v^2)+i(2v(u-1)-v(2u-1))}{(u-1)^2+v^2}=$$

$$=\frac{(2u^2-2u+2v^2)+i(2uv-2v-2uv+v)}{(u-1)^2+v^2}=\frac{(2u^2-2u+2v^2)+i(-v)}{(u-1)^2+v^2};$$

$$x=\frac{2u^2-2u+2v^2}{(u-1)^2+v^2};\ y=\frac{-v}{(u-1)^2+v^2};$$

в) підставляємо знайдені величини x та y в рівняння заданої лінії. Дістаємо рівняння образу заданої лінії.

$$2\cdot\frac{2u^2-2u+2v^2}{(u-1)^2+v^2}-\frac{-v}{(u-1)^2+v^2}=4;$$

$$4u^2-4u+4v^2+v=4(u-1)^2+4v^2;$$

$$4u^2-4u+4v^2+v=4u^2-8u+4+4v^2;$$

$$-4u+v+8u-4=0;\ 4u+v-4=0.$$

<u>*Відповідь.*</u> Образом прямої $2x-y=4$ при заданому відображенні є пряма $4u+v\text{-}4=0$ (рисунок 6).

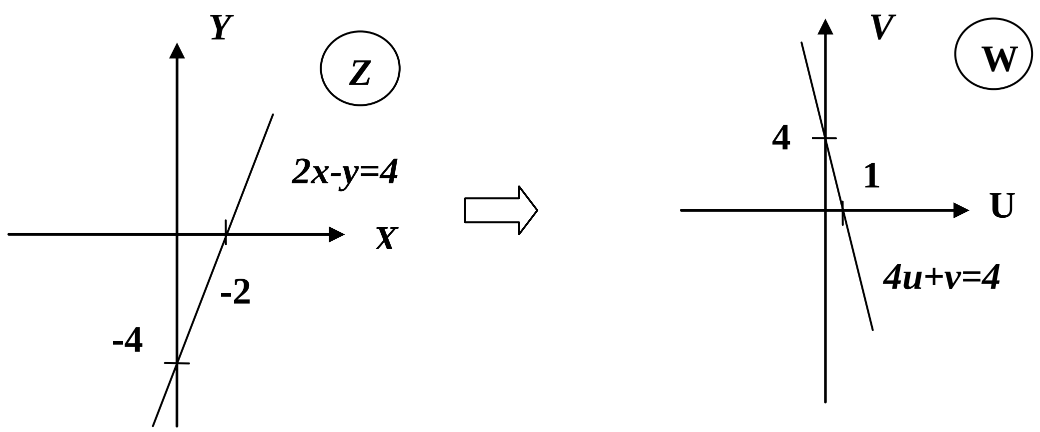


Рис. 6

Приклад 4.2. Задано відображення $w = iz^2 - z$.

Знайти: а) образ лінії $x = 1$;

б) образ лінії $y = -2$;

в) прообраз лінії $|w| = 1$.

Розв'язання. Виділяємо дійсну та уявну частини функції:

$$z = x + iy, \quad w = u + iv,$$

$$u + iv = i(x + iy)^2 - (x + iy) = i(x^2 + 2ixy - y^2) - x - iy = i(x^2 - y^2 - y) - 2xy - x,$$

$$u = -2xy - x, \; v = x^2 - y^2 - y.$$

а) знаходимо образ лінії $x = 1$:

$$\begin{cases} u = -2xy - x, \\ v = x^2 - y^2 - y \\ x = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} u = -2y - 1, \\ v = 1 - y^2 - y. \end{cases}$$

З останньої системи виключаємо параметр y

$$y = \frac{-u-1}{2}; \; v = 1 - \frac{(-u-1)^2}{4} - \frac{-u-1}{2};$$

$$v = 1 - \frac{u^2 + 2u + 1}{4} + \frac{u+1}{2} = \frac{4 - u^2 - 2u - 1 + 2u + 2}{4} = \frac{5 - u^2}{4};$$

дістали рівняння параболи.

б) знаходимо образ лінії $y = -2$:

$$\begin{cases} u = -2xy - x, \\ v = x^2 - y^2 - y \\ y = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} u = 4x - x = 3x \\ v = x^2 - 4 + 2 = x^2 - 2 \end{cases}$$

З останньої системи виключаємо параметр x:

$x = \dfrac{u}{3}; \; v = (\dfrac{u}{3})^2 - 2; \; v = \dfrac{u^2}{9} - 2$ – парабола

в) знаходимо прообраз кола $|w| = 1$:

$$|w|=\sqrt{u^2+v^2};\ (-2xy-x)^2+(x^2-y^2-y)=1.$$
$$4x^2y^2+4x^2y+x^2+x^4+y^4+y^2-2x^2y^2-2x^2y+2y^3=1$$
$$x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2y+x^2+y^2+2y^3=1$$
$$(x^2+y^2)^2+x^2+y^2+2y(x^2+y^2)=1$$
$$(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(2y+1)=1$$

Відповідь. а) парабола $v=\frac{1}{4}(5-u^2)$;

б) парабола $v=\frac{1}{9}u^2-2$;

в) лінія четвертого порядку $(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(2y+1)=1$

Приклад 5. Знайти прообраз лінії $u^2+2u+v^2=3$ при відображенні $w=\frac{z}{iz+1}$.

Розв'язання.

а) Зводимо рівняння кола до канонічного виду і знаходимо центр w_0 і радіус r кола: $(u+1)^2+v^2=4;\ w_0=-1;\ r=2$.

б) записуємо рівняння кола в комплексній формі:

$|w-w_0|=r;\ |w+1|=2$.

в) для заданої функції знаходимо:

$w+1=\frac{z}{iz+1}+1=\frac{z+iz+1}{iz+1}=\frac{z(1+i)+1}{iz+1}$ і підставляємо у рівняння кола. Дістаємо: $\left|\frac{z(1+i)+1}{iz+1}\right|=2$. Звідси $|z(1+i)+1|=2|iz+1|$.

г) $z=x+iy; z(1+i)+1=(x+iy)(1+i)+1=$

$=x+ix+iy-y+1=(x-y+1)+i(x+y);$

$|z(1+i)+1|=\sqrt{(x-y+1)^2+(x+y)^2};$

Аналогічно знаходимо:

$$iz+1=i(x+iy)+1=ix-y+1;$$
$$|iz+1|=\sqrt{(1-y)^2+x^2}$$

Маємо рівняння: $\sqrt{(x-y+1)^2+(x+y)^2}=2\sqrt{(1-y)^2+x^2}$.

Після необхідних перетворень остаточно дістаємо рівняння: $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=1$.

Це рівняння кола з центром у точці $(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ і радіусом $r=1$.

Задана лінія (образ) теж є колом з канонічним рівнянням $(u+1)^2+v^2=2^2$. Центр кола – у точці $(-1;0)$,а радіус кола дорівнює 2. (див. рисунок 7).

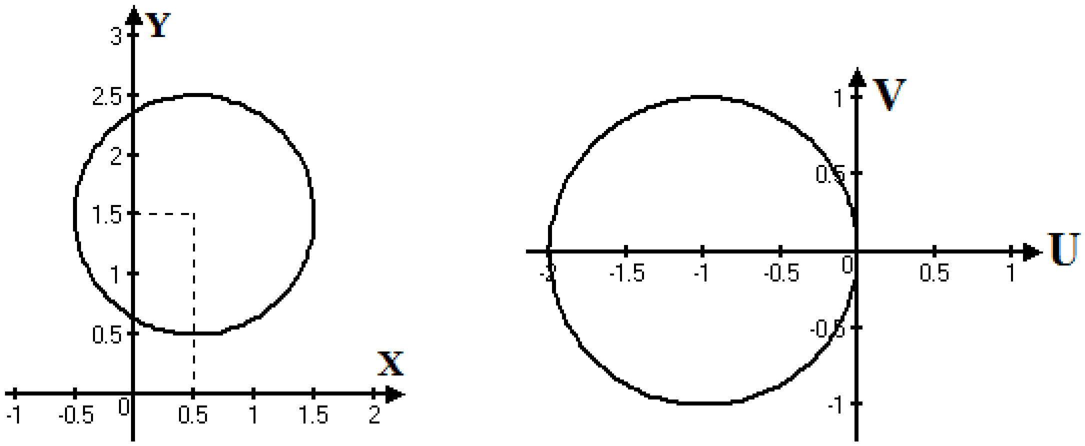


Рис. 7

Приклад 6. Задано функцію $w=\overline{z}$. Потрібно: 1) виділити дійсну та уявну частини функції; 2) перевірити виконання умов Коші-Рімана.

Розв'язання. а) $z=x+iy;\ \overline{z}=x-iy;\ u+iv=x-iy;\ u=x;\ v=-y;$

б) $\frac{\partial u}{\partial x}=1;\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=0;\ \frac{\partial v}{\partial x}=0$

в) Складаємо систему

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x};\end{cases}\ \begin{cases}1=-1\\ 0=0\end{cases}$$

Система не має розв'язків. Умови (C-R) не виконуються в жодній точці комплексної площини. Функція не є диференційованою в жодній точці.

Приклад 7. Дослідити на диференційованість функцію $w=z\cdot\overline{z}$.

Розв'язання. а) $z=x+iy;\overline{z}=x-iy;W=u+iv=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2;$

$u = x^2 + y^2; v = 0.$

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

в) Система: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$ x=0, y=0.

$x = 0$, $y = 0$ – розв'язок системи.

Умови (C-R) виконується тільки в одній точці $z_0 = 0.$

Оскільки u та v як функції двох дійсних змінних диференційовані на всій площині, бо мають неперервні частинні похідні, то задана функція $w = z \cdot \overline{z}$. комплексно диференційована тільки в одній точці $z = 0$, і тому не є аналітичною в цій точці.

Приклад 8. Дослідити на диференційованість функцію $w = z^3 + z + 1.$

Розв'язання. а) $z = x + iy;$

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 =$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3);$$

б) $w = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3) + x + iy + 1 =$

$= (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2 y - y^3 + y);$

$u = x^3 - 3xy^2 + x + 1; v = 3x^2 y - y^3 + y;$

в) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 1; \frac{\partial u}{\partial y} = -xy; \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy; \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1;$

г) система: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$ $\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 1 = 3x^2 - 3y^2 + 1, \\ -6xy = -6xy \end{cases}$

кожна точка $(x; y)$ є розв'язком останньої системи. Умови (C-R) виконуються на всій площині. Крім того, u та v є диференційованими функціями двох дійсних змінних на всій площині, бо мають неперервні частинні похідні. Тому задана функція $w = z^3 + z + 1$ диференційована на всій площині. Оскільки площина – область, то задана функція аналітична на всій площині.

Похідна заданої функції може бути знайдена, наприклад, за формулою:
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2+1+i\cdot 6xy=3(x^2+2ixy-y^2)+1=3(x+iy)^2+1=3z^2+1,$$
що співпадає з формальним диференціюванням заданої функції:

$w'=(z^3+z+1)'=3z^2+1.$

<u>*Відповідь.*</u> 1) функція диференційована на всій площині;

2) $w'=3z^2+1.$

Приклад 9. Задано функцію $w=z^3+z^2+z+1.$ Потрібно:

1) подати z в тригонометричній формі і виділити дійсну та уявну частини функції;

2) перевірити виконання умов Коші-Рімана, в полярних координатах.

Розв'язання. а) $z=r(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi);$

$$z^2=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi);$$
$$z^3=r^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi);$$

$$w=(r^3\cos 3\varphi+r^2\cos 2\varphi+r\cos\varphi+1)+i(r^3\sin 3\varphi+r^2\sin 2\varphi+2\sin\varphi);$$
$$u=r^3\cos 3\varphi+r^2\cos 2\varphi+r\cos\varphi+1; v=r^3\sin 3\varphi+r^2\sin 2\varphi+r\sin\varphi;$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\varphi+2r\cos 2\varphi+\cos\varphi;$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-3r^3\sin 3\varphi-2r^2\sin 2\varphi-r\sin\varphi;$$
$$\frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\sin 3\varphi+2r\sin 2\varphi+\sin\varphi;$$
$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=3r^3\cos 3\varphi+2r^2\cos 2\varphi+r\cos\varphi;$$

в) умови Коші-Рімана в полярних координатах:

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r},\frac{\partial v}{\partial \varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}.\right.$$

У даному випадку маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-3r^3\sin 3\varphi-2r^2\sin 2\varphi-r\sin\varphi=-r(3r^2\sin 3\varphi+2r\sin 2\varphi+\sin\varphi)=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=3r^3\cos 3\varphi+2r^2\cos 2\varphi+r\cos\varphi=r(3r^2\cos 3\varphi+2r\cos 2\varphi+\cos\varphi)=r\frac{\partial u}{\partial r};$$

Відповідь. Умови (C-R) виконується скрізь (крім точки $z=0$, де аргумент φ не визначено).

Приклад 10. перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $w=\dfrac{z+1}{z-i}$.

Розв'язання. а) $z=x+iy;\ w=u+iv;$

$$u+iv=\frac{x+iy+1}{x+iy-i}=\frac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)}=\frac{((x+1)+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x(x+1)+y(y-1)+i(4x-x(y-1))}{x^2+(y-1)^2};$$

$$u=\frac{x^2+x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2};v=\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(2x+1)(x^2+(y-1)^2)-(x^2+x+y^2-y)2x}{(x^2+(y-1)^2)^2}=\dfrac{-x^2+2x-2xy+y^2-2y+1}{(x^2+(y-1)^2)^2};$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2+2x-2xy-y^2+2y-1}{(x^2+(y-1)^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-x^2-2x+2xy+y^2-2y+1}{(x^2+(y-1)^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2+2x-2xy-y^2+2y-1}{(x^2+(y-1)^2)^2}$$

в) порівнюючи знайдені частині похідні, стверджуємо, що умови Коші-Рімана виконуються скрізь, крім точки $x=0,\ y=1$, де знаменник дорівнює нулеві.

Приклад 11. Знайти області, в яких функція $W=|x-y|+i|x+y|$ аналітична.

Розв'язання. Для розкриття модулів розглядаємо чотири логічно можливих випадки:

I. $\begin{cases} x-y>0, \\ x+y>0, \\ w=(x-y)+i(x+y). \end{cases}$

II. $\begin{cases} x-y>0, \\ x+y<0, \\ w=x-y+i(-x-y) \end{cases}$

III. $\begin{cases} x-y<0, \\ x+y>0, \\ w=y-x+i(x+y) \end{cases}$

IV. $\begin{cases} x-y<0, \\ x+y<0, \\ w=y-x+i(-x-y) \end{cases}$

Кожна нерівність окремо визначає деяку півплощину; межею цієї півплощини є пряма з відповідним рівнянням.

Система нерівностей визначає спільну частину півплощин.

1. $x-y>0-$ це одна з двох півплощин, утворених прямою $x-y=0$. Для визначення цієї півплощини поступаємо так:

а) беремо довільну конкретну точку (контрольну), яка не лежить на прямій, наприклад $A(0;1)$;

б) підставляємо координати цієї точки у початкову нерівність: якщо при цьому дістанемо вірну нерівність, то взята нами точка лежить у шуканій півплощині; якщо ж – хибну, то потрібно брати півплощину по інший бік від межі (див. рисунок 8).

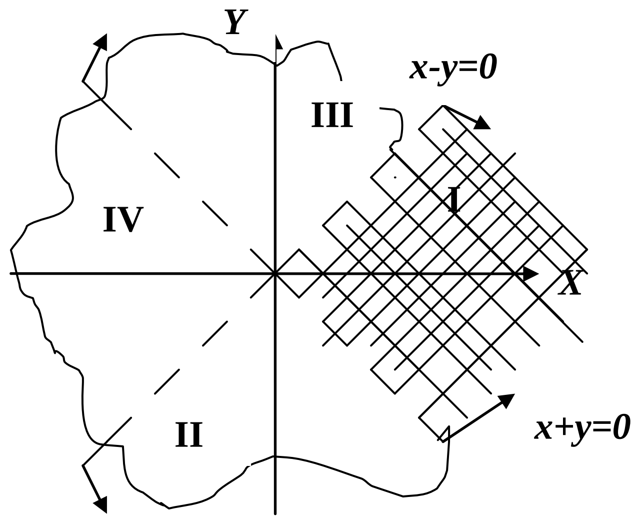


Рис. 8

У даному випадку маємо: $0-1>0$ (хибна нерівність); шуканою півплощиною є та, що не містить точку A.

Для другої нерівності міркування аналогічні.

а) $B(1;0)$ – конкретна точка;

б) $1+0>0$ – правильна нерівність;

Півплощина вказана стрілками.

Таким чином, система I визначає область, вказану на рисунку – це один з чотирьох вертикальних кутів, утворених прямими: $x-y=0$ і $x+y=0$. Аналогічно визначаємо кути, які відповідають іншим системам (рисунок 8).

Досліджуємо на аналітичність задану функцію у кожній з чотирьох областей:

I. $w=(x-y)+i(x+y)\,;u=x-y\,;\ v=x+y\,;$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\frac{\partial u}{\partial y}=-1;\frac{\partial v}{\partial x}=1;\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

Виконується умова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=1\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=1=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

В області I задана функція аналітична.

II. $w = x - y + i(-x - y)$; $u = x - y$; $v = -x - y$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = -1; \frac{\partial v}{\partial x} = -1; \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

Умови (C – R): $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = -1, \\ -1 = -(-1) \end{cases}$

Умови не виконуються в жодній точці. В області II задана функція не є аналітичною. Аналогічно встановлюємо, що функція аналітична в області IV і не є аналітичною в III.

Відповідь. Задана функція аналітична в областях I і IV.

Приклад 12. Задано функцію $u = x^3 + 6x^2 - 3xy^2 - 2y^3$. Чи є ця функція гармонічною?

Розв'язання. а) Знаходимо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 12y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x - 12y;$$

б) Знаходимо $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + 12x + (-6x - 12y) = 0$.

Відповідь. Задана функція гармонічна на всій площині.

Приклад 13. Задано функцію $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$. Потрібно:

1) знайти дійсну та уявну частини функції;

2) переконатись, що вони задовольняють рівняння Лапласа.

Розв'язання. 1) а) $z = x + iy; f(z) = u + iv$;

б)

$$u+iv=\frac{1}{x+iy+1}=\frac{1}{(x+1)+iy}=\frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+i\cdot\frac{-y}{(x+1)^2+y^2};$$

$$u(x,y)=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2};v(x,y)=\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}$$

2) а) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(x+1)^2+y^2-(x+1)2(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2}=\frac{y^2-(x+1)^2}{((x+1)^2+y^2)^2};$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-2(x+1)((x+1)^2+y^2)^2-(y^2-(x+1)^2)\cdot 2((x+1)^2+y^2)2(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{-2(x+1)\cdot\left\{(x+1)^2+y^2+2(y^2-(x+1)^2)\right\}}{((x+1)^2+y^2)^3}=\frac{-2(x+1)(3y^2-(x+1)^2)}{((x+1)^2+y^2)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+1}{((x+1)^2+y^2)^2}2y=-2\frac{(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2(x+1)\frac{((x+1)^2+y^2)^2-y\cdot 2((x+1)^2+y^2)2y}{((x+1)^2+y^2)^4}=$$

$$=-2(x+1)\frac{(x+1)^2+y^2-4y^2}{((x+1)^2+y^2)^3}=-2(x+1)\frac{(x+1)^2-3y^2}{((x+1)^2+y^2)^3}=\frac{2(x+1)(3y^2-(x+1)^2)}{((x+1)^2+y^2)^3}$$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Аналогічно переконуємось, що $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

Приклад 14. Задано функцію двох дійсних змінних: $u=x^2-y^2+xy$. Потрібно: 1) переконатись, що u – гармонічна;

2) знайти функцію v, спряжену для u;

3) скласти аналітичну функцію $w=u+iv$.

Розв'язання. 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2;\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2;$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2+(-2)=0.$$

Функція u – гармонічна (на всій площині).

2) Якщо v – спряжена для u, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$2x + y = \frac{\partial v}{\partial y}; -2y + x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$$

з першої рівності:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x) = \int (2x + y) dy + \varphi(x) = 2xy + \frac{1}{2} y^2 + \varphi(x);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x);$$

На основі цієї рівності і другої рівності $(*)$ маємо:

$-2y + x = -2y - \varphi'(x);\ \varphi'(x) = -x; \quad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C;$ Таким чином, $v = 2xy + \frac{1}{2} y^2 - \frac{x^2}{2} + C$.

3) Складаємо аналітичну функцію

$$w = u + iv = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + C) = (x^2 - y^2 + 2ixy) +$$

$$+(xy\frac{1}{2} iy^2 - \frac{1}{2} ix^2) + Ci = (x + iy)^2 - \frac{1}{2} i(x^2 + 2ixy - y^2) + Ci =$$

$$= (x + iy)^2 - \frac{1}{2} i(x + iy)^2 + Ci = z^2 - \frac{1}{2} iz^2 Ci = (1 - \frac{1}{2} i) z^2 + Ci$$

__Відповідь.__ а) $v = 2xy + \frac{1}{2} y^2 - \frac{x^2}{2} + C$;

б) $w = u + iv = (1 - \frac{1}{2} i) z^2 + Ci$, C – довільна стала.

Приклад 15. Знайти аналітичну функцію $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо $v = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ і $w(2) = 0$.

Розв'язання. а) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};\ (*)$

б) $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - (x + y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2};$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-y^2 - 2xy + x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

в) з останньої рівності і першої рівності (*) дістаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y^2 - 2xy + x^2}{(x^2+y^2)^2}; \text{ звідси}$$

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int \frac{-y^2 - 2xy + x^2}{(x^2+y^2)^2} dx + \varphi(y) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = ytgt \\ dx = y\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ \qquad tgt = \dfrac{x}{y} \end{array} \right| = \int \frac{(-y^2 - 2y^2 tgt + y^2 tg^2 t)}{y^4(1+tg^2 t)^2} \cdot y\frac{dt}{\cos^2 t} + \varphi(y) =$$

$$= \int \frac{-1-2tgt+tg^2 t}{y} \cos^4 t \frac{dt}{\cos^2 t} + \varphi(y) =$$

$$= \frac{1}{y}\int (-1-2tgt+tg^2 t)\cos^2 t dt + \varphi(y) = \frac{1}{y}\int (-1-2\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t})\cos^2 t dt + \varphi(y) =$$

$$= \frac{1}{y}\int (-\cos^2 - 2\sin t \cos t + \sin^2) dt + \varphi(y) = -\frac{1}{y}\int (\cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t \cos t) dt + \varphi(y) =$$

$$= -\frac{1}{y}\int (\cos 2t + \sin 2t) dt + + \varphi(y) = -\frac{1}{y}(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t) + \varphi(y).$$

Враховуючи, що

$$\sin 2t = \frac{2tgt}{1+tg^2} = \frac{2\dfrac{x}{y}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \cos 2t = \frac{1-tg^2 t}{1+tg^2} = \frac{1-\dfrac{x^2}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2},$$

отримуємо :

$$u = -\frac{1}{y}(\frac{1}{2}\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}) + \varphi(y) =$$

$$= -\frac{1}{y}\cdot\frac{2xy - y^2 + x^2}{2(x^2+y^2)} + \varphi(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2 - 2xy - x^2}{y(x^2+y^2)} + \varphi(y).$$

Для знаходження $\varphi(y)$ скористаємось останньою рівністю та другою рівністю (*):

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-(\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2})=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad (**).$$

Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-2xy-x^2}{y(x^2+y^2)}+\varphi(y)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2-2xy-x^2}{x^2y+y^3}\right)+\varphi'(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2y-2x)y(x^2+y^2)-(y^2-2xy-x^2)(x^2+3y^2)}{y^2(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)=$$

$$=\frac{4x^2y^2+4xy^3-y^4+x^4}{2y^2(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)$$

Враховуючи (**), отримуємо:

$$\frac{4x^2y^2+4xy^3-y^4+x^4}{2y^2(x^2+y^2)^2}+\varphi(y)=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\varphi'(y)=-\frac{4x^2y^2+4xy^3-y^4+x^4-2y^2(x^2+2xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2 2y^2}=$$

$$=-\frac{2x^2y^2+y^4+x^4}{2y^2(x^2+y^2)^2}=-\frac{(x^2+y^2)^2}{2y^2(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{2y^2};$$

звідси $\varphi(y)=\dfrac{1}{2y}+C.$

Таким чином $u=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{2y(x^2+y^2)}+\dfrac{1}{2y}+C=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}+C.$

Записуємо шукану аналітичну функцію:

$$w=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2}+i\frac{x+y}{x^2+y^2}+C.$$

Переходимо до комплексної форми запису чисел: $z=x+iy, \bar{z}=x-iy, z\bar{z}=x^2+y^2.$

Дістанемо:

$$w=\frac{y-x+ix+iy}{z\overline{z}}+C=\frac{(y+ix)-(x-iy)}{z\overline{z}}+C=$$
$$=\frac{i(x-iy)-(x-iy)}{z\overline{z}}+C=\frac{i\overline{z}-\overline{z}}{z\overline{z}}+C=\frac{i-1}{z}+C$$

Сталу C знаходимо з умови $w(2)=0$.

$$o=\frac{i-1}{2}+C;C=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i.$$

<u>*Відповідь.*</u> $w=\frac{i-1}{z}+1+i.$

Зауваження. Використання умов Коші-Рімана в декартових координатах у цьому прикладі виявилося дещо громіздким. Якщо перейти до полярних координат, то дістанемо:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$
$$v=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{r^2}=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{r};$$
$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial\varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

– умови (C-R) в полярних координатах.

Тепер маємо:

а) $\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{-\sin\varphi+\cos\varphi}{r};\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}(\cos\varphi+\sin\varphi);$

б) $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r(-\frac{1}{r^2}(\cos\varphi+\sin\varphi))=\frac{1}{r}(\cos\varphi+\sin\varphi),$
$r\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{r};\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r^2}(-\sin\varphi+\cos\varphi);$

в) $u=\int\frac{\partial u}{\partial\varphi}d\varphi+\alpha(r)=\int\frac{1}{r}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi+\alpha(r)=\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\alpha(r);$

г) $\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\alpha'(r);$
$\frac{1}{r^2}(-\sin\varphi+\cos\varphi)=-\frac{1}{r^2}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\alpha'(r).$

Звідси $\alpha'(r)=0;\alpha(r)=C.$

д) $u=\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)+C;$

$$w=u+iv=\frac{1}{r}(\sin\varphi-\cos\varphi)+C+i\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{r}=$$
$$=\frac{\sin\varphi-\cos\varphi+i\cos\varphi+i\sin\varphi}{r}+C=$$
$$=\frac{(-\cos\varphi+i\sin\varphi)+i(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r}+C=$$
$$=\frac{(i-1)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{r}+C=$$
$$=\frac{(i-1)(\cos\varphi-i\sin\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}+C=\frac{i-1}{z}+C;$$

Сталу C знаходимо за умови $w(z)=0$: $C=1+i.$

Остаточно маємо: $w=\frac{i-z}{z}+1+i.$

Приклад 16:

Задано лінійне відображення. $w=(1-i)z+(2+i)$

Знайти:

1) нерухому точку відображення;
2) образ точки $z=-2+4i$ при цьому відображенні;
3) подати геометричну ілюстрацію.

Розв'язання.

1) Нерухому точку знаходимо з рівняння $z_0=(1-i)z_0+(2+i)$;

$z_0(1-1+i)=2+i,$

$z_0 i=2+i,$

$z_0=\frac{(2+i)}{i}=1-2i$

$z_0=1-2i$ − нерухома точка;

2) Образ точки $z=-2+4i$:

$w=(1-i)(-2+4i)+2+i=-2+4i+2i+4+2+i=4+7i$;

3) Геометрична ілюстрація: коефіцієнт біля z

$a = 1 - i; |a| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \arg a = -\frac{\pi}{4}$;

Щоб дістати w потрібно вектор $z - z_0$ повернути навколо z_0 на кут $(-\frac{\pi}{4})$ (за стрілкою годинника) і розтягнути в $\sqrt{2}$ раз (рисунок 9).

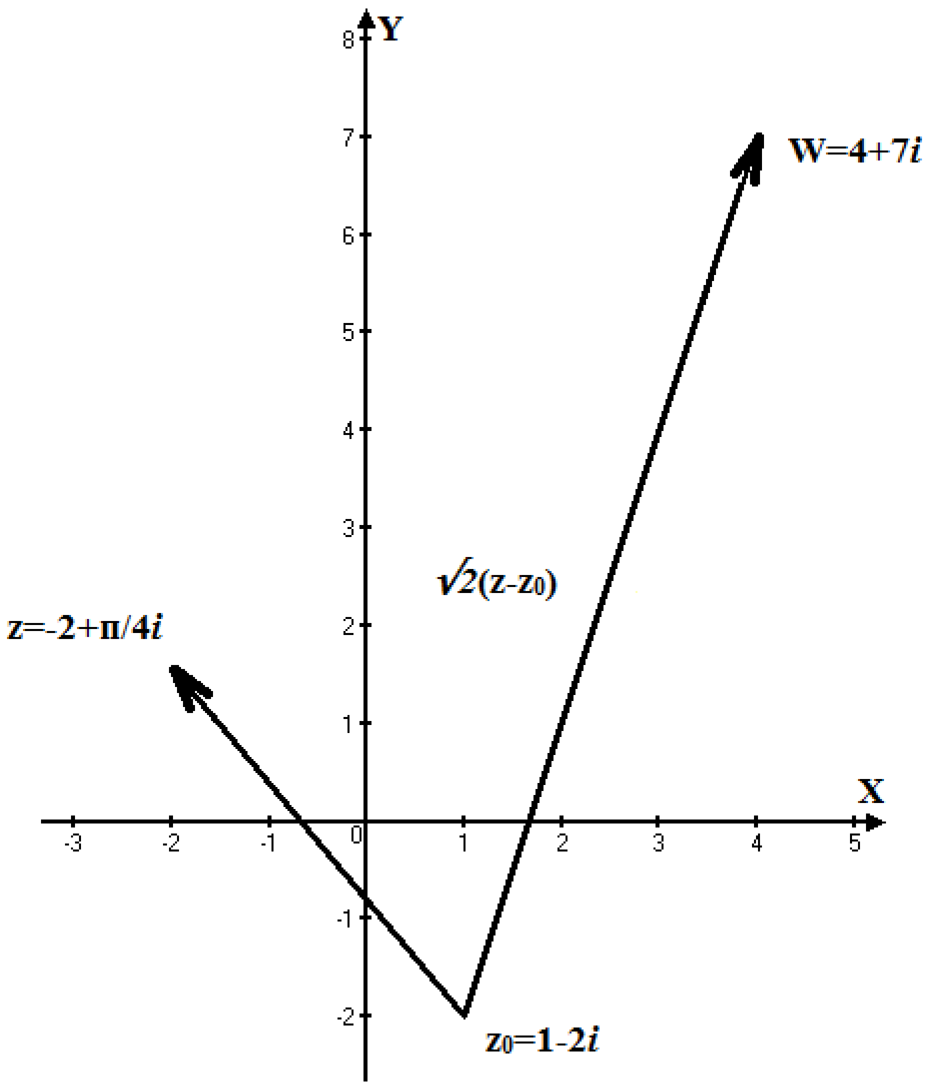


Рис. 9

Приклад 17

Знайти дробово-лінійну функцію, яка точки $z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = i$ відображає відповідно в точки $w_1 = 0; w_2 = 1+i; w_3 = -3.$

Розв'язання.

Шукане відображення визначається співвідношенням:

$$\frac{w-0}{w-(1+i)} : \frac{-3-0}{-3-(1+i)} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{-i-1}{-i-1}$$

$$\frac{w}{w-(1+i)} : \frac{-3}{-4-i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{-i-1}{-2i}$$

$$\frac{w}{w-(1+i)} : \frac{3}{4+i} = \frac{z-1}{z-i} : \frac{i+1}{-2i}$$

$$\frac{w}{w-(1+i)}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{3}{4+i}\cdot\frac{2i}{i+1}$$

$$\frac{w}{w-(1+i)}=\frac{z-1}{z-i}:\frac{6i}{3+5i}$$

$$\frac{w}{1+i}=\frac{6i(z-1)}{6i(z-1)-(3+5i)(z-i)}$$

(тут застосовуємо похідну пропорцію: якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,то $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c-d}$)

$$w=(1+i)\frac{6i(z-1)}{(i-3)z-(5+3i)}$$

$$w=\frac{6i(i-1)(z-1)}{(i-3)z-(5+3i)}=\frac{6(1+i)(z-1)}{(3-i)z+(5+3i)}$$

Відповідь. $w=\frac{6i(i-1)(z-1)}{(i-3)z-(5+3i)}$

Приклад 18.

Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає пряму $x+y=1$ в пряму $2u-3v=6$.

Розв'язання.

а) Беремо довільні три точки , які лежать на прямій $x+y=1$:

при цьому перші координати точок беремо довільно, а другі – визначаємо з рівняння $y=1-x$:

x	0	-2	3
$y=1$ - x	1	3	-2

Отже

$$z_1=x_1+iy_1=0+i\cdot1=i,$$
$$z_2=x_2+iy_2=-2+i\cdot3=-2+3i,$$
$$z_3=x_3+iy_3=3-2i,$$

б) Беремо довільні три точки, які лежать на прямій $2u-3v=6$ (аналогічно).

u	0	3	3/2
$v=\dfrac{2u-6}{3}$	-2	0	-1

$$w_1=u_1+iv_1=0+i(\text{-}2)=\text{-}2i,$$
$$w_2=u_2+iv_2=3+i\cdot 0=3,$$
$$w_3=u_3+iv_3=\frac{3}{2}\ +\ i(\text{-}1)=1{,}5\text{ - }i.$$

в) Знаходимо дробово-лінійне відображення, яке точки z_1, z_2, z_3 переводить відповідно в точки w_1, w_2, w_3, із співвідношення:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

У даному випадку маємо:

$$\frac{w+2i}{w-3}:\frac{1{,}5-i-2i}{1{,}5-i-3}=\frac{z-i}{z+2-3i}:\frac{3-2i-i}{3-2i+2-3i};$$

$$\frac{w+2i}{w-3}:\frac{1{,}5-3i}{-1{,}5-i}=\frac{z-i}{z+2-3i}:\frac{3-3i}{5-5i};$$

$$\frac{w+2i}{w-3}=\frac{z-i}{z+2-3i}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1{,}5-3i}{-1{,}5-i};$$

$$\frac{w+2i}{w-3}=\frac{z-i}{z+2-3i}\cdot\frac{5}{13}(1+8i).$$

Відповідь. Шукане відображення визначається останньою рівністю.

Приклад 19.

Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає пряму $x+y=1$ на коло $u^2+v^2=1$.

Розв'язання.

а) Рисунок 10:

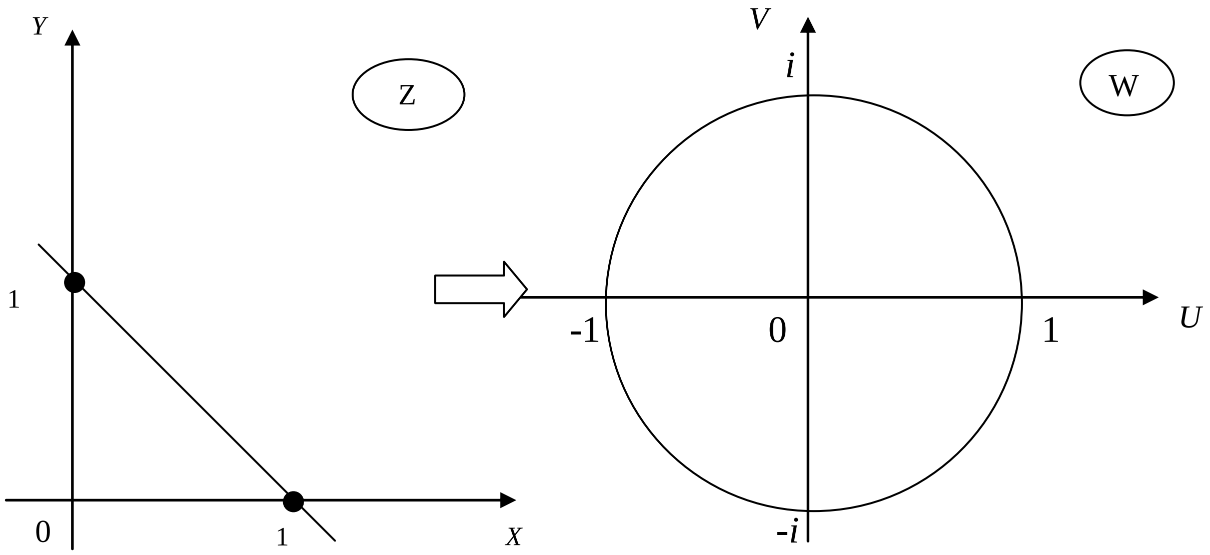


Рис.10

б) На прямій $x+y=1$ беремо довільні три точки, наприклад:

$$z_1=1;\ z_2=i;\ z_3=\infty;$$

в) На колі $|w|=1$ беремо три довільні точки, наприклад:

$$w_1=i;\ w_2=-1;\ w_3=-i\ ;$$

г) Знаходимо дробово-лінійну функцію, яка переводить точки z_k в точки w_k, $k=1,2,3$: $z_1\to w_1;\ z_2\to w_2;\ z_3\to w_3$.

Користуємося співвідношенням:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2};$$

При цьому різниці, які містять нескінченність, заміняємо одиницями. Отримаємо:

$$\frac{w-i}{w-(-i)}:\frac{-i-i}{-i-(-1)}=\frac{z-1}{z-i};$$

$$\frac{w-i}{w+i}:\frac{-2i}{1-i}=\frac{z-1}{z-i};$$

$$\frac{w-i}{w+i}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-2i}{1-i};$$

$$\frac{w-i}{w+i}=\frac{z-1}{z-i}\cdot(1-i).$$

Розв’язуємо останнє рівняння відносно W:

$$\begin{aligned}
&(w+i)(z-i)=(w+1)(z-1)(1-i),\\
&w(z-i)-i(z-i)=w(z-1)(1-i)+(z-1)\ (1-i)\\
&w(z-i)-(1-i)(z-1)=i(z-i)+(z-1)(1-i),\\
&w(z-i-z(1-i)+(1-i))=iz+1+z(1-i)-(1-i),\\
&w(iz+1-2i)=z+i,
\end{aligned}$$

$$w=\frac{z+i}{iz+(1-2i)}.$$

<u>*Відповідь.*</u> $w=\dfrac{z+i}{iz+(1-2i)}.$

Приклад 20.

Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає коло $|z-i|=1$ в коло $|w-1-i|=\sqrt{2}$.

Розв’язання.

а) Рисунок 11:

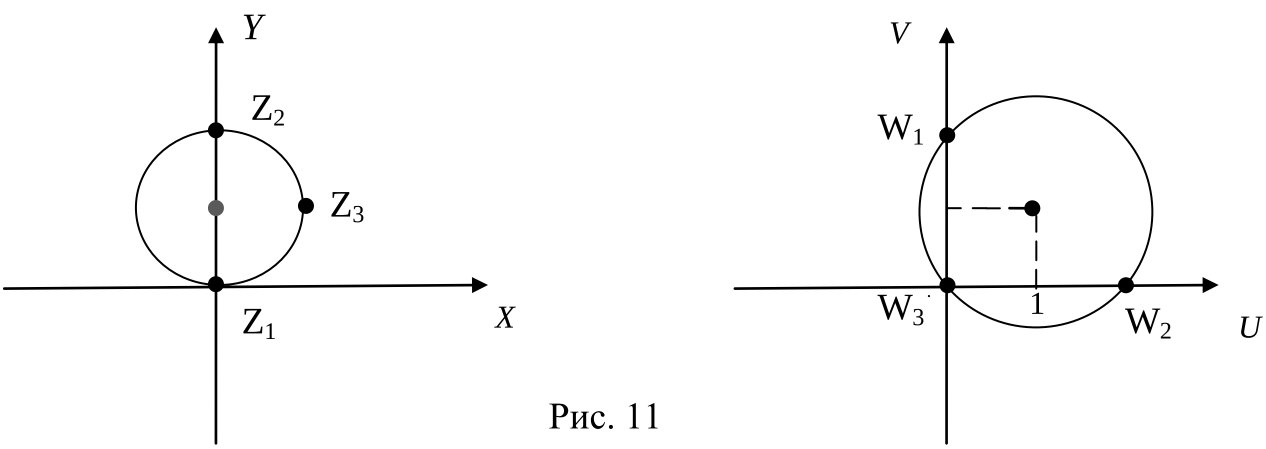


Рис. 11

б) На колі $|z-i|=1$ беремо довільні три точки, наприклад: $z_1=0;\ z_2=2i;\ z_3=1+i$;

в) На колі $|w-1-i|=\sqrt{2}$ беремо довільні три точки, наприклад: $w_1=2i;\ w_2=2;\ w_3=0$;

д) Знаходимо дробово-лінійну функцію, яка точки z_k перетворить відповідно точки w_k, $k=1,2,3$ із співвідношення:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

У даному випадку маємо:

$$\frac{w-2i}{w-2}:\frac{0-2i}{0-2}=\frac{z-0}{z-2i}:\frac{1+i-0}{1+i-2i};\ \ \frac{w-2i}{w-2}:i=\frac{z}{z-2i}:\frac{1+i}{1-i};$$

$$\frac{w-2i}{w-2}:i=\frac{z}{z-2i}:i;\ \ \frac{w-2i}{w-2}=\frac{z}{z-2i}.$$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно w:

$$(w-2i)(z-2i)=(z-2i)z,$$
$$w(z-2i)-2i(z-2i)=wz-2z,$$
$$w(z-2i-z)=-2z+2i(z-zi),$$
$$-2iw=-2z+2iz+4,$$
$$-2iw=z(2i-2)+4,$$

$$w=\frac{z(2i-2)+4}{-2i}=(-1-i)z+2i;$$

Відображення, яке обрані нами точки z_k переводить відповідно у точки w_k, $k=1,2,3$ є лінійним.

Відповідь. $w=(-1-i)z+2i$.

Зауваження. Саме вибір точок z_k і w_k зумовив таку ситуацію, коли відображення звелось до перетворення подібності (лінійного відображення).

У загальному випадку така ситуація не обов'язкова. Однак, якщо $\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$, то w – лінійна функція від z.

Приклад 21.

Знайти точку, симетричну точці $M_1(1;2)$ відносно прямої $2x-5y=10$.

Розв'язання.

а) Нехай $M_2(x;y)$ – шукана точка, тоді виконуються дві умови:

1) Пряма M_1M_2 перпендикулярна заданій прямій;

2) Середина відрізка M_1M_2 лежить на заданій прямій (координати середини відрізка M_1M_2 задовольняють задане рівняння).

б) $k_1=\frac{2}{5}$ – кутовий коефіцієнт заданої прямої;

k_2 – кутовий коефіцієнт заданої прямої M_1M_2;

в) $k_2\cdot k_1=-1$ – умова перпендикулярності прямих, з якої знаходимо $k_2=-\frac{5}{2}$;

г) рівняння прямої M_1M_2 як рівняння прямої, що проходить через задану точку: $y-2=-\frac{5}{2}(x-1)$.

Звідси маємо:

$$2y-4=-5x+5,$$
$$2y+5x=9.$$

д) Знаходимо точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases}2x-5y=10\\5x+2y=9\end{cases}$$

$$x=\frac{65}{29},\ y=-\frac{32}{29}$$

е) $A(\frac{65}{29},-\frac{32}{29})$ – середина відрізка M_1M_2,

тому $\frac{x_{M_1}+x_{M_2}}{2}=x_A$; $\frac{y_{M_1}+y_{M_2}}{2}=y_A$, $\frac{1+x_{M_2}}{2}=\frac{65}{29}$; $\frac{1+y_{M_2}}{2}=\frac{65}{29}$;

Звідси отримуємо: $x_{M_2} = \frac{101}{29}$; $y_{M_2} = -\frac{122}{29}$.

<u>*Відповідь.*</u> $M_2(\frac{101}{29}; -\frac{122}{29})$ – точка, симетрична точці $M_1(1;2)$ відносно прямої $2x - 5y = 10$ (див. рисунок 12)

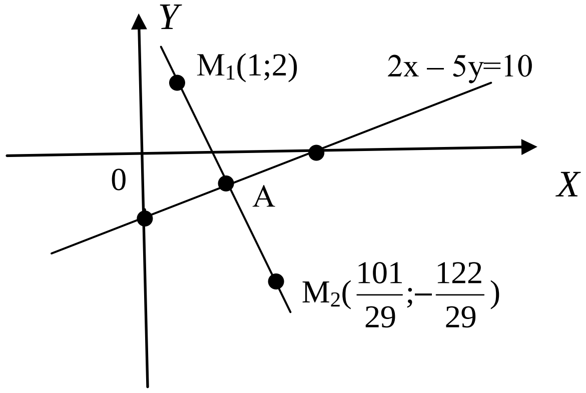


Рис. 12

Приклад 22.

Знайти точку z_1, симетричну точці z_2 відносно заданого кола $|z| = R$.

Розв'язання. Аргументи точок z_1 і z_2 рівні (або відрізняються на $2\pi k$). Нехай їх модулі дорівнюють відповідно r_1 і r_2. Тоді:

$$\begin{cases} z_1 = r_1\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi), \\ z_2 = r_2\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi), \\ r_1 \cdot r_2 = R^2 \end{cases}$$

$$r_2 = \frac{R^2}{r_1}$$

$$z_2 = \frac{R^2}{r}\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi).$$

Оскільки $\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{z_1}{r_1}$,

то $z_2 = \frac{R^2}{r_1} \cdot \frac{z_1}{r_1} = \frac{R^2}{r_1^2} \cdot z_1 = \frac{R^2}{z_1 \cdot \overline{z}_1} \cdot z_1 = \frac{R^2}{\overline{z}_1}$.

<u>Відповідь.</u> Точка z_2, симетрична точці z_1 відносно кола $|z| = R$, подається рівністю $z_2 = \dfrac{R^2}{\overline{z}_1}$ незалежно від того, ззовні чи усередині кола лежить точка z_1.

Точка z_2, симетрична точці z_1 відносно кола $|z - a| = R$ подається рівністю: $z_2 - a = \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$ або $z_2 = a + \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$.

Якщо, наприклад, $z_1 = 2 + i$, а коло $|z| = 3$, то

$$z_2 = \frac{3^2}{\overline{2+i}} = \frac{9}{2-i} = \frac{9(2+i)}{4+1} = \frac{9}{5}(2+i) = \frac{18}{5} + \frac{9}{5}i$$

Приклад 24. Задано коло $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ і точку $M_1(-5;2)$.

Знайти: 1) точку M_2 симетричну точці M_1 відносно заданого кола;

2) образи точок M_1 і M_2 при відображенні $w = \dfrac{z+i}{z-i}$;

3) образ заданого кола при заданому відображенні;

4) перевірити симетричність образів точок M_1 і M_2 відносно образу кола.

Розв'язання.

а) рівняння кола подаємо в канонічній формі і знаходимо центр і радіус кола:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 4 + 9;$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{13})^2.$$

б) центру кола відповідає комплексне число $a = 2 - 3i$; точці M_1 – число $z_1 = -5 + 2i$; точці M_2 – число z_2;

в) знаходимо точку, симетричну точці z_1, відносно кола за формулою (див. приклад 22):

$z_2 = \dfrac{R_1^2}{\overline{z}_1 - \overline{a}} + a;$ маємо:

$$z_2 = \frac{13}{(-5+2i-2+3i)} + 2-3i = \frac{13}{-7-5i} + 2-3i =$$

$$= \frac{13(-7+5i)}{49+25} + 2-3i = \frac{-91+65i+148-222i}{74} = \frac{57-157i}{74}.$$

г) знаходимо образи точок z_1 і z_2 при заданому відображенні:

$$w_1 = w(z_1) = \frac{z_1+i}{z_1-i} = \frac{-5+2i+i}{-5+2i-i} = \frac{-5+3i}{-5+i} = \frac{(-5+3i)(-5-i)}{26} = \frac{14-5i}{13};$$

$$w_2 = \frac{z_2+i}{z_1+i} = \frac{74z^2+74i}{74z^2-74i} = \frac{57-157i+74i}{57-157i-74i} = \frac{57-83i}{57-231i} =$$

$$= \frac{(57-83i)(57+231i)}{57^2+231^2} = \frac{6(3737+1406i)}{56610} =$$

$$= \frac{3737+1406i}{9435} = \frac{101+38i}{255};$$

д) знаходимо образ заданого кола при заданому відображенні:

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

Звідси знаходимо $z = i\dfrac{w+1}{w-1}$;

$|z-(2-3i)| = \sqrt{13}$ – коло.

$$|z-(2-3i)| = \left|\frac{iw+i-(2-3i)(w-1)}{w-1}\right| = \left|\frac{iw+i-(2-3i)w+2-3i}{w-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{w(-1+4i)+2-2i}{w-1}\right| = \sqrt{13}.$$

$$|w(-2+4i)+2-2i| + 2-2i = \sqrt{13}|w-1|;$$

$$w = u+iv;$$

$$w(-2+4i) = (u+iv)(-2+4i) = -2u-4v+i(-2v+4u);$$

$$w(-2+4i)+2-2i = -2u-4v+2+i(-2v+4u-2);$$

$$|w(-2+4i)+2-2i|^2 = (-2u-4v+2)^2 + (-2v+4u-2)^2;$$

аналогічно знаходимо:

$|w-1|^2 = |(u-1)+iv|^2 = (u-1)^2+v^2.$

Маємо рівняння образу кола:

$$(-2u-4v+2)^2+(-2v+4u-2)^2=13((1-u)^2+v^2);$$
$$4u^2+16v^2+4+16uv+8u-16v+4v^2+16u^2+4-16uv+8v-16u=$$
$$=13u^2-26u+13+13v^2;$$
$$7u^2+7v^2+2u-8v=5;$$
$$\left(u+\frac{1}{7}\right)^2+\left(v-\frac{4}{7}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{13}}{7}\right)^2.$$

Образом заданого кола при відображенні є також коло; центр кола – в точці $\left(-\frac{1}{7};\frac{4}{7}\right)$; радіус кола $R_2=\frac{2\sqrt{13}}{7}$.

е) центр кола є зображенням комплексного числа $b=-\frac{1}{7}+i\frac{4}{7}$; коло подаємо у комплексній формі: $|w-b|=R_2$. Перевіряємо дві умови:

а) $|w_1-b|\cdot|w_2-b|=R^2$;

б) $\arg(w_1-b)=\arg(w_2-b)$.

Маємо: а)

$$|w_1-b|=\frac{3}{91}|37-29i|;$$
$$|w_1-b|=\frac{26}{21\cdot 85}|37-29i|;$$

добуток модулів дорівнює: $\frac{3}{91}\cdot 2210\cdot\frac{26}{21\cdot 85}=\frac{52}{49}=R_2^2$..

б) $\arg(w_1-b)-\arg(w_2-b)=\arg\ \frac{w_1-b}{w_2-b}=\arg\frac{3(37-29i)\cdot 21\cdot 85}{91\cdot 26\cdot(37-29i)}=0$

(аргумент додатного дійсного числа).

Аргументи рівні.

Задача розв’язана повністю.

Відповідь. 1) $z_2=\frac{1}{74}(57-157i)$;

2) $w_1=\frac{1}{13}(14-5i)$; $w_2=\frac{1}{255}(101+38i)$;

3) $\left(u-\frac{1}{7}\right)^2+\left(v-\frac{4}{7}\right)^2=\frac{52}{49}$ – образ кола; $R_2=\frac{2\sqrt{13}}{7}$;

4) точки w_1 і w_2 – симетричні відносно кола п. 3).

Рисунок 13:

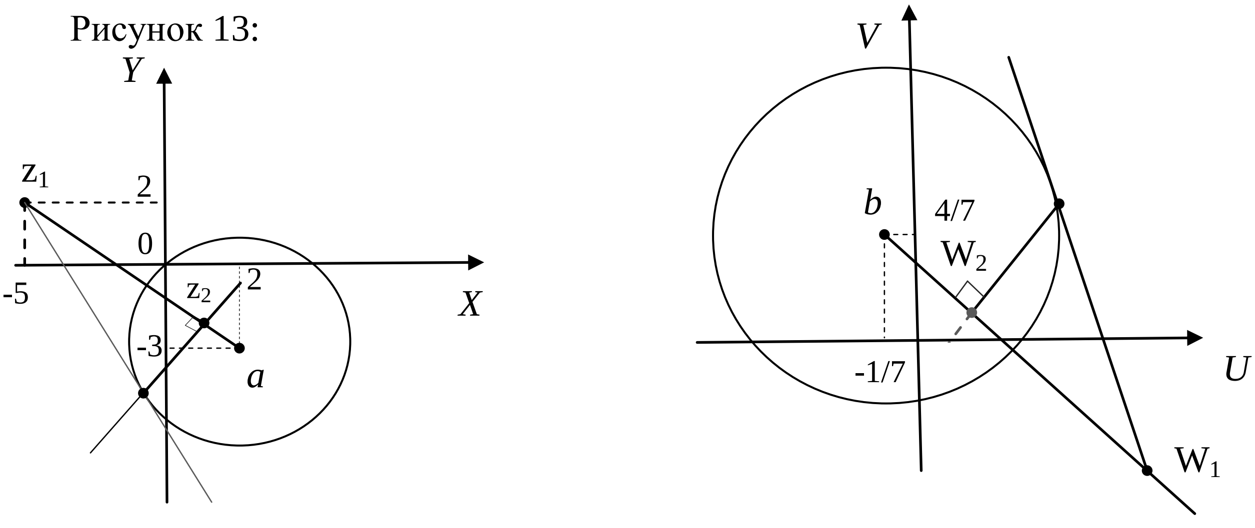


Рис. 13

Приклад 25. Довести рівність: $ch(z_1-z_2)=ch(z_1)\cdot ch(z_2)-sh(z_1)\cdot sh(z_2)$.

Доведення. І спосіб (зліва – на право). Використовуємо формули зв'язку між показниковою функцією і гіперболічними:

$$ch(z_1-z_2)=\frac{1}{2}(e^{z_1\text{-}z_2}+e^{-(z_1-z_2)})=\frac{1}{2}(e^{z_1}\cdot e^{-z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{z_2})=$$

$$=\frac{1}{2}((ch(z_1)+sh(z_2))(ch(z_2)-sh(z_2))+$$

$$+(ch(z_1)-sh(z_1))(ch(z_2)+sh(z_2)))=ch(z_1)ch(z_2)-sh(z_1)sh(z_2)$$

(після розкриття дужок останні доданки анулюються).

ІІ спосіб (справа – наліво):

$$\frac{1}{2}(e^{z_1}+e^{-z_1})\cdot\frac{1}{2}(e^{z_2}+e^{-z_2})-\frac{1}{2}(e^{z_1}+e^{-z_1})\cdot\frac{1}{2}(e^{z_2}+e^{-z_2})=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}+e^{-z_1-z_2}-e^{z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2})\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\left(e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{z_1-z_2}+e^{-(z_1-z_2)}\right)=ch(z_1-z_2).$$

Рівність доведено.

Приклад 26.

Задано функцію $w = \cos z$. Потрібно :

1) Виділити дійсну та уявну частини функції;

2) Знайти модуль і аргумент функції (іншими словами: подати задану функцію в алгебраїчній і тригонометричній формах).

Розв'язання.

а) $z = x + iy;$

$w = u + iv;$

б) $u + iv = \cos(x + iy) = \cos\ x \cdot \cos\ iy - \sin\ x \cdot \sin\ y =$

$= \cos\ x\ \cdot ch\ y - i \cdot \sin\ x \cdot sh\ y = \cos z;$

$$u = \cos\ x \cdot ch\ y;$$
$$v = -\sin\ x \cdot sh\ y;$$

в) $|\cos z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\cos^2 x \cdot ch^2 y + \sin^2 x \cdot sh^2 y} =$

$$= \sqrt{(1 - \sin^2 x)(ch^2 y + \sin^2 x \cdot sh^2 y)} =$$
$$= \sqrt{ch^2\ y - \sin^2 x(ch^2\ y - sh^2\ y)} = \sqrt{ch^2 y - \sin^2 x}$$

$ch^2 y - sh^2 y = 1.$

д) Нехай $Arg \cos z = \varphi$, тоді $tg\ \varphi = \dfrac{v}{u} = -tgx \cdot thy$.

<u>*Відповідь.*</u>

1)
$$u = \cos\ x \cdot ch\ y;$$
$$v = -\sin\ x \cdot sh\ y;$$

2) $|\cos z| = \sqrt{ch^2 y - \sin^2 x}\ ;$

$tg\ \varphi = \dfrac{v}{u} = -tgx \cdot thy$

$(z = x + iy;\ \varphi = Arg \cos z)$.

Приклад 27.

Подати в алгебраїчній формі: $sh(1-\frac{\pi i}{3})$.

Зобразити на комплексній площині.

Розв'язання.

$$sh\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)=sh1ch\frac{\pi i}{3}-ch1sh\frac{\pi i}{3}=sh1\cdot\cos\frac{\pi}{3}-ich1\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}sh1-\frac{i\sqrt{3}}{2}ch1$$

Оскільки $sh1=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)=1{,}18; ch1=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)=1{,}54$, то остаточно маємо

$$w=0{,}8\ -\ 1{,}3i;$$

$$|w|=\sqrt{0{,}8^2+1{,}3^2}\ =1{,}5;$$

$$\cos\varphi=\frac{0{,}8}{1{,}5}=0{,}53;\ \varphi=-57^\circ;$$

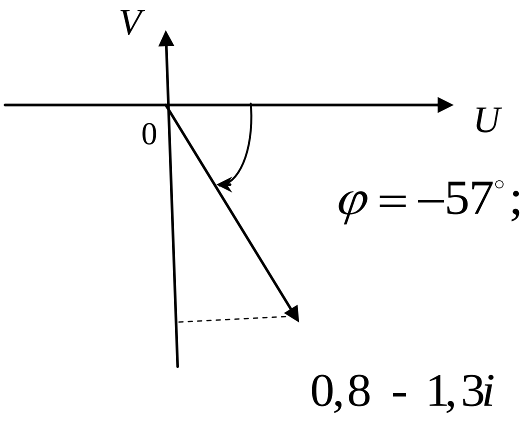


Рис. 14

<u>*Відповідь.*</u>

а) $\quad w=\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)=\frac{1}{2}sh1+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}ch1\right)=0{,}8-1{,}3i;;$

б) $\quad \left|w\right|=1{,}5;\ \ Argw=-1{,}0\ \ (рад)\right|=-57°;$

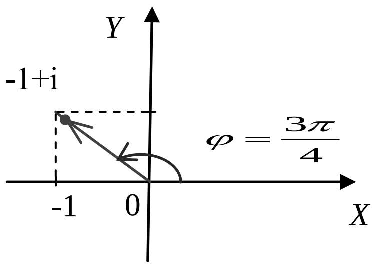
Приклад 28:

Подати в алгебраїчній формі $\ln(-1+i)$.

Розв'язання.

а) Знаходимо модуль r і аргумент φ числа $z=-1+i$:

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2};$$



$$\cos\varphi=-\frac{1}{2};$$

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{4};$$

Рис. 15

б) Знаходимо логарифм заданого числа за формулою:

$$Ln\,z=\ln r+i(\varphi+2\pi k)$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{4}$$

У даному випадку маємо:

$$\ln(-1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$$

Головне значення логарифма (при $k=0$):

$$\ln(-1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{3\pi}{4}=0,3+2,4i.$$

$$|\ln(-1+i)|=\sqrt{0,3^2+2,4^2}=2,42;$$

$$\sin\varphi=\frac{2,4}{2,42}=0,99;$$

$$\cos\varphi=\frac{0,3}{2,42}=0,12;$$

$$\varphi=83°.$$

$$\ln(-1+i)=2,42(\cos 83^o+i\sin 83^o).$$

Приклад 29.

Подати в алгебраїчній формі $w = (-12 \ -5i \ )^{-i}$.

Розв'язання.

а) $w = e^{-iLn(-12 \ - \ 5i)}$;

б) $z = -12 - 5i$;

$z = |z| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$;

$\cos\varphi = -\frac{12}{13} = -0{,}923; \ \sin\varphi = -\frac{5}{13} = -0{,}385; \ \varphi = 3{,}53$;

в) $\ln z = \ \ln 13 + i(3{,}53 + 2\pi k)$;

$-i\ln z = -i \ \ln 13 + 3{,}53 + 2\pi k$;

г) $w = e^{-i\ln 13} \cdot e^{3{,}53+2\pi k} = (\cos(\ln 13) - i \ \sin(\ln 13)) \cdot e^{3{,}53+2\pi k}$;

Головне значення ($k = 0$) :

$w_0 = e^{3{,}53}\left(\cos\left(\ln 13\right)\right) - i \ \sin(\ln 13) = e^{3{,}53}\left(-0{,}84 - i \cdot 0{,}55\right) = -28{,}7 - 18{,}8i.$

Відповідь.

а) $w = (\cos(\ln 13)\text{-i } \sin(\ln 13)) \times \mathrm{e}^{3{,}53+2\pi k}$;

б) При виконанні наближених обчислень головне значення $w_0 = -28{,}7 - 18{,}8i.$

Приклад 30.

Подати в алгебраїчній формі $w = Arctg\,\frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}$.

Розв'язання. $tgw = \frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}$;

$$tgw = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} : \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

Маємо рівняння: $\frac{1}{i}\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = \frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}$;

$$\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}=\frac{8+3\sqrt{3}}{7};$$

$$e^{2iw}=\frac{15+3\sqrt{3}i}{-1-3\sqrt{3}i}=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3});$$

$$2iw=Ln\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3});$$

$$w=\frac{1}{2i}\left(\ln\left|\frac{3}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right|\right)+i\left(\arg\left(\frac{3}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)+2\pi k\right);$$

$$w=\frac{1}{2i}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\cdot 2\right)+i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right)=-\frac{1}{2}i\ln 3+\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right);$$

Відповідь.

а) $w=\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)-i\ln\sqrt{3};$

б) Головне значення $w_0=\frac{\pi}{3}-i\ln\sqrt{3}=1{,}05-0{,}55i.$

Приклад 31.

Визначити вид кривої: $z=\frac{1\text{-t}}{1+\text{t}}+i\frac{2\text{-t}}{2+\text{t}}$.

Розв'язання.

а) $z=x+iy$; тоді

$$\begin{cases} x=\frac{1-t}{1+t} \\ y=\frac{2-t}{2+t} \end{cases}$$

Дістали параметричні рівняння кривої.

б) Виключаємо параметр t із попередньої системи.

З першого рівняння: $t(x+1)=1-x$; $x+tx=1-t,$ $t(x+1)=1-x,$

$$t=\frac{1-x}{1+x};$$

з другого рівняння: $y=\dfrac{2-\dfrac{1-x}{1+x}}{2+\dfrac{1-x}{1+x}}$;

$$y=\frac{2(1+x)-(1-x)}{2(1+x)+(1-x)}=\frac{2+2x-1+x}{2+2x+1-x}=\frac{1+3x}{3+x};$$

Отримуємо гіперболу, яка має горизонтальну асимптоту $y=3$ і вертикальну $x=-3$ (див. Рисунок 16).

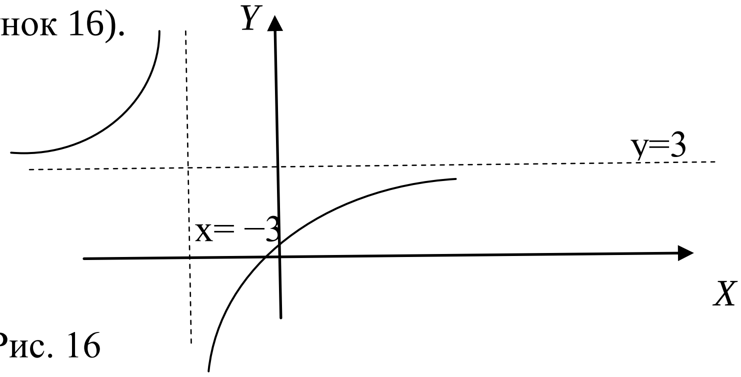


Рис. 16

Приклад 32.

Визначити вид кривої $z=tht+\dfrac{2i}{cht}$.

Розв’язання.

а) $z=x+iy=tht\ +i\ \dfrac{1}{cht}$;

$\begin{cases} x=tht \\ y=\dfrac{2}{cht} \end{cases}$ – параметричні рівняння кривої.

Виключаємо параметр t з останньої системи. При цьому користуємось рівністю $1-th^2t=\dfrac{1}{ch^2t}$;

У нас $tht=x; cht=\dfrac{2}{y}$, тому $1-x^2=\dfrac{y^2}{4}$;

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ – еліпс з півосями $a=1;\ b=2$.

Приклад 33

Знайти на площині Z лінії $|w| = const$; $\arg w = const$; якщо $w = e^{\frac{1}{z}}$.

Розв'язання.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тоді $w = e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = e^{\frac{1}{r}\cos\varphi} \cdot e^{-i\frac{\sin\varphi}{r}}$.

а) $|w| = e^{\frac{1}{r}\cos\varphi} \cdot \left|e^{-i\frac{\sin\varphi}{r}}\right| = e^{\frac{1}{2}\cos\varphi}$, $\arg w = \dfrac{-\sin\varphi}{r}$.

(оскільки $\dfrac{\sin\varphi}{r}$ – дійсне число, то модуль другого співмножника дорівнює одиниці: $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$)

$$e^{\frac{1}{r}\cos\varphi} = const \longrightarrow \frac{1}{r}\cos\varphi = const \longrightarrow r = C_1\cos\varphi'$$

Дістали полярні рівняння сімейства кіл. В декартових координатах:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{2}; \quad r = \frac{Cx}{r}; \quad r^2 = Cx;$$

$$x^2 + y^2 = C_1 x;\ x^2 - C_1 x + y^2 = 0; \left(x - \frac{C_1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C_1}{2}\right)^2;$$

Оскільки лінії $|w| = C$ і $\arg w = C$ – ортогональні (полярна сітка),а відображення

$w = e^{\frac{1}{z}}$ – конформне(бо функція аналітична і $w' = e^{\frac{1}{7}} \cdot \left(-\dfrac{1}{z^2}\right) \neq 0$),

то їх прообрази – ортогональні . Оскільки $\arg w = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$, то маємо однопараметричну сім'ю ліній:

$C = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$; $r = -\dfrac{1}{C}\sin\varphi$ – це система кіл, що проходять через початок координат і мають центри на осі Oy:

$$r = -\frac{1}{C}\cdot\frac{y}{r};\ r^2 = -\frac{1}{C}\cdot y;\ x^2 + y^2 + \frac{1}{C}y = 0.$$

$x^2+\left(y+\frac{1}{2C}\right)^2=\left(\frac{1}{2C}\right)^2$. (див. рисунок 17)

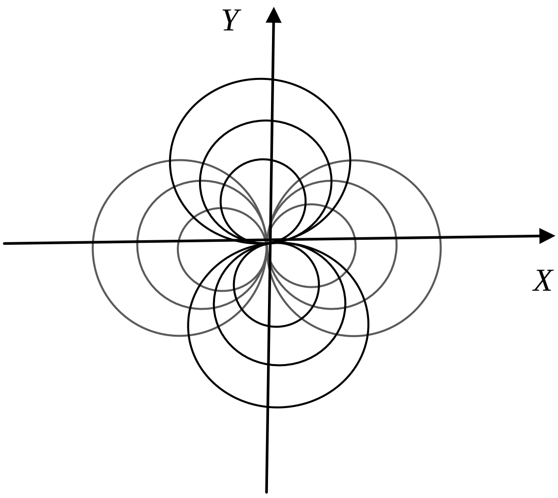


Рис. 17

Відповідь.

а) Прообразом кола $|w|=C$ при відображенні $W=e^{\frac{1}{z}}$ є коло $y^2+\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2=\left(\frac{1}{2C}\right)^2$;

б) Прообразом променя $\arg w=C$ при заданому відображенні є коло $x^2+\left(y+\frac{1}{2C}\right)^2=\left(\frac{1}{2C}\right)^2$.

Дві сім’ї кіл ортогональні.

Запитання для контролю

1. Яка множина комплексної площини називається областю?
2. Що таке координатна лінія? Які рівняння мають координатні лінії в декартових і полярних координатах?
3. Як знайти дійсну та уявну частини функції комплексної змінної?
4. Як знайти образ(прообраз) лінії при заданому відображенні?
5. Що називається похідною функції комплексної змінної?
6. Яка функція комплексної змінної називається: диференційованою в області? Аналітичною в точці?
7. Як формулюються і записуються необхідні умови комплексної диференційованості функції? Як ці умови називаються?
8. Яка функція двох дійсних змінних називається гармонічною в області?
9. Який зв'язок між аналітичними і гармонічними в області функціями?
10. Який геометричний зміст модуля і аргументу похідної функції комплексної змінної?
11. Яке відображення називається конформним?
12. Як записується лінійна функція? Які її геометричні властивості?
13. Як записується дробово-лінійна функція? Які її основні властивості?
14. Як визначаються показникова, тригонометрична і гіперболічна функції комплексної змінної?
15. Який зв'язок між показниковою і тригонометричними функціями?
16. Який зв'язок між показниковою і гіперболічними функціями?
17. Який зв'язок між тригонометричними і гіперболічними функціями?
18. Як формулюються теореми додавання для показникової, тригонометричних і гіперболічних функцій?
19. Що називається періодом функції комплексної змінної? Чому дорівнюють періоди показникової, тригонометричних і гіперболічних функцій?
20. Що називається логарифмом комплексного числа? За якою формулою обчислюються логарифми?

21. Як визначається степінь з комплексною основою і комплексним показником?

22. Як визначаються обернені тригонометричні і обернені гіперболічні функції? Як їх практично знайти?

Завдання для самостійного опрацювання

1. Інтерпретація геометрії Лобачевського. Література: [1], §III.6*.-с.63.

2. Функція Жуковського. Література: [1],додаток 1, §3.-с.271.

3. Принцип аргументу і питання стійкості. Література: [1], гл. VIII, §5,6.-с.217

Модуль 3.

Інтегрування функцій комплексної змінної.

Тут розглядається поняття інтеграла від функції комплексної змінної і найважливіші властивості аналітичних функцій, які пов'язанні з поняттям інтеграла або спираються на нього. Зокрема, встановлюється рівносильність понять про аналітичну функцію, як про функцію, диференційовану в кожній точці області визначення, і як про функцію, інтеграл від якої не залежить від шляху. Це дає нову концепцію у побудові теорії аналітичних функцій.

Застосування поняття інтеграла і теорем, що на ньому ґрунтуються, розглядається окремо.

§1. Інтеграл від функції комплексної змінної.

Нехай задана деяка дуга AB і на ній – функція комплексної змінної $f(z)$. За означенням інтегралом від $f(z)$ вздовж AB називається

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k} f(t_k)(z_{k+1}-z_k)=\int_{AB} f(z)dz,$$

де $z_0, z_1, ..., z_k, z_{k+1}$ – послідовні точки, що розбивають AB на частини; t_k – довільна точка, яка лежить на ділянці $[z_k, z_{k+1}]$ дуги AB; $\lambda=\max\limits_{k}|z_{k+1}-z_k|$.

Якщо AB – кусково-гладка крива, а $f(z)$ – неперервна функція, то інтеграл завжди існує.

Інтеграл від функції комплексної змінної подається у вигляді суми криволінійних інтегралів, які містять дійсну $u(x,y)$ та уявну $v(x,y)$ частини функції f:

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_{AB} udx-vdy+i\int_{AB} vdx+udy.$$

Якщо $f(z)$ – аналітична, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування і обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца.

Взагалі ж, спосіб обчислення комплексного інтеграла залежить від того, у якій формі задано криву інтегрування.

а) якщо крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), y = y(t),\ z = x(t) + iy(t), \\ dz = (x'(t) + iy(t))dt = z'(t)dt \end{cases}$$

то:

$$\int\limits_{AB} f\left(z\right)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f\left(z\left(t\right)\right)z'\left(t\right)dt,$$

де t_A, t_B – значення параметра, які відповідають точкам A і B відповідно.

б) якщо дуга задана рівнянням $y = \varphi(x)$, то $z = x + i\varphi(x) = z(x); z'(x) = 1 + i\varphi'(x)$, а інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{x_A}^{x_B} f(z(x))z'(x)dx$;

в) якщо дуга AB задана полярними координатами: $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$, то $z = re^{i\varphi}, dz = e^{i\varphi}dr + r\cdot ie^{i\varphi}d\varphi = (r' + ir)e^{i\varphi}d\varphi;$ тоді

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(re^{i\varphi})(r' + ir)e^{i\varphi}d\varphi.$$

Зокрема, якщо $\varphi = \varphi_0(const)$, то $z = re^{i\varphi_0};\ dz = e^{i\varphi_0}dr$,

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{r_A}^{r_B} f(re^{i\varphi_0})e^{i\varphi_0}dr = e^{i\varphi_0}\int\limits_{r_A}^{r_B} f(re^{i\varphi_0})dr.$$

Якщо $r = r_0(const)$, то $z = r_0e^{i\varphi}, dz = r_0ie^{i\varphi}d\varphi;$ тоді

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = r_0 i\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(r_0e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi.$$

§2. Приклади безпосереднього обчислення інтегралів.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(\overline{z} + i)dz$, якщо AB – відрізок, що з'єднує точки $A(2;3), B(-2;-1)$.

Розв'язання. I спосіб. а) рисунок 18; б) рівняння прямої AB як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\dfrac{y-3}{-1-3}=\dfrac{x-2}{-2-2}$; $y-3=x-2; y=x+1;$

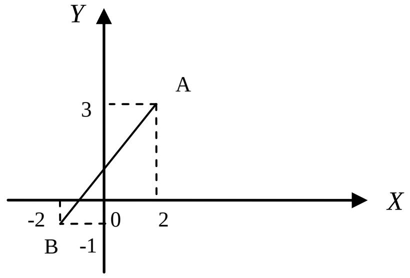


Рис. 18

$z=x+iy=x+i(x+1)=(1+i)x+i;$

в) $\overline{z}=x-iy=x-i(x+1)=x(1-i)-i;$

$dz=d((1+i)x+i)=(1+i)dx;$

г) $\int\limits_{AB}(\overline{z}+i)dz=\int\limits_{2}^{-2}((1-i)x)(1+i)dx=(1+i)(1-i)\int\limits_{2}^{-2}xdx=2\frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{-2}=0.$

<u>*Відповідь.*</u> 0.

II спосіб. Зводимо інтеграл до двох криволінійних: $f(z)=\overline{z}+i=x-iy+i=x+i(1-y);$

$u=x;\ v=1-y;$

$$\int\limits_{AB}f(z)dz=\int\limits_{AB}udx-vdy+i\int\limits_{AB}vdx+udy;$$

У даному випадку маємо:

а) $\int\limits_{AB}udx-vdy=\int\limits_{AB}xdx-(1-y)dy=$

$$=\int\limits_{AB}xdx-\int\limits_{AB}(1-y)dy=\int\limits_{2}^{-2}xdx-\int\limits_{3}^{-1}(1-y)dy=0-(y-\frac{y^2}{2})\Big|_{3}^{-1}=0;$$

б) $\int\limits_{AB}vdx+udy=\int\limits_{AB}(1-y)dx+xdy=\int\limits_{2}^{-2}(-x)dx+xdx=0;$

Заданий інтеграл, як сума попередніх двох, дорівнює нулеві.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(z^2 - z + 1)dz$, якщо AB – верхнє півколо: $|z-1| = 2$ (рисунок 19).

Розв'язання.

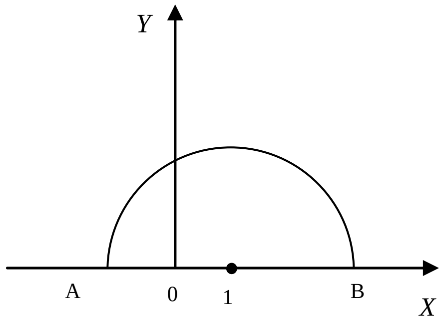


Рис. 19

а) координати точок A і B: $A(-1;0); B(3;0); z_A = -1;$

б) підінтегральна функція аналітична на всій площині, тому інтеграл не залежить від шляху, а тільки від початку і кінця. Обчислюємо його за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_{AB}(z^2 - z + 1)dz = \int\limits_{z_A}^{z_B}(z^2 - z + 1)dz = \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right)\Big|_{z_A}^{z_B} =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \frac{28}{3}$$

Цей інтеграл можна обчислювати у полярних координатах безпосередньо:

$z = 1 + 2e^{i\varphi};$

$dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi;$

$\varphi_A = \pi;\ \varphi_B = 0;$

$$\int\limits_{AB}(z^2 - z + 1)dz = \int\limits_{\pi}^{0}((1 + 2e^{i\varphi})^2 - 1 - 2e^{i\varphi} + 1)2ie^{i\varphi}d\varphi = \int\limits_{\pi}^{0}(1 + 4e^{i\varphi} + 4e^{2i\varphi} - 2e^{i\varphi})2ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= 2i\int\limits_{\pi}^{0}(e^{i\varphi} + 2e^{2i\varphi} + 4e^{3i\varphi})d\varphi = 2i\left(\frac{1}{i}e^{i\varphi} + \frac{1}{i}e^{2i\varphi} + \frac{4}{3i}e^{3i\varphi}\right)\Big|_{\pi}^{0} = 2(1 + 1 + \frac{4}{3} - e^{i\pi} - e^{2i\pi} - \frac{4}{3}e^{3i\pi}) =$$

$$= 2\left(\frac{10}{3} - (\cos\pi + i\sin\pi) - (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) - \frac{4}{3}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)\right) = \frac{28}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл: $\oint \frac{dz}{z}$.

$|z| = R.$

Розв'язання. Контур інтегрування – коло з центром у початку координат і радіусом R. Точку z на колі подаємо в показниковій формі: $z = R \cdot e^{i\varphi}$; тоді $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$; інтеграл зводиться до звичайного: $\int\limits_{|z|=R} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}}{R \cdot e^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$

<u>*Відповідь.*</u> $2\pi i$.

Зауваження. Якщо інтегрування здійснюється по колу $|z-a| = R$, точка на колі подається в аналогічний спосіб: $z - a = R \cdot e^{i\varphi}; z = a + R \cdot e^{i\varphi}; dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$. У цьому випадку $\oint\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл: $\int\limits_{AB} z^2 \operatorname{Im} z dz$, якщо AB – відрізок прямої $z_A = 0; z_B = 1 - i.$

Розв'язання.

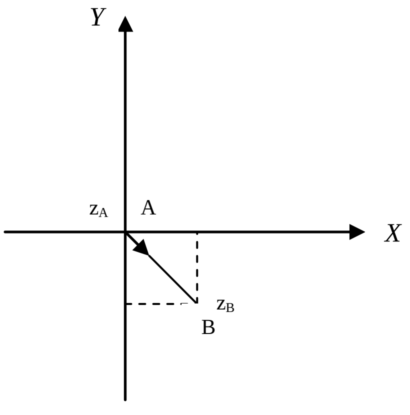


Рис. 20

а) точку z на AB подаємо в показниковій формі: $z = re^{-i\pi/4}$; тоді $z^2 = r^2e^{-i\pi/2} = -ir^2$;

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(r\cos\frac{\pi}{4} ir\sin\frac{\pi}{4}) = -r\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$dz = e^{-i\pi/4}dr;$$

$$\int\limits_{AB} z^2 \operatorname{Im} z dz = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (-ir^2)(-\frac{\sqrt{2}}{2}r)e^{-i\pi/4}dr = \frac{\sqrt{2}}{2}ie^{-i\pi/4}\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3dr = \frac{\sqrt{2}}{2}i(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}i(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{4}4 = \frac{1}{2}(1+i)$$

<u>*Відповідь.*</u> $\frac{1}{2}(1+i)$.

§3. Інтегральна теорема Коші.

Узагальненому випадку $\int\limits_{AB} f(z)dz$ залежить як від підінтегральної функції $f(z)$, так і від кривої AB. Однак, якщо функція $f(z)$ аналітична в деякій однозв'язній області, що містить криву AB, то інтеграл повністю визначається положенням кінців A і B кривої і не залежить від виду цієї кривої. Інакше, має місце теорема (О. Коші, 1825 р.): якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то для всіх кривих C, які лежать в цій області і мають спільні кінці, інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$ має одне і те ж значення.

Таким чином, криву C можна деформувати в області D (залишаючи кінці нерухомими), не змінюючи значення інтеграла.

Теорема Коші формулюється також в іншій формі: якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то її інтеграл вздовж довільного замкненого контура C, який лежить в D, дорівнює нулеві:

$$\oint\limits_C f\left(z\right)dz = 0$$

Умова однозв'язності області в цій теоремі суттєва. Дійсно, функція $f(z) = \frac{1}{z}$ аналітична в кільці $0 < |z| < 2$ (двозв'язна область), але $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

Одиничне коло (контур інтегрування) $|z| = 1$ лежить в області аналітичності підінтегральної функції.

Зауваження. Інтеграли від аналітичних елементарних функцій комплексної змінної в однозв'язній області обчислюється за допомогою тих самих методів і формул, що й у випадку дійсних функцій.

Так наприклад: а) $\int_{z_1}^{z_2} \sin z dz = -\cos z \Big|_{z_1}^{z_2} = \cos z_1 - \cos z_2;$

б)

$$\int_{z_1}^{z_2} ze^z dz = \begin{vmatrix} z = u; \\ e^z dz = dv; \\ du = dz \\ v = e^z \end{vmatrix} = ze^z \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} e^z dz = z_2 e^{z_2} - z_1 e^{z_1} - (e^{z_2} - e^{z_1}) =$$

$$= (z_2 - 1)e^{z_2} - z_1(e^{z_1} - 1);$$

(інтегрування частинами).

Теорема Коші для складного контура. Тут розглядається випадок, коли функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області, яка обмежена зовнішнім замкненим контуром C і внутрішніми замкненими контурами $C_1, ..., C_n$, які лежать усередині C і зовні один одного. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області і на всіх контурах, то інтеграл по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по внутрішніх (всі контури обходяться проти стрілки годинника).

Якщо додатнім обходом назвати той, при якому область залишається зліва, то обхід зовнішнього контура відбувається проти стрілки годинника, а внутрішніх – за стрілкою. У цьому випадку теорема Коші формулюється так: інтеграл від аналітичної функції по складному контуру при додатному його обході дорівнює нулеві. Таким чином, обчислення інтеграла по одному замкненому контуру зводиться до обчислення інтегралів по інших замкнених контурах.

Інтегральна теорема Коші є центральною теоремою теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

§4. Інтегральна формула Коші.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області, обмеженій замкненим контуром C, і на цьому контурі, то для довільної точки z області має місце рівність:

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_C\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Ця формула називається інтегральною формулою Коші і являється центральною формулою теорії аналітичних функцій.

У праву частину формули Коші входять лише значення функції f на межі C області аналітичності. Таким чином, значення аналітичної функції усередині контура цілком визначаються значеннями цієї функції на контурі. Це – фундаментальна властивість аналітичних функцій, яка принципово відрізняє аналітичні функції від функцій, диференційованих в смислі дійсного аналізу.

Замість простого замкненого контура C можна брати складний контур Γ, що складається із зовнішнього контура і кількох внутрішніх контурів. Якщо $f(z)$ – аналітична функція в області, обмеженій складним контуром Γ, і на ньому, то для кожної точки z в цій області справедлива рівність:

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma^+}\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Зовнішній контур обходиться проти стрілки годинника, а внутрішні – за стрілкою годинника. Ця формула називається інтегральною формулою Коші для складного контура.

Із формули Коші випливає *теорема про середнє* значення аналітичної в області функції в кожній точці z цієї області дорівнює середньому арифметичному її значень на довільному досить малому колі з центром в z:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{it})dt$$

Теорема про середнє показує, що аналітичні функції, описово кажучи, дуже правильно улаштовані і що їх значення тісно пов’язані з сусідніми значеннями. Це пояснює наявність у таких функцій цілої низки специфічних властивостей, яких немає у функцій, диференційованих в смислі дійсного аналізу. Деякі з цих властивостей буде розглянуто у подальшому.

Нескінченна диференційованість аналітичної функції. Аналітична в області функція $f(z)$ має в цій області похідні всіх порядків. Ці похідні подаються формулою:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}},\, n=1,2,3,...,$$

де C – межа області аналітичності.

Таким чином, із існування в деякій області першої похідної функції без жодних додаткових припущень слідує існування всіх її похідних. Ця властивість істотно відрізняє диференційовані функції комплексної змінної від диференційованих функцій дійсної змінної.

Обчислення інтегралів за допомогою інтегральних формул Коші.

Записуємо ці формули справа наліво:

а) $\oint_C\frac{f(t)dt}{t-z_0}=f(z_0)2\pi i$

б) $\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f(z_0)$.

Тут точка z_0 лежить у середині контура C, а функція $f(z)$ – аналітична у середині C.

Приклад 1. Обчислити $\oint_{|z|=2}\frac{z^2dz}{z+i}$.

Розв'язання. а) $f(z)=z^2; z_0=-i;$

б) зображаємо контур інтегрування і точку z_0 (рисунок 21);

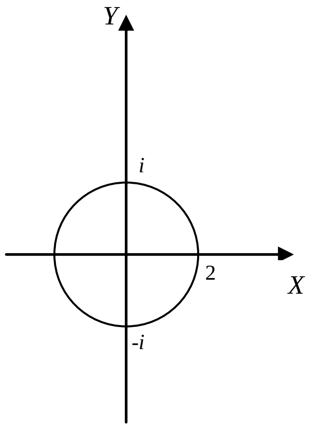


Рис. 21

Точка $z_0 = -i$ лежить усередині кола $|z| = 2$;

в) знаходимо $f(z_0) = (-i)^2 = -1$;

г) знаходимо інтеграл за формулою а);

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{z+i} dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i .$$

<u>*Відповідь.*</u> $-2\pi i$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \frac{zdz}{z^2-1}$, якщо C – коло $|z-1| = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. а) контур інтегрування – коло з центром $z = 1$ і радіусом $R = \frac{1}{2}$ (рисунок 22);

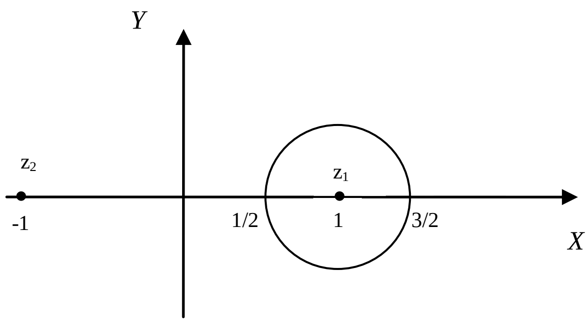


Рис. 22

б) підінтегральна функція $F(z) = \frac{z}{z^2-1}$;

в) особливі точки підінтегральної функції: $z_1 = 1; z_2 = -1$ (ці точки знаходимо з умови $z^2 - 1 = 0$). Точка $z_1 = 1$ лежить усередині контура, а точка $z_2 = -1$ – поза ним; тут $z_0 = 1$.

г) підінтегральну функцію подаємо у вигляді $\dfrac{F(z)(z-1)}{z-1}=\dfrac{\frac{z}{z+1}}{z-1}$;

д) виписуємо чисельник $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$, тепер потрібно обчислювати $\oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{z-1}$. Обчислюємо $f(z_0)=f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$;

е) знаходимо значення інтеграла за формулою а):

$$\oint\limits_C \frac{zdz}{z^2-1}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i.$$

<u>Відповідь</u>. πi.

Приклад 3. Обчислити інтеграл : $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{\sin z}$, якщо C – коло : $|z-3|=\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. а) рисунок 23 (контур інтегрування);

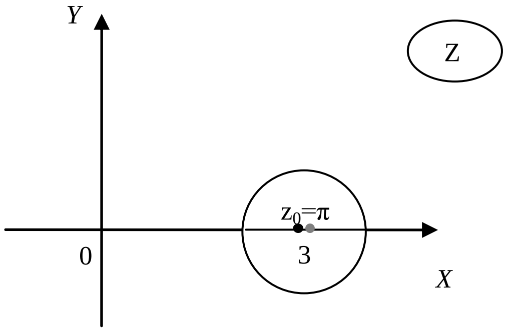


Рис. 23

б) підінтегральна функція: $F(z)=\dfrac{e^z}{\sin z}$;

в) особливі точки підінтегральної функції:

$$\sin z=0;$$
$$z=\pi k, k=0,\pm1,...,;$$
$$z_0=0; z_1=\pm\pi,...;$$

г) серед цих точок виділяємо ті, які попадають усередину контура C: $z_0=\pi$;

д) підінтегральну функцію $F(z)$ подаємо у вигляді :

$$F(z)=\frac{F(z)(z-z_0)}{z-z_0}=\frac{e^z\dfrac{z-\pi}{\sin z}}{z-\pi};$$

і виділяємо $f(z)=e^z\dfrac{z-\pi}{\sin z}$;

ж) знаходимо $f(z_0)$ як границю

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to\pi} e^z\frac{z-\pi}{\sin z}=e^\pi\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)'}{(\sin z)}=e^\pi\lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos z}=e^\pi(-1)=-e^\pi;$$

з) знаходимо значення інтеграла:

$$\oint_C\frac{e^z dz}{\sin z}=2\pi i(-e^\pi)=-2\pi e^\pi i$$

<u>*Відповідь.*</u> $-2\pi e^\pi i$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\oint_C\dfrac{z-\sin z}{z^4}dz$, якщо C – коло $|z|=2$.

Розв'язання. а) контур інтегрування (рисунок 24);

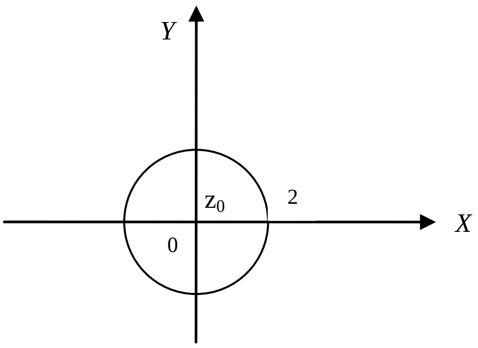


Рис. 24

б) підінтегральна функція $F(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^4}$;

в) особливі точки підінтегральної функції: $z_0=0$ – ця точка лежить усередині контура C.

г) виділяємо із $F(z)$ функцію $f(z)=z-\sin z$. Тепер потрібно обчислити $\oint_C\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^4}$. $f(z)$ – аналітична усередині C.

За допомогою б): $\oint_C\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^4}=2\pi i\dfrac{f'''(z_0)}{3!}$;

д) проводимо обчислення :

$$f'(z) = (z - \sin z)' = 1 - \cos z;$$
$$f''(z) = \sin z;$$
$$f'''(z) = \cos z;$$
$$f'''(z_0) = f'''(0) = \cos z = 1;$$

Остаточно : $\oint\limits_C \frac{z - \sin z}{z^4} = 2\pi i \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$;

<u>*Відповідь.*</u> $\frac{\pi i}{3}$;

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\oint\limits_C \frac{z^2+1}{(z-4)^3 \sin z} dz$, якщо C – коло: $|z-4| = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. а) контур інтегрування (рисунок 25);

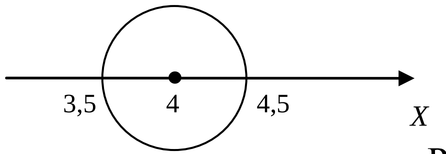


Рис. 25

б) підінтегральна функція $F(z) = \frac{z^2+1}{(z-4)^2 \sin z}$;

в) особливі точки функції $F(z)$; $z = 4$; $z = \pi k$ (корені рівняння $\sin z = 0$).

г) відбираємо особливі точки, які лежать усередині контура C: $z_0 = 4$;

д) подаємо підінтегральну функцію $F(z)$ у вигляді $F(z) = \frac{\frac{z^2+1}{\sin z}}{(z-4)^3}$, виділивши таким чином функцію $f(z) = \frac{z^2+1}{\sin z}$, яка аналітична усередині контура C. Тепер потрібно знайти інтеграл $\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-4)^3}$, у якому $f(z)$ –

аналітична усередині контура C, а точка $z_0 = 4$ лежить усередині цього контура.

За формулою б) маємо: $\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3} = 2\pi i \frac{f''(z_0)}{2!}$;

Маємо:

$$f'(z) = \left(\frac{z^2+1}{\sin z}\right)' = \frac{2z\sin z + (z^2+1)\cos z}{\sin^2 z};$$

$$f''(z) = \frac{1}{\sin^4 z}\Big\{\Big(2(\sin z + z\cos z)2z\cos z - (z^2+1)\cos z\Big)\cdot$$

$$\cdot\sin^2 z - 2\sin z\cos z(2z\sin z(z^2+1)\cos z)\Big\} =$$

$$\frac{1}{\sin^3 z}\Big\{\Big(2(\sin z + z\cos z) + 2z\cos z - (z^2+1)\sin z\Big)\sin z - 2\cos z\cdot$$

$$\cdot(2z\sin z + (z^2+1)\cos z)\Big\};$$

підставивши сюди $z = z_0 = 4$, дістанемо: $\sin 4 = -0,76$; $\cos 4 = -0,65$;

$$f''(4) = 50,61;$$

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-4)^3\sin z}dz = 2\pi i\frac{50,61}{2} = 50,61\pi i = 159i$$

Відповідь. $\approx 159i$.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Виконайте вправи 105-108 із [1], §V.3.-с.113; вправа 111 [1], §V.8.-с.137.
2. Принцип аргументу. [2], гл. IV, §10, п.33.-с.183.
3. Принцип максимума модуля. [2], гл.IV, §10, п.35.-с.192.

Модуль 4.

Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки. Лишки

§1. Основні поняття.

Ряди Тейлора – апарат, зручний для представлення функцій, аналітичних в кругових областях. Досить важливо, однак, мати апарат для представлення функцій в областях іншого вигляду. Наприклад, при вивченні функцій, аналітичних в деякому околі точки a скрізь, крім самої точки a, доводиться розглядати кільцеві області вигляду $0<|z-a|<R$. Виявляється, що для функцій, аналітичних в кільцевих областях $r<|z-a|<R$, де число $r\geq 0$; можна побудувати розклади за додатними і від'ємними степенями $(z-a)$ вигляду:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$

які являються узагальненям тейлорівських розкладів.

Попередній ряд називається рядом Лорана, точка a називається центром розкладу. Ряд Лорана розуміється як сума двох рядів

$$\sum_{0}^{\infty}a_n(z-a)^n \text{ і } \sum_{1}^{\infty}a_{-m}(z-a)^{-m};$$

Перший ряд називається правильною частиною ряду Лорана. Ця частина містить тільки цілі невід'ємні степені різниці $(z-a)$. Другий ряд називається головною частиною ряду Лорана, ця частина містить тільки цілі від'ємні степені різниці $(z-a)$. Назва «головна» не випадкова: головна інформація про поведінку суми ряду Лорана міститься якраз у головній частині ряду.

Ряд Лорана називається збіжним, якщо збіжні одночасно його правильна і головна частини. За означенням

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\lim_{\substack{m\to\infty\\ R\to\infty}}\sum_{-k}^{m}a_n(z-a)^n.$$

Тут m і k прямують до нескінченності незалежно один від одного. Областю збіжності ряду Лорана є кругове кільце. Сума ряду Лорана є функція аналітична у цьому кільці. Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці

$r<|z-a|<R$, то вона розкладається в цьому кільці в ряд Лорана за степенями $(z-a)$.(теорема Лорана).

Знайдений довільним способом розклад аналітичної функції вряд за додатними і від'ємними степенями $(z-a)$ являється лоранівським розкладом цієї функції (теорема єдиності).

§2. Розкладання функцій в ряди Лорана.

Основою для розкладання дробово-раціональних функцій в ряд Лорана є дві геометричні прогресії:

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^m+....;|\alpha|<1;$$
$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+...;|\alpha|<1.$$

Звертаємо увагу на те, що попередні розклади здійснюються за умови $|\alpha|<1$.

Приклад 1. Знайти всі Лоранові розклади функції $f(z)=\frac{z}{z^2-6z+8}$ за степенями z.

Розв'язання. 1) розклад здійснюється за степенями $z=z-0$, тому центром розкладу є точка $z_0=0$.

2) знаходимо особливі точки заданої функції з умови:

$$z^2-6z+8;$$
$$z_1=2;\ z_2=4;$$

3) зображаємо на площині центр розкладу і знайдені особливі точки;

4) проводимо кола через особливі точки з центром у центрі розкладу (рисунок 26).

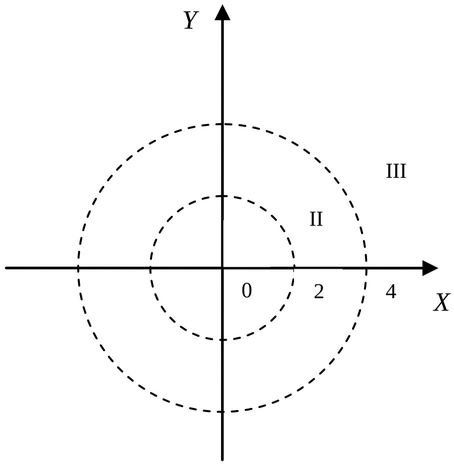


Рис. 26

Кола розбивають площину на три частини (області). Записуємо кожну область за допомогою нерівностей

I. $|z| < 2$ – круг

II. $2 < |z| < 4$ – кільце

III. $|z| > 4$ – зовнішність круга.

5) розкладаємо задану функцію на елементарні дроби:

$$\frac{z}{z^2 - 6z + 8} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4}; A(z-4) + B(z-2) \equiv z;$$
$$a)\ z = 4; 2B = 4; B = 2;$$
$$б)\ z = 2 : -2A = 2; A = -1;$$
$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-4};$$

6) кожен з елементарних дробів розкладаємо в ряд за формулою геометричної прогресії в кожній області.

I.

а) $-\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{2-z} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{z}{2} + (\dfrac{z}{2})^2 + \ldots) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{2^2} + \dfrac{z^2}{2^3} + \ldots;$

б) $\dfrac{2}{z-4} = \dfrac{2}{-4(1-\frac{z}{4})} = -\dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{z}{4} + (\dfrac{z}{4})^2 + \ldots) = -\dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{z}{4} + \dfrac{z^2}{4^2} + \ldots);$

$$f(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2\cdot 4}\right)z+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2\cdot 4^2}\right)z^2+\ldots=\frac{1}{8}z+\frac{3}{32}z^2+\ldots;$$

II. У цій області розклад другого доданка зберігається:

$$\frac{2}{z-4}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right);$$

Перший доданок розкладаємо враховуючи, що тут $|z|>2$; маємо:

$$-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}-\frac{2^2}{z^3}-\ldots;$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\ldots\right);$$

III. У цій області маємо:

а) $$-\frac{1}{z-2}=-\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\ldots\right);$$

б)

$$\frac{2}{z-4}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z}}=\frac{2}{z}\left(1+\frac{4}{z}+\frac{4^2}{z^2}+\ldots\right)=2\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{4^2}{z^3}+\ldots\right);$$

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\ldots\right)+2\left(\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{4^2}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}+\left(2\cdot 4-2\right)\frac{1}{z^2}+\left(2\cdot 4^2-2^2\right)\frac{1}{z^3}\ldots=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{28}{z^3}+\ldots;$$

<u>*Відповідь*</u>. 1) якщо $|z|<2$,

то $f(z)=\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2\cdot 4}\right)z+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2\cdot 4^2}\right)z^2+\ldots=\frac{7}{8}+\frac{3z^2}{32}+\ldots;$

2) якщо $2<|z|<4$, то $f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{4^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\ldots\right);$

3) якщо $|z|>4$, то $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{28}{z^3}+\ldots;$

Приклад 2. Знайти всі Лоранові розклади функції $f(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$ за степенями $(z-z_0)$, $z_0=4+4i$.

Розв'язання. а) z_0 – центр розкладу;

б) особливі точки функції $f(z)$: $z^2+9=0; z_1=3i; z_2=-3i$.

в) наносимо на комплексну площину центр розкладу і особливі точки (рисунок 27) і проводимо кола, які проходять через особливі точки і мають центр у центрі розкладу z_0. Знаходимо радіуси цих кіл: $R_1=|z_0-z_1|=|4+i|=\sqrt{17};\ R_2=|z_0-z_2|=|4+7i|=\sqrt{65};$

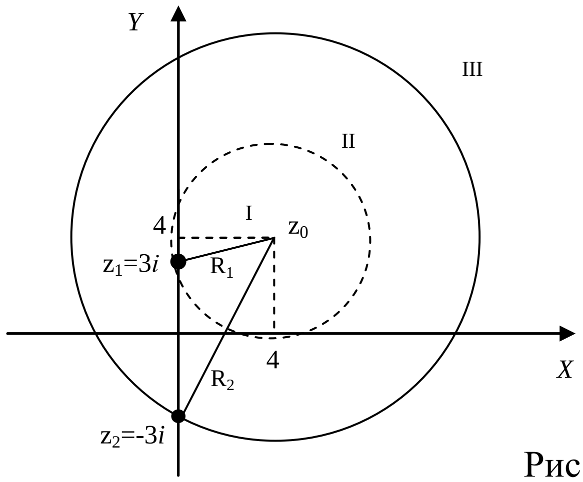


Рис. 27

г) одержані три області записуємо за допомогою нерівностей:

I. $|z-z_0|<\sqrt{17}$;

II. $\sqrt{17}<|z-z_0|<\sqrt{65}$;

III. $|z-z_0|>\sqrt{65}$.

д) розкладаємо задану функцію на елементарні дроби:

$$\frac{z}{z^2+9}=\frac{z}{(z-3i)(z+3i)}=\frac{A}{z-3i}+\frac{B}{z+3i};$$

$$A(z+3i)+B(z-3i)=z;(A+B)z+3i(A-B)=z;$$

$$\begin{cases}A+B=1\\A-B=0\end{cases}, A=B=\frac{1}{2};$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3i}+\frac{1}{z+3i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}\right)$$

е) кожний доданок у правій частині розкладаємо в ряд за степенями $(z-z_0)$, як геометричну прогресію, в кожній області окремо:

I. а)

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)+z_0-z_1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}}=\frac{1}{z_0-z_1}\left(1+\frac{z-z_0}{z_1-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^2+\ldots\right);$$

б)

$$\frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z-z_0+(z_0-z_2)}=\frac{1}{z_0-z_2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-z_0}{z_0-z_2}}=\frac{1}{z_0-z_2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z_2-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z_0-z_2}\left(1+\frac{z-z_0}{z_2-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_2-z_0}\right)^2+\ldots\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{2(z_0-z_1)}\left(1+\frac{z-z_0}{z_1-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^2+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2(z_0-z_2)}\left(1+\frac{z-z_0}{z_2-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_2-z_0}\right)^2+\ldots\right);$$

II. а)

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z_0-z_1}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_1-z_0}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\left(1+\frac{z_1-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{z-z_0}+\frac{z_1-z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{(z_1-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\ldots;$$

б) розклад другого доданка не змінюється в області II, бо тут

$$|z-z_0|<|z_2-z_0|,\ \frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z_0-z_2}\left(1+\frac{z-z_0}{z_2-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_2-z_0}\right)^2+\ldots\right);$$

$$f(z)=\frac{1}{2(z_0-z_2)}\left(1+\frac{z-z_0}{z_2-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z_2-z_0}\right)^2+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z_1-z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\ldots\right).$$

III. а) Розклад першого доданка не змінюється.

б)

$$\frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z-z_0+z_0-z_2}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_2-z_0}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}+\frac{z_2-z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{(z_2-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\ldots;$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-z_0}+\frac{z_1-z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{(z_1-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\ldots\right).$$

Якщо замість z_0, z_1, z_2 підставити їх значення, то отримаємо остаточну відповідь.

Приклад 3. Задану функцію $f(z)$ розкласти в ряд Лорана в околі точки z_0:

$$f(z)=z\sin\pi\frac{z-1}{z-2}, z_0=2;$$

Розв'язання. а) $z=(z-2)+2$;

б)

$$\sin\pi\frac{z-1}{z-2}=\sin\pi\frac{(z-2)+1}{z-2}=\sin\pi\left(1+\frac{1}{z-2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{z-2}\right)=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{z-2}=-\left(\frac{\pi}{z-2}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{z-2}\right)^2+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{z-2}+\frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{(z-2)^3}-\ldots;$$

в)

$$f(z)=((z-2)+2)\left(-\frac{\pi}{z-2}+\frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{(z-2)^3}-\ldots\right)=$$

$$=\left(-\pi+\frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}-\ldots\right)-\frac{2\pi}{z-2}+\frac{2\pi^3}{3!(z-2)^3}-\ldots=$$

$$=-\pi-\frac{2\pi}{z-2}+\frac{\pi^3}{3!}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}-\ldots;$$

§3. Ізольовані особливі точки, їх класифікація.

Апарат розкладів Лорана дає можливість повністю вивчити поведінку аналітичної функції в околі найпростіших типів точок, у яких порушується аналітичність цих функцій – так званих ізольованих особливих точок.

Точка a називається ізольованою особливою точкою для функції $f(z)$, якщо існує окіл $0<|z-a|<R$ (з вилученою точкою a), у якому $f(z)$ аналітична, але не визначена в точці a.

Якщо a – ізольована особлива точка функції $f(z)$, то в достатньо малому крузі з виколеним центром (кільці) ця функція розкладається в ряд Лорана.

1) якщо ряд Лорана не містить доданків з від'ємними показниками, то точка $z=a$ називається усувною.

2) якщо ряд Лорана містить лише скінченну кількість членів з від'ємним показниками,то точка $z=a$ називається полюсом;

3) якщо ряд Лорана містить безліч доданків з від'ємними показниками, то точка $z=a$ називається істотно особливою.

Поведінка функції в околі ізольованої особливої точки.

1) Якщо a – усувна особлива точка, то в цій точці існує скінчена границя: $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A(A\neq\infty)$.

2) Якщо a – полюс, то $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$

3) Якщо $z=a$ – істотно особлива точка, то в цій точці не існує ні скінченної, ні нескінченної границі: $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ – не існує.

Справедливі і обернені твердження. Крім того, якщо a – полюс порядку n для функції $f(z)$, то $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, де $\varphi(z)$ – аналітична в околі точки a функція і $\varphi(a)\neq 0$, і навпаки.

Дослідження особливих точок.

При дослідженні особливих точок доцільно повторити степеневі ряди для основних елементарних функцій (модуль 2).

Приклад 4. Визначити тип особливої точки $z=0$ для заданої функції

$$f(z)=\frac{\cos(\frac{z^2}{2})-1}{chz-1-\frac{z^2}{2}}.$$

Розв'язання. а) $\cos\left(\frac{z^2}{2}\right)=1-\frac{(\frac{z^2}{2})^2}{2!}+\frac{(\frac{z^2}{2})^4}{4!}+\ldots;$

б) $chz=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots;$

в) $f(z)=\dfrac{\frac{-z^4}{8}+\frac{z^8}{16\cdot 4!}+\ldots}{\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots}=\dfrac{-\frac{1}{8}+\frac{z^4}{384}+\ldots}{\frac{1}{24}+\frac{z^2}{6!}+\ldots};$

г) $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\dfrac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{24}}=-3;$ існує скінченна границя, тому $z=0$ – усувна особлива точка.

Приклад 5. Визначати тип особливої точки $z=0$ для функції

$$f(z)=\frac{sh4z-4z}{e^{z^2}-1-z^2}.$$

Розв'язання. а) $sh4z=4z+\frac{(4z)^3}{3!}+\frac{(4z)^5}{5!}+\ldots$

б) $e^{z^2}=1+z^2+\frac{(z^2)^2}{2!}+\frac{(z^2)^3}{3!}+\ldots;$

в) $f(z)=\dfrac{\frac{(4z)^3}{3!}+\frac{(4z)^5}{5!}+\ldots}{\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\ldots}=\dfrac{\frac{4^3}{3!}+\frac{4^5}{5!}z+\ldots}{z\left(\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)};$

г) $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty$.

Відповідь. $z=0$ – полюс (простий).

Приклад 6. Для заданої функції знайти ізольовані особливі точки і визначити їх тип.

Особливі т очки функції знаходять, виходячи із її конструкції(як правило, розглядається відношення аналітичних функцій; композиція аналітичних функцій тощо).

Тип особливої точки $z = z_0$ для функції $f(z)$ можна встановити, якщо:

а) розкласти функцію в ряд Лорана за степенями ($z - z_0$);

б) дослідити поведінку функції в околі особливої точки (в смислі існування границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$);

в) скористатись рекомендаціями, поданими на початку цього пункту.

6.1. Нехай $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 2z^2 + z}$.

Розв'язання. а) $\varphi(z) = z^3 - 2z^2 + z$;

б) особливі точки знаходимо з умови:

$$\varphi(z) = 0;$$
$$z(z^2 - 2z + 1) = 0;$$
$$z(z-1)^2 = 0; \qquad .$$
$$z_1 = 0;$$
$$z_{2,3} = 1$$

Функція $\varphi(z)$ має два нулі: $z = 0$ – простий і $z = 1$ – двократний (другого порядку).

<u>*Відповідь.*</u> Задана функція має два полюси: $z_1 = 0$ – простий; $z_2 = 1$ – двократний.

6.2. $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\cos(\frac{1}{z})}$;

Розв'язання. а) особливі точки знаходимо з умови:

$$\begin{cases} z=0 \\ \cos(\frac{1}{z})=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+\pi k; z_k=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k} \end{cases};k=0,\pm1,...;\ \text{якщо}\ k\to\infty,\ \text{то}\ z_k\to 0.$$

Отже, $z=0$ – гранична точка для послідовності z_k і тому не є ізольованою особливою точкою.

б) оскільки точки z_k – прості нулі для знаменника дробу, і чисельник в цих точках відмінний від нуля ($e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}\neq 0$), то задана функція має точки $z_k=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$ простими полюсами.

Точку $z=0$ не досліджуємо.

6.3. $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

Розв'язання. а) особливі точки:

$z(1-\cos z)=0;$

$z=0$ або $\cos z=1;$

$$z_k=2\pi k,\text{де}\ k=0,\pm1,\pm2,...;$$

серед нулів знаменника точка $z=0$ зустрічається двічі.

б) окремо досліджуємо $z=0$:

$$\sin 3z=3z-\frac{(3z)^3}{3!}+\frac{(3z)^5}{5!}-...;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...;$$

$$f(z)=\frac{3z-\frac{9}{2}z^3+...}{z(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+...)}=\frac{3-\frac{9}{2}z^2+...}{z^2(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...)}$$

Нехай $\varphi(z)=\dfrac{3-\frac{9}{2}z^2+...}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+...}$; тоді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z^2},\varphi(0)=6(\pm 0)$

Отже, $z=0$ – полюс кратності 2 для заданої функції.

в) нехай $z=2\pi k,\ k\neq 0$; позначимо $z-2\pi k=t$; тоді $z=t+2\pi k, \sin 3z=\sin 3(t+2\pi k)=\sin(3t+6\pi k)=\sin 3t; \cos z=\cos(t+2\pi k)=\cos t,$

$$f(z)=\frac{\sin 3t}{(t+2\pi k)(1-\cos t)}=\frac{1}{t+2\pi k}\cdot\frac{3t-\frac{(3t)^3}{3!}+...}{\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+...}=\frac{1}{t+2\pi k}\cdot\frac{3-\frac{9}{2}t^2+...}{t(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{24}+...)}=$$

$$=\frac{1}{t}\cdot\frac{3-\frac{9}{2}t^2+...}{(t+2\pi k)(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{24}+...)}$$

Другий множник $\varphi(t)$ правої частини останньої рівності є функція аналітична в околі точки $t=0$ і $\varphi(0)=\dfrac{3}{\pi k}\neq 0,(k\neq 0)$, тому $t=0,(z=2\pi k)$ – простий полюс для функції $f(z)$.

<u>Відповідь.</u> Функція має один двократний полюс $z=0$ і безліч простих полюсів $z=2\pi k, k\neq 0(k=\pm 1,\pm 2,...)$.

6.4. $f(z)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.

Розв'язання.

а) особливі точки:

$$\begin{aligned}&z^4-1=0;\\&(z^2-1)(z^2+1)=0;\\&z_1=1; z_2=-1;\\&z_3=i; z_4=-i\end{aligned}.$$

Всі точки ізольовані.

б) дослідження особливих точок:

$z_1=1$: в цій точці чисельник дробу дорівнює нулеві, але існує скінченна границя:

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{4}(z-1+1)}{(z-1)(z+1)(z^2+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(z-1)+\frac{\pi}{2})}{(z-1)(z+1)(z^2+1)} =$$

$$= -\lim_{z\to 1} f(z)\frac{\sin\frac{\pi}{2}(z-1)}{z-1}\cdot\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8};$$

отже, $z=1$ – усувна особлива точка. В точці $z_2=-1$ також існує скінченна границя:

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(z+1-1)}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(z+1)-\frac{\pi}{2})}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} =$$

$$\lim_{z\to -1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(z+1)}{z+1}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{1}{4}) = -\frac{\pi}{8};$$

Таким чином, $z_2=-1$: – усувна особлива точка.

$z=z_3=i$. Оскільки чисельник дробу в цій точці не дорівнює нулеві ($\cos\frac{\pi}{2}i = ch\frac{\pi}{2}\neq 0$), а число $z_3=i$ – простий нуль для знаменника, то $z_3=i$ є простим полюсом для заданої функції.

Аналогічно досліджується точка $z_4=-i$.

<u>*Відповідь.*</u> Функція має 4 особливі точки: $z=\pm 1$ – усувні особливі точки; $z=\pm i$ – прості полюси.

§4. Лишки.

Поняття лишку функції є одним з основних понять аналітичних функцій і вводиться для обчислення криволінійних інтегралів від аналітичних функцій, що мають лише ізольовані особливі точки.

Нехай a – ізольована особлива точка аналітичної функції $f(z)$; тоді в околі точки a ця функція зображується рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n .$$

Коефіцієнт a_{-1} при (-1) степені у цьому розкладі називається **лишком** функції $f(z)$ відносно особливої точки a.

Позначення: $a_{-1}=\operatorname*{Res}_a f(z)$ (лат. Residuum – залишок).

Із формули для коефіцієнтів ряду Лорана при $n=-1$ дістаємо: $a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz,$ де γ – достатньо мале коло з центром a.

Лишок функції відносно усувної особливої точки дорівнює нулеві.

Лишок функції $f(z)$ відносно простого полюса a обчислюється за формулою: $\operatorname*{Res}_a f\left(z\right)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$;

якщо $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, то

$$\operatorname*{Res}_a f(z)=\operatorname*{Res}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} .$$

Лишок функції $f(z)$ відносно полюса порядку n обчислюється за формулою $\operatorname*{Res}_a f(z)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z-a)^n f(z)\ \right\}$

Якщо $z=a$ – істотно особлива точка для функції $f(z)$, то для знаходження лишку відносно a потрібно функцію розкласти в ряд Лорана за степенями $(z-a)$ і виписати коефіцієнт a_{-1}.

Приклад 7. Знайти ізольовані особливі точки функції, встановити їх тип і обчислити лишки функції відносно цих точок: $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3+z-2}$;

Розв'язання. а) особливі точки знаходимо з умови:

$$z^3+z-z=0; z_1=1; z_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{7}}{2};$$

б) тип особливих точок:

$$z=1:\ f(z)=\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z^2+z+2)}=\frac{z+1}{z^2+z+2};$$

$\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\dfrac{1}{2}; z=1$ – усувна особлива точка;

$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{7}}{2}$ – прості полюси для функції $f(z)$

в) лишки відносно особливих точок:

$\operatorname*{Res}\limits_{1} f(z)=0$ (лишок відносно усувної точки)

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f(z)=\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z+1}{z^2+z+2}=\frac{z+1}{(z^2+z+2)'}=\left.\frac{z_2+1}{2z_1+1}\right|_{z=z_1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2}}{i\sqrt{7}}=\frac{1+i\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot i}=\frac{-\sqrt{7}+i}{2\sqrt{7}};$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2} f(z)=\frac{z_2+1}{2z_2+1}=\frac{-\sqrt{7}-i}{2\sqrt{7}}$$

<u>*Відповідь.*</u> а) функція має одну усувну особливу точку $z=1$ і два простих полюса $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{7}}{2}$;

б) лишки в цих точках дорівнюють 0, $\dfrac{-\sqrt{7}\pm i}{2\sqrt{7}}$ відповідно.

Приклад 8. Знайти особливі точки, встановити їх тип і обчислити лишки відносно цих точок: $f(z)=ctgz^2$.

Розв'язання.

а) Особливі точки функції

$f(z)=ctgz^2=\dfrac{\cos z^2}{\sin z^2}$ знаходимо з умови:

$\sin z^2=0; z^2=\pi k, k=0,\pm1,\pm2...;$

б) Тип особливих точок. Окремо досліджуємо $z^2=0,\left(k=0\right)$; і $z=\pm\sqrt{\pi k}, k=\pm1,\pm2,...$

$z=0$ – полюс кратності 2; $z=\pm\sqrt{\pi k}, k=\pm1,...$ – прості полюси.

в) Лишки:

$$\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left\{z^2ctgz^2\right\}=\lim_{z\to0}(2zctgz^2+z^2\cdot(-\frac{1}{\sin^2 z^2})\cdot 2z)=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2z\cos z^2\cdot\sin z^2-2z^3}{\sin^2 z^2}=2\lim_{z\to0}\frac{z\sin 2z^2-2z^3}{1-\cos 2z^2}=2\lim_{z\to0}\frac{z(2z^2-\frac{(2z^2)^3}{3!}+...)-2z^3}{1-(1-\frac{(2z^2)^2}{2!}+...)}=$$

$$=2\lim_{z\to0}\frac{-\frac{4}{3}z^7+...}{2z^4+...}=-\frac{4}{3}\lim_{z\to0}\frac{z^3+...}{1+...}=0.$$

Цю відповідь можна отримати із загальних міркувань: функція $f(z)=ctgz^2$ – парна, тому розклад у ряд Лорана в околі точки $z=0$, містить тільки парні степені z. Отже, $a_{-1}=0$. Лишки в точках $z=\pm\sqrt{\pi k}, k\neq0$ обчислюється за формулою $\operatorname{Res} f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, де $\varphi=\cos z^2, \psi=\sin z^2$. Маємо

$$\frac{\cos z^2}{2z\cos z^2}=\frac{1}{2z}=\pm\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}.$$

Відповідь.

а) Функція $\omega=ctgz^2$ має один полюс порядку 2: $z=0$ і безліч простих полюсів $z_k=\pm\sqrt{\pi k}, k=\pm1,\pm2,...;$

б) Лишок функції відносно кратного полюса $z=0$ дорівнює нулеві; лишки функції відносно простих полюсів $\underset{\pm\sqrt{\pi k}}{res} f(z) = \pm\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}, k=\pm 1,...;$

§5. **Застосування теорії лишків** .

Застосування теорії лишків ґрунтується головним чином на наступній (основній) теоремі про лишки(теорема Коші): якщо функція $f(z)$ аналітична усередині замкненого контура і на ньому, за винятком скінченної кількості особливих точок усередині контура, то інтеграл по цьому замкненому контурі дорівнює добуткові $2\pi i$ на суму лишків підінтегральної функції відносно особливих точок, які лежать усередині контура.

Таким чином, для обчислення інтеграла вздовж замкненого контура достатньо знайти лишки функції відносно особливих точок, які лежать усередині контура.

Ця теорема має принципове значення, оскільки вона зводить обчислення *глобальної* величини, якою є інтеграл від аналітичної функції по межі області, до обчислення величин *локальних* – лишків функції в її особливих точках і лишки повністю визначаються головними частинами лоранівських розкладів в околах цих точок.

Задача про обчислення інтеграла по замкненому контуру розв'язується у такому порядку:

1) Зображуємо контур інтегрування, знаходимо особливі точки підінтегральної функції і відбираємо серед них ті, які лежать усередині контура;

2) Визначаємо тип відібраних особливих точок і знаходимо лишки підінтегральної функції відносно цих особливих точок;

3) Знаходимо суму лишків і множимо її на $2\pi i$ – це і є значення інтеграла.

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=20} ctgz dz$.

Розв'язання.

а) Контур інтегрування – коло з центром у початку координат і радіусом $R = 20$.

б) Підінтегральна функція: $f(z) = ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z}$;

Особливі точки підінтегральної функції:

$$\sin z = 0; z_k = \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

в) Вибираємо особливі точки, які лежать усередині кола $|z| = 20$ це такі точки z_k, що $|z_k| < 20; |\pi k| < 20; \pi|k| < 20; |k| < 20/\pi = 6,36...$; оскільки k – ціле число, то $|k| \le 6$, тобто $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$. Одержані тринадцять точок – прості полюси для підінтегральної функції ;

г) Знаходимо лишки функції $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ відносно простих полюсів за правилом: $\operatorname*{Res}_{\pi k} f(z) = \left. \dfrac{\cos z}{(\sin z)'} \right|_{z=\pi k} = 1.$

д) Знаходимо суму всіх знайдених лишків (всі вони рівні одиниці, а їх кількість – 13):

$$\sum \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = 13;$$

е) Множимо знайдену суму на $2\pi i : 13 \cdot 2\pi i = 26\pi i$.

Це і є значення інтеграла.

<u>*Відповідь.*</u> $\int\limits_{|z|=20} ctgzdz = 26\pi i..$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=1,1} \dfrac{z^5 + z^3}{z^4 + 1} dz$.

Розв'язання.

а) Підінтегральна функція $f(z) = \dfrac{z^5 + z^3}{z^4 + 1}$ – раціональний дріб;

б) Особливі точки підінтегральної функції: $z^4+1=0, z=\sqrt[4]{-1}$; всі чотири корені рівняння мають модуль рівний одиниці, тому лежать усередині кола $|z|=1{,}1$

Прості нулі знаменника дробу є простими полюсами дробу (чисельник у цих точках не дорівнює нулеві).

в) Знаходимо лишки функції відносно простих полюсів за формулою: $\operatorname{Res} f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=\frac{z^5+z^3}{\left(z^4+1\right)'}\Big|_{z=z_k}=\frac{z_k{}^5+z_k{}^3}{4z_k{}^3}=\frac{1+z_k^2}{4}$;

Знаходимо всі значення кореня четвертого степеня з (-1) та їх квадрати: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$;

$$z_k=\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}, k=0,1,2,3;$$

$$z_k^2=\cos\frac{2(\pi+2\pi k)}{4}+i\sin\frac{2(\pi+2\pi k)}{4}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}=i(-1)^k,$$

$k=0,1,2,3;$

$z_0^2=i; z_1^2=-i; z_2^2=i; z_3^2=-i;$

г) Знаходимо суму лишків:

$$\sum_{k=0}^{3}\operatorname*{Res}_{zk} f(z)=\sum_{k=0}^{3}\frac{1+z_k^2}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(1+z_k^2)=\frac{1}{4}(4+i-i+i-i)=1;$$

Множимо одержану суму на $2\pi i$:

$1\cdot 2\pi i=2\pi i$.

Це і є значення інтеграла.

Відповідь. $2\pi i$.

Приклад 11. Обчислити інтеграл

$\oint\limits_C \frac{z^3+\sin 2z}{\sin(\frac{z^2-\pi z}{2})}dz$, якщо C – коло: $|z-\frac{3}{2}|=2$.

Розв'язання.

а) Контур інтегрування – коло з центром у точці $z=\frac{3}{2}$ і радіусом $R=2$

(див. рисунок 28)

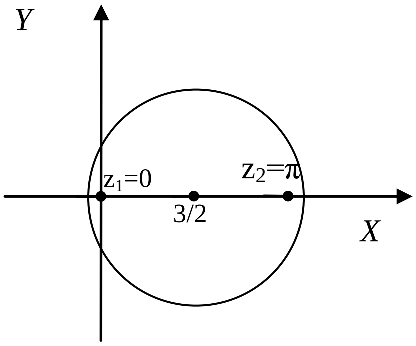


Рис. 28

б) Особливі точки підінтегральної функції:

$$\sin(\frac{z^2-\pi z}{2})=0; z^2-\pi z=2\pi k; z^2-\pi z-2\pi k=0; k=0,\pm 1,...;$$

$$z=\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^{12}+8\pi^2k^2}}{2}=\frac{\pi}{2}(1\pm\sqrt{1+8k^2}), k=0,\pm 1,...;$$

в) Відбираємо особливі точки, які лежать усередині заданого кола; має бути

$$\left|\frac{\pi}{2}(1\pm\sqrt{1+8k^2})-\frac{3}{2}\right|<2.$$

$$-2<\frac{\pi}{2}(1\pm\sqrt{1+8k^2})-\frac{3}{2}<2;$$

$$\frac{3}{2}-2-\frac{\pi}{2}<\pm\sqrt{1+8k^2}<2+\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi+1}{2}<\pm\sqrt{1+8k^2}<\frac{7-\pi}{2};$$

$$\begin{cases}\sqrt{1+8k^2}<\dfrac{7-\pi}{2}\\ -\dfrac{\pi+1}{2}<-\sqrt{1+8k^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1+8k^2}<\dfrac{7-\pi}{2}\\ \sqrt{1+8k^2}<\dfrac{\pi+1}{2}\end{cases}$$

Оскільки права частина першої нерівності менша правої частини другої нерівності $(\frac{7-\pi}{2}-\frac{\pi+1}{2}=\frac{6-2\pi}{2}<0)$, то маємо одну ірраціональну нерівність: $\sqrt{1+8k^2}<\frac{7-\pi}{2}<2; 1+8k^2<4; k^2<\frac{3}{8}$.

Оскільки k – ціле число, то $k=0$.

Маємо дві особливі точки, які лежать усередині контура інтегрування:

$$z_{1,2}=\frac{\pi\pm\pi}{2}; z_1=0; z_2=\pi;$$

г) Встановлюємо тип особливих точок :

У точці $z=z_1=0$ чисельник підінтегральної функції дорівнює нулеві, тому знаходимо границю:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z(z-\pi)}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{z^3-2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\dots}{\frac{z(z-\pi)}{2}-\left(\frac{z(z-\pi)}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\dots}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2-\frac{z^2}{3}+\dots}{\frac{z-\pi}{2}-\frac{z^2(z-\pi)^3}{8\cdot 3!}+\dots}=-\frac{4}{\pi}.$$

Підінтегральна функція має скінченну границю в точці $z_1=0$, тому ця точка усувна особлива.

У точці $z=z_2=\pi$ чисельник підінтегральної функції відмінній від нуля (дорівнює π), тому ця точка є простим плюсом для підінтегральної функції.

д) Лишки функцій відносно особливих точок, які лежать усередині контура інтегрування: $\operatorname*{Res}_{z=0} f(x)=0$ (лишок відносно усувної особливої точки);

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)=\frac{\varphi(\pi)}{\psi'(\pi)}=\left.\frac{\pi^3}{\cos(\frac{z^2-\pi z}{2})\cdot\frac{2z-\pi}{2}}\right|_{z=\pi}=\frac{\pi^3}{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2;$$ (лишок відносно простого плюса).

е) Обчислюємо інтеграл: $I = 2\pi i(0 + 2\pi^2) = 4\pi^3 \cdot i$.

<u>*Відповідь.*</u> $4\pi^3 i$.

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=2} z^3 \cdot \cos\frac{2i}{z} dz$.

Розв'язання.

а) Контур інтегрування – коло радіусом $R = 2$ з центром у початку координат;

б) Особливі точки: $z = 0$ – лежить усередині контура інтегрування.

в) Розкладаємо підінтегральну функцію в ряд Лорана за степенями z. Використовуємо тейлорівський розклад для косинуса:

$$f(z) = z^3(1 - (\frac{2i}{z})^2 \cdot \frac{1}{2!} + (\frac{2i}{z})^4 \cdot \frac{1}{4!} - (\frac{2i}{z})^6 \cdot \frac{1}{6!} + ...) =$$
$$= z^3(1 + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{3z^4} + \frac{4}{45z^6} + ...) = z^3 + 2z + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} + \frac{4}{45z^3} + ...;$$

$z = 0$ – істотно особлива точка підінтегральної функції.

Коефіцієнт $\frac{2}{3}$ біля $\frac{1}{z}$ є лишком функції відносно істотно особливої точки $z = 0$. Знаходимо інтеграл за теоремою про лишки: $I = 2\pi i \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi i}{3}$.

<u>*Відповідь.*</u> $\frac{4\pi i}{3}$.

Зауваження. Особливість цього прикладу полягає у наявності істотно особливої точки. Тому для знаходження лишку потрібно будувати ряд Лорана і в одержаному розкладі виділити коефіцієнт a_{-1}.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{zsh(\pi iz)} dz$.

Розв'язання.

а) Контур інтегрування – коло радіусом $R = 0,5$ з центром у початку координат;

б) Особливі точки підінтегральної функції:

$zsh(\pi iz)=0; z_1=0; sh(\pi iz)=0$. Оскільки $sh(i\alpha)=i\sin\alpha$, то $\sin\pi z=0; \pi z=\pi k; z=k; k=0,\pm1,\pm2,....$ У цій серії зустрічається число $z=0$ при $k=0$. Таким чином, знаменник має один подвійний нуль $z=0$ і безліч простих $z_k=k; k=\pm1,\pm2,...;$

Усередині контура інтегрування знаходиться тільки $z=0$.

в) Досліджуємо особливу точку $z=0$ (визначаємо її тип).

У цій точці і чисельник дробу дорівнює нулеві, тому знаходимо границю:

$$\lim_{z\to0}\frac{e^{2z}-\cos9z}{zsh(\pi iz)}=\lim_{z\to0}\frac{1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+...}{iz(\pi iz-\frac{(\pi z)^3}{3!}+...)}=\lim_{z\to0}\frac{2z+\frac{85}{z}z^2+...}{iz^2(\pi-\frac{\pi^3z^2}{3!}+...)}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2+\frac{85}{z}z^2+...}{iz(\pi-\frac{\pi^3z^2}{3!}+...)}=\infty;$$

$z=0$ – полюс першого порядку для підінтегральної функції.

г) Знаходимо лишок підінтегральної функції відносно точки $z=0$; при цьому використовуємо розклад , здійснений у попередньому пункті:

$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\varphi(z)$, де $\varphi(z)=\dfrac{2+\frac{85}{z}z+..}{i(\pi-\frac{\pi^3z^2}{3!}+...)}$ – аналітична в околі точки $z=0$ функція, тому розкладається в ряд Тейлора:

$\varphi(z)=\varphi(0)+\varphi'(0)z+...;$

Оскільки $\varphi(0)=\frac{2}{\pi i}$, то $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{2}{\pi i}+\varphi'(0)+...$; отже , $\operatorname*{Res}_{z=0}f(x)=\frac{2}{\pi i}$;

д) Обчислюємо інтеграл(теорема Коші):

$I=2\pi i\cdot\frac{2}{\pi i}=4.$

<u>*Відповідь.*</u> 4

Зауваження. Здійснені у цьому прикладі Тейлерові розклади дали можливість не тільки встановити тип ізольованої особливої точки $z=0$, а й знайти лишок функції відносно цієї точки, виписавши з цього розкладу коефіцієнт a_{-i}.

Приклад 14. Обчислити інтеграл

$$\oint_C \left\{ \frac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)} + \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1} \right\} dz \text{ , якщо } C \text{ – коло } |z-2i|=2.$$

Розв'язання.

а) Заданий інтеграл подаємо у вигляді суми двох інтегралів по одному і тому ж замкненому контуру:

$$I_1=\oint_C \frac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}dz,\ \ I_2=\oint_C \frac{\pi}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1}dz,\ C \text{ – коло з центром у точці}$$

$z_0=2i$ і радіусом $R=2$ (рисунок 29).

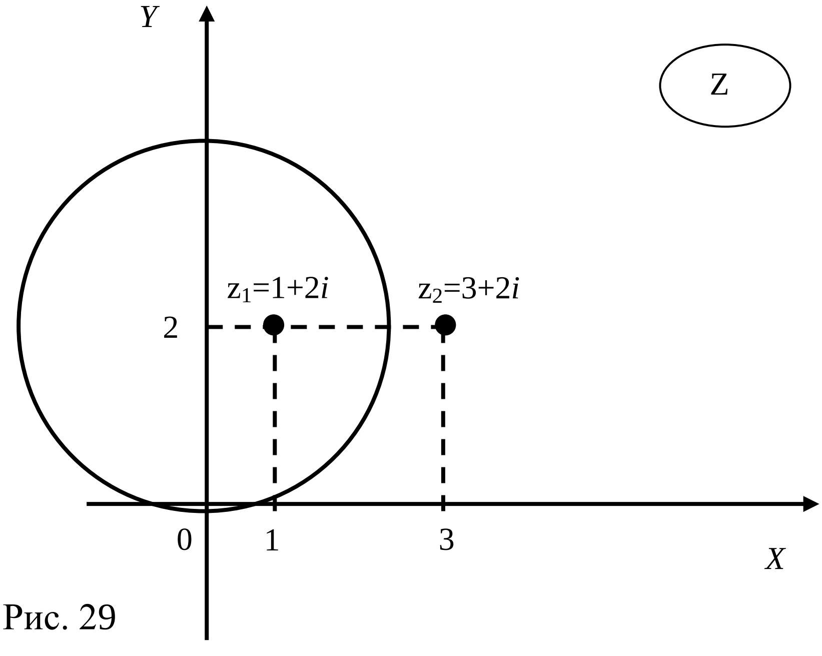


Рис. 29

I. Обчислення інтеграла I_1.

а) Підінтегральна функція $f_1(z)=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}$

Особливі точки:

1) $z-(-2i)=0; z_1=1+2i;$

2) $z-3-2i=0; z_2=3+2i;$

Усередині контура інтегрування міститься тільки точка $z_1=1+2i;$

б) Тип особливої точки: оскільки чисельник у точці z_1, дорівнює $2\sin\frac{\pi z}{2+4i}=2\sin\frac{\pi}{2}=2\neq 0$, то $z_1=1+2i$ – полюс другого порядку для функції $f_1(z)$.

в) Лишок функції $f_1(z)$ відносно точки z_i

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f_1(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left\{(z\to z)^2 f_1(z)\right\}=\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)^2\cdot\frac{2\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-z_1)^2(z-z_2)}\right)'=$$

$$=2\lim_{z\to z_1}\left(\frac{\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{z-z_2}\right)'=2\lim_{z\to z_1}\frac{\frac{\pi}{2+4i}\cos\frac{\pi z}{2+4i}(z-z_2)-\sin\frac{\pi z}{2+4i}}{(z-z_2)^2}=$$

$$=2\frac{\frac{\pi}{2+4i}\cos\frac{\pi(1+2i)}{2+4i}\cdot(z_1-z_2)-\sin\frac{\pi(1+2i)}{2+4i}}{(z-z_2)^2}=2\cdot\frac{-1}{(1+2i-(3+2i))^2}=-\frac{1}{2};$$

г) Значення інтеграла I_1: $\mathrm{I}_1=2\pi i(-\frac{1}{2})=-\pi i;$

II. Обчислення інтеграла I_2:

а) Підінтегральна функція $f_2(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{\pi z}{2}}+1};$

б) Особливі точки: $e^{\frac{\pi z}{2}}+1=0$:

$$e^{\frac{\pi z}{2}}=-1;\frac{\pi z}{2}=Ln(-1)=\ln|-1|+i(\arg(-1)+2\pi k)$$

$$\frac{\pi z}{2}=i(\pi+2\pi k)=(2k+1)\pi i, k=0,\pm 1,...;$$

$$z_k=2(2k+1)i, k=0,\pm 1,...;$$

в) Точки, які лежать усередині контура інтегрування, визначаються умовою: $|z_k - 2i| < 2; |2(2k+1)i - 2i| < 2; |4k| < 2; |k| < \frac{1}{2}$ оскільки k – ціле число, то $k = 0$.

Усередині контура інтегрування міститься одна особлива точка $z_0 = 2i$ – простий полюс для функції $f_2(z)$.

г) Лишок функції f_2 відносно простого полюса $z = 2i$:

$$\underset{2i}{\mathrm{Res}} f_2(z) = \frac{1}{\left.\left(e^{\frac{\pi z}{2}} + 1\right)'\right|_{z=2i}} = \left.\frac{1}{\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi z}{2}}}\right|_{z=2i} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{\pi i}} = \frac{2}{\pi(\cos\pi + i\sin\pi)} = -\frac{2}{\pi};$$

д) значення інтеграла I_2: $\mathrm{I}_2 = \pi 2\pi i(-\frac{2}{\pi}) = -4\pi i;$

е) значення заданого інтеграла I: $\mathrm{I} = I_1 + I_2 = -\pi i - 4\pi i = -5\pi i$

Відповідь. $\mathrm{I} = I_1 + I_2 = -\pi i - 4\pi i = -5\pi i$

§6. Обчислення інтегралів від функцій дійсної змінної.

I. Інтеграли виду $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$, де $R(u,v)$ – раціональна функція від u та v, знаменник якої не має дійсних коренів.

Ці інтеграли зводяться до інтегралів по замкненому контуру від функцій комплексної змінної заміною $z = e^{ix}$. Тоді $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), dx = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}.$

При зміні x від 0 до 2π змінна Z пробігає коло $|z| = 1$ у додатному напрямі. Початковий інтеграл зводиться до інтегралу по замкненому контуру

$I_1 = \int_{|z|=1} R_1(z)dz,$ де $R_1(z)$ – раціональна функція від z.

За теоремою Коші про лишки

$$I = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res} R_1(z),,$$

z_k – полюси функції $R_1(z)$, які лежать у крузі $|z|<1$.

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\sin x} = I$.

Розв'язання. Інтеграл власний, бо $4+\sin x \neq 0$:

а) $z = e^{ix}; \sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), dx = \frac{dz}{iz};$

б) $I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz(4+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{4iz + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}} = 2\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+8iz-1};$

в) Підінтегральна функція: $f(z) = \frac{1}{z^2+8iz-1};$

г) Особливі точки :

$$z^2+8iz-1=0;$$
$$z_1 = -4i - \sqrt{-16+1} = -4i - i\sqrt{15} = i(-4-\sqrt{15});.$$
$$z_2 = i(-4+\sqrt{15})$$

Усередині одиничного кола міститься точка $z_2 = i(-4+\sqrt{15})$, точка z_1 розташовується поза колом. Дійсно :

$|z_2| = |i|\cdot|-4+\sqrt{15}| = 4-\sqrt{15} = \frac{1}{4+\sqrt{15}} < 1; |z_1| = 4+\sqrt{15} > 1$, точка z_2 – простий полюс для $f(z)$.

д) Лишок функції відносно простого полюса:

$$\mathrm{Res}_{z_2} f(z) = \left.\frac{1}{(z^2+8iz-1)'}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{2z_2+8i} = \frac{1}{-8i+2i\sqrt{15}+8i} = \frac{1}{2i\sqrt{15}};$$

е) Значення інтеграла: $I = 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{1}{2i\sqrt{15}} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}$.

<u>*Відповідь.*</u> $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$.

Приклад 16. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos x)^2}$.

Розв'язання.

а) $z = e^{ix}; \cos x = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}); dx = \frac{dz}{iz}$;

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{4z^2 dz}{z(2\sqrt{7}z+\sqrt{3}z^2+\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(\sqrt{3}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{3})^2};$$

б) Підінтегральна функція: $f(z) = \frac{z}{(\sqrt{3}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{3})^2}$;

в) Особливі точки:

$\sqrt{3}z^2+2\sqrt{7}z+\sqrt{3}=0$;

$z_1 = \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{7-3}}{2} = \frac{-\sqrt{7}-2}{2}; z_2 = \frac{-\sqrt{7}+2}{2}$;

Точка z_2 міститься в одиничному крузі, бо $|z_2| = \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}} < 1$. Точка z_1 – за межами круга, таким чином, усередині контура інтегрування міститься один полюс кратності 2 для функції $f(z): z_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

г) Лишок функції $f(z)$ відносно двократного полюса:

$$\operatorname*{Res}_{z_2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left\{(z-z_2)^2 f(z)\right\} = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left\{(z-z_2)^2\frac{z}{(\sqrt{3}(z-z_1)(z-z_2))^2}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{3(z-z_1)^2}\right\} = \frac{1}{3}\lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_2)^2 - z\cdot 2(z-z_1)}{(z-z_1)^4} = \frac{1}{3}\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_1-2z}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-z_1-z_2}{(z-z_1)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{32};$$

д) Значення інтеграла: $I = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{7}}{24} = \frac{\pi\sqrt{7}}{3}$.

Відповідь. $\frac{\pi\sqrt{7}}{3}$.

II. Невласні інтеграли від раціональних функцій. Розглядається інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, де $R(x)$ – раціональна функція. Передбачається, що інтеграл збіжний. Методика застосування лишків при обчисленні цих інтегралів така.

а) Продовжуємо підінтегральну функцію в комплексну площину: $f(z) = R(z)$.

б) Обираємо замкнений контур так, щоб він містив відрізок $[-R; R]$ прямої інтегрування і деяку дугу, що з'єднує кінці відрізка;

в) До цього замкненого контура застосовуємо теорему Коші про лишки;

г) Виконуємо граничний перехід при $R \to \infty$. Якщо при цьому вдається обчислити границю інтеграла по додатковій дузі, то задача буде розв'язана.

Якщо у попередньому інтегралі $R(x)$ є відношення двох многочленів так ,що знаменник не має дійсних коренів і має степінь, більший степеня чисельника принаймні на дві одиниці, то інтеграл дорівнює добуткові $2\pi i$ на суму лишків підінтегральної функції відносно полюсів, які лежать у верхній півплощині.

Приклад 17. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx;$$

Розв'язання.

а) Підінтегральна функція: $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$;

б) Особливі точки: $z^4+7z^2+12=0; z^2=-3$ або $z^2=-4$; тоді $z_1=i\sqrt{3}; z_2=-i\sqrt{3}; z_3=2i; z_4=-2i$; це – прості полюси. У верхній півплощині лежать полюси z_1 та z_3.

в) Лишки відносно особливих точок, які лежать у верхній півплощині:

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f(z)=\frac{z^2+2}{(z^4+7z^2+12)'}\Big|_{z=z_1}=\frac{z^2+2}{4z_1^3+14z_1}=\frac{-3+2}{z_1(4\cdot(-3)+14)}=\frac{-1}{2z_1}=-\frac{1}{2\sqrt{3}i};$$

$$\operatorname*{Res}_{z_3} f(z)=\frac{z_3^{\,2}+2}{4z_3^{\,3}+14z_3}=\frac{-4+2}{z_3(4\cdot(-4)+14)}=\frac{-2}{-2z_3}=\frac{1}{z_3}=\frac{1}{2i};$$

г) Значення інтеграла : $\mathrm{I}=2\pi i(-\frac{1}{2\sqrt{3}i}+\frac{1}{2i})=\pi(1-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\pi$;

Відповідь. $\pi(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

III. Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)dx$.

Тут $R(x)$ – раціональна функція, у якої степінь знаменника принаймні на одиницю вищий степеня чисельника; крім того, знаменник не має дійсних коренів.

У цьому випадку має місце аналогічне правило обчислення інтегралів:

Невласний інтеграл дорівнює добуткові $2\pi i$ на суму лишків раціональної функції відносно полюсів, які лежать у верхній півплощині.

Зауваження. Якщо задано інтеграл $I_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx,$ де $R(x)$ – раціональна функція, яка має вказані вище властивості, то потрібно обчислити за вказаними правилами інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)dx,$$

а потім виділити дійсну та уявну частини зліва і справа.

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

Розв'язання.

Тут

$$\alpha=1; R(x)=\frac{x^2+x}{x^4+13x^2+36};$$

Обчислюємо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$$

а) Особливі точки: $z^4+13z^2+36=0; z^2=-4$ або

$z^2=-9; z_1=2i; z_2=-2i; z_3=3i; z_4=-3i$.

У верхній півплощині розташовані точки $z_1=2i$ і $z_3=3i$. Це – прості полюси раціональної функції.

б) Лишки підінтегральної функції відносно простих полюсів:

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{e^{iz}(z^2+z)}{z^4+13z^2+36}=\frac{e^{iz_1}(z_1{}^2+z_1)}{4z_1{}^3+26z_1}=\frac{e^{iz_1}(z_1+1)}{4z_1{}^2+26}=\frac{e^{-2}(1+2i)}{10};$$

Аналогічно знаходимо :

$$\operatorname*{Res}_{z_3}f(z)=\frac{e^{iz_3}(z_3{}^2+z_3)}{2z_3(2z_3^2+13)}=\frac{e^{iz_3}(z_3+1)}{4z_3{}^2+26}=\frac{e^{-3}(1+3i)}{-10};$$

Сума лишків : $R=\frac{1}{10}(e^{-2}-e^{-3}+i(2e^{-2}-3e^{-3}))$

в) $I=2\pi i.R=\frac{\pi i}{5}(e^{-2}-e^{-3})-\frac{\pi}{5}(2e^{-2}-3e^{-3})$.

г) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos x dx+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x dx;$

З рівності в) і 2) дістаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx=-\frac{\pi}{5}(2e^{-2}-3e^{-3});(\approx-0,08)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx=\frac{\pi}{5}(e^{-2}-e^{-3});(\approx 0,09)$$

Зауваження. Якщо $R(x)$ − парна функція, то $R(x)\sin x$ − непарна. Тоді інтеграл від цього добутку по всій осі дорівнює нулеві.

Якщо $R(x)$ − непарна то й добуток $R(x)\cos x$ − непарна функція. Інтеграл від цього добутку по всій прямій дорівнює нулеві.

Тому при обчисленні інтегралів по всій прямій від добутків $R(x)\sin x$, $R(x)\cos x$, де $R(x)$ − раціональний дріб, корисно спочатку виділити парну і непарну складові добутків і проінтегрувати тільки парну складову, оскільки інтеграл від непарної складової дорівнює нулеві. Це скорочує обрахунки.

Якщо $\varphi(x)$ − довільна функція, задана на всій прямій $(-\infty;+\infty)$, то $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(-x))$ − парна складова функції $\varphi(x)$, а $\varphi_2=\frac{1}{2}(\varphi(x)-\varphi(-x))$ − непарна складова функції $\phi(x)$.

У прикладі 1 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}=\dfrac{x^2\sin x}{x^4+13x^2+36}+\dfrac{x\sin x}{x^4+13x^2+36}$;

Перший доданок суми у правій частині – непарна функція; інтеграл від нього по всій прямій дорівнює нулеві. Інтегруємо тільки другий доданок (парну складову)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x dx}{x^4+13x^2+36};$$

Після цього переходимо до обчислення інтеграла

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}dx}{x^4+13x^2+36}=2\pi i\sum_{z_k}\operatorname{Res} f(z),$ де

$f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^4+13z^2+36}; z_1=2i, z_3=3i$ − прості полюси , що лежать у верхній півплощині;

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f=\frac{ze^{iz}}{(z^4+13z^2+36)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{ze^{iz}}{4z_1^3+26z_1}=\frac{ze^{iz}}{4z_1^2+26}=\frac{e^{-2}}{4(-4)+26}=\frac{e^{-2}}{10};$$

Аналогічно: $\operatorname*{Res}_{z_3} f = \frac{e^{-3}}{-10}$;

Остаточно маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^4+13x^2+36} = 2\pi i \cdot \frac{1}{10}(e^{-2}-e^{-3}) = \frac{\pi i}{5}(e^{-2}-e^{-3});$$

Оскільки $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{x^4+13x^2+36} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^4+13x^2+36} = \frac{\pi i(e^{-2}-e^{-3})}{5};$$

Прирівнявши дійсні та уявні частини зліва і справа дістанемо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{x^4+13x^2+36} = 0 \text{ (інтеграл непарної функції)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+13x^2+36}dx = \frac{\pi}{5}(e^{-2}-e^{-3}).$$

При такому підході обрахунки дещо скорочуються. Однак у першому випадку ми паралельно знайшли значення інтеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+13x^2+36}dx = -\frac{\pi}{5}(2e^{-2}-3e^{-3}).$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. Виконати вправи: №150 із [1], §VIII.4.-с.216.
2. Інтеграл Діріхле. [3], гл. V, §2.-с.413.
3. Інтеграли Френеля. [3], гл. V, §2.-с.417.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 стр. с илл.
2. Маркушевич А. И. Введение в теорию аналитических функций : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. – М.: Просвещение, 1977. – 320 стр.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Борис Владимирович Шабат. – [2-е изд.]. – М.: Наука, 1976. – 320 стр. с илл. – (ч. 1).

Навчальне видання

Босовський Микола Васильович

Демченко Олександр Григорович

Елементи комплексного аналізу

(навчально-методичний посібник)

Підписано до друку 02.10.2015. Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 1,9. Тираж 300 пр. Зам. № 5729

Видавець і виготівник видавничий відділ
Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
Адреса: бульвар Шевченка, 81, м. Черкаси, Україна, 18031
Тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 35-44-63,
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, http://www.cdu.edu.ua
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.