МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА:

МИНУЛЕ, СЬОГОДЕННЯ, МАЙБУТНЄ

до 100-річчя
від дня народження
О. Ф. Семеновича

Міністерство освіти і науки України
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА:
минуле, сьогодення, майбутнє

до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича

Монографія

за редакцією Н. А. Тарасенкової

Черкаси 2020

УДК 372.851
М 34

Рецензенти:

К. М. Гнезділова – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри дошкільної освіти Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького

Р. А. Заторський – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

Математична освіта: минуле, сьогодення, майбутнє, до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича: монографія / М. І. Бурда та ін..; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2020. 200 с.

ISBN 978-617-7886-08-1

Матеріали монографії призначені для широкого загалу науковців у галузі теорії та методики навчання математики, аспірантів, студентів математичних спеціальностей, викладачів математичних дисциплін, учителів математики.

Роботу виконано за підтримки МОН України
(держ. реєстрац. номер 0119U101735)

Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
(протокол № 2 від 05.11. 2020 року)

ISBN 978-617-7886-08-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Роль математики в житті кожної окремої людини і суспільства загалом важко переоцінити. Саме вона формує фундамент для економічного технічного, технологічного зростання суспільства, для розвитку особистостей, які формують його потенціал. Із часів Г. Лейбніца та І. Ньютона математика пройшла довгий і плідний шлях, стала потужною галуззю науки, із абстрактної науки перетворилася у виробничу силу. На сучасному етапі розвитку людства математичні знання стали засобом проникнення в сутність явищ різної природи (фізичних, економічних, біологічних, хімічних, соціальних тощо). Недаремно нашу епоху, як підкреслював академік Б. Гнєденко, називають епохою математизації та інформатизації знань. У сучасних умовах підвищення якості математичної освіти на усіх рівнях (дошкільної, початкової, загальної середньої, вищої освіти) є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та конкурентоспроможної економіки України.

Нині домінантою суспільної думки має бути постулат, що математика є ефективним інструментом моделювання й дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності, базовим компонентом загальної та професійної освіти сучасної людини, дієвим засобом розвитку мислення, просторової уяви й уявлень, наукового світогляду особистості, невід'ємною складовою загальнолюдської культури.

Фундамент для такого сприйняття математики формують «гіганти», на працях яких зростають нові покоління математиків-науковців і вчителів математики. Однією з таких особистостей є професор Семенович Олександр Федорович – знаний геометр, методист, «учитель учителів», один із авторів шкільного підручника з геометрії для 6-8 класів, створеного під керівництвом видатного математика А. М. Колмогорова.

Цього року наукова спільнота відзначає 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича. Більша частина творчого і життєвого шляху Олександра Федоровича пов'язана із Черкаським педагогічним інститутом. Ця монографія увиразнює намагання авторів ушанувати свого видатного колегу.

Постаті О. Ф Семеновича присвячено перший розділ монографії. Інші її розділи містять матеріали щодо змісту та організації математичної освіти в різних ланках освітньої системи, у т.ч. у ретроспективі. І це є певна данина пам'яті професору О. Ф. Семеновичу, із праць якого бере початок пошук шляхів і засобів її удосконалення.

Автори монографії виходять з того, що потенціал математики дозволяє не лише формувати логічне мислення, розвивати критичність мислення та інтуїцію, впливати на інтелектуальний розвиток, а й виховувати ставлення до математики як до частини загальнолюдської культури, що відіграє особливу роль у суспільному розвитку. Це визначає пріоритет математики для формування важливих якостей особистості учнівської молоді та організації процесу формування математичної культури здобувача освіти як частини його загальнокультурного розвитку незалежно від обраної ним професії. При цьому роль вчителя математики (у широкому сенсі) набуває непересічного значення.

У монографії здійснена спроба не лише виокремити сучасні проблеми організації навчання математики в різних ланках освіти (початкова й середня школа, заклади професійно-технічної, передпрофесійної та вищої освіти), а й запропонувати деякі шляхи і засоби нівелювання цих проблем з урахуванням уроків минулого та потреб майбуття. При цьому використано порівняльний інструментарій для аналізу наявних теоретичних студій та практичного досвіду, у т.ч. зарубіжного, а також історіографічного матеріалу.

Маємо сподівання, що науково-теоретичні положення та практичні рекомендації, які викладено в монографії, стануть у нагоді широкому загалу науковців у галузі теорії та методики навчання математики, аспірантів, студентів математичних спеціальностей, а також вчителів математики.

РОЗДІЛ 1

ЖИТТЯ І ТВОРЧІСТЬ
О. Ф. СЕМЕНОВИЧА

СТОРІНКИ БІОГРАФІЇ О. Ф. СЕМЕНОВИЧА

Ніна Тарасенкова

Олександр Федорович Семенович народився 7 листопода 1920 року в селищі Афанасьєвськ Свердловській області. Батько Федір Онуфрійович працював старшим дорожним майстром на Південно-Уральській залізниці. Коли радянська влада вирішила продовжити Московсько-Казанську залізницю до Єкатеринбурга, Федора Онуфрійовича назначили нача льником дистанції колії Південно-уральської залізниці. На той час він одружи вся з робітницею своєї бригади Марією і в них народився первісток, якого нарекли Олександром. Згодом в родині з'явилися дві донечки. Меч сталінських репресій не оминув і дружню сім'ю Семеновичів … Після аварії на залізниці заарештували Федора Онуфрійовича, оголосивши його ворогом народу. Йому дали десять років суворого режиму й п'ять років поразки в громадянських правах. Матір виключили з партії. В цей час Олександр Федорович закінчив середню школу в місті Сатка Челябінської області й почав працювати.

О. Ф. Семенович з батьками

Свій трудовий шлях в галузі народної освіти Олександр Федорович Семенович розпочав у 1937 році вчителем математики, а згодом директором сільської школи у Свердловській області.

О. Ф. Семенович у період 1926 – 1946 рр.

О. Ф. Семенович у період 1951 – 1982 рр.

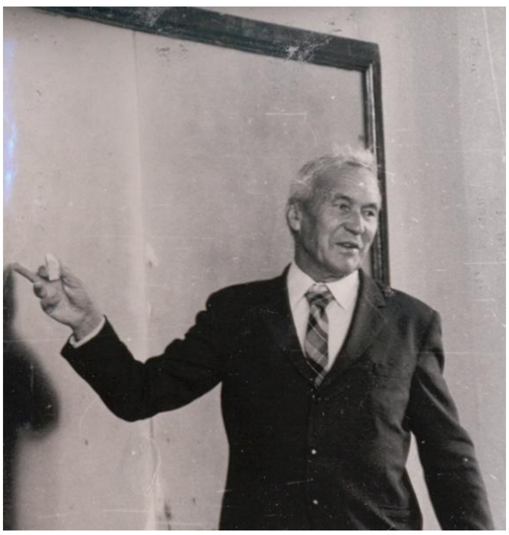
У 1942 році О. Ф. Семенович закінчив з відзнакою математичний факультет Свердловського педінституту і все його подальше життя було пов’язане з роботою в вищих навчальних закладах. У 1943–1960 роках він працював асистентом, доцентом, завідувачем кафедри Свердловського педінституту, у 1960–1963 роках – завідувачем кафедри елементарної математики Ульяновського педінституту, з 1963 року – доцентом, професором, завідувачем кафедри геометрії і методики викладання математики Черкаського педінституту. У 1982 році Олександр Федорович до своїх титулів додав ще один – почесний титул пенсіонера. Не зважаючи на наслідки тяжкої травми, які примушували Олександра Федоровича якомога обережніше ставитися до свого здоров’я, він продовжував працювати на кафедрі до 1 липня 1999 року.

О. Ф. Семенович з родиною

На дозвіллі

Наукові інтереси О. Ф. Семеновича формувалися під впливом видатних математиків-педагогів А. М. Фішер, С. О. Яновської, А. М. Колмогорова. У 1949 році О. Ф. Семенович захистив дисертацію на тему «Про числення точок» і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. У 1950 році йому було присвоєно вчене звання доцента, а у 1972 році – звання професора по кафедрі «Геометрія та методика викладання математики».

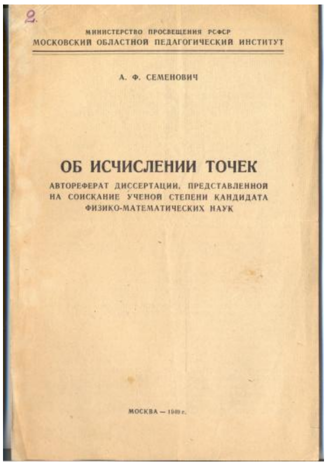
С. О. Яновська

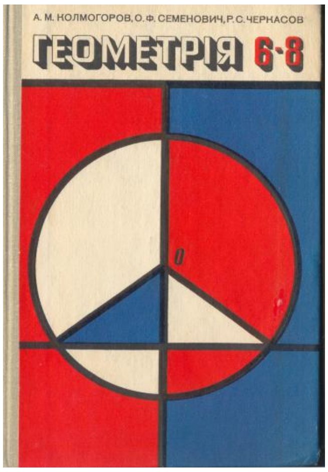


А. М. Колмогоров

У відгуку про наукову та педагогічну діяльність О. Ф. Семеновича, який у 1970 році написали академік В. М. Глушков і член-кореспондент АН УРСР С. М. Черніков, зазначено: «В течение более чем двух десятилетий А. Ф. Семенович весьма успешно сочетает руководство кафедрой с большой педагогической и научной деятельностью. Всё вышесказанное даёт, по нашему мнению, полное основание считать, что А. Ф. Семенович заслуживает присвоения ему учёного звания профессора по кафедре методики преподавания математики».

Творчий доробок О. Ф. Семеновича становить понад 150 опублікованих праць, з яких 81 окремими виданнями. Ці роботи можна поділити на три групи. Перша група присвячена питанням основ геометрії і геометричним побудовам у площині Лобачевського. Друга присвячена питанням викладання геометрії у педагогічних інститутах. Серед них особливо виділимо 12 книг з проективної геометрії та основ геометрії. До третьої групи відносяться праці з питань викладання математики у середній школі: підручники з геометрії, методичні посібники для вчителів, книги і статті для учнів середньої школи, студентів педінститутів, вчителів. Більшість праць Олександра Федоровича не втратили своєї цінності й дотепер!





Слід особливо відмітити плідний період науково-дослідної діяльності О. Ф. Семеновича з 1963 до 1980 роки. Саме у цей час він працював у авторському колективі, який очолював Андрій Миколайович Колмогоров, над підручником для середньої школи «Геометрія 6–8». За цим підручником до 1981 року навчалися геометрії учні 6–8 класів усього Радянського Союзу.

О. Ф. Семенович з А. М. Колмогоровим

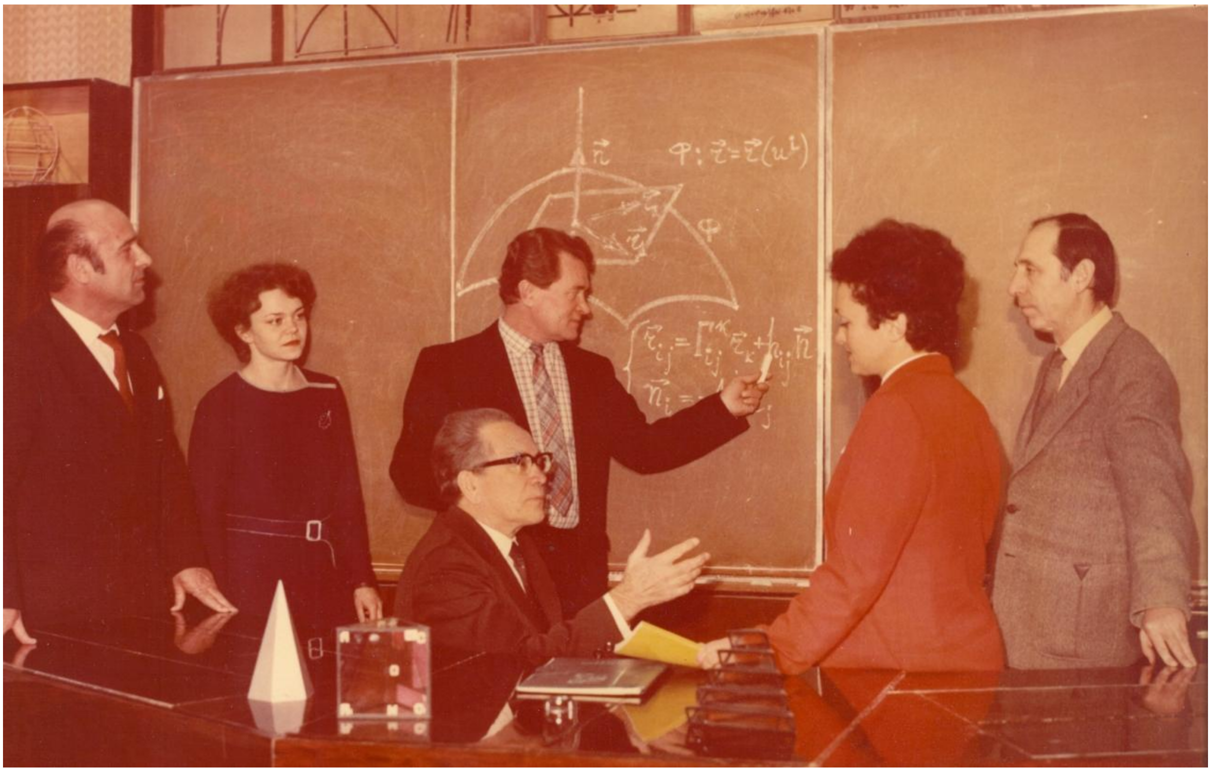
На цей період припадає публікування серії праць, присвячених як проблемам викладання геометрії в школі, так і складним питанням курсу математики. Основне спрямування цих праць – удосконалення математичної і методичної підготовки вчителів математики.

Знайомство з А. М. Колмогоровим переросло в тісну дружбу, про яку Олександр Федорович напише у своїх спогадах. Завдяки цим спогадам ми маємо змогу доторкнутися до величі особистості А. М. Колмогорова.

У збірнику «Колмогоров в воспоминаниях» (М.: Изд-во «ФМЛ», ВО «Наука», 1993. – С. 736) наведено два листи А. М. Колмогорова до І. М. Коровіної, у яких він дуже тепло згадує О. Ф. Семеновича (С. 316, 318). У бібліотеці Олександра Федоровича як найдорожчі реліквії зберігалися 11 книг з дарчими надписами А. М. Колмогорова «Дорогому Александру Фёдоровичу ...».

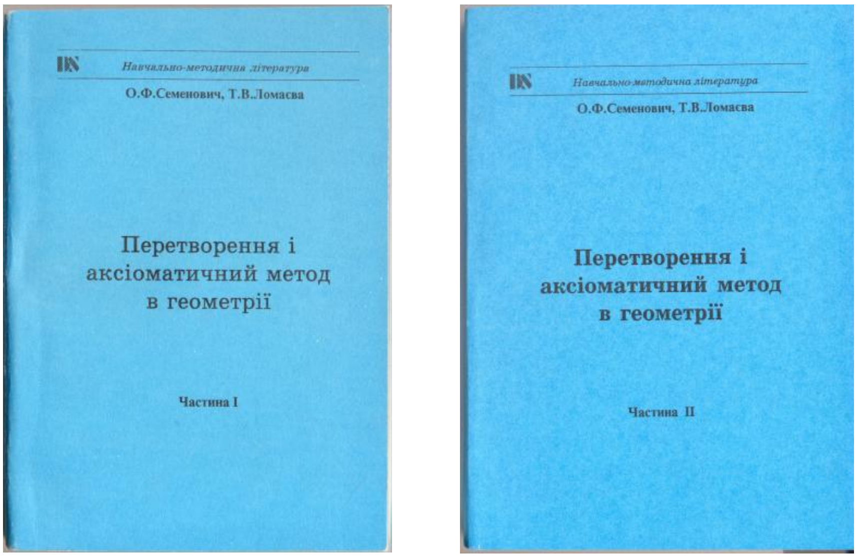
У 50 роботах з числа 730, що наведені в бібліографічній частині книги «Колмогоров в воспоминаниях», О. Ф. Семенович є співавтором академіка А. М. Колмогорова. Деякі з цих праць видано азербайджанською, башкирською, білоруською, вірменською, грузинською, казахською, каракалпацькою, киргизькою, латиською, литовською, молдавською, польською, таджицькою, татарською, тувинською, угорською, узбецькою, українською мовами.

Усе своє творче життя багато сил і енергії О. Ф. Семенович віддавав викладанню геометрії у ВНЗ. Його лекції були завжди оригінальними за формою, насиченими науковим і філософським змістом, у кожній з них завжди було щось захоплююче, неповторне. Він будував процес навчання так, щоб кожний студент мав змогу перетворитися зі «споживача» знань на «здобувача» знань, щоб кожний студент відчував себе особистістю, здатною до творчості.



Кафедра геометрії Черкаського педінституту (80-ті роки XX ст.)

За 55 років викладацької діяльності у педінститутах О. Ф. Семенович читав лекції і вів практичні заняття з аналітичної геометрії, диференціальної геометрії, проективної геометрії, нарисної геометрії, математичної логіки, вищої алгебри, елементарної математики, зі спецкурсів і спецсемінарів «Геометрія Рімана», «Неевклідові геометрії», «Елементи топології», «Групи перетворень», «Геометричні побудови в площині Лобачевского», «Елементарна математика в сучасному викладі», «Логічна будова шкільного курсу геометрії» та інші.



Останні праці О. Ф. Семеновича

З 1945 до 1987 року О. Ф. Семенович щорічно керував науковими студентськими гуртками. Студенти з вдячністю вбирали науку великого вченого й справжньої Людини.

Особливу турботу О. Ф. Семенович виявляв до підготовки вчителя – і майбутнього, і працюючого. З 1945 року він систематично виступав з лекціями і доповідями перед учителями та учнями. У 70-ті роки виступав з лекціями перед вчителями Бидгоського воєводства (Польща), Свердловської, Володимирської, Кримської, Ульяновської, Черкаської та інших областей.

О. Ф. Семенович з учителями математики

У 1945–1960 роках О. Ф. Семенович брав активну участь і виступав з доповідями на щорічних конференціях викладачів математичних кафедр педінститутів Уральської зони (ця «зона» охоплювала представників педінститутів від Смоленська до Омська). У сімдесяті роки він виступав з доповідями на всесоюзній нараді завідувачів кафедр педінститутів і завідувачів кабінетів математики ІВВ, на всесоюзних семінарах методистів-математиків у Центральному інституті вдосконалення вчителів у Москві, на семінарі Познанського університету тощо. У восьмидесяті роки брав участь у Всесоюзній нараді-семінарі «Про заходи з покращення викладання математики», робив доповіді на Всесоюзній науковій конференції «Вдосконалення методичної підготовки вчителя у педінститутах» (м. Андижан), на Республіканському методичному семінарі (м. Київ), обласних конференціях у містах Свердловську, Ульяновську, Черкасах та ін.

У 1968 році Олександр Федорович увійшов до складу Науково-методичної ради з математики Міністерства освіти СРСР (наказ № 77 від 11 листопада 1968 року).

За завданням редакції всесоюзного журналу «Математика в школе» О. Ф. Семенович рецензував рукописи багатьох статей, що надходили до цього журналу. За проханням педінститутів і редакцій видавництв писав відгуки і рецензії на рукописи книг, посібників, кандидатських і докторських дисертацій з геометрії та методики викладання математики (Г. П. Бевз, М. Б. Верніков, В. П. Білоусова, І. Г. Ільїн, О. П. Сергунова, В. М. Котлова, П. М. Олонічев, Я. П. Понарін, Т. А. Лизогуб, П. Л. Касярум, М. І. Бурда, М. І. Кованцов, З. І. Слєпкань, М. В. Метельський, І. О. Новік, Н. А. Тарасенкова та ін.).

Відмітимо, що О. Ф. Семенович вів широке ділове листування з математиками педінститутів і університетів (понад 160 вчених). Багато хто з них вручали особисто чи надсилали йому дарчі екземпляри своїх опублікованих праць.

Численна кількість учителів Свердловської, Ульяновської та Черкаської областей є учнями Олександра Федоровича. Вони з великою повагою й теплом згадують про нього як про незрівнянного педагога-наставника. Зокрема академік, доктор психологічних наук, професор Тамара Семенівна Яценко згадує, що для студентів Олександр Федорович здавався святим у своїй неперевершеності майстра-геометра та рафінованим інтелігентом в особистих, службових та ділових взаєминах. Студентів вражало його мистецтво незмінно зберігати ефективність виховного впливу без використання сили голосу, традиційних нарікань, повчань, рекомендацій. Поява Олександра Федоровича в аудиторії – це вже була подія: його постать, погляд, чіткість і охайність у всьому, до найменших дрібниць – все виховувало, особливо його здатність переконувати, наполягати на своєму на фоні загальної і незмінної поваги до особистості студента («Математика в школі», 2001, № 6).

Багато хто з викладачів і співробітників математичного та фізичного факультетів Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького є учнями О. Ф. Семеновича ще з студентської лави. Для всіх, кому довелося працювати разом з Олександром Федоровичем, незабутньою залишиться **школа Семеновича – школа наукової честі, людської гідності, незламності, людяності, великої поваги до людини праці**. Треба додати, що Олександр Федорович відзначався великою скромністю, добросердям, постійною готовністю допомогти знайомим і незнайомим в їх роботі, виключною працездатністю й глибокою мудрістю, завжди керувався принципом «Не можна самостверджуватися, принижуючи інших».

Держава високо оцінила вклад Олександра Федоровича у справу народної освіти. За плідну науково-педагогічну діяльність професора О. Ф. Семеновича нагороджено орденом «Знак пошани», медалями «А. С. Макаренко» і «Ветеран праці», знаками «Відмінник освіти СРСР», «Відмінник народної освіти».

Сьогодні ми, згадуючи Олександра Федоровича, схиляємося перед його педагогічним талантом, науковим інтелектом, вшановуємо його за відданість улюбленій важливій справі, працьовитість, чуйність, увагу і повагу до колег і студентів. Пам’ять про Олександра Федоровича назавжди залишиться в серцях тих, кому пощастило спілкуватися з ним.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1963 МАТЕМАТИКА № 3 (34)

А. Ф. Семенович

ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙКОЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КРАЯМИ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Всякая конструктивная задача второй степени в гиперболической плоскости разрешима некоторыми средствами, если этими средствами разрешимы восемь элементарных задач Штейнера, две так называемые главные задачи и три основные задачи на построение в плоскости Лобачевского ([1], § 35). Рассмотрим решения их двусторонней линейкой с параллельными краями. Этим инструментом можно строить прямые, проходящие через данную точку параллельно данной прямой ([2], § 22, 3°).

Задача 1. Построить заградительную прямую для данного угла ABC. Через произвольную точку D, лежащую во внутренней области угла ABC, проводим прямые DA и DC, параллельные соответственно прямым BA и BC в указанных направлениях (рис. 1). Для прямых BC, BD, BA строим четвертую гармоническую прямую BE. Строим также прямую DF — четвертую гармоническую к прямым DC, DB, DA (эти два последние построения осуществляются, как известно, односторонней линейкой). Прямые BE и DF пересекаются; точка их пересечения M лежит на искомой прямой. Двусторонней линейкой через точку M проводим прямую, параллельную BA; она и будет искомой.

Задача 2. Удвоить данный отрезок OA. Через точку A проводим произвольную прямую AC, отличную от OA. Строим $\overrightarrow{OC} \| \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{OD} \| \overrightarrow{CA}$ (рис. 2). Затем для угла $C'OD'$ находим заградительную

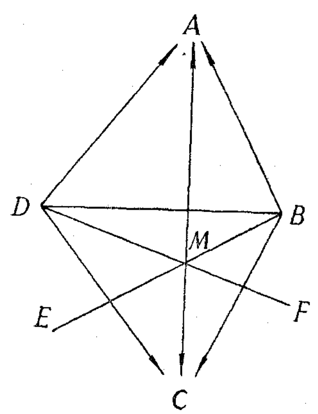


Рис. 1

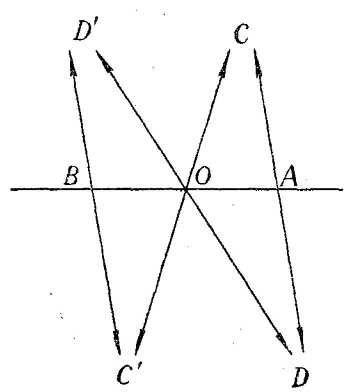


Рис. 2

прямую, которая пересечет OA в точке B. Легко видеть, что $OB = OA$ и $AB = 2OA$.

Задача 3. Через данную точку P провести прямую, расходящуюся с данной прямой a. На прямой a берем произвольную точку O (рис. 3), и строим отрезки $OB = OA$ (задача 2). Далее строим прямую PQ — четвертую гармоническую к прямым PA, PB, PO. Прямая PQ расходится с прямой a и имеет с ней общий перпендикуляр, проходящий через точку O. Ясно, что положение прямой PQ зависит от выбора точки O на прямой a.

Задача 4. Разделить данный отрезок AB пополам. Вне прямой AB выбираем произвольную точку P и строим прямую PQ, расходящуюся с AB. На этой прямой построим отрезки $CD = CE$ (рис. 4)

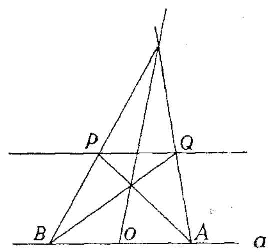


Рис.

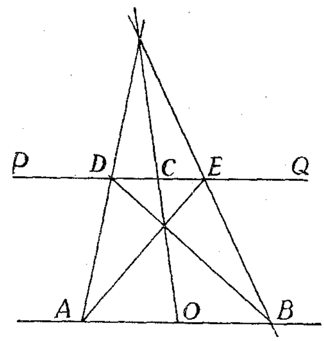


Рис. 4

и с их помощью разделим отрезок AB пополам односторонней линейкой. Построения в задачах 3 и 4 проективны ([2], § 22).

Задача 5. Из данной точки O на прямой a восставить к этой прямой перпендикуляр. Построим прямую PQ, расходящуюся с данной прямой и имеющую с ней общий перпендикуляр, проходящий через точку O (задача 3). Отложим от точки O на прямой a равные отрезки OA и OB. Через точку A проведем прямую $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{QP}$, через B — прямую $\overrightarrow{BQ} \parallel \overrightarrow{PQ}$ (рис. 5). Точка M пересечения прямых AP и BQ лежит на искомом перпендикуляре.

Задача 6. Удвоить данный угол AOB. На стороне OA данного угла выберем точку A и построим ей симметричную относительно прямой OB. Для этого на прямой OB берем произвольную точку K и строим $KM \perp OB$. Если прямая KM пройдет через A, то, пользуясь решением задачи 2, приходим к искомой точке. В противном случае проводим через A ту параллель к прямой OB, которая пересечет прямую KM (в некоторой точке P). Строим отрезок KT, равный отрезку KP и проводим через T прямую, параллельную прямым AP и BO в направлении их параллельности. Дальнейшее ясно из рис. 6. Угол AOA' искомый. Приведенный вариант решения задачи указан автору А. С. Смогоржевским.

Задача 7. Из данной точки A вне данной прямой PQ опустить на нее перпендикуляр. На данной прямой выберем точку O и построим угол QOC, равный углу AOQ (рис. 7) с помощью точек M, N, L на перпендикуляре MN к прямой PQ (задача 6). Используя эти же точки, через A проведем прямую AB, расходящуюся с MN и имеющую с ней общий перпендикуляр MQ (задача 3). Прямая AB искомая.

Задача 8. Построить биссектрису данного угла. Строится заградительная данного угла и опускается на нее перпендикуляр из вершины.

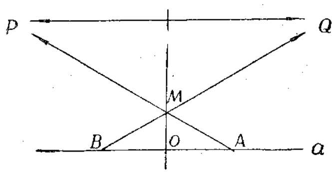


Рис. 5

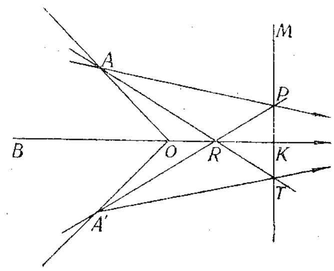


Рис. 6

Задача 9. Построить отрезок параллельности для данного угла. Строится заградительная для угла, равного удвоенному данному, и опускается на нее перпендикуляр из вершины угла.

Задача 10. На стороне угла MON дан отрезок OA. Отложить отрезок, равный данному, на второй стороне этого угла от его вершины. Строится биссектриса угла MON и из точки A опускается на нее перпендикуляр, который пересекает вторую сторону угла в искомой точке.

Задача 11. Даны отрезок AB и точка A' на прямой AB. Построить на этой прямой точку B' так, чтобы $A'B' = AB$. Через A проведем произвольную прямую AP и через B — прямую BP, параллельную AP в направлении от A к P. Далее построим $\overrightarrow{A'P'} \| \overrightarrow{PA}$ (рис. 8). Прямые BP и $A'P'$ пересекутся в точке O. Заградительная для угла MON пересечет прямую AB в искомой точке B'. Решения задачи для других положений точки A' на прямой AB аналогичны рассмотренному.

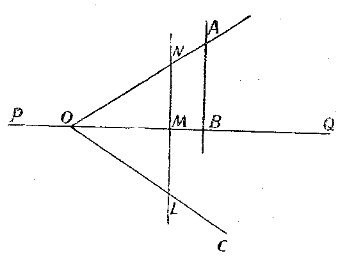


Рис. 7

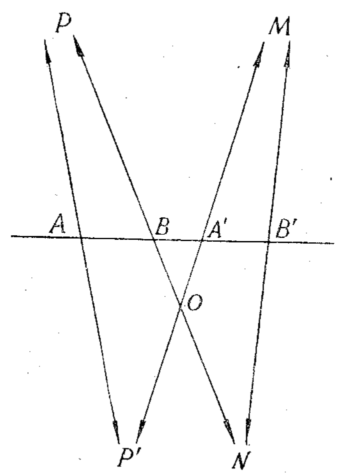


Рис. 8

Задача 12. От данной точки A' на данной прямой $A'P'$ отложить отрезок, равный данному отрезку AB. Проводим прямую AA' (рис. 9) и строим отрезок $AC_1 = AB$ (задача 10). На прямой $A'A$ построим отрезок $A'C'$, равный AC_1 (задача 11). На прямой $A'P'$ строим отрезок $A'B' = A'C'$ (задача 10).

Задача 13. Для данного отрезка построить его угол параллельности. Пусть дан отрезок AB. Построим прямую $BC \perp AB$ и прямую $\overrightarrow{AD} \| \overrightarrow{BC}$. Угол BAD — искомый.

Задача 14. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету a. Отложим на некоторой прямой отрезок $MP=c$ и на луче MP — отрезок $MN=a$. Из точек P и N восставим перпендикуляры PQ и NR (рис. 10). Через точку M проведем прямую $\overrightarrow{MQ} \| \overrightarrow{PQ}$. Она пересекает прямую NR в точке K. В треугольнике MNK катет $MN=a$, $\angle KMN=\Pi(c)$. В силу свойств группы прямоугольного треугольника ([3], § 26), гипотенуза MK треугольника MNK равна отрезку параллельности для угла между катетом a и гипотенузой c искомого треугольника. Поэтому на луче MP отложим отрезок MA, равный отрезку MK, проведем $AB \perp MP$ и $\overrightarrow{MB} \| \overrightarrow{AB}$. Прямая MB пересечет прямую NR в некоторой точке L. Треугольник MNL искомый.

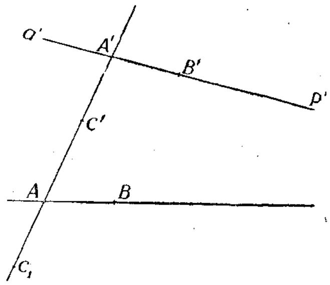


Рис. 9

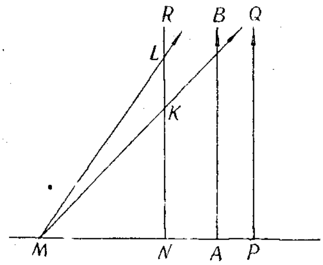


Рис. 10

Задача 15. Построить угол, равный данному. Из точки B на одной из сторон данного угла A опускаем на вторую его сторону перпендикуляр BC. Строим треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC, по гипотенузе и катету (задача 14). Угол $B'A'C'$, искомый.

Задача 16. Построить точки пересечения данной прямой a с окружностью радиуса r, описанной около данной точки O. Если из O опустить перпендикуляр на прямую a и обозначить его основание через B, то решение задачи сведется к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе r и катету OB.

Задача 17. Построить точки пересечения двух данных пересекающихся окружностей. Решение сводится обычными методами к задаче 16.

Решениями задач 8, 2, 5, 4, 7, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 13, 9 доказывается

Теорема. *С помощью двусторонней линейки с параллельными краями в гиперболической плоскости разрешима всякая конструктивная задача второй степени.*

г. Свердловск

Поступило
15 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Несторович. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
2. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
3. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. I. М.— Л., 1949.
4. К. К. Мокрищев. О разрешимости ограниченными средствами конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского. Учен. зап. Ростовск. ун-та, 32, 4, стр. 15—27, 1955.
5. E. Freda. Sui problemi di geometria plana non-euclidea. Giorn. di Mat. di Battaglini, LI (3), 4, p. 343—365, 1913.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1963 *МАТЕМАТИКА* *№ 5 (36)*

А. Ф. Семенович

ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙКОЙ И ДИСКРЕТНЫМ ОРИЦИРКУЛЕМ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В 1948 г. проф. А. С. Смогоржевский [1] доказал разрешимость конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского линейкой и гиперциркулем с фиксированной дистанцией. В 1957 г. Р. И. Кирищиев [2] нашел, что вместо гиперциркуля может быть взят инструмент, с помощью которого строятся точки эквидистанты заданной высоты h без вычерчивания самой этой эквидистанты, как непрерывной линии. При этом он постулировал возможность построения точки пересечения эквидистанты, определяемой базой a и высотой h, с прямой, пересекающей a. Инструмент Р. И. Кирищиева можно назвать дискретным гиперциркулем постоянного раствора.

В той же работе [1] и в работе проф. Н. М. Несторовича [3] доказана разрешимость задач второй степени линейкой и орициркулем. Оказывается, вместо орициркуля может быть взят снова лишь дискретный орициркуль, причем постулат, аналогичный постулату Р. И. Кирищиева, не нужен. Последний факт был указан автору проф. А. С. Смогоржевским.

Рассмотрим решения задач с помощью линейки и дискретного орициркуля, считая, что последний характеризуется следующим постулатом: можно строить точки орицикла, если построены его ось и точка на ней.

Задача 1. На стороне BC данного острого угла ABC построить вторую точку орицикла с осью BA, проходящего через точку B. С помощью дискретного орициркуля строим ещё четыре точки орицикла с осью BA, проходящего через точку B. Тогда по теореме Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, точка пересечения прямой BC с заданным орициклом строится, как известно, одной линейкой.

Ясно, что решение этой задачи указывает также построение отрезка в два раза большего, чем отрезок параллельности для угла ABC.

Задача 2. Из данной точки A на прямой PM восставить к ней перпендикуляр.

Дискретным орициркулем строим точки B, C, E, H орицикла с осью PM, проходящего через точку A. Линейкой строим касательную AK к этому орициклу. Прямая AK — искомая.

Задача 3. Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую.

Восставив два перпендикуляра к данной прямой, сводим задачу к известному способу решения одной линейкой.

Задача 4. Построить биссектрису данного не прямого угла ABC.

Пусть данный угол — острый. Построим на луче BC (рис. 1) точку D орицикла с осью BA, проходящего через точку B (задача 1). Аналогично строим на луче BA точку E орицикла с осью BC, проходящего через ту же точку B. Затем проводим прямую DE и находим на луче EA точку H орицикла с осью EM, проходящего через E, а также на луче DC точку F орицикла с осью DN, проходящего через D. Точка O пересечения прямых EF и HD лежит на искомой биссектрисе.

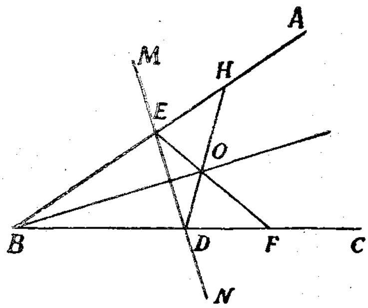


Рис. 1

Если данный угол — тупой, то на луче BC нет точки орицикла с осью BA, проходящего через точку B. Однако, переходя на стороны смежных с данным углов, легко свести решение задачи к уже рассмотренному случаю.

Задача 5. На стороне данного угла ABC дан отрезок BP. На второй стороне этого угла отложить отрезок BQ, равный отрезку BP.

Пусть угол ABC не прямой. Построим на сторонах BA и BC данного угла отрезки BE и BH, в два раза бо́льшие отрезка параллельности данного (или смежного с данным) угла (задача 1). Затем построим биссектрису BO угла ABC. Проведем прямую HP и через точку R ее пересечения с BO построим прямую ER. Обозначив через Q точку пересечения ER и BC, получим искомый отрезок BQ.

Если теперь данный угол ABC — прямой, то проведем внутри его вспомогательный луч BC_1 и построим на нем отрезок $BQ_1 = BP$. Затем, используя угол C_1BC, построим на луче BC отрезок $BQ = BQ_1$.

Задача 6. Разделить данный прямой угол пополам.

Решение задачи известным образом сводится к откладыванию отрезков, равных между собой, на сторонах данного угла от его вершины.

Задача 7. Удвоить данный отрезок AB.

Проведем произвольный луч BC, не лежащий на прямой AB, и на нем отложим отрезок $BM = BA$. Затем, используя угол, смежный с углом ABC, строим на продолжении отрезка AB отрезок $BE = BM$. Отрезок AE — искомый.

Задача 8. Удвоить данный угол AOB.

На стороне OA данного угла возьмем точку M и опустим из нее перпендикуляр на прямую OB; основание его обозначим через H. На прямой MH от точки H отложим отрезок $HE = HM$. Угол MOE — искомый.

Задача 9. Разделить данный отрезок AB пополам.

Восставим перпендикуляры к прямой AB в точках A и B. Отложим на них отрезки AC и BE, равные AB и лежащие по разные стороны от прямой AB (задача 5). Тогда прямая CE пересечет отрезок AB в искомой точке.

Задача 10. От данной точки M на данной прямой MH отложить отрезок, равный данному отрезку AB.

Соединим прямой точки A и M. Через середину O отрезка AM и точку B проведем прямую и удвоим отрезок BO (задача 7). $OC = OB$. Точку C соединим прямой с M. $CM = AB$. Теперь на прямой MH строим отрезок MP, равный CM (задача 5). Отрезок MP — искомый.

Задача 11. Построить угол, равный данному углу B.

Из точки A, взятой на одной стороне данного угла, опускаем перпендикуляр на другую его сторону. Основание перпендикуляра обозначим через C. Тогда задача сводится к построению прямоугольного треугольника по двум катетам (задачи 2 и 10).

Задача 12. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой BC в заданном на ней направлении.

Может быть использовано решение задачи 1° из [2].

Задача 13. Для данного отрезка AB построить его угол параллельности.

Задача 14. Построить отрезок параллельности для данного острого угла ABC.

Строим на луче BC точку D орицикла с осью BA, проходящего через точку B. Затем находим середину E отрезка BD. Отрезок BE — искомый.

Задача 15. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету a.

Отложим на некоторой прямой отрезок $MP = c$ и на луче MP — отрезок $MN = a$. Из точек P и N восставим перпендикуляры PQ и NR (рис. 2). Через точку M проведем прямую $\overrightarrow{MQ} \| \overrightarrow{PQ}$. Она пересечет прямую NR в точке K. В треугольнике MNK катет $MN = a$, $\angle KMN = \Pi(c)$. В силу свойств группы прямоугольного треугольника ([4]), § 26) гипотенуза MK треугольника MNK равна отрезку параллельности для угла между катетом a и гипотенузой c искомого треугольника. Поэтому из точки K восставим перпендикуляр к прямой MQ и через точку M проведем параллель MS к этому перпендикуляру. На луче MQ отложим отрезок $MA = a$ и из его конца A восставим перпендикуляр к прямой MQ. Последний пересечет прямую MS в точке B. Треугольник AMB — искомый.

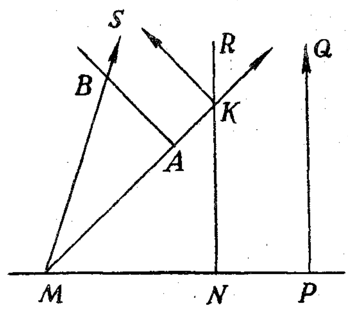


Рис. 2

Задача 16. Построить точки пересечения данной прямой a с окружностью радиуса r, описанной около данной точки O.

Если из O опустить перпендикуляр на прямую a и обозначить его основание через B, то решение задачи сведется к построению прямоугольного треугольника по катету OB и гипотенузе r.

Задача 17. Построить точки пересечения двух данных пересекающихся окружностей.

Решение задачи сводится обычными методами к задаче 16.

Таким образом, решены восемь элементарных задач Штейнера, две главные задачи и три основные на построение в плоскости Лобачевского, и, стало быть, доказана

Теорема. *С помощью линейки и дискретного орициркуля в плоскости Лобачевского разрешима всякая конструктивная задача второй степени.*

В статье М. Н. Гафурова [5] рассмотрены построения в плоскости Лобачевского с помощью линейки и некоторых вспомогательных инструментов (эталона длины, биссектора, эталона высоты). В ней рассмотрен также инструмент, который М. Н. Гафуров называет орициклическим эталоном. В качестве постулированных построений для орициклического эталона М. Н. Гафуров принимает следующие: 1) „Орициклический эталон мы будем рассматривать как средство, позволяющее выполнить следующие построения. Пусть дана собственная точка P предельной линии и ее ось, проходящая через P. Тогда мы можем найти вторую точку S пересечения этой предельной линии с данной ее осью, а так как точка S бесконечно удалена, то это равносильно возможности провести прямую, параллельную данной оси предельной линии в направлении от P к S". 2) „Будем считать также, что с помощью орициклического эталона можно строить точки пересечения той же предельной линии с каждой начерченной её осью" ([5], стр. 268).

В работе „Построения линейкой с параллельными краями в плоскости Лобачевского", которая была доложена автором в феврале месяце 1960 г. на 18-ой конференции математических кафедр пединститутов зоны Урала (опубликована в Изв. вузов, Матем., № 3, 1963) показано, что всякая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского разрешима линейкой с параллельными краями. Таким образом, второй постулат М. Н. Гафурова при наличии первого излишен.

Не трудно доказать, далее, что дискретный орициркуль может быть заменен Δ-эталоном, который характеризуется следующим постулатом: на стороне построенного острого угла отложить от его вершины отрезок параллельности для этого угла. Доказательство сводится к решению задачи об удвоении данного отрезка, которая выполняется совершенно аналогично задаче 7, рассмотренной выше. Следовательно, всякая конструктивная задача второй степени в плоскости Лобачевского разрешима линейкой и одним из „орициклических" инструментов — орициркулем, дискретным орициркулем и Δ-эталоном.

Приношу глубокую благодарность проф. А. С. Смогоржевскому за его советы и указания.

г. Свердловск

Поступило
22 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в пространстве Лобачевского. Сборник научных трудов „50 лет Киевского ордена Ленина политехнического ин-та", Киев, 1948.

2. Р. И. Кирищиев. О геометрических построениях в плоскости Лобачевского при помощи прямой линии и точки. Изв. вузов, Матем., № 1, стр. 161—165, 1957.

3. Н. М. Несторович. Геометрические построения на плоскости Лобачевского, выполняемые с помощью орициркуля и линейки. ДАН СССР, т. 66, № 6, 1949.

4. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. I. М.—Л., 1949.

5. М. Н. Гафуров. О геометрических построениях в плоскости Лобачевского, выполняемых линейкой, при условии использования некоторых вспомогательных инструментов и средств. Учен. зап. Наманганского пединст-та, вып. 2, стр. 223—274, 1957.

А.Н. Колмогоров
А.Ф. Семенович
Р.С. Черкасов

ГЕОМЕТРИЯ

6-8

А. Н. Колмогоров,
А. Ф. Семенович,
Р. С. Черкасов

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ 6-8 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Н. КОЛМОГОРОВА

Утверждено
Министерством просвещения СССР

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

6 класс

ГЛАВА II

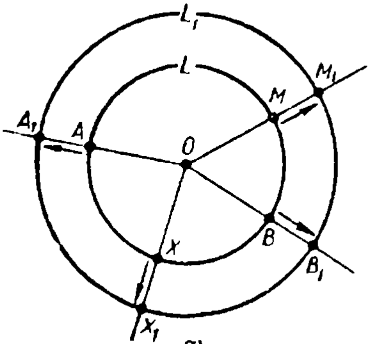
КОНГРУЭНТНОСТЬ ФИГУР И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

§ 1. Конгруэнтность

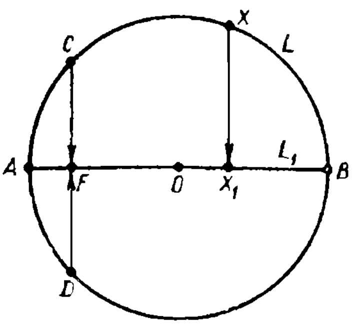
15. Отображения фигур

1. Из курса алгебры вы знакомы с понятием отображения множества на множество. Фигура — множество точек. Поэтому можно рассматривать отображения одной фигуры на другую.

П р и м е р 1. Пусть L и L_1 — две окружности с общим центром O (рис. 80, *а*). Будем считать, что каждой точке X первой окружности соответствует та точка X_1 второй, которая лежит на луче OX. Например, точке A соответствует точка A_1, точке B — точка B_1 (это записывают так: $A \to A_1$, $B \to B_1$).



а)



б)

Рис. 80

Итак, каждой точке X первой окружности соответствует одна точка второй. При этом каждая точка второй окружности поставлена в соответствие некоторой точке первой окружности. Множество всех точек, соответствующих точкам окружности L, — окружность L_1. Мы получили отображение окружности L на окружность L_1.

Обозначим это отображение буквой f. Точку X_1 второй окружности, соответствующую точке X первой окружности, называют *образом точки* X при отображении f и пишут: X_1 —

$= f(X)$. Если фигура G — произвольное подмножество окружности L, то фигуру G_1, состоящую из образов всех точек фигуры G, называют *образом фигуры* G при отображении f и пишут: $G_1 = f(G)$. Например, $\smile A_1X_1 = f(\smile AX)$, $L_1 = f(L)$ (см. рис. 80, *а*).

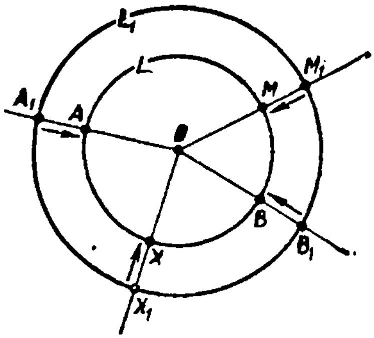


Рис. 81

Пример 2. Зададим отображение окружности (O, r) на ее диаметр AB (рис. 80, *б*). Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1 — точку пересечения прямой AB и перпендикуляра, проведенного через точку X к этой прямой (точку X_1 называют основанием перпендикуляра). Тогда каждой точке окружности соответствует одна точка отрезка AB. (Например, точка A отображается на себя, точка C отображается на точку F и т. д.) При этом каждая точка диаметра AB является образом хотя бы одной точки окружности. Значит, мы задали отображение окружности на ее диаметр AB. Образом окружности при рассмотренном отображении является отрезок AB.

Между этими двумя примерами отображений есть важное различие. В первом примере каждая точка X_1 окружности L_1 является образом только одной точки окружности L. Поэтому по точке X_1 можно найти точку X, для которой точка X_1 является образом при отображении f. Такое отображение называется обратимым.

Отображение множества L на множество L_1 *обратимо*, если каждый элемент множества L_1 является образом только одного элемента множества L. *Для любого обратимого отображения имеется обратное.* Если X_1 — образ точки X при отображении f, то образ точки X_1 при отображении g, обратном f, — точка X. Например, отображение g, обратное f (пример 1), задано на рисунке 81. Отображение, заданное во втором примере, необратимо: точка F является образом двух различных точек C и D (рис. 80, *б*). Такое отображение не имеет обратного.

2. В приведенных двух примерах рассмотрены отображения одной фигуры на другую. Рассмотрим теперь отображения, при которых образом фигуры является она сама, т. е. *отображения фигуры на себя.*

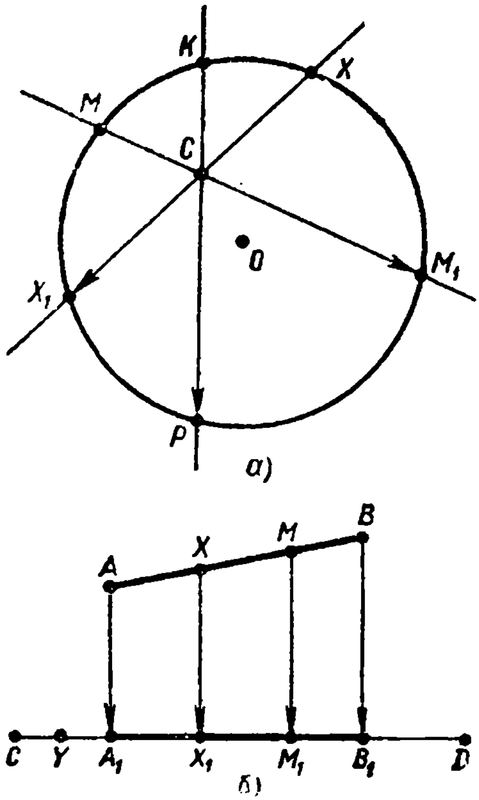


Рис. 82

Пример 3. Любую фигуру, в том числе и плоскость, можно отобразить на себя с помощью *тождественного отображения* E, т. е. с помощью отображения, при котором каждая точка X этой фигуры отображается на себя: $E(X) = X$.

Пример 4. Пусть C — точка внутренней области окружности (рис. 82, *а*), X—произвольная точка этой окружности. Образом точки X будем считать вторую точку пересечения прямой CX с этой окружностью — точку X_1.

Получили отображение окружности на себя. В самом деле, каждой точке окружности соответствует единственная точка этой же окружности (например, точке M соответствует точка M_1). И каждая точка окружности является образом единственной точки этой же окружности (например, точка X_1 есть образ точки X). Рассмотренное отображение обратимо.

Пример 5. Введем координаты на прямой p и каждой точке $M(x)$ прямой p поставим в соответствие точку M_1 прямой p, которая имеет координату $x + 2$. Тогда каждая точка прямой p отобразится на определенную точку этой же прямой p. Например, точка $A(3)$ отобразится на точку $A_1(5)$, точка $B(-6)$ — на точку $B_1(-4)$; начало координат O отобразится на точку $C(2)$. И каждая точка прямой будет образом некоторой точки этой же прямой. Например, точка $B(-6)$ является образом точки $K(-8)$ и т. д. Значит, имеем отображение прямой p на себя. Это отображение тоже обратимо.

▼ Пример 6. Каждой точке X отрезка AB (рис. 82, *б*) поставим в соответствие основание перпендикуляра, проведенного через точку X к отрезку CD. При этом $A \to A_1$, $B \to B_1$, $M \to M_1$ и т. д. Каждая точка X отрезка AB отобразится на определенную точку X_1 отрезка CD. Но среди точек отрезка CD

есть такие точки, которые не являются образами точек отрезка AB при заданном отображении (обозначим его через f).

Итак, образы всех точек отрезка AB составляют только отрезок A_1B_1 (но не весь отрезок CD!). Значит, f отображает отрезок AB на отрезок A_1B_1. Можно сказать также: «f отображает отрезок AB *в* отрезок CD», но нельзя говорить: «отрезок AB отображается *на* отрезок CD». ▼

Вопросы и задачи

182. На рисунке 83 задано отображение f ломаной $AXBCD$ на отрезок A_1D_1: каждой точке X ломаной соответствует та точка отрезка, которая лежит на луче OX. Ответьте на следующие вопросы и запишите ответы в принятых обозначениях (например, $f(A) = A_1$, $A \to A_1$).

1) Какая точка является образом точки A? Точки X? Точки L?

2) Какая точка ломаной отображается на точку M_1? На точку L_1? На точку D_1?

3) Образом какой точки является точка A_1? Точка X_1? Точка C_1?

4) Является ли отображение f обратимым?

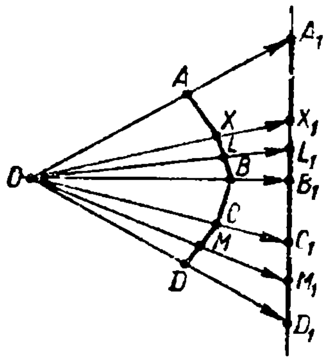


Рис. 83

183. На рисунке 84 задано отображение квадрата $ABCD$ на отрезок A_1D_1: каждой точке X квадрата соответствует основание перпендикуляра, проведенного через точку X к прямой A_1D_1.

1) На какую точку отрезка отображается точка C? Точка D? Точка A?

2) Образом какой точки является точка H_1? Точка P_1?

3) Обратимо ли это отображение?

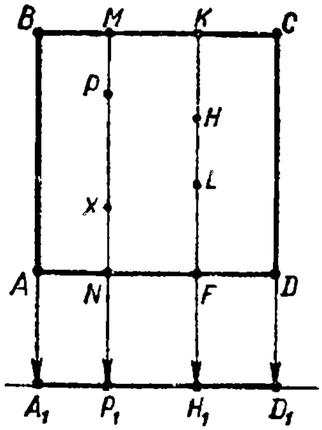


Рис. 84

184. Постройте образы нескольких точек при отображении: 1) отрезка AB на отрезок CD (рис. 85, *а*), если соответствующие точки отрезков лежат на лучах с началом M; 2) луча OM на луч ON (рис. 85, *б*), если соответствующие точки этих лучей лежат на окружности с цент-

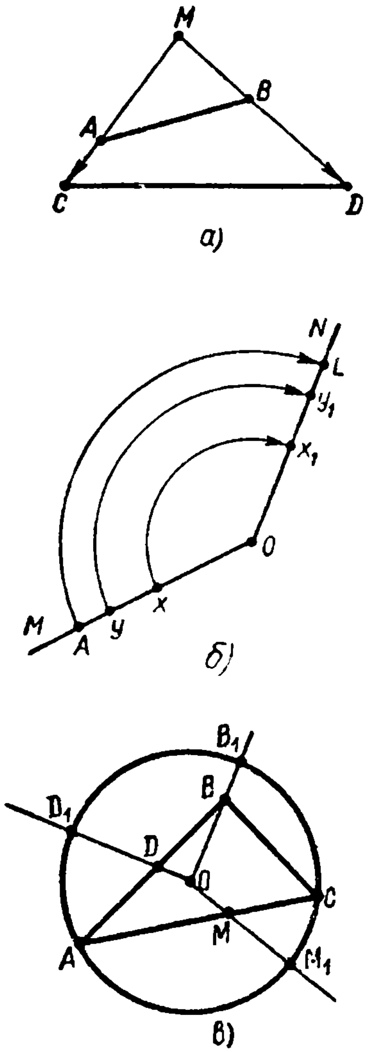


Рис. 85

ром O и $O \to O$; 3) замкнутой ломаной ABC на окружность (O, r) (рис. 85, *в*), если соответствующие точки лежат на лучах с началом O. 4) Обратимы ли эти отображения?

185. Две окружности касаются: 1) внешним образом; 2) внутренним образом. Покажите, выполнив рисунки, как можно отобразить одну из этих окружностей на другую.

186. Задайте (выполнив рисунок) отображение, отличное от тождественного, при котором отображается на себя: 1) отрезок AB; 2) замкнутая ломаная ABC; 3) квадрат $ABCD$; 4) окружность (O, r).

187. При каких из указанных ниже отображений координатная прямая отображается на себя:

1) $A(x) \longrightarrow A_1(2x)$;

2) $A(x) \longrightarrow A_1\left(\frac{x}{3}\right)$;

3) $A(x) \longrightarrow A_1(x^2)$;

4) $A(x) \longrightarrow A_1(x-1)$;

5) $A(x) \longrightarrow A_1\left(\frac{1}{x}\right)$;

6) $A(x) \longrightarrow A_1(-x)$?

188*. 1) Укажите при помощи стрелок все отображения фигуры $\{A, B, C\}$ на себя (например, тождественное отображение этой фигуры записывается так: $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$).

2) Для одного из этих отображений укажите обратное.

189. 1) На координатной плоскости задана фигура L (рис. 86, *а*). Каждой точке $P(x, y)$ поставлена в соответствие точка: а) $P'(3x, 3y)$; б) $P'(-2x, -2y)$. Постройте образы фигуры L при этих отображениях.

2) На координатной плоскости задана окружность (рис. 86, *б*). Каждой точке $P(x, y)$ окружности поставлена в соответствие точка $P'\left(x, \frac{1}{2}y\right)$. Постройте образ данной окружности при этом отображении.

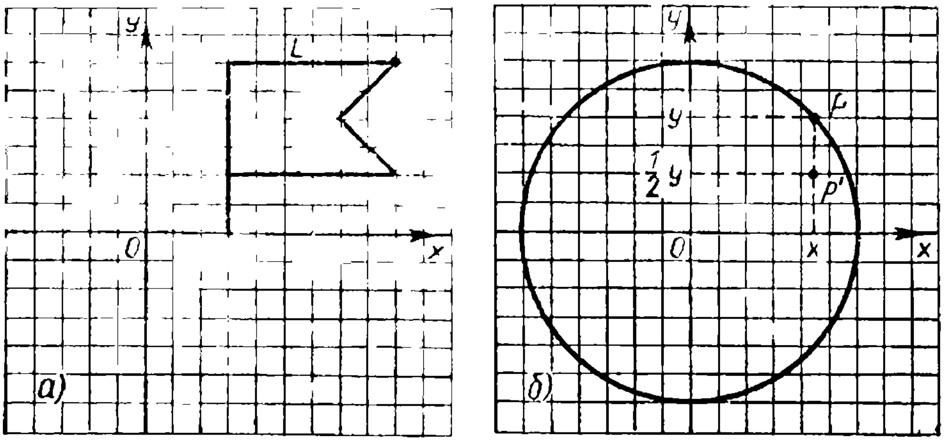


Рис. 86

16. Отображения, сохраняющие расстояния

1. Рассмотрим два примера отображений фигуры на фигуру.

Пример 1. Каждой точке X окружности (O, r) поставим в соответствие точку X_1 пересечения луча OX с окружностью (O, r_1) (рис. 87). Получим отображение первой окружности на вторую. Измерив расстояние между произвольными двумя точками A и B первой окружности и расстояние между их образами A_1 и B_1, получим, что *эти расстояния различны*. Заданное отображение *не сохраняет расстояний* между точками.

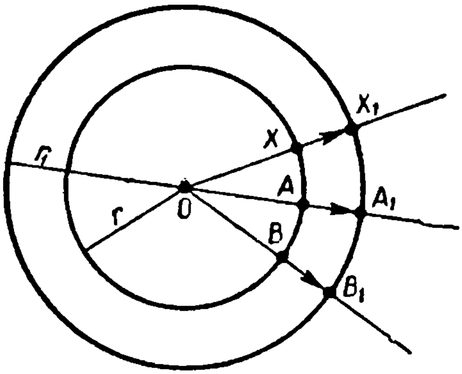


Рис. 87

Пример 2. Рассмотрим два отрезка одинаковой длины — OM и OM_1 (рис. 88). Зададим отображение отрезка OM на отрезок OM_1. Для этого на прямых OM и OM_1 введем координаты, выбрав общую единицу измерения, приняв за начало координат точку O, а за положительные лучи — лучи OM и OM_1. Поставим в соответствие каждой точке X отрезка OM точку X_1

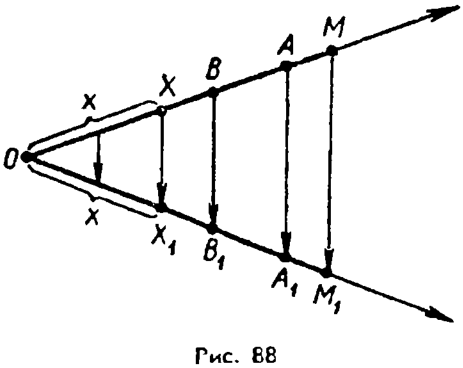


Рис. 88

отрезка OM_1, имеющую ту же координату, что и точка X. Получим отображение отрезка OM на отрезок OM_1. Для любых двух точек A и B отрезка OM расстояние между образами A_1 и B_1 этих точек равно $|AB|$.

▼ В самом деле, по теореме 11

$$|AB| = |x_A - x_B|.$$

Но образы A_1 и B_1 точек A и B имеют те же самые координаты, что и точки A, B. Следовательно,

$$|A_1B_1| = |x_{A_1} - x_{B_1}| = |x_A - x_B| = |AB|. \blacktriangledown$$

Если отображение фигуры L на фигуру L_1 таково, что расстояние между образами A_1 и B_1 любых двух точек A и B фигуры L равно расстоянию $|AB|$, то говорят, что это отображение *сохраняет расстояния.*

2. Отображения, сохраняющие расстояния между точками, обладают рядом свойств, которыми не обладают другие из рассмотренных нами отображений. Так, мы видели, что если отображение фигуры на фигуру не сохраняет расстояния, то образом ломаной, например, может оказаться окружность, а не ломаная (см. рис. 85, *в*), образом квадрата — не квадрат, а отрезок (см. рис. 84). Напротив, при любом отображении, сохраняющем расстояния, каждая фигура отображается на фигуру того же названия, т. е. образом отрезка является отрезок, образом круга — круг, образом прямой — прямая и т. д.

Отображения, не сохраняющие расстояния, могут быть необратимыми (см. пример 2, п. 15). Для отображений, сохраняющих расстояния, имеет место следующая теорема.

16 Т е о р е м а. ***Отображения, сохраняющие расстояния, обратимы. Обратные к ним отображения тоже сохраняют расстояния.***

▼ Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — отображение, сохраняющее расстояния, X и Y — две различные точки и $f(X) = X_1$, $f(Y) = Y_1$.

Так как точки X и Y различны, то $|XY| > 0$ (по первому свойству расстояний). Но $|X_1Y_1| = |XY|$ (так как отображение f сохраняет расстояния). Значит, $|X_1Y_1| > 0$, т. е. точки X_1 и Y_1 различны.

Итак, при отображении f две различные точки не могут иметь один образ, т. е. это отображение обратимо и, значит, имеет обратное отображение.

Отображение, обратное к f, тоже сохраняет расстояния. В самом деле, если точки X_1 и Y_1 — образы точек X и Y при отображении f, то при отображении, обратном к f, образами точек X_1 и Y_1 являются точки X и Y соответственно. А так как f сохраняет расстояния, то $|XY| = |X_1Y_1|$. ▼

Вопросы и задачи

190. На рисунках 89, *а* и *б* заданы отображения ломаных на отрезок. 1) Какие из этих отображений обратимы? 2) Выполняются ли для этих отображений равенства: $|AX| = |A_1X_1|$, $|XY| = |X_1Y_1|$?

191. Задано отображение фигуры L на фигуру L_1. Произвольной точке X фигуры L соответствует симметричная ей относительно оси l точка фигуры L_1 (рис. 90).

1) Назовите образы точек A, B, C.

2) Образами каких точек являются точки Q, X_1, K?

3) Какому отрезку соответствует отрезок KM? Отрезок KX_1?

4) На какие фигуры отображаются: точка P; отрезок BC; ломаная $PABC$?

5) Верно ли равенство $|XP| = |X_1Q|$? Сохраняются ли при этом отображении расстояния?

6) Покажите, что это отображение обратимо. Укажите образы нескольких точек и фигур при отображении, обратном данному.

192. Задано отображение круга L на круг L_1 (рис. 91). Произвольной точке $X \in L$

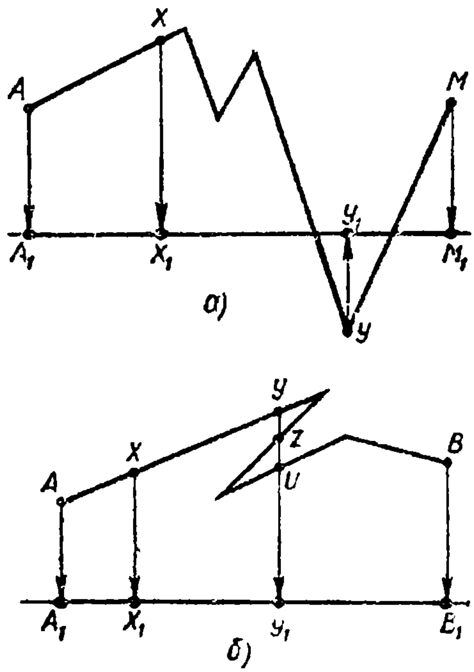


Рис. 89

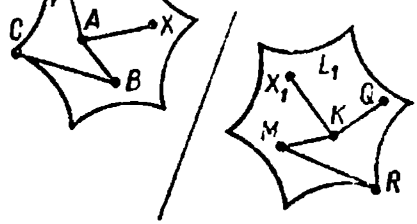


Рис. 90

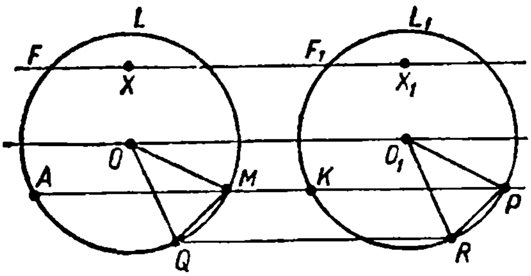


Рис. 91

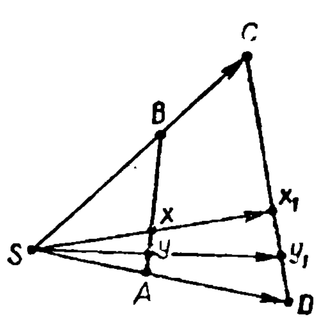


Рис. 92

соответствует точка X_1, полученная при параллельном переносе в заданном направлении на заданное расстояние. 1) На какую точку отображается центр круга L — точка O? 2) Образами каких точек являются точки K, P? 3) На какую фигуру отображается радиус OQ? Треугольник OQM? 4) Верны ли равенства $|XA| = |X_1K|$, $|OX| = |O_1X_1|$? Сохраняются ли при этом отображении расстояния? 5) Покажите, что это отображение обратимо. Укажите образы нескольких точек и фигур при отображении, обратном данному отображению.

193. На рисунке 92 задано отображение отрезка AB на отрезок CD. 1) Какая точка является образом точки Y? На какие фигуры отображаются отрезки XY и AY? 2) Образами каких фигур являются отрезки DX_1 и CD? 3) Является ли рассматриваемое отображение обратимым? 4) Сохраняются ли при этом отображении расстояния?

194. Дан угол MON. Каждой точке стороны OM соответствует та точка стороны ON, которая лежит на окружности с центром O; вершина угла отображается на себя (см. рис. 85, *б*). 1) Отображение какой фигуры на какую здесь задано? 2) На какой отрезок отображается отрезок OY? Образом какого отрезка является отрезок OL? 3) Сохраняются ли при этом отображении расстояния? 4) Покажите, что это отображение обратимо. Укажите образы нескольких точек и фигур при отображении, обратном данному.

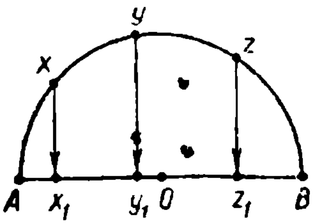


Рис. 93

195. Каждой точке полуокружности соответствует точка ее диаметра (рис. 93). Точки A и B отображаются на себя. 1) Отображение какой фигуры на какую здесь задано? 2) Обратимо ли это отображение? 3) Сохраняются ли при этом отображении расстояния? (Проверьте измерением.)

196. Верны ли предложения: 1) любое обратимое отображение сохраняет расстояния; 2) любое сохраняющее расстояния отображение обратимо?

197*. 1) Укажите все сохраняющие расстояния отображения фигуры $\{A, B, C\}$ на себя, если: а) $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$; б) $|AB| = |BC| = 4$, $|AC| = 5$; в) $|AB| = |BC| = |AC| = 5$.
2) Для каждого из найденных отображений укажите отображение, ему обратное.

198. Сохраняют ли расстояния следующие отображения координатной прямой на себя: 1) $P(x) \to P'(2x)$; 2) $P(x) \to P'(-x)$; 3) $P(x) \to P'(x+2)$; 4) $P(x) \to P'(-x-3)$?

---

17. Конгруэнтные фигуры

В 4 классе вы познакомились с понятием «конгруэнтные фигуры». Например, фигуры L_1 и L_2, L_2 и L_3 (рис. 94) конгруэнтны. О таких фигурах вы говорили, что они «могут совпадать при наложении». Но что означает «наложить фигуры друг на друга», не было сказано.

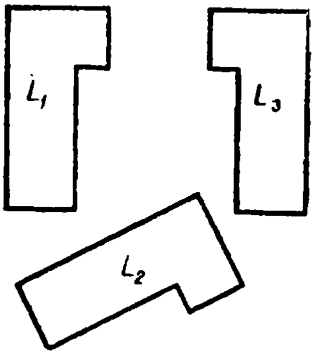


Рис. 94

В геометрии понимать это выражение буквально нельзя. Ведь фигуры для нас множества точек, и «сдвинуть» их с занимаемых ими на плоскости мест нельзя. Вместо «наложения» фигур будем рассматривать их отображения друг на друга.

Пусть, например, треугольник ABC можно «наложить» на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы они «совпали» (рис. 95). Скопируем треугольник ABC на кальку. Наложим эту кальку на треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда копия каждой точки X треугольника ABC «совпадет» с определенной точкой X_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

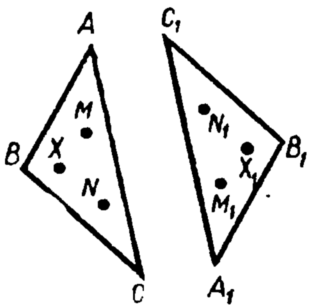


Рис. 95

Значит, для каждой точки X треугольника ABC можно указать соответствующую ей точку X_1 треугольника

$A_1B_1C_1$. Получаем отображение треугольника ABC на треугольник $A_1B_1C_1$. Нетрудно заметить, что при этом произвольные две точки M и N треугольника ABC отображаются на такие точки M_1 и N_1 треугольника $A_1B_1C_1$, что расстояния $|MN|$ и $|M_1N_1|$ равны. Итак, треугольник ABC можно отобразить на треугольник $A_1B_1C_1$ с сохранением расстояний между точками.

Следовательно, понятие «конгруэнтные фигуры» можно определить с помощью понятия «отображение».

Определение. **Фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_2, если существует отображение фигуры L_1 на фигуру L_2, сохраняющее расстояния.**

Если фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_2, то будем писать: $L_1 \cong L_2$.

Рассмотрим еще один пример конгруэнтных фигур. Как показано выше (пункт 16, пример 2), если длины отрезков OM и O_1M_1 равны, то существует сохраняющее расстояния отображение одного из этих отрезков на другой. Следовательно, $[OM] \cong [O_1M_1]$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими свойствами отношения конгруэнтности фигур:

1) *каждая фигура конгруэнтна себе* (свойство рефлексивности): $L \cong L$;

2) *если фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_2, то и фигура L_2 конгруэнтна фигуре L_1* (свойство симметричности):

$$\text{если } L_1 \cong L_2, \text{ то } L_2 \cong L_1$$

(поэтому говорят, что две фигуры конгруэнтны друг другу, не обращая внимания на порядок, в котором они названы);

3) *если фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_2 и фигура L_2 конгруэнтна фигуре L_3, то фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_3* (свойство транзитивности):

$$\text{если } L_1 \cong L_2 \text{ и } L_2 \cong L_3, \text{ то } L_1 \cong L_3.$$

Сказанное можно сформулировать короче:

17 *отношение конгруэнтности фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

▼ Докажем первое свойство. Пусть L — некоторая фигура. Каждой ее точке X поставим в соответствие эту же точку X. Получим тождественное отображение фигуры L на себя. Оно сохраняет расстояния, так как для любых точек A и B имеет место равенство $|AB| = |AB|$. Значит, $L \cong L$.

Второе свойство конгруэнтности фигур непосредственно следует из теоремы 16.

Объясним замысел доказательства третьего свойства. Если фигура L_1 конгруэнтна фигуре L_2, то копию фигуры L_1 можно наложить на фигуру L_2 (см. рис. 94). Затем эту же копию можно наложить и на фигуру L_3, так как $L_2 \cong L_3$. Поэтому фигуру L_1 можно отобразить на фигуру L_3 с сохранением расстояний, т. е. $L_1 \cong L_3$. ▼

Вопросы и задачи

199. Запишите в принятых обозначениях: 1) фигура T конгруэнтна фигуре T_1; 2) отрезок AB конгруэнтен отрезку CD; 3) луч AC конгруэнтен лучу BD.

200. Пусть отображение f сохраняет расстояния и $f(A) = P$, $f(B) = Q$, $f(C) = R$. 1) Найдите расстояния $|PQ|$, $|QR|$, $|PR|$, если $|AB| = 7$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. 2) Назовите подмножества фигуры $\{P, Q, R\}$, конгруэнтные фигурам $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$.

201°. Конгруэнтны ли две фигуры, симметричные относительно: 1) данной прямой; 2) данной точки?

202°. Фигура L отображается при параллельном переносе на фигуру L_1. Конгруэнтны ли фигуры L и L_1?

203. Какие из фигур, изображенных на рисунке 96, конгруэнтны?

204. Начертите какую-либо фигуру и постройте фигуру, ей конгруэнтную. (Для построения можно воспользоваться линейкой, циркулем, угольником или калькой.)

205*. На рисунке 97 задано отображение f фигуры $\{C, D, E\}$ на фигуру $\{A, B\}$; $|AB| = |CD| = |DE| = |CE|$. Верно ли, что: 1) отображение f сохраняет расстояния; 2) фигуры $\{C, D, E\}$ и $\{A, B\}$ конгруэнтны; 3) фигуры $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$, $\{A, B\}$ и $\{E, C\}$ конгруэнтны?

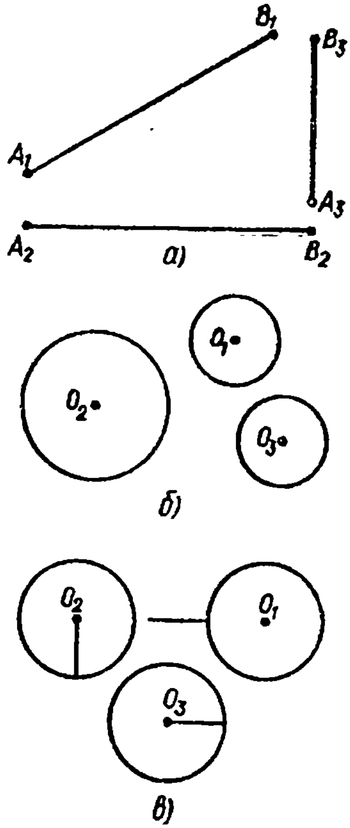


Рис. 96

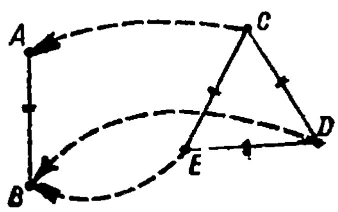


Рис. 97

206°. Может ли фигура, состоящая из двух точек, быть конгруэнтной фигуре, состоящей из трех точек?

207. Отметьте на плоскости три точки A, B, C. Постройте при помощи циркуля фигуру $\{D, E, M\}$, конгруэнтную фигуре $\{A, B, C\}$.

208.** Начертите два конгруэнтных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ и отметьте точку X, принадлежащую первому из них. Постройте образ точки X при каком-либо отображении первого треугольника на второй, сохраняющем расстояния.

209.** Начертите два конгруэнтных квадрата $ABCD$ и $KMPT$ и отметьте точку X, принадлежащую первому из них. 1) Постройте образ точки X при сохраняющем расстояния отображении первого квадрата на второй, если: а) $A \to K$, $B \to M$; б) $C \to K$, $B \to T$. 2) Сколько образов точки X может быть построено при различных отображениях первого квадрата на второй с сохранением расстояний?

210*. Докажите, что два отрезка различной длины не конгруэнтны.

211*. Докажите, что две окружности различных радиусов не конгруэнтны.

212.** Три точки A, B и C не лежат на одной прямой. Точки A_1, B_1 и C_1 — различные точки одной прямой. Докажите, что фигуры $\{A, B, C\}$ и $\{A_1, B_1, C_1\}$ не конгруэнтны.

18. Измерение углов

1. Вы уже умеете измерять углы в градусах. Рассмотрим некоторые свойства величин углов.

1) Как известно, каждый угол можно разделить пополам, т. е. представить его в виде суммы двух конгруэнтных углов. Углы можно делить и на большее число частей. Так, проведя сначала биссектрису угла AOC, а затем биссектрисы углов AOB и BOC, получим четыре конгруэнтных угла, сумма которых — угол AOC (рис. 98). Справедливо такое общее утверждение:

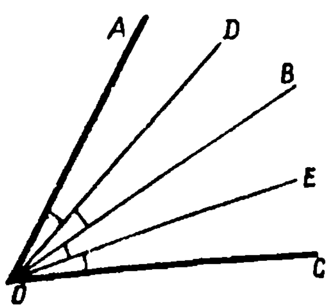


Рис. 98

18₁ *любой угол можно разделить на n конгруэнтных углов* (n — произвольное натуральное число).

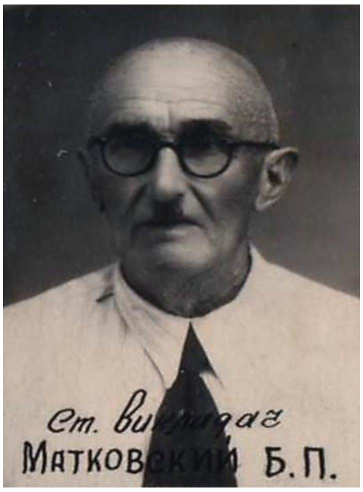
Разделим развернутый угол на 180 конгруэнтных углов. Величину каждого из этих углов называют *градусом*

ТВОРЧЕ ПРОФЕСІЙНЕ СЕРЕДОВИЩЕ – ДЕТЕРМІНАНТА ПЕДАГОГІЧНОЇ МАЙСТЕРНОСТІ О.Ф.СЕМЕНОВИЧА

Людмила Кляцька, Ірина Акуленко

Олександр Федорович Семенович – видатний геометр, талановитий педагог, непересічна особистість. Його творчий і життєвий шлях тісно пов’язаний із Черкаським педагогічним інститутом, де він працював, творив і плекав прийдешні покоління учителів математики. Його математична творчість, педагогічна майстерність, особистісні якості поряд із високим рівнем кваліфікації та професіоналізму були впливовими чинниками, що зумовлювали гідну підготовку багатьох поколінь майбутніх фахівців. Викладачі фізико-математичного факультету, які працювали поруч із Олександром Федоровичем і навчали студентів, вирізнялися глибокою обізнаністю у фахових дисциплінах, мали широкий науковий світогляд, методичну вправність, високі особистісні якості. Ця традиція в умовах сьогодення зазнає нищівних впливів, однак її слід плекати, адаптувати до сучасних умов функціонування вищої освіти, наповнювати новим змістом. Погляд у минуле крізь призму сьогодення має на меті виявити ті чинники, що довели свою ефективність у процесах становлення й розвитку професорсько-викладацького складу математичних кафедр Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького та спроектувати їх у площину сучасних реалій у вищій педагогічній освіті в Україні.

Кафедра математики у складі двох асистентів (Н. І. Голубєв, С. А. Базилевський) була заснована у 1930 році, у рік, коли Черкаський інститут народної освіти отримав статус Черкаського інституту соціального виховання. У 1933 році Черкаський інститут соціального виховання було реорганізовано в Черкаський педагогічний інститут (ЧПІ), до структури якого входив фізико-математичний факультет (ФМФ). У 1933 році кафедра математики ФМФ поповнилася ще одним асистентом Б. П. Матковським, який у 1934–1938 р.р. був завідувачем кафедри. Починаючи 1944 року до 1965 року він працював викладачем у ЧПІ. Наукові дослідження з тем «Інтегрування диференціальних рівнянь» та «Застосування варіаційних методів до розв’язування задач математичного аналізу» він проводив під керівництвом академіка Д. М. Сінцова. Науковий ступінь кандидата педагогічних наук йому було присвоєно у 1955 році (дисертація на тему «Розвиток поняття про континуум та елементи теорії границь у старших класах середньої школи»). Б. П. Матковський читав курси математичного аналізу, теорії функцій, теорії чисел, історії математики та ін.



Матковський Б.П.

У 1941 році викладачів кафедри математики, яка на той час налічувала 13 осіб, було мобілізовано до лав Радянської армії. Після звільнення Черкас на кафедру повернулися викладачі І. О. Півторадня, С. В. Жерновий. Згодом, після закінчення війни, викладачами кафедри стали Б. Я. Фікслер, П. О. Касярум, О. І. Луцик, М. Т. Токарчук, С. Т. Завало.

Токарчук М.Т. Луцик О.І. Касярум П.О. Фікслєр Б.Я.

Сергій Трохимович Завало (1919–1989) – випускник МДУ ім. М. В. Ломоносова, учень відомого алгебраїста О. Г. Куроша – розпочав роботу на кафедрі математики ЧПІ у 1946 році. У 1952 році захистив кандидатську дисертацію на тему «Операторні вільні групи» і одержав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. У 1955–1957 р.р. – завідувач кафедри математики, у 1957–1979 р.р. – заступник міністра освіти УРСР, у 1959–1989 рр. – доцент, професор кафедри алгебри і математичної логіки Київського національного університету (КНУ), у 1970–1980 р.р. – завідувач кафедри алгебри і математичної логіки КНУ, у 1971–1980 р.р. – декан механіко-математичного факультету КНУ. У співавторстві з В. М. Костарчуком, Б. М. Хацетом, С. С. Лєвищенком, В. В. Пилаєвим та І. А. Рокицьким видав кілька підручників і посібників з алгебраїчних курсів для університетів та педагогічних інститутів. За його безпосередньої участі відбувалося становлення та підвищення кваліфікації професорсько-викладацького складу кафедри математики ЧПІ.

Завало С.Т.

Подальше формування професорсько-викладацького складу математичних кафедр ЧПІ здійснювалось у взаємодії таких чинників:

- залучення до складу математичних кафедр найбільш кваліфікованих фахівців з інших ВНЗ;
- направлення на навчання до цільової аспірантури викладачів і кращих випускників фізико-математичного факультету;
- використання потенціалу системи факультетів підвищення кваліфікації у провідних вищих навчальних закладах;
- запрошення провідних науковців інших ЗВО для читання лекцій, консультування й керівництва науково-дослідною роботою студентів і викладачів.

Поєднання цих чинників було досить ефективним. У 1953 році на кафедру математики особисто тогочасним ректором Черкаського державного педагогічного інституту (ЧДПІ), Героєм Радянського Союзу О. В. Тканком були запрошені непересічні особистості, фронтовики, талановиті математики Г. Г. Велігоцький і Й. О. Мосієвський. Обидва викладачі – випускники (1939 р.) механіко-математичного відділу фізико-математичного факультету Харківського державного університету ім. М. Горького – були фахівцями з високим рівнем інтелігентності, математичної культури, обізнаності в різних галузях математики. Г. Г. Велігодський викладав курси теоретичної механіки, теорії функцій, диференціальної геометрії та математичного аналізу, Й. О. Мосієвський – геометричні курси. Чіткі зображення геометричних фігур, які виконував на дошці Йосип Олександрович, викликали захоплення у студентів і викладачів. Пізніше він плідно співпрацював із професором О. Ф. Семеновичем та доцентом Л. З. Кареліним із написання методичних посібників для вчителів загальноосвітніх шкіл («Уроки з геометрії в 7-му класі», «Набори навчальних таблиць з геометрії»).

У 1960 році на кафедру математики керівництвом ЧДПІ було запрошено В. В. Клюєва, який на той час закінчив аспірантуру в Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова, захистив дисертацію («Асимптотичні оцінки для одного класу рядів за раціональними дробами», науковий керівник професор О. І. Маркушевич) і отримав звання доцента. У 1961–1975 р.р. він очолював кафедру математики і вирізнявся глибиною математичних знань, їх широким спектром, високим рівнем математичної культури. Його ерудиція, комунікабельність, високі особистісні якості слугували взірцем для студентів та викладачів. Результати наукових розвідок В. В. Клюєва, зокрема в галузі обчислювальної математики, використовували науковці Київського інституту кібернетики АН УРСР. У 70-х роках минулого століття він зацікавився проблематикою індивідуалізації навчання. У результаті багаторічної роботи ним було створено навчально-методичний посібник з математичного аналізу й теорії ймовірностей, призначений для самостійного засвоєння студентами навчального змісту цих дисциплін. Нині на аналогічних концептуальних засадах вибудовують технологію «Перевернутий клас».

У 1963 році на кафедру математики було запрошено кандидата фізико-математичних наук, доцента О. Ф. Семеновича.

Велігоцький Г.Г.

Клюєв В.В.

Семенович О.Ф.

Роком пізніше, у 1964 році на базі кафедри математики було створено дві кафедри: кафедру математики (завідувач – В. В. Клюєв) і кафедру геометрії та креслення (завідувач – О. Ф. Семенович). Олександр Федорович Семенович – видатний науковець-геометр, методист – мав неперевершений педагогічний талант, був чудовим лектором, вимогливим викладачем, активно співпрацював із Національною академією наук та вчителями-практиками з питань модернізації змісту шкільної математичної освіти та створення відповідного навчально-методичного забезпечення. Підручник з геометрії (автори – О. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагібін, Р. С. Черкасов) привернув увагу академіка А. М. Колмогорова і започаткував їхню плідну співпрацю з написання шкільних підручників з геометрії для 6-8 класів, що тривала понад 15 років. Окрім того, О. Ф. Семенович – автор численних теоретичних математичних студій, які було опубліковано окремими виданнями («Про аксіоматичний метод в геометрії», «Групи перетворень» та ін.).

У 1969 році на посаду доцента кафедри математики за результатами конкурсного відбору було обрано Горбача М. М., який у подальшому обіймав посади декана ФМФ ЧДПІ (1973–1983 р.р) та проректора з навчальної роботи ЧДПІ (1983–1996 р.р.). Напрям його наукових досліджень – наближення періодичних функцій двох змінних за допомогою сум та інтегралів Фур'є, деякі граничні властивості функцій, що здійснюють конформне відображення.

Із вересня 1973 року на кафедрі геометрії та методики викладання математики ЧДПІ розпочалася трудова діяльність В. К. Григоренка, який згодом очолив кафедру математики (1994–2005 р.р.), викладав такі навчальні курси, як: математичний аналіз та додаткові розділи математичного аналізу, вища алгебра, математична логіка, числові системи та ін. В. К. Григоренко був учасником багатьох наукових конференцій і симпозіумів, автором численних статей щодо проблематики теорії диференціальних рівнянь та їх систем, навчальних і навчально-методичних посібників з фахових математичних курсів, зокрема історії математики для вищої школи.

У 1991 році для роботи на кафедрі геометрії та МНМ було запрошено кандидатів фізико-математичних наук, доцентів Р. Л. Александрова і В. О. Камаєва, які на той час працювали у Свердловському педагогічному інституті. Їхні наукові інтереси поширювалися на такі математичні галузі, як: алгебра і теорія чисел, обчислювальна математика (Р. Л. Александров), основи геометрії, диференціальна геометрія, теорія мереж (В. О. Камаєв). У 1992–1994 р.р. В. О. Камаєв працював на посаді завідувача кафедри геометрії та методики навчання математики.

У різні роки для роботи на математичних кафедрах Черкаського державного університету (ЧДУ) були запрошені Ю.В. Триус (1988 р.), Б.П. Головня (1998 р.), В.М. Середенко (2002р.).

Юрій Васильович Триус розпочав роботу на кафедрі алгебри і обчислювальної техніки на посаді старшого викладача, у 1991 році перейшов на посаду доцента, у 1995 році вступив до докторантури Київського державного педагогічного інституту ім. М. П. Драгоманова. У 1996–2001 р.р. працював на посаді проректора з навчальної роботи ЧДУ. З 2005 року – доктор педагогічних наук, з 2007 – професор кафедри прикладної математики. До кола наукових інтересів Ю. В. Триуса входять: основи теорії методів оптимізації, комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики у закладах вищої та загальної середньої освіти та ін.

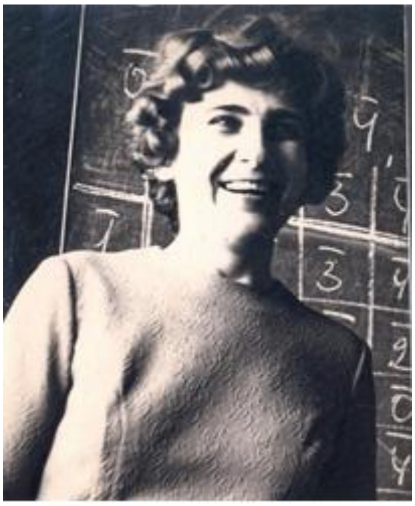
Триус Ю.В. (1993 р.)

Триус Ю.В. (2019 р.)

Науковці Ю. В. Триус, О. О. Богатирьов, О. Е. Жидков, Л. В. Гришко, О. А. Сердюк та ін. стояли у витоків створення кафедри прикладної математики в ЧДУ. У подальшому для роботи на цій кафедрі були запрошені доктор технічних наук, професор В. М. Середенко, кандидат технічних наук, доцент Б. П. Головня, який у 2009 році захистив докторську дисертацію, отримав науковий ступінь доктора технічних наук і, починаючи з 2009 року й до 2018 року, очолював кафедру прикладної математики.

Інший чинник, реалізація якого сприяла становленню професорсько-викладацького складу математичних кафедр університету, пов’язаний із організацією підвищення професійної кваліфікації членів кафедр шляхом залученням до цільової аспірантури кращих випускників та викладачів кафедр. Цей напрям виявився досить плідним. У різні роки до цільової аспірантури за різними напрямами (алгебра, математичний аналіз, геометрія, методика навчання математики) були направлені Л. М. Кляцька (1965 р.), Л. Й. Померанцева (1968 р.), О. Г. Демченко (1968 р.), В. В. Атамась (1983 р.), Н. А. Тарасенкова (1988 р.), О. О. Богатирьов (1989 р.), І. М. Бушин (1990 р.), І. А. Акуленко (1997 р.), О. М. Коломієць (2001 р.), С. А. Ричка (2001 р.), Ю. Ю. Лещенко (2002 р.), О. П. Воловик (2005 р.), І. М. Богатирьова (2006 р.), З. О. Сердюк (2006 р.), Н. О. Красношлик (2008 р.). Усі вони захистили дисертації, отримали науковий ступінь кандидата фізико-математичних, педагогічних, технічних наук відповідно та наукові звання доцентів.

Л. М. Кляцька навчалася в цільовій аспірантурі в Київському державному педагогічному інституті ім. М. Горького протягом 1965–1968 р.р. Починаючи з 1968 року, працювала старшим викладачем, доцентом кафедри геометрії та МВМ, завідувачем кафедри алгебри та обчислювальної математики (1983–1986 р.р.), деканом математичного факультету університету (1986–2006 р.р.). Напрямами її наукових досліджень були групи з деякими обмеженнями для систем підгруп, методологічні аспекти математики, основи криптології, методика навчання математичних дисциплін у ЗВО. Людмила Макарівна була активним учасником всесоюзних алгебраїчних конференцій та симпозіумів з теорії груп, членом оргкомітету всесоюзного симпозіуму з теорії груп в м. Черкаси (1978 р.).



Кляцька Л.М. (1965 рік)

Кляцька Л.М. (2015 рік)

Демченко О.Г.

О. Г. Демченко закінчив цільову аспірантуру (1971 р.) в Інституті математики АН УРСР (відділ теорії функцій і функціонального аналізу). Його наукові інтереси пов’язані з розв’язанням задачі Колмогорова-Нікольського на деяких компактних чи локально компактних класах періодичних функцій в теорії наближення функцій. Його сходження до посади завідувача кафедри математики (1984–1988р.р.) та статусу високоповажного й висококваліфікованого викладача відбувалося завдяки активній участі в республіканських і всесоюзних конференціях, симпозіумах і семінарах, зокрема у постійно діючому на той час семінарі з проблематики теорії функцій і функціонального аналізу при Інституті математики АН УРСР.

Атамась В.В.

Після закінчення цільової аспірантури у відділі алгебри і геометрії Інституту математики НАН УРСР розпочав трудову діяльність на кафедрі алгебри та обчислювальної математики В. В. Атамась (науковий керівник – член-кореспондент НАН УРСР, професор С. М. Черніков). Спочатку – асистентом (1988 р.), потім старшим викладачем (1991 р.) а згодом завідувачем кафедри алгебри та інформатики (1996 р.). Сфера його наукових інтересів – теорія груп, фрактали та групи, методичні проблеми навчання математичних дисциплін у ЗВО. Особливо опікується В. В. Атамась роботою з математично обдарованою молоддю: бере активну участь у підготовці учнівських обласних команд до Всеукраїнських математичних олімпіад, упродовж останніх років є членом журі цих олімпіад, координатором міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» в Черкаській області.

Доценти Л. М. Кляцька, О. Г. Демченко, В. В. Атамась, О. О. Богатирьов, В.К.Григоренко, професор Н. А. Тарасенкова в різні роки очолювали математичні кафедри ЧДУ та ЧНУ ім. Б. Хмельницького.

Викладачі математичних кафедр у 2013 році.

Тарасенкова Н.А.

Особливо успішно склалася науково-педагогічна доля Н. А. Тарасенкової, яка працює на математичних кафедрах університету понад 30 років після закінчення у 1981 році механіко-математичного факультету КНУ ім. Т. Г. Шевченка. У професійній «скарбничці» Ніни Анатоліївни – захист кандидатської (1991 р.) та докторської (2004 р.) дисертацій зі спеціальності 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика), отримання наукового звання доцента та професора, започаткування проведення міжнародних науково-методичних конференцій на базі ЧНУ ім. Б. Хмельницького з проблематики математичної освіти, що стали одними із провідних в Україні (ПМО – 2005-2019 р.р.), та проектів, що мають державне фінансування «Теоретичне та методичне забезпечення якісної математичної освіти загальноосвітніх і вищих навчальних закладів в умовах євроінтеграції» (2015 р.), «Організація навчання математики в базовій і старшій профільній школі в умовах компетенізації освіти» (2019–2021 рр.). Ніна Анатоліївна започаткувала роботу Заочних математичних студій для школярів «Я і моя математика» (2005 р.), Школи майбутнього вчителя математики ЧНУ (2019 р.). Н.А.Тарасенкова нині має загалом понад 750 публікацій, серед яких: 6 монографій, підручники з математики, алгебри й геометрії для 5–11 класів (54) та дидактичний супровід до них (бл. 100), посібники для вчителів математики і студентів (бл. 80), понад 160 статей з проблем математичної освіти, понад 100 доповідей на наукових конференціях, понад 250 е-матеріалів для дистанційного навчання. За її безпосередньої участі в ЧНУ ім. Б. Хмельницького було створено спеціалізовану вчену раду із захисту кандидатських і докторських дисертацій за спеціальностями «Теорія та методика навчання (математика)», «Теорія та методика професійної освіти», «Загальна педагогіка». Окрему увагу професор Н. А. Тарасенкова приділяє своїй науковій школі (підготувала 6 докторів наук і 13 кандидатів наук). У доробку представників цієї школи численні підручники й посібники з математики для ЗЗСО та ЗВО, а також посібники з методики навчання математики для майбутніх учителів математики.


Акуленко І.А.

Під керівництвом Н. А. Тарасенкової успішно навчалася в цільовій аспірантурі на кафедрі геометрії та МНМ, зокрема І. А. Акуленко, яка починаючи з 1986 року пройшла сходинками професійного зростання – від вихователя в дошкільному закладі, вчителя математики першої категорії, старшого вчителя до кандидата педагогічних наук (2000 р.), доцента (2004 р.), доктора педагогічних наук (2013 р.), професора (2015 р.). Нині І. А. Акуленко – професор кафедри алгебри і математичного аналізу навчально-наукового інституту інформаційних та освітніх технологій ЧНУ ім. Б. Хмельницького – плідно займається науково-дослідною роботою, має понад 160 наукових публікацій з проблем математичної освіти у ЗЗСО та ЗВО, а також із проблематики методичної підготовки майбутнього вчителя математики, що опубліковані в зарубіжних, українських та міжнародних збірниках і журналах.

Серед чинників, що сприяли зростанню професійної майстерності викладачів математичних кафедр університету в 60-90-х роках минулого століття, особливе місце посідає система факультетів підвищення кваліфікації (ФПК) у складі провідних ЗВО. Свого часу на ФПК у різних вишах Радянського Союзу навчалися П. О. Касярум (МДУ ім. М. В. Ломоносова, 1952 р.), Г. Г. Велігоцький (МДУ ім. М. В. Ломоносова, 1953 р.) О. Г. Демченко (Харківський державний педагогічний інститут ім. В. Н. Каразіна, 1968 р.), Л. М. Кляцька (КДУ ім. Т. Г. Шевченка, 1972 р, МДУ ім. М. В. Ломоносова, 1986 р.), Л. Й. Померанцева (Ленінградський педагогічний інститут ім. О. І. Герцена, 1989 р.) та ін. Це навчання дійсно реалізувало світоглядну, методологічну, навчальну, розвивальну функції, сприяло професійному й особистісному зростанню співробітників кафедр. Нині цю традицію наповнено новим змістом і реалізовано в новому форматі Н. А. Тарасенковою. Вона є автором і коучем професійних дистанційних тренінгів для учителів математики (ТУМ) "Удосконалення засобів навчання математики (за класами)" (2017 р. – дотепер).

Інший бік такої співпраці – тимчасовий обмін викладачами, що здійснювався в рамках договору про співпрацю між СРСР та ПНР за міжнародною культурно-освітньою програмою, до якої був залучений наш навчальний заклад. Згідно з таким договором на роботу до Вищої педагогічної школи у м. Бидгощ (ПНР) виїжджали доценти М. М. Горбач, Л. М. Кляцька, О. Г. Демченко, Л. Й. Померанцева. Співпраця з провідними зарубіжними науковцями з різних галузей математики сприяла активізації науково-дослідницької роботи як викладачів, так і студентів фізико-математичного факультету.

У сучасних умовах спостерігається ще одна тенденція – запрошення провідних науковців вітчизняних ЗВО для читання лекцій, консультування й керівництва науково-дослідною роботою студентів і викладачів. У різні роки на запрошення керівництва кафедр та факультету на математичних кафедрах університету працювали доктори фізико-математичних наук, професори Д. І. Зайцев (відділ алгебри інституту математики НАН України), М. В. Працьовитий (НПУ ім. М. П. Драгоманова), В. І. Сущанський (КНУ ім. Т. Г. Шевченка), П. О. Стеблянко (Дніпродзержинський державний технічний університет). Із кафедрою математики та МНМ плідно співпрацювали доктори педагогічних наук, професори Т. В. Крилова (Дніпродзержинський державний технічний університет), О. І. Скафа (Донецький національний університет), Є. І. Боркач (Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II). Із кафедрою алгебри та математичного аналізу активно співпрацює В. І. Слинько – випускник ФМФ ЧДУ ім. Б. Хмельницького (1989 р.), нині доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, лауреат державної премії, фахівець у галузі теорії стійкості руху гібридних моделей механічних систем.

Висновки. Загалом, залучення до складу математичних кафедр університету висококваліфікованих фахівців з інших ЗВО, направлення на навчання до цільової аспірантури викладачів і кращих випускників фізико-математичного факультету, використання потенціалу системи факультетів підвищення кваліфікації, а також обмін провідними науковцями із вітчизняними й зарубіжними ЗВО – це ті організаційні складники, на основі яких формувався професорсько-викладацький склад математичних кафедр університету. Педагогічна майстерність О.Ф.Семеновича плекалась та відшліфовувалась у тісній взаємодії із його колегами – висококваліфікованими професіоналами, математиками-педагогами.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИКА

В ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

СУЧАСНИЙ ЕТАП РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Світлана Скворцова

Вступ. Початкова школа України протягом останніх п’яти років перебуває в стані постійних перетворень. У 2011 році Кабінетом Міністрів України було затверджено новий Стандарт загальної початкової освіти, створений на основі компетентнісного підходу, у 2012 році були затверджені нові програми, у 2013 ці програми зазнали суттєвого розвантаження. У 2014 році було окремо здійснено розвантаження програм для 4-го класу і проведено конкурс підручників для 4-го класу. У 2016 році програми для 1-4 класів початкової школи, в черговий раз, піддалися оновленню і розвантаженню, також був зроблений акцент тільки на діяльнісних результатах навчання.

У 2016 році, в результаті польсько-українського проекту «Нова українська школа», уряд України затвердив Концепцію реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа (далі – НУШ)» на період до 2029 року (14.12.2016 № 988-р). Метою українсько-польського проекту є оновлення освітніх стандартів, тому на початку 2018 року Кабінет міністрів України затвердив новий Державний стандарт початкової освіти (21.02.2018, постанова №87). Державним стандартом (далі – ДС) передбачається два цикли початкової освіти: 1 – 2 класи і 3 – 4 класи, для яких сформульовані результати навчання, виходячи з того, що метою освітніх областей є формування в учнів ключових і предметних компетентностей. Наступним кроком було затвердження Колегією МОН Типових освітніх програм, спочатку для 1 – 2-го класів, а потім й для 3 – 4-го класів. Тому, з огляду на такі бурхливі зміни в початковій освіті актуальним залишається питання аналізу нормативних документів – Державного стандарту та Типових освітніх програм.

Мета дослідження – аналіз нормативних документів, які регламентують навчання математики в початковій школі.

У ДС (2018, 2019) [1;3] визначено мету початкової освіти як всебічний розвиток дитини, її талантів, здібностей, компетентностей та наскрізних умінь відповідно до вікових та індивідуальних психофізіологічних особливостей і потреб, формування цінностей, розвиток самостійності, творчості та допитливості.

У новому ДС, як і в попередній редакції ДС (2011) [2], результати навчання подаються в категоріях компетентнісної моделі освіти, тобто увагу зосереджено на результативному компоненті початкової освіти, а не на нарощуванні обсягу змісту. Вимоги до обов’язкових результатів навчання визначаються в новому ДС з урахуванням компетентнісного підходу до навчання, в основу якого покладено ключові компетентності [6].

Математичну компетентність, відповідно до «Рекомендацій Європейського Парламенту та Ради Європи», у новому ДС віднесено і до предметних, і до ключових, а це означає, що на формування математичної компетентності мають бути спрямовані всі освітні галузі, що має відображатися в очікуваних результатах (загальних і конкретних) за кожною з них.

Математична освітня галузь (далі – МОГ) реалізує мету формування математичної та інших ключових компетентностей; розвиток мислення, здатності розпізнавати і моделювати процеси та ситуації з повсякденного життя, які можна розв’язувати із застосуванням математичних методів, а також здатності робити усвідомлений вибір [3].

У результаті вивчення математики випускник початкової школи має (на рівні, що відповідає віковим можливостям) досліджувати ситуації та визначати проблеми, які можна розв’язувати із застосуванням математичних методів; моделювати процеси і ситуації, розробляти стратегії (плани) дій для розв’язування різноманітних задач; критично оцінювати дані, процес та результат розв’язання навчальних і практичних задач; застосовувати досвід математичної діяльності для пізнання навколишнього світу [1].

На жаль, у новому ДС (2018) не визначено предметну математичну компетентність, тому наведемо її трактування з попередньої редакції ДС (2011). Предметну математичну компетентність розуміють як особистісне утворення, що характеризує здатність учня (учениці) створювати математичні моделі процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час розв'язування навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих задач [2].

На відміну від попереднього ДС (2011), у якому в освітній галузі «Математика» виділено такі змістові лінії (далі – ЗЛ): числа, дії з числами; величини; математичні вирази, рівності, нерівності; сюжетні задачі; просторові відношення, геометричні фігури; робота з даними, а також подано зміст і Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів на кінець навчання в початковій школі [5], новий ДС (2018, 2019) структуровано по-іншому. В основу покладено подані вище результати, кожний з яких представлено як комплекс загальних очікуваних результатів, які деталізовано в обов'язкових результатах навчання здобувачів освіти.

Наприклад, *дослідження ситуації і виокремлення проблем, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів*, відповідно до ДС (2018), можливо через досягнення наступних загальних очікуваних результатів: розпізнає серед ситуацій з повсякденного життя ті, що розв'язуються математичними методами; досліджує, аналізує, оцінює дані та зв'язки між ними для розв'язання проблеми математичного змісту; прогнозує результат розв'язання проблемної ситуації [3].

Водночас, кожний із загальних очікуваних результатів конкретизується для кожного з двох циклів початкової освіти. Наприклад, такий загальний результат, як розпізнавання серед ситуацій з повсякденного життя тих, що розв'язуються математичними методами, для першого циклу навчання (1-2 класи) конкретизовано наступним чином – розпізнає серед ситуацій із свого життя ті, що потребують перелічування об'єктів, вимірювання величин, обчислення, а для другого циклу (3-4 класи) – розпізнає серед життєвих ситуацій ті, що стосуються кількісних відношень/форм об'єктів навколишнього світу.

Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій (планів) дій для розв'язання різноманітних задач включає наступні загальні результати навчання здобувачів освіти: сприймає і перетворює інформацію (почуту, побачену, прочитану), будує допоміжну модель проблемної ситуації; розробляє стратегії розв'язання проблемних ситуацій; моделює процес розв'язання проблемної ситуації і реалізує його. Наприклад, загальний результат «розробляє стратегії розв'язання проблемних ситуацій» у 1-2-х класах деталізується як «обирає послідовність дій для розв'язання проблемної ситуації», а в 3-4-х – «обирає спосіб (способи) розв'язання проблемної ситуації».

Критичне оцінювання даних, процесу та результату розв'язання навчальних і практичних задач включає наступні загальні результати: оцінює дані проблемної ситуації, необхідні і достатні для її розв'язання; оцінює різні шляхи розв'язання проблемної ситуації, обирає раціональний шлях її розв'язання; перевіряє відповідність одержаного результату прогнозованому; оцінює правильність розв'язання проблемної ситуації; виявляє та виправляє помилки. Наприклад, загальний результат «оцінює правильність розв'язання проблемної ситуації; виявляє та виправляє помилки» у 1-2-му класах деталізовано як «перевіряє правильність результату арифметичної дії; виявляє та виправляє помилки», а в 3-4-му – як «перевіряє правильність розв'язання проблемної ситуації різними способами; виявляє та виправляє помилки».

Зазначені загальні і обов'язкові результати жодним чином не презентують, чому саме навчиться учень/учениця в початковій школі. Навіть конкретизація загальних результаті у вигляді конкретних результатів для кожного рівня освіти не проливає світла на те, на якому матеріалі учень має демонструвати зазначені вміння, оскільки зміст навчання в новому ДС не представлений. Лише непрямо можна судити про те, що все ж таки школярі опанують числа у множині цілих невід'ємних чисел у межах мільйона, будуть виконувати обчислення усно і письмово, навчаться орієнтуватися на площині та у просторі, розпізнавати знайомі геометричні фігури, конструювати та будувати геометричні фігури, вимірювати величини, використовувати буквену символіку, встановлювати залежності між компонентами і результатом арифметичної дії. Про це зазначено в конкретизації застосування досвіду математичної діяльності для пізнання навколишнього світу, яке включає наступні загальні результати: аналізує об'єкти навколишнього світу та ситуації, що виникають у житті; встановлює кількість об'єктів, читає і записує числа, порівнює та упорядковує їх; володіє обчислювальними навичками, застосовує їх у навчальних та практичних ситуаціях; визначає просторові відношення; розпізнає геометричні фігури за їх істотними ознаками; будує, конструює об'єкти; вимірює величини; використовує алгебраїчні поняття і залежності для розв'язування проблемної ситуації; досліджує задачі.

Наприклад, загальний результат «Встановлює кількість об'єктів, читає і записує числа, порівнює та упорядковує їх» деталізується для 1-2-го класу як «лічить об'єкти, позначає числом результат лічби; порівнює числа в межах ста та упорядковує їх», а для 3-4-го – «встановлює кількість об'єктів; позначає результат лічби числом; порівнює числа в межах мільйона та упорядковує їх». Але це не дає чіткої відповіді щодо множини чисел, які вивчаються в початковій школі; незрозуміло чи вивчається розширена множина натуральних чисел (оскільки число нуль не використовується у лічбі предметів), чи вивчаються звичайні дроби (дріб позначає одну чи кілька рівних частин цілого і не використовується у лічбі), як то було традиційно у початковій школі. Аналогічно, загальний результат «володіє обчислювальними навичками, застосовує їх у навчальних та практичних ситуаціях», який конкретизується для 1-2-го класів як «обчислює усно зручним для себе способом у навчальних і практичних ситуаціях», а для 3-4-го класів як «обчислює усно і письмово у різних життєвих ситуаціях», не дає чіткого розуміння які саме обчислення учні виконують – чи то арифметичні дії додавання, віднімання, множення і ділення, як це було традиційно, чи то піднесення до степеня тощо.

Щодо геометричних фігур, вимірювання величин, використовування алгебраїчних понять і залежностей для розв'язування проблемної ситуації, то також конкретні результати не дають уявлення про зміст навчання і конкретні результати не презентують конкретних умінь, які мають здобути випускники початкової школи.

Зазначимо, що у ДС 2011 року також було зроблено акцент на діяльнісних результатах навчання, але принаймні у загальному вигляді зміст навчання було окреслено. Наприклад, ЗЛ «Числа. Дії з числами» включає: 1) Лічбу; 2) Натуральні числа. Число нуль; 3) Звичайні дроби; 4) Арифметичні дії з числами. До кожного розділу наведено результати, які дають чітке уявлення про те, що має знати й вміти випускник початкової школи. Розглянемо результати до розділу «Арифметичні дії з числами»: розуміти зміст арифметичних дій додавання, віднімання, множення, ділення; знати назви компонентів і результатів арифметичних дій, взаємозв'язок між додаванням та відніманням, між множенням та діленням; знаходити невідомий компонент арифметичної дії; розуміти залежність результату арифметичної дії від зміни одного з компонентів; знати таблиці додавання і множення одноцифрових чисел та відповідні табличні випадки віднімання і ділення; усно виконувати обчислення у межах ста та обчислення, які ґрунтуються на принципах десяткової системи числення; застосовувати алгоритми письмового виконання арифметичних дій у межах мільйона, ділення з остачею; перевіряти правильність результатів арифметичних дій на основі їх взаємозв'язку; моделювати відношення різницевого і кратного порівняння чисел [2].

Як бачимо, ДС 2018 року істотно відрізняється від ДС 2011 року. Ці документи, хоча й відповідають нормативним вимогам до такого роду документів, але мають досить різну внутрішню структуру. У ДС 2018 року не визначено зміст навчання, а у ДС 2011 року зміст навчання подано в загальному вигляді. У ДС 2018 року визначено загальні результати навчання здобувачів освіти, які конкретизовані в обов'язкових результатах для кожного циклу початкової освіти, а у ДС 2011 року визначено державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів. У ДС 2018 року конкретизація загальних результатів не дає чіткого уявлення про те, що саме має вміти випускник початкової школи, оскільки цей документ не презентує зміст, на якому учні демонструють зазначені результати. Взагалі питання про зміст навчання у цьому документі лишається відкритим, а це означає, що можливе розширення або звуження змісту навчання, що відповідатиме ДС.

Підхід, реалізований у ДС 2018 року, пояснюється тим, що шкільне навчання має відповідати вимогам життя, яке швидко змінюється, тому й зміст навчання має бути динамічним, оскільки має готувати дитину до ефективного функціонування у швидкозмінному світі. Але треба розуміти, що в початковій школі зміст навчання не може бути динамічним, оскільки, прийшовши до школи, діти спочатку мають навчитися лічити, виконувати арифметичні дії з числами, розв'язувати задачі, які є знаковою моделлю проблемної ситуації (за Л. Фрідманом). Отже, навчання математики в початковій школі розпочинається з найпростішого; в початковій школі закладається основа для наступного засвоєння математики у базовій та профільній школі, в яких зміст навчання вже може бути відкоригований відповідно до потреб суспільства.

Звісно, в у цьому сенсі значно вигідніше виглядає ДС 2011 року, в якому зміст навчання подано в загальному вигляді – лише перелічено його блоки, але державні вимоги сформульовано досить конкретно, що створює чітке уявлення про те, чого має навчитися випускник початкової школи.

Зазвичай динаміка розгортання змісту та досягнення результатів навчання подається у навчальній програмі. 22 лютого 2018 року Колегією МОН України було затверджено два варіанти Типових освітнім програм (далі – ТОП) Нової української школи для 1-2-го класів, а 27 грудня 2018 року Колегія МОН України затвердила два варіанти ТОП для 3-4-го класів.

На сучасному етапі розвитку початкової математичної освіти впроваджуються дві Типові освітні програми – програма, створена колективом авторів під керівництвом академіка О. Я. Савченко (ТОП НУШ 1) та програма, створена під керівництвом Р. Б. Шияна (ТОП НУШ 2). Ці програми істотно відрізняються одна від одної. В ТОП НУШ 1 (далі – ТОП 1) чітко визначено результати і зміст навчання, на якому досягаються визначені результати, окремо для 1-го класу та для 2-го класу, а потім окремо для 3-го класу та для 4-го класу. У ТОП НУШ 2 (далі – ТОП 2) продубльовано з ДС «Обов'язкові результати навчання», які спроєктовано в «Очікувані результати навчання». Ці результати прописані лише на кінець 2-го класу та кінець 4-го класу, також подано перелік орієнтувальних тем, на яких досягаються ці результати.

Відмінність цих ТОП полягає ще й у розділі Базового навчального плану ДС. ТОП 1 повною мірою відповідає кількості навчальних годин за роками навчання, поданими у ДС, а ТОП 2 передбачає інтеграцію окремих освітніх галузей з іншими, а тому зменшує кількість годин на предметне навчання. Так, на вивчення математики в першому циклі початкової освіти відведено 3 години на тиждень, а у другому – 4 години, замість 4-х та 5-ти годин за Базовим навчальним планом ДС (2019), оскільки 1 година, виділена на математичну освітню галузь передбачена в інтегрованому курсі.

Порівнявши мету навчання математики, прописану в ТОП, встановлено, що ТОП 1 спрямована на формування математичної та інших ключових компетентностей, а ТОП 2 – лише на розвиток мислення дітей та інших здатностей. У ТОП 2 є багато практично спрямованих питань, але це не означає формування компетентності, оскільки вони є досить вузькими і відображують лише окремі ситуації, що можуть виникнути або не виникнути в житті дитини.

ТОП 1 і ТОП 2 різняться і у викладі завдань, які має реалізувати математична освіта; деякі із цих завдань перегукуються, але не співпадають. Наприклад: ТОП 1 «формування в учнів розуміння ролі математики в пізнанні явищ і закономірностей навколишнього світу» можна екстраполювати у ТОП 2 «формування здатності розпізнавати серед повсякденних проблем ті, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів та способів»; ТОП 1 «формування у дітей досвіду використання математичних знань та способів дій для розв'язування навчальних і практичних задач» можна екстраполювати у ТОП 2 «формування та розвиток усвідомлених обчислювальних навичок; набування досвіду дослідження просторових відношень, форм об’єктів навколишнього світу, конструювання площинних та об’ємних геометричних фігур»; ТОП 1 «формування в учнів здатності міркувати логічно, оцінювати коректність і достатність даних для розв’язування навчальних і практичних задач» корелює з ТОП 2 «розвиток уміння здійснювати дослідження, аналіз, планування послідовності дій для розв’язання повсякденних проблем математичного змісту, зокрема й сюжетних задач; формування відповідального ставлення щодо висування гіпотез, їх оцінювання, доведення або спростування, обґрунтування свого вибору».

Без аналогів у ТОП 2 залишилося завдання з ТОП 1 «розвиток математичного мовлення учнів, необхідного для опису математичних фактів, відношень і закономірностей»; на наш погляд, її не можна екстраполювати у «вироблення вміння описувати побачене, почуте, прочитане за допомогою простих математичних моделей», оскільки висвітлюють різні контексти.

Завдання з ТОП 2 «розвиток уміння сприймати, перетворювати та оцінювати здобуту інформацію, використовуючи різні джерела, зокрема й засоби інформаційно-комунікаційних технологій», у свою чергу, не має аналогів у ТОП 1.

Виникає питання щодо засобів вимірювання реалізації завдання «відповідального ставлення щодо висування гіпотез, їх оцінювання, доведення або спростування, обґрунтування свого вибору» (ТОП 2). Про які доведення може йти мова в початковій школі; який вибір мають обґрунтовувати учні початкової школи?

Слід зазначити некоректність формулювання «вміння описувати побачене, почуте, прочитане за допомогою простих математичних моделей», оскільки не все, що учень/учениця побачить, почує і прочитає підлягає «опису» за допомогою «простих» математичних моделей. І таких формулювань у ТОП 2 доволі багато.

Потребує конкретизації завдання «розвиток уміння сприймати, перетворювати та оцінювати здобуту інформацію, використовуючи різні джерела, зокрема й засоби інформаційно-комунікаційних технологій» – про яку інформацію йдеться і яке відношення вона має до математики?

На нашу думку, мета і завдання математичної освітньої галузі, подані у ТОП 1, на відміну від ТОП 2, є чіткими, лаконічно сформульованими, і такими, що повною мірою розкривають спрямованість початкової математичної освіти.

Програми ТОП 1 і ТОП 2 відрізняються за структурою. По-перше, в ТОП 1 представлено окремо програму для 1-го, 2-го, 3-го, 4-го класів, а в ТОП 2 – подано програму за циклами початкової освіти: для 1-го – 2-го класів та для 3-го – 4-го класів (так само, як і в ДС). Очевидно, що таке представлення результатів навчання у ТОП 2 не дає вчителю чітких орієнтирів на 1-й та на 3-й класи.

Також відмінною є структурування програм щодо подання результатів: ТОП 1 презентує конкретні очікувані результати, а ТОП 2, дублюючи ДС, пропонує обов’язкові результати навчання і очікувані результати навчання, що викликає питання щодо їх співвіднесення (обов’язкові результати – вони і є очікуваними). Крім того, у деяких випадках, у ТОП 2 не прослідковується відповідність очікуваного результату із заявленим обов’язковим.

У програмах з математики ТОП 1 і ТОП 2 досить відмінні змістові лінії. Так, у ТОП 1 реалізація мети і завдань початкового курсу математики здійснюється за такими змістовими лініями: «Числа, дії з числами», «Геометричні фігури», «Вирази, рівності, нерівності», «Робота з даними», «Математичні задачі і дослідження». У ТОП 2 – «Лічба», «Числа. Дії з числами», «Вимірювання величин», «Просторові відношення. Геометричні фігури», «Робота з даними».

Як бачимо, змістова лінія «Числа, дії з числами» за ТОП 1, у ТОП 2 розкладається на три змістові лінії «Лічба», «Числа. Дії з числами», «Вимірювання величин». Хоча у ТОП 1 бажано було б виокремити змістову лінію «Величини», а у ТОП2 немає сенсу відокремлювати «Лічбу» від змістової лінії «Числа. Дії з числами», тому що числа є результатом лічби і лічити без оперування числами не можна (лічба – це встановлення взаємно однозначної відповідності між початковим відрізком натурального ряду та кількістю предметів).

Вважаємо неприпустимим вилучення у ТОП 2 алгебраїчної пропедевтики та сюжетних математичних задач, оскільки у ДС серед загальних результатів навчання визначено, що учень/учениця «використовує алгебраїчні поняття і залежності для розв'язування проблемної ситуації; досліджує задачі».

Зіставлення очікуваних результатів, визначених в ТОП 1 і ТОП 2, видається можливим лише для 2-го та 4-го класів, оскільки в ТОП 2 не визначено результатів на 1-й та 3-й класи.

У ТОП 1 обов'язкові результати повною мірою відповідають змістовим лініям. Натомість у ТОП 2 зв'язок обов'язкових результатів та змістових ліній не є очевидним. Виглядає дивним віднесення до змістової лінії «Числа. Дії з числами» наступних обов'язкових результатів: «Описую побачене, почуте, прочитане за допомогою простих математичних моделей, використовую відповідну математичну мову для передавання інформації. Відкриваю математичні залежності між величинами в навколишньому світі, оперуючи конкретними предметами», «Перетворюю інформацію (почуту, побачену, прочитану) у схематичний рисунок, схему, таблицю, числовий вираз», «Описую (коментую) послідовність дій стосовно розв'язання проблемного завдання (в тому числі сюжетної задачі)», «Обираю із запропонованих тверджень істинні або хибні самостійно чи з допомогою однокласників, дорослих», «Виконую прості завдання, описані в математичних текстах, в тому числі сюжетних задачах».

У ТОП 1 використано усталену термінологію, яка є зрозумілою методистам і вчителям України, а ТОП 2 містить формулювання, які є перекладом з іноземної мови і можуть бути протрактовані українськими фахівцями неоднозначно. Наприклад, незрозуміло, що мається на увазі під «проблемою математичного змісту», «простими математичними моделями», що означає *«виявляє* математичне завдання в тексті [2 МАО 2-2.3-1]», *«знаходить* необхідні (суттєві) дані для виконання завдання [2 МАО 2-2.3-2]», «*виконує* завдання, що випливає з тексту, використовуючи конкретні об'єкти, малюнки, таблиці тощо [2 МАО 2-2.3-3]», «співвідносить відповідні одиниці вимірювання величин [2 МАО 3-3.3-2]».

Щодо змісту навчання, який традиційно було представлено у навчальній програмі, то в ТОП 1 він представлений у досить загальному вигляді, але достатньо логічно. У ТОП 1 прослідковується взаємозв'язок змісту навчання із визначеними конкретними очікуваними результати, відтак вчителю зрозуміло, на якому матеріалі досягаються зазначені результати. Подання у ТОП 2 пропонованого змісту після очікуваних результатів відповідної змістової лінії є незручним для вчителя, оскільки вимагає додаткових зусиль, щоб співвіднести визначений результат із окремими темами.

Останнім часом виявилася тенденція до спрощення змісту математичної освіти в початковій школі; у 2014 – 2016 роках відбулося кілька розвантажень й оновлень програм для початкової школи. Аналіз змісту програми ТОП 1 свідчить про те, що автори не вийшли за межі змісту навчання, який є традиційним. Натомість, у ТОП 2 зміст початкової математичної освіти значно розширено й ускладнено. Пропонуються для розгляду теми, які не були в курсі початкової математики предметом спеціального вивчення, а пропонувалися у фоновому режимі. Зокрема це тема «Істинні і хибні твердження». Зазначимо, що поле розгортання цієї теми без введення понять та засобів математичної логіки досить вузьке, а математична логіка вивчається в курсі вищої математики, жодним чином не в початковій школі. Так, у початковій школі може буде пропедевтика, але в такому випадку, на нашу думку, немає сенсу виносити це питання до змісту навчання.

Також у ТОП 2 пропонуються ще й теми: «Ціле, частини цілого», «Формування поняття «решта»», «Розв'язання повсякденних проблем математичного змісту (в тому числі сюжетних задач), що містять групи пов'язаних між собою величин», «Життєві проблеми, які розв'язуються математичним шляхом (тексти математичного змісту, сюжетні задачі), їх розв'язання з опорою на прості математичні моделі», які зазвичай не є предметом вивчення у початковій школі. Щодо теми «Зіставлення ймовірного та фактичного результатів лічби», слід зазначити, що поле розгляду цієї теми дуже вузьке. Учень перед виконанням лічби в концентрі «Десяток» або «Сотня» може лише припустити, скільки всього є об'єктів, порівнюючи його з певним числом (більше за 10; 100 , або менше від ...), тому виносити це питання в окрему тему не вважаємо за доцільне. Узагалі, слід зазначити, що у ТОП 2 теми не рівноцінні за своїм обсягом – поряд з дуже вузькими є теми з великим обсягом, як, наприклад, «Числа 11-100. Позиційний запис числа», «Прийоми обчислень» тощо.

У ТОП 2 деякі теми сформульовані некоректно, їх зміст не зрозумілий: «Помилки в обчисленнях. Способи усунення помилок», «Перевірка правильності лічби зручним для себе способом». Щодо останньої теми, то тут не зрозуміло, про які способи йдеться, оскільки перевірити правильність лічби можна, ще раз полічивши.

Теми «Числова пряма», «Ймовірний та фактичний результати обчислень», «Вимірювання величин: ...температури...», «Геометричні об'ємні фігури: куб, піраміда, куля, конус, циліндр, їхні істотні ознаки» – розширюють зміст навчання математики в початковій школі. Уведення теми «Числова пряма» вимагає значного розширення змісту початкової математичної освіти. Традиційно, числова пряма вводиться разом із ознайомленням з від'ємними числами. Але від'ємні числа є предметом розгляду в 6-му класі базової школи. Аналогічно, на розширення множини чисел спрямовує і тема «Вимірювання величин: ...температури...».

«Геометричні об'ємні фігури: куб, піраміда, куля, конус, циліндр, їхні істотні ознаки». Традиційно об'ємні фігури у курсі початкової математики розглядались лише на рівні розрізнення, а не як вивчення їх істотних ознак. Розгляд істотних ознак об'ємних фігур значно розширює зміст курсу математики початкової школи.

У ТОП 2 використана некоректна термінологія, яка не є загальновживаною. Зокрема «Життєві проблеми, які розв'язуються математичним шляхом (тексти математичного змісту, сюжетні задачі), їх розв'язання з опорою на прості математичні моделі». Загальновизнаним у вітчизняній методичній науці є те, що сюжетні (текстові, арифметичні) математичні задачі і є моделями життєвих ситуацій, тому незрозумілими є використані терміни «життєві проблеми», «тексти математичного змісту». Щодо теми «Розв'язання повсякденних проблем математичного змісту (в тому числі сюжетних задач)», то тут слід зазначити, що взаємопов'язані величини, які знаходяться у пропорційній залежності, традиційно вивчаються в 3-му класі. Розгляд їх у 2-му класі є ускладненням програми.

Аналіз пропонованих тем ТОП 2 дає підстави для висновку, що авторами програми математичний зміст підмінено вузькими питаннями, а важливі поняття про сутність арифметичних дій, про задачі тощо, відійшли на другий план. Але, слід зазначити, що створені підручники за ТОП 2, все ж таки, незважаючи на пропонований зміст, реалізують теми, притаманні традиційному курсу математики 1-х – 4-х класів.

Отже, на підставі нового Стандарту Колегія Міністерства освіти і науки України затвердила типові навчальні програми для початкової школи в двох варіантах: НУШ 1 (створена колективом авторів під керівництвом академіка НАПН України О. Я. Савченко) – ТОП 1 і НУШ 2 (створена колективом авторів під керівництвом Р.Б. Шияна) – ТОП 2.

Програма з математики ТОП 1 чітко, логічно презентує основний зміст і обов'язкові результати навчання учнів початкової школи. ТОП 2 містить неусталену в Україні термінологію, некоректні, неоднозначні формулювання, розширює коло питань навчання математики в початковій школі, залишаючи поза увагою важливі математичні поняття та способи діяльності, підміняючи їх другорядними темами, які завжди розглядались у «фоновому режимі».

Після затвердження ТОП, у 2018-2020 роках був проведений конкурс підручників для 1-го, 2-го та 3-го класів, у якому взяли участь понад 15 підручників з математики. Відповідно до Положення про конкурс підручників, на першому етапі конкурсу була здійснена експертиза підручників експертами, відібраними Міністерством освіти і науки України. За результатами експертизи і рішенням конкурсної комісії не всі підручники мали продовжити конкурсний відбір на другому етапі. Однак, з огляду на недостатній рівень експертів, у результаті апеляцій усі 15 підручників з математики для 1-го класу і більшість підручників для 2-го та 3-го класів були допущені до наступного етапу конкурсу, під час якого підручники обирали вчителі шкіл.

За результатами конкурсу за державні кошти були видані підручники, які набрали понад 40000 замовлень; підручники, які набрали більше 10000 замовлень могли бути видані з частковою участю держави. Таким чином, на сайті Інституту модернізації засобів навчання МОН України (ІМЗО) представлено 10 pdf-макетів підручників з математики для 1-го класу, 2-го, 3-го класів (https://lib.imzo.gov.ua/handle/123456789/820). Це підручники авторських колективів: Скворцова С. О., Онопрієнко О. В.; Листопад Н. П.; Гісь О. М., Філяк І. В.; Лишенко Г. П.; Заїка А. М.; Будна Н. О., Беденко М. В.; Бевз В. Г., Васильєва Д. В.; Корчевська О. П., Козак М. В.; Логачевська Т. А., Комар, О. А.; Оляницька Л. В.

Таким чином, у початковій школі України впроваджується нове покоління підручників, у тому числі й підручників з математики. Однак МОН України, з одного боку, проголосило пріоритет створення сучасних підручників, які враховують вікові можливості та інтереси сучасних дітей, а з іншого – жорстко обмежила обсяг (масу) підручників з математики для 1-х – 2-х класів однією частиною, вимагаючи при цьому наявності в підручнику з математики не менше від 30% ілюстративного матеріалу. А це не сприяє якісному оновленню підручників, з урахуванням досягнень психолого-дидактичної науки. Це одна з причин того, що частина підручників з математики так і залишилися задачниками, що пропонують школярам набір завдань для уроку, а не систему навчальних завдань.

Одним із критеріїв оцінювання підручників на конкурсі є відповідність ТОП, а саме, їх спрямованість на досягнення результатів навчання. Нами проаналізовано підручники з математики для 1-3-х класів НУШ і встановлено, що їх змістове наповнення майже не змінилося порівняно із підручниками, які були створені за попередньою програмою 2011 року, яка розвантажувалась, оновлювалась до 2014 року. Крім того, підручники з математики для 4-го класу створено до оновленої програми 2014 року.

Висновки. Як бачимо, сучасний етап розвитку початкової математичної освіти характеризується бурхливими змінами в нормативному забезпеченні (Новий ДС, Типові освітні програми для 1-го – 2-го та 3-го – 4-го класів), впровадженням у освітній процес початкової школи нових підручників. Новий Державний стандарт початкової освіти вивів на перше місце компетенції, які в попередніх редакціях Державних стандартів були відсутні. Проте не можна стверджувати, що не відбувалося дослідження ситуації та виокремлення проблем, які можна розв’язувати із застосуванням математичних методів, учні не навчалися моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій (планів) дій для розв’язання різноманітних задач, не здійснювали критичне оцінювання даних, процесу та результату розв’язання навчальних і практичних задач. Традиційно, ці питання лежали у площині методики навчання математики і не визначалися як результат початкової освіти. Водночас, у Державному стандарті (2018, 2019) зміст навчання презентований лише в загальному вигляді в підрозділі «Застосування досвіду математичної діяльності для пізнання навколишнього світу». Деталізація змісту мала б бути в Типових освітніх програмах, але й у ТОП1 і ТОП2, недостатньо чітко представлено зміст навчання, основну увагу приділено очікуваним результатам. Більш системно, але все ж таки досить загально, зміст навчання представлений у ТОП 1, де подано результати до кожного року навчання, певна група очікуваних результатів співвіднесена з певним змістом навчання, а також подано й додаткові питання програми, які дозволяють розшити та поглибити матеріал. У ТОП2 зміст навчання представлений в кінці змістової лінії і для того, щоб співвіднести їх з очікуваними результатами, вчитель чи автор підручника має здійснити досить серйозну аналітичну роботу. Виходячи з цього, автори підручників мають можливість, спираючись на власний досвід та власне бачення курсу математики початкової школи, подавати зміст навчання. Водночас, зміст навчання, реалізований у чинних підручниках, майже не відрізняється від попередніх видань підручників. На нашу думку, формування очікуваних та обов’язкових результатів, які відносяться до дослідження ситуації і виокремлення проблем, які можна розв’язувати із застосуванням математичних методів, до моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій (планів) дій для розв'язання різноманітних задач, до критичного оцінювання даних, процесу та результату розв'язання навчальних і практичних задач, лежать у площині розробки систем навчальних завдань та методики роботи з ними.

Список використаних джерел

1. Державний стандарт початкової освіти. Внесення змін (2019). URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/688-2019-%D0%BF#Text

2. Державний стандарт початкової загальної освіти. (2011). URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/462-2011-%D0%BF#Text

3. Державний стандарт початкової освіти. (2018) URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/87-2018-%D0%BF#Text

4. Скворцова, С. А. (2019). Особенности современного этапа математического образования в начальной школе Украины. *Математическое образование: современное состояние и перспективы.* Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова. 186-187.

5. Скворцова, С. А. (2017). Тенденции развития начального математического образования в Украине. Մաթեմատիկական կրթություն: Միջազգային գիտաժողով: 12-14 ՀՈԿՏԵՄԲԵՐԻ, 2017 ԹԻՎ (նյութերի ժողովածու); ՀԱՊՀ.- Եր.: Ճարտարագետ. 191-194.

6. Скворцова, С. О. (2017). Нова українська школа: особливості побудови Стандарту математичної освіти. *Модернізація освітнього середовища: проблеми та перспективи*. Вісник Польсько-української науково-дослідницької лабораторії психодидактики імені Я. А. Коменського. Гол. ред. Осадченко І. І. Умань: ФОП Жовтий Щ. Щ. 66-71.

7. Скворцова, С.О. (2019). Впровадження концепції нової української школи: нормативна база, підготовка вчителя, навчально-методичне забезпечення. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи*. Харків: Вид-во «Ранок». 60-63.

8. Скворцова, С. О. (2017). Нова українська школа: варіанти пілотування. *Модернізація освітнього середовища: проблеми та перспективи.* Вісник Польсько-української науково-дослідницької лабораторії психодидактики імені Я. А. Коменського. Гол. ред. Осадченко І. І. Умань: ВПЦ «Візаві». 117-122.

9. Типові освітні програми НУШ. (2018). URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ НАСТУПНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ УЧНІВ ПОЧАТКОВОЇ ТА ОСНОВНОЇ ШКІЛ

Яна Гаєвець, Алла Тумбрукакі

Вступ. На сучасному етапі розбудови національної системи освіти однією з актуальних залишається проблема забезпечення наступності у навчанні між різними ланками освіти.

Відповідно до проєкту Державного стандарту базової середньої освіти (2019) [11] базова середня освіта матиме такі цикли: адаптаційний (5-6 класи) та базове предметне навчання (7-9 класи). Саме під час адаптаційного періоду потрібно враховувати вікові особливості розвитку та потреби здобувачів освіти, що дає можливість забезпечити подолання розбіжностей у досягненнях, зумовлених готовністю до здобуття освіти. Також у Державному стандарті базової середньої освіти зазначено необхідність відбору змісту предметів, що ґрунтується на принципі наступності між початковою й основною школами. Таким чином, проблема наступності між цими ланками освіти є актуальною та залишається важливою складовою загальної проблеми наступності в освітньому процесі. Зокрема, значної уваги потребує вивчення проблеми реалізації наступності на різних етапах навчання математики.

Вчителі початкової школи та вчителі математики основної школи мають певні можливості для реалізації наступності, що виявляються у самостійному виборі методичних підходів та, часткового, – у побудові системи навчальних завдань. Своєю чергою, вчителі основної школи певним чином не ознайомлені з основними результатами навчання математики в початковій школі, а також із методичними підходами та прийомами, які використовують учителі початкових класів. Певним чином цю проблему можна розв'язувати ще на етапі фахової підготовки майбутніх учителів математики у стінах закладу вищої освіти. Одним із проблемних моментів є певна неузгодженість у вивченні задачного матеріалу між 4 та 5 класами: вибору прийомів, етапів роботи над задачею та методів розв'язування. Так, основним методом розв'язування задач у початковій залишається арифметичний, тоді як алгебраїчний метод пропонується в додаткових темах програми і не є обов'язковим результатом навчання учнів. Натомість, у 5-6-х класах алгебраїчний метод стає пріоритетним, поступово витісняючи арифметичний. Тому постає питання про дослідження наступності в методах розв'язування задач між 4 та 5 класами. Підтвердженням актуальності нашого дослідження стали результати анкетування вчителів початкової школи та вчителів математики основної школи. Результати опитування дозволили зробити певні висновки: більшість випускників початкової школи не мають достатнього досвіду зі складання рівнянь до задач, не розуміють алгоритм розв'язування задач цим методом, тому потім учні 5 класу відчувають утруднення в застосуванні алгебраїчного методу розв'язування задач. З огляду на це, аспект реалізації наступності між початковою та основною школами в навчанні учнів розв'язування сюжетних (текстових) задач алгебраїчним методом на сучасному етапі реформування освіти є актуальним.

Огляд останніх публікацій за темою. Перехід учнів з початкової в основну школу – це одна із найбільш складних педагогічних проблем, а період адаптації в 5-му класі – один із найважливіших періодів шкільного навчання. Не втрачають актуальності дослідження в педагогічній та психологічній науці щодо важливості та складності цього періоду навчання.

Наукові розвідки дали змогу з'ясувати, що поняття «наступність» досить багатоаспектне і визначається неоднозначно, а саме як: процес, зв'язок, умова, закономірність, принцип та засіб освітнього процесу [10, с. 93]. У широкому розумінні І. Підласий [10] трактує наступність як об'єктивно необхідний зв'язок між старим і новим у процесі розвитку та передбачає критичне осмислення старого для подальшого збереження й розвитку того раціонального, що було досягнуто на попередніх етапах.

Проблема наступності досліджувалась психологами, дидактами, методистами. Значний внесок у розв'язанні цієї проблеми належить вітчизняним і зарубіжним науковцям: Г. Баллу, П. Блонському, А. Богуш, Л. Виготському, П. Гальперіну, В. Давидову, О. Дубинчук, Д. Ельконіну, Г. Костюку, О. Леонтьєву, Н. Менчинській, Ж. Піаже, С. Рубінштейну, О. Савченко, Н. Тализіній, Л. Фрідману, І. Якиманській та ін. Вченими з'ясовано загальні психологічні закономірності розумового процесу, вікові та індивідуальні особливості розвитку учнів, розкрито психологічні закономірності засвоєння навчального матеріалу, вироблення навичок і вмінь учнів. У своїх працях вчені розглядають наступність як систему цілеспрямованих і різноманітних психолого-педагогічних дій, як інструмент, що дозволяє проникнути до суті дидактико-методичних проблем, досліджувати й керувати багатостороннім процесом навчання тощо.

Різні аспекти проблеми наступності у навчанні математики є доробком науковців: М. Бурди, В. Давидова, І. Лернера, А. Пишкало, Н. Скаткіна, С. Скворцової, З. Слєпкань, С. Шварцбурда та ін. Дослідження науковців дозволили уточнити зміст і структуру шкільного курсу математики та зробити більш ефективним традиційне навчання.

Слід зазначити, що довгий час цілі навчання математики та елементи методики (зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання) залишалися майже незмінними. Саме ця стабільність, як зазначає Р. Тургунбаєв [19, с. 142], визначила розвиток цих елементів і зв'язків між ними. Тому була встановлена певна рівновага, що забезпечила нормальне функціонування сформованої методики навчання математики. А питання вивчення наступності зводилося до з'ясування та уточнення внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків, а також зв'язків між окремими ланками освіти.

Проблема забезпечення наступності на різних етапах навчання математики була досліджена в працях багатьох науковців і методистів. Зокрема, Є. Тихеєва та А. Усова досліджували проблему забезпечення наступності у вивченні математики між дошкільною та початковою ланками освіти; М. Бурда, М. Волчаста, О. Дубинчук, С. Лук'янова, А. Пишкало, Н. Салтановська та С. Скворцова – між початковою та базовою середньою освітою; Г. Гордійчук та Р. Гуревич – між базовою середньою та профільною середньою освітою. На розкриття зв'язку між середньою і вищою освітою присвячено дослідження Т. Колесник. Проблему наступності в системі неперервної математичної освіти дослідили М. Дідовик, І. Реутова та Л. Тютюн. Зокрема саме наступність між початковою та основною школою в навчанні розв'язування сюжетних (текстових) задач досліджено у працях С. Скворцової, С. Лук'янової, Т. Насадюк.

Окремі аспекти наступності у навчанні математики учнів початкової та основної школи розкрито у дослідженнях І. Акуленко, М. Волчастої, О. Дубинчук, Т. Насадюк і С. Скворцової, Н. Тарасенкової та ін.

Підтримуючи позицію І. Акуленко [1] щодо взаємозв'язку між наступністю у вивченні геометричного матеріалу та рівнем розвитку логічного мислення учнів, М. Волчаста розробила методичну систему вивчення геометричного матеріалу в початковій школі й 5-6 класах основної школи. Дослідниця пропонує реалізувати принцип наступності в умовах рівневої диференціації навчання [2]. На думку автора, наступність передбачає: поступове ускладнення програмних вимог до геометричної підготовки учнів; концентричний розвиток навчального матеріалу за спільними змістово-методичними лініями; узгодженість у трактуванні понятійного апарату; врахування особливостей розумової діяльності учнів; доступність навчального матеріалу, поступове його узагальнення і систематизацію; взаємодію нових знань з раніше засвоєними; індивідуалізацію і рівневу диференціацію навчання.

У дослідженнях О. Дубинчук [4] наступність розглядається як один із найважливіших принципів, що забезпечує поступовий перехід від вивчення арифметики в 4 класі до вивчення математики в 5 класі та сприяє якісному засвоєнню цього матеріалу п'ятикласниками. З урахуванням принципу наступності розроблена методика вивчення арифметики в 5 класі.

Особливості сучасного стану проблеми реалізації принципу наступності між початковою та основною школою під час навчання математики в 5 класах досліджено Т. Насадюк [9].

Автором обґрунтовано доцільність використання практико-орієнтованих завдань з метою розв’язання цієї проблеми.

Серед функцій, які реалізує наступність між початковою та основною школами, можна виділити:

1) адаптивну (визначає перебіг процесу пристосування учнів початкової школи до навчання в основній школі);

2) пізнавальну (дозволяє вибудувати певну систему знань, навичок і вмінь);

3) об’єднувальну (забезпечує взаємозв’язок і взаємозумовленість між усіма компонентами методичних систем);

4) коригувальну (зближує та корегує розвиток методичних систем на першому етапі переходу до основної школи);

5) соціалізаційну (обумовлює становлення учня як суб’єкта освітнього процесу).

Загалом, наступність у навчанні математики в початковій та основній школі повинна реалізуватися:

- у логіці побудови змісту навчального матеріалу;
- у системі навчальних завдань;
- у методичних підходах;
- в удосконаленні методичної підготовки майбутніх учителів.

Між тим, проблема наступності в нормативних документах початкової та основної шкіл особливо не виокремлюється та не визначено суттєвих варіантів її розв’язання.

Так, метою навчання математики в початковій школа Типовими освітніми програмами для 1-4-х класів закладів загальної середньої освіти (2018) є різнобічний розвиток особистості дитини та її світоглядних орієнтацій засобами математичної діяльності, формування математичної й інших ключових компетентностей, необхідних їй для життя та продовження навчання [17; 18].

А в навчальній програмі з математики для 5-9-х класів загальноосвітніх навчальних закладів (2017) зазначено, що курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів [8].

Зокрема значної уваги потребує дотримання принципу наступності під час навчання розв’язування текстових задач, оскільки вони розглядаються в шкільному курсі математики від 1-го до 11 (12-го) класу та є засобом формування математичних компетентностей учнів [3]. Розв’язування текстових задач дозволяє учням усвідомити необхідність оволодіння математичними знаннями, сприяє свідомому та активному засвоєнню навчального матеріалу.

Нові Типові освітні програми (ТОП) для 1-2-х та 3-4-х класів, що затверджені Наказами МОН України (№268 від 21.03.2018 р.; №1461 від 27.12.2018 р.) [17; 18] істотно відрізняються за структурою та виокремленими змістовими лініями.

Аналіз змісту цих програм доводить, що саме НУШ 1 передбачає врахування принципів наступності й перспективності у навчанні учнів розв’язування сюжетних математичних задач. Саме в ТОП НУШ 1 виокремлено змістову лінію «Математичні задачі і дослідження», яка спрямована на формування в учнів здатності розпізнавати практичні проблеми, що розв’язуються із застосуванням математичних методів, на матеріалі сюжетних, геометричних і практичних задач, а також у процесі виконання найпростіших навчальних досліджень.

В ТОП НУШ 2 задачний матеріал 1-4-х класів жодним чином не виокремлений, згадується як сформоване певне уміння працювати над задачею через очікувані результати навчання. У межах змістової лінії «Числа. Дії з числами» визначено такий зміст: розв’язання прямих та обернених задач різних типів, які виникають із повсякденних життєвих ситуацій, що містять групи пов’язаних між собою величин (на пропорційне відношення, пропорційне ділення; на знаходження невідомих за двома різницями, на спільну роботу та ін.). Однак не визначено, яким чином має бути сформовано це уміння за роками навчання.

Також у ТОП НУШ 1 зазначено, що для розв’язування сюжетних задач переважно обирається арифметичний спосіб, алгебраїчний спосіб вводиться в 3-му класі лише з метою ознайомлення. В 4-му класі продовжується робота над удосконаленням уміння розв'язувати задачі алгебраїчним методом. Однак ця вимога винесена в додаткові теми, тобто не є обов'язковою для вивчення учнями 3-4-х класів. Натомість в ТОП НУШ 2 взагалі відсутні натяки на ознайомлення учнів з алгебраїчним методом розв'язування задач, тим паче складених.

Звідси – відсутність докладного опрацювання цієї теми в підручниках з математики в початковій школи, байдуже ставлення вчителів до цього методу, епізодичне ознайомлення з ним учнів. Тому випускники початкової школи відчувають певні утруднення під час розв'язування задач за допомогою складання рівнянь. Причин тут декілька: по-перше, не до кінця продуманий навчальний зміст програм, особливо НУШ 2; по-друге, не всі автори підручників ураховують принцип наступності у вивченні цього питання під час складання системи завдань; по-третє, відсутність обговорення цієї проблеми під час фахової підготовки майбутніх учителів початкової школи та математики основної школи, а також у колі вже працюючих вчителів.

Тому, крім вчителів початкової школи, особливості вивчення цього питання в 3-4 класах мають знати і вчителі математики та враховувати це під час планування вивчення курсу математики учнями 5-х класів, зокрема сюжетних текстових задач.

Аналізуючи оновлену навчальну програму для 5-9 класів (наказ МОН України № 804 від 07.06.2017 р.) [8], ми дійшли висновку, що справді в курсі математики 5-6 класів автори програми істотне місце відвели для текстових задач. Розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою. Основними функціями цих задач є розвиток логічного мислення учнів, володіння мовою алгебри, спроможність будувати за допомогою рівнянь математичну модель задачі та вміння пояснювати здобуті результати. Під час розв'язування текстових задач учні вчаться практичного застосування математичних знань і вмінь. Зокрема учні 5-го класу мають складати за умовою задачі й розв'язувати нескладні рівняння першого степеня спочатку на основі залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом із використанням основних властивостей рівнянь.

В очікуваних результатах навчально-пізнавальної діяльності учнів зазначено: розв'язує рівняння на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій; текстові задачі арифметичним і алгебраїчним способами.

Між тим, під час реальних уроків математики в 5 класі учні відчуваються певні труднощі саме у розв'язуванні задач алгебраїчним методом, а вчителі математики не знайомі з особливостями вивчення цієї теми в початковій школі.

Мета роботи полягає у дослідженні методів розв'язування текстових задач в 4 та 5 класах та розробці методичних рекомендацій для майбутніх учителів математики задля реалізації принципу наступності під час навчання учнів 5-го класу розв'язувати задачі алгебраїчним методом.

Виклад основного матеріалу. Ефективною методика навчання учнів розв'язування задач може бути лише за комплексного підходу до освітнього процесу. Це означає, що має бути чітко визначена мета навчання учнів розв'язування задач певного виду чи оволодіння певним методом, ретельно розроблена система самих задач, які розв'язуватимуться в класі та пропонуватимуться як домашнє завдання, доцільно обрані методи й організаційні форми роботи на уроці, засоби навчання, здійснений контроль стану сприймання учнями методів і способів розв'язування, набутих ними навичок і вмінь [14, с. 98].

Як вже зазначалося, задачний матеріал курсу математики 5-го класу є логічним продовженням задачного матеріалу початкової школи, тому вчителі математики основної школи повинні спиратися на набуті вміння учнями в початковій школі. У 5-му класі учні мають навчатися розв'язувати сюжетні задачі або різними способами, або навчатися розв'язувати задачі дещо ускладненої математичної структури. Тому постає питання про наступність у методах навчання школярів розв'язування задач, пам'ятаючи про те, що задачі є потужним засобом формування життєво важливих компетентностей дитини, є тренажером, на якому опрацьовується вміння розв’язувати життєві проблеми, бо сюжети задач відображують реальну дійсність.

У методичній літературі зустрічаються різні класифікації методів розв’язування текстових задач: арифметичний; алгебраїчний; графічний; практичний (предметний) (Л. Стойлова та А. Пишкало) [15].

Однак арифметичний і алгебраїчний залишаються основними методами розв’язування сюжетних задач. Арифметичний спосіб розв’язування полягає у знаходженні відповіді задачі шляхом арифметичних дій над числами. Алгебраїчний метод полягає в отриманні відповіді на питання задачі за допомогою складання рівняння й подальшого його розв’язання.

Основним методом розв’язування задач в початковій школі є арифметичний метод. Пошук розв’язування задачі арифметичним методом може здійснюватися від запитання задачі до числових даних, тобто аналітично, або від числових даних задачі до її запитання – синтетично [6]. Допоміжним методом розв’язування задачі, який розглядається в початковій школі, є алгебраїчний метод: розв’язування задач за допомогою складання рівнянь.

У практиці навчання математики в початковій школі застосовується більше арифметичний метод, причому переваги належать саме синтетичному пошуку розв’язування, оскільки аналітичний пошук виявляється більш складним для учнів. Натомість синтетичний метод є простішим, але застосування його може створювати додаткові проблеми; аналітичний – більш цілеспрямований щодо складання плану розв’язування задачі, тут треба мати на увазі не одну якусь дію, а хід міркування в цілому.

З огляду на це, щоб уникнути труднощів у використанні арифметичного методу в 5-му класі, вчителю математики необхідно ознайомитися із словесними конструкціями аналітичного та синтетичного методів міркувань, які використовують вчителі початкової школи при розв’язуванні задачі.

Наведемо приклад аналітичного методу розв’язування складеної задачі в 2 класі (рис. 1).

Задача «У Сашка 5 зелених яблук і 4 червоних. 6 яблук він віддав Андрію. Скільки яблук залишилося у Сашка?»

- Що достатньо знати, щоб відповісти на запитання задачі «Скільки яблук залишилося у Сашка?» (Для того, щоб відповісти на запитання задачі, треба знати два числові значення: I – скільки всього яблук було у Сашка, поки ще не знаємо, та II – скільки яблук він віддав Андрію, відомо – 6.)

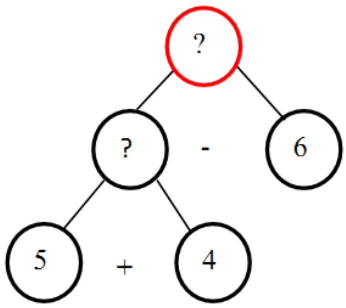


Рис. 1

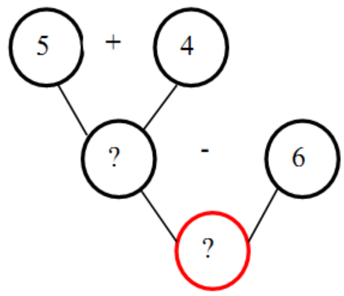


Рис. 2

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання.)

- Чи можна одразу відповісти на запитання задачі? (Ні, не множна, тому що ми не знаємо скільки всього яблук було у Сашка).

- Що достатньо знати, щоб дізнатися, скільки всього яблук було у Сашка? (Треба знати два числові значення: I – скільки у нього було зелених яблук, відомо – 5, та II – скільки у нього було червоних яблук, відомо – 4).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання) .

На дошці поступово продовжується схема аналізу.

- Чи можна одразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що ми знаємо обидва числові дані).

- Ми прийшли від запитання задачі до числових даних, тому аналіз закінчено.

Наведемо приклад синтетичного методу розв’язування тієї самої задачі (рис. 2).

- Знаючи два числові значення: I – скільки у Сашка було зелених яблук (5) і II – скільки у Сашка було червоних яблук (4), про що дізнаємося за ними (скільки всього яблук було у Сашка).

- Якою арифметичною дією про це дізнаємося? (Дією додавання).

- Знаючи два числові значення: I – скільки всього яблук було у Сашка (дізнаємось) і II – скільки яблук він віддав Андрію (відомо 6), про що дізнаємося за ними (скільки яблук залишилося у Сашка) і відповімо на запитання задачі.

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання).

На дошці поступово продовжується схема синтезу.

- Ми від числових даних задачі перейшли до запитання. Синтез закінчено.

Оскільки, синтетичний метод здебільшого використовують у початковій школі, тому і в 5-му класі основної школи його обирають для розв'язування будь-яких текстових задач.

Розв'язуючи задачу синтетичним методом в 5-му класі, міркують так само, йдуть шляхом міркувань від умови задачі до шуканого, тобто виводять наслідки з того, що дано. Наведемо приклад розв'язування задачі синтетичним методом у 5-му класі.

Задача 1. Відстань між містами *A* і *B* дорівнює 288 км. З міста *A* до міста *B* виїхав автомобіль зі швидкістю 72 км/год. Одночасно з автомобілем з міста *B* до міста *A* виїхав велосипедист, який зустрівся з автомобілем через 3 год після виїзду. За який час подолає відстань між містами автомобіль? За який – велосипедист?

Розв'язання.

1. Оскільки швидкість автомобіля і відстань між містами відомі, то можна визначити час руху автомобіля: 288 : 72 = 4 (год).
2. Можна знайти шлях, який автомобіль проїхав до зустрічі: 72 · 3 = 216 (км).
3. Обчислимо шлях, який подолав велосипедист до зустрічі: 288 – 216 = 72 (км).
4. Можна знайти швидкість велосипедиста, оскільки шлях завдовжки 72 км він проїхав за 3 год: 72 : 3 = 24 (км/год).
5. Знайдемо час, за який проїхав усю відстань велосипедист: 288 : 24 = 12 (год).

Відповідь: автомобіль проїхав увесь шлях за 4 год, а велосипедист – за 12 год.

Як демонструють приклади міркувань, синтетичний пошук розв'язування задач у 4 та 5 класах дещо відрізняється за своїм формулюванням, що потрібно враховувати вчителям математики.

Наведемо приклад аналітичного пошуку розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного в 5-му класі.

Задача 2. Автомобіль їхав 3 год зі швидкістю 86 км/год і 4 год зі швидкістю 75 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля на всьому шляху.

- Що достатньо знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Щоб дізнатися про середню швидкість, треба знати два числові значення: I – загальну відстань, що подолав автомобіль (невідомо) та II – загальний час руху (невідомо).

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення). Чи можна одразу відповісти на запитання задачі? (Ні, нам невідомі обидва числові значення).

- Що достатньо знати, щоб дізнатися про загальну відстань? (Треба знати два числові значення: I – відстань, що подолав автомобіль першого разу (невідомо), та II – відстань другого разу (невідомо).

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання). Чи можна одразу відповісти на це питання? (Ні, ми не знаємо жодного числового значення).

- Що достатньо знати, щоб знайти відстань у першому випадку? (Треба знати два числові значення: I – швидкість (відомо, 86 км/год) та II – час руху (відомо, 3 год).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення). Чи можемо тепер відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо відстань у другому випадку).

- Що достатньо знати, щоб знайти відстань у другому випадку? (Достатньо знати два числові значення: I – швидкість (відомо, 75 км/год) та II – час руху (відомо, 4 год).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення). Чи можемо тепер відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо загальний час, який перебував у дорозі автомобіль).

- Що достатньо знати, щоб про нього дізнатися? (Достатньо знати два числові значення: I – час руху в першому випадку (відомо, 3 год) та II – час руху в другому випадку (відомо, 4 год).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання). Чи можемо ми тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання перейшли до числових даних. Аналіз закінчено).

Як бачимо, словесні конструкції аналітичного пошуку міркування під час розв'язування задач в 4 та 5 класах співпадають. Це дає змогу врахувати наступність у вивченні арифметичного методу розв'язування задач між початковою та основною школами.

Проте, слід зауважити, що робота над задачею на етапі аналізу в 5-му класі вчителями здебільшого відрізняється від початкової школи. Недостатньо проводиться опрацювання умови задачі, дозволяється учням не записувати коротку умову, після обговорення умови та запитання задачі (особливо, якщо задача не є складеною) одразу переходять до запитання: «Якою є перша дія розв'язання?». Але таке спрощення є методично хибним. Воно призводить до неуважної роботи учнів над умовою, що спричиняє помилки при з'ясуванні взаємозв'язків між величинами, про які йдеться в задачі. Внаслідок цього, труднощі під час розв'язування арифметичних задач, з якими зустрічались учні в початковій школі, посилюються. Своєю чергою, це певним чином призводить до негараздів із формуванням умінь учнів основної школи розв'язувати задачі на складання рівнянь. Указані проблеми було виявлено в процесі бесід з учнями основної школи та відвідування уроків з математики під час проходження студентами фізико-математичного факультету педагогічної практики.

Загалом, аналітичний метод сприяє свідомому пошуку розв'язку задачі, учить учнів самостійно здійснювати такий пошук. Далі аналітичний метод широко використовують для розв'язування стереометричних задач на обчислення об'ємів, площ поверхонь геометричних тіл. При цьому розв'язування починається із записування відповідної формули, за якою обчислюється шукана величина, а потім здійснюється пошук невідомих величин, які входять до формули.

Однак під час аналізу алгебраїчного методу розв'язування задач в 4 та 5 класах ми знайшли дещо розбіжні підходи в поясненні, вивченні та можливостей його використання під час реальних уроків математики.

Уміння розв'язувати задачі за допомогою складання рівняння як компонента відповідної діяльності, як зазначає З. Слєпкань [14, с. 99], містить такі розумові дії:

- аналіз задачі (виокремлення умов і вимог);
- встановлення істотних зв'язків між відомими і шуканими;
- виявлення величин, значення яких прирівнюватимуться;
- позначення невідомої та подання потрібних величин через введену невідому;
- складання рівняння і його розв'язування;
- перевірка розв'язування задачі.

Безперечно, успішно аналізувати формулювання задачі учні можуть лише тоді, коли вони засвоїли її зміст. Для цього важливо вдало подати задачу учням. Це можна зробити по-різному. Якщо задача з підручника, то ефективніше, коли задачу вголос читає вчитель або один із учнів, а решта стежать, як сформульовано задачу. Досвід свідчить, що найкраще, коли задачу читають не менш як двічі. Доцільно, щоб учень, який розв'язуватиме задачу, після повторення змісту задачі та виокремлення умови і вимоги скорочено записав їх на дошці. Для окремих задач умову і вимогу потрібно подати у вигляді таблиці або графічної ілюстрації.

Наприклад, розглянемо в контексті вивчення цієї теми наступну задачу: «У двох кімнатах – 76 осіб. Коли з першої кімнати вийшло 30, а з другої – 40 осіб, то людей у кімнатах залишилося порівну. По скільки осіб було в кімнаті спочатку?» [16, с. 145].

Скорочений запис змісту задачі, на наш погляд, доцільно представити так:

	Було, осіб	**Вийшло, осіб**	**Залишилося, осіб**
I	**?** 76	30	? ***порівну***
II	**?**	40	?

Рис. 3

Після аналізу даних таблиці можна скласти наступну таблицю, позначивши одну з шуканих величин x та виражаючи інші через x.

	Було, осіб	**Вийшло, осіб**	**Залишилося, осіб**
I	**?** x	-30	? ***порівну***
II	**?** $76 - x$	-40	?

Рис. 4

Після цього легко скласти наступне рівняння:

$$x - 30 = 76 - x - 40.$$

Геометричне зображення змісту задачі (рис. 5) наочно ілюструє зв'язок між даними і шуканими, допомагає доцільно обрати невідоме x і скласти просте для розв'язування рівняння: $2x + 10 = 76$.

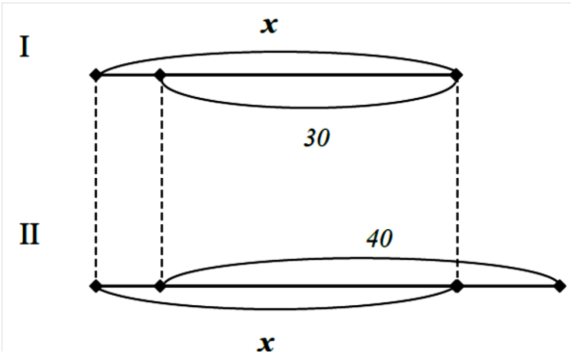


Рис. 5

У процесі складання рівняння потрібно з'ясувати, про які величини йдеться в тексті задачі, які зв'язки існують між цими величинами і шуканим, значення яких величин можна прирівняти. Залежно від цього доцільно ввести невідоме і скласти рівняння.

Узагалі, на першому підготовчому етапі навчання учнів 5 класу алгебраїчного методу розв'язування задач потрібно пригадати всі види основних задач, які розв'язуються кожною арифметичною дією, їх буквений запис, сформувати навички складання простих виразів з невідомою.

Вчитель математики основної школи має знати види задач, які опанували учні початкової школи, і на якому рівні пройшло опанування. Якщо, відповідно до вимог програми, в початковій школі відбулося навчання розв'язування лише прямих задач, то слід складати методику вивчення цього виду задачі в 5 класі за планом: розв'язування знайомої учням прямої задачі з наступним її дослідженням через зміни шуканого (обернені) з метою узагальнення математичної структури та способу розв'язування прямих і обернених задач [12, с. 38-39].

Також важливо допомогти учням зрозуміти і усвідомити, що словосполучення «*a* на стільки-то більше за *b*» іноді потребує дії додавання, а іноді – віднімання, залежно від того, якої з двох величин воно стосується. Це саме стосується словосполучення «*a* в стільки-то разів більше за *b*». Досвід показує, що деякі учні не реагують на слова «сума», «додано», «всього» в умові задач. Тому на першому етапі потрібно спеціально акцентувати увагу на словах, які містять інформацію для складання рівняння.

Як бачимо, певні елементи цих розумових операцій можуть бути відпрацьовані і в початковій школі, якщо вчителі за основу візьмуть методичний підхід С. Скворцової, Г. Мартинової та Т. Шевченко. Зокрема мова йде про пам'ятку для розв'язування задач за допомогою рівняння: 1) позначаємо невідоме число буквою; 2) виділяємо зв'язки невідомого з числовими даними; 3) складаємо рівняння; 4) розв'язуємо рівняння; 5) записуємо відповідь задачі [13].

Однак поки що не має повної узгодженості у навчанні учнів 4-5 класів розв'язування сюжетних математичних задач з урахуванням наступності. Аналіз методичної літератури не допоміг знайти чітких методичних рекомендацій для майбутніх учителів математики основної школи для розв'язання проблеми наступності під час навчання розв'язування задач алгебраїчним методом учнів 5-го класу.

Тому з метою дослідження рівня опрацювання задачного матеріалу в 5-му класі, зокрема наявність достатньої кількості завдань на засвоєння алгебраїчного методу розв'язування задач, нами проаналізовано зміст чинних підручників з математики для 5-го класу. З'ясовано, що не всі підручники відповідають цим вимогам. Так, у підручнику «Математика. 5 клас» (А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) [7] не прослідковується детальна методика навчання розв'язування задач алгебраїчним методом.

На відміну від попереднього авторського колективу, в підручнику «Математика. 5 клас» О. С. Істер [6] пропонує системно підходити до вивчення цього питання. Спочатку з учнями актуалізують уміння розв'язувати рівняння, повторюють відповідні правила та форму запису розв'язання рівнянь. Далі автор пропонує цілу систему навчальних завдань з метою закріплення уміння розв'язувати ускладненні рівняння, а також на актуалізацію уміння розв'язувати прості задачі за допомогою складання рівнянь. Потім детально розглядають види задач, що пропонуються в 5-му класі та методику роботи з ними. Однак, на наш погляд, не вистачає більш детального ознайомлення з алгебраїчним методом розв'язування саме складених задач. Завдань на закріплення знань та вмінь розв'язувати складені задачі цим методом, на наш погляд, також недостатньо.

Досить схожий із попереднім автором початок вивчення алгебраїчного матеріалу ми побачили в підручнику «Математика. 5 клас» авторського колективу в складі Н. А. Тарасенкової, І. М. Богатирьової, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк [16]. Автори змогли докладно висвітлити методику ознайомлення з методом розв'язування задач за допомогою рівнянь. Спочатку автори пропонують повторити загальні правила роботи з рівняннями. На цьому ж уроці проводиться робота із засвоєння правил знаходження невідомих компонентів арифметичних дій та способів розв'язування рівнянь.

Далі увага авторів підручника прикута до закріплення уміння розв'язувати не тільки прості рівняння, а й більш ускладненої форми.

Крім того, автори пішли далі та запропонували в підручнику типи задач, тобто вони систематизували задачний матеріал 5-го класу.

Автори підручника пропонують зразок запису в зошиті алгебраїчного способу розв'язування задач, чого не робили інші автори.

Досить доцільним, на наш погляд, є також прив’язані до кожного типу задач методи їх розв’язування. Причому і арифметичний, і алгебраїчний методи запропоновано паралельно, доводячи таким чином можливості використання обох під час розв’язування задач (рис. 5).

Задача 6 Катер проплив 51 км за течією річки і витратив на це 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 15 км/год.

Розв’язання

Швидкість катера за течією річки дорівнює сумі власної швидкості катера і швидкості течії річки.

Рух	Швидкість	Час	Шлях
За течією	15 + ?	3 год	51 км

Арифметичний спосіб

1) 51 : 3 = 17 (км/год) — швидкість катера за течією;
2) 17 – 15 = 2 (км/год) — швидкість течії.

Отже, швидкість течії річки — 2 км/год.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — швидкість течії річки. Складемо і розв'яжемо рівняння:

$(15 + x) \cdot 3 = 51,$
$15 + x = 51 : 3,$
$15 + x = 17,$
$x = 17 - 15,$
$x = 2.$

Отже, швидкість течії річки — 2 км/год.

Рис. 6

Позитивно оцінюючи підручник з математики третього авторського колективу [16], підкреслюємо детальність та системність у вивченні алгебраїчного методу розв’язування задач. Тому рекомендуємо як майбутнім вчителям, так і вчителям-практикам використовувати саме таку систему навчальних завдань під час планування та розробки уроків математики в 5-му класі.

Крім того, слід наголосити ще на одному питанні. Практика навчання математики в основній школі показує, що загальні уміння розв’язувати сюжетні задачі в учнів 5 класу не завжди сформовані на належному рівні. Тому вчителі математики не повинні відмовлятися від основних етапів роботи над задачею, оскільки вони є знайомими для випускників початкової школи. Зокрема це: 1) ретельний аналіз формулювання задачі і подання його результатів у вигляді репрезентативної моделі; 2) пошук розв’язання задачі (аналіз або синтез); 3) складання плану розв’язування задачі; 4) робота над задачею після її розв’язання. На необхідності побудови методики роботи над задачею відповідно до зазначених етапів наголошують не лише провідні методисти початкової школи, а й методисти-математики основної школи, зокрема М. Бурда, М. Ігнатенко, З. Слєпкань, Л. Фрідман та ін.

У межах нашого дослідження було проведено опитування учителів початкових класів. Було обговорено актуальні питання методики навчання розв’язування сюжетних математичних задач: проблема вибору методів розв’язування задач і їх доцільність у початковій школі; ставлення вчителів до алгебраїчного методу, його популярність і можливості використання в 4-му класі. Це дало змогу зробити певні висновки.

Більшість учителів, майже 89 % опитаних, дотримуються 4-х основних етапів роботи над задачею. Регулярно повторюють їх з дітьми.

Майже до кожної задачі діти виконують короткий запис або схематичний малюнок. Інколи у них виникають труднощі, очікують допомогу вчителя або однокласників.

У переважній більшості для розв’язування задач в початковій школі обирають арифметичний метод (98 %), якщо у завданні до задачі не прописано розв’язати її іншим способом. Тобто ініціативу щодо використання іншого методу вчителі не проявляють зовсім.

Пошук розв’язування задачі учні ілюструють на схемі або проговорюють словесні конструкції. Причому частіше це відбувається фронтально, самостійно це можуть зробити не всі учні класу.

Однак учителі початкової школи також підтверджують часткову або повну відсутність алгебраїчного методу розв'язування задач на уроках математики. Лише 35 % респондентів вважають цей метод корисним і потрібним для учнів 4-го класу. Майже така сама кількість вчителів (33 %) хотіли б частіше розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь.

Серед труднощів, з якими зустрічаються вчителі під час опрацювання з учнями алгебраїчного методу, визначено:

1) елементарне нерозуміння цього методу, тобто незнання методики вивчення та застосування учнями;

2) усталене прийняття лише арифметичного методу, тобто вважають, що учням 4-го класу важко дається алгебраїчний метод, їм це не потрібно і нехай цим займаються вчителі основної школи;

3) небажання змінюватися, тобто «звикли так працювати», «завжди так було» та ін.;

4) недостатньо розкрито це питання в чинних підручникам, відсутність методичних рекомендацій.

Підсумовуючи результати бесіди й анкетування, необхідно зазначити, що вчителі початкової школи впевнено стверджують, що їх учні добре засвоїти загальні прийоми роботи над простими й складеними задача, вміють складати схеми та короткі записи, можуть розв'язати задачі за діями та з поясненням. Однак відверто визнають, що алгебраїчний метод не до кінця розкритий для учнів, не сформовано уміння самостійного розв'язування задач за допомогою рівнянь.

З огляду на це, вчителям основної школи, й тому числі й майбутнім учителям, потрібно готуватися до певних труднощів, про які ми дізналися після бесіди та анкетування з вчителями математики.

Більшість вчителів основної школи дійсно підтвердили достатній рівень уміння учнів розв'язувати задачі. Важливість опрацювання задач за 4-ма основними етапами в 5-му класі підтвердили 82 % респондентів. Однак не всі вчителі багато уваги приділяють оформленню короткого запису або схеми (72 %).

Переважна більшість учителів (87 %), спираючись на сформовані вже уміння учнів, обирають на початку в 5-му класі арифметичний метод для розв'язування задач. Але поступово починають застосовувати для розв'язання і алгебраїчний метод. Труднощами для вчителів математики є нерозуміння учнями іншого варіанта міркувань, окрім добору арифметичних дій до числових даних задачі, складання виразів до задачі, їх розв'язання та пояснення за діями. Хоча учні 5 класу вміють розв'язувати рівняння, однак пов'язати рівняння з процесом розв'язування задачі можуть далеко не всі. На думку вчителів математики, цю проблему потрібно розв'язувати на державному рівні, тобто переглянути зміст математичної освітньої галузі та відслідковувати наступність у обов'язкових навчальних результатах учнів 4 та 5 класів. Однак для вчителів основної школи було несподіваним дізнатися, що в Типових освітніх програмах початкової школи частково або взагалі відсутня вимога навчити учнів розв'язувати задачі алгебраїчним методом. Тому для забезпечення наступності між початковою та основною школами у процесі формування в учнів 5-го класу уміння розв'язувати сюжетні задачі вчителям математики доцільно використовувати прийоми, які є характерними для методики формування умінь в учнів початкової школи. В першу чергу, це використання арифметичного методу розв'язування задач через аналітичний або синтетичний пошук розв'язування у вигляді системи запитань, ілюстрацій, опорних схем та складання і розв'язування обернених задач. А далі забезпечити поступовий перехід, враховуючи досвід дітей, до алгебраїчного методу розв'язування задач.

Висновки. Таким чином, враховуючи попередній аналіз методичної літератури з проблеми дослідження та багаторічну практику спілкування з вчителями початкової та основної школи, можна виокремити загальні методичні рекомендації до реалізації принципу наступності у процесі фахової підготовки майбутніх учителів математики.

1. Переглянути і внести корективи у зміст робочих програм: «Методика викладання математичної освітньої галузі» для студентів факультету початкового навчання (за ОПП:

Початкова освіта); «Шкільний курс математики і методика його навчання» для студентів фізико-математичного факультету (за ОПП: Середня освіта (Математика)).

2. Проводити зі студентами детальний аналіз змісту навчальної програми з математики для 5-9-х класів та Типових освітніх програм з математики для 1-4-х класів, зокрема особливостей опрацювання задачного матеріалу за роками навчання з обов’язковими подальшими висновками щодо врахування принципу наступності між початковою та основною школою.

3. Проаналізувати разом зі студентами сучасні підручники з математики для 4 та 5 класів, які рекомендовані МОН України, на предмет доцільності добору системи навчальних завдань для реалізації наступності у вивченні задачного матеріалу між початковою та основною школами, у тому числі під час ознайомлення та формування умінь учнів розв’язувати задачі алгебраїчним методом.

4. Ознайомити студентів фізико-математичного факультету з особливостями методичної системи навчання розв’язування задач учнів початковій школі: види задач, етапи роботи над задачею, методи розв’язування, форму запису короткої умови, схеми та ін.

5. Під час лекцій та практичних занять зосередити увагу студентів на детальному поясненні методів розв’язування задач у 5-му класі, продемонструвати логіку викладання цього матеріалу в 4 та 5 класах.

Список використаних джерел

1. Акуленко, І. А. (2000). *Система диференційованих вправ з логічним навантаженням як засіб розвитку логічного мислення учнів 5-6 класів при вивченні математики* (автореф. дис. канд. пед. наук). НПУ ім. М.Драгоманова, Київ.

2. Волчаста, М. М. (2003). *Наступність у вивченні геометричного матеріалу в початковій та основній школі* (дис. канд. пед. наук). НПУ ім. М.Драгоманова, Київ.

3. Гаєвець, Я. С., Яковлєва, О. М. (2019). Проблема наступності у формуванні уміння розв’язувати текстові задачі учнями 4 та 5 класів. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи*. Харків: Вид-во «Ранок», 36-38.

4. Дубинчук, О. С., Мальований, Ю. І., Дичек, Н. П. (1991). *Методика викладання алгебри в 7-9 класах*: посібник для вчителя. Київ: Рад. школа.

5. Істер, О. С. (2018). *Математика. 5 кл.*: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. Київ: Генеза.

6. Коваль, Л. В. Скворцова, С. О. (2011). *Методика навчання математики: теорія і практика*: підручник. Харків: ЧП «Принт-Лідер».

7. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2018). *Математика. 5 кл.*: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. Харків: Гімназія.

8. *Навчальні програми для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів*. (2017). URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi--5-9-klas

9. Насадюк, Т. О. *Використання практико-орієнтованих завдань для вирішення проблеми забезпечення наступності між початковою і основною школою під час навчання математики в 5 класі.* URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article//download/1332/1305

10. Підласий, І. П. (2003). *Педагогика: новый курс*. Москва. Гуманит.изд.центр ВЛАДОС.

11. *Проект Державного стандарту базової середньої освіти*. (2019). URL: https://mon.gov.ua/ua/news/ministerstvo-osviti-i-nauki-ukrayini-proponuye-dlya-gromadskogo-obgovorennya-proyekt-derzhavnogo-standartu-bazovoyi-serednoyi-osviti

12. Скворцова, С. О. (2008). Наступність між початковою та основною школою в навчанні розв’язування сюжетних задач. *Наша школа*. 5. 38-49.

13. Скворцова, С. О., Мартинова, Г. І., Шевченко, Т. О. (2005). *Методика викладання математики в четвертому класі*. Одеса : Автограф.

14. Слєпкань, З. І. (2006). *Методика навчання математики*: підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл.; за ред. Т. М. Глушко. 2-ге вид., допов. і перероб. Київ: Вища школа.

15. Стойлова, Л. П., Пишкало, А. М. (1988). *Основы начального курса математики*: учебное пособие для учащихся педагогических училищ. Москва: Просвещение.

16. Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Бочко, О. П., Коломієць, О. М., Сердюк З. О. (2018). *Математика. 5 кл.*: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. Київ: Видавничий дім «Освіта».

17. *Типова освітня програма для 1-2 класів закладів загальної середньої освіти*. (2018). URL: https://nus.org.ua/news/opublikuvaly-typovi-osvitni-programy-dlya-1-2-klasiv-nush-dokumenty/

18. *Типова освітня програма для 3-4 класів закладів загальної середньої освіти*. (2019). URL: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovih-osvitnih-program-dlya-3-4-klasiv-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti-1273

19. Тургунбаєв, Р. М. (2009). Об установлении преемственных связей в курсе математического анализа. Черкаси: *Вісник Черкаського університету. Педагогічні науки*. 143. 142-148.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА В БАЗОВІЙ ТА ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

ВСТУП ДО ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ У РЕТРОСПЕКТИВІ

Михайло Бурда, Ніна Тарасенкова, Зоя Сердюк

Нові здобутки в будь-якій науковій галузі завжди базуються на минулому досвіді – позитивному чи негативному. Ми не лише вчимося на помилках, а й використовуємо кращі здобутки попередніх поколінь, оновлюючи та удосконалюючи їх. Саме тому якісна розбудова Нової Української школи неможлива без урахування позитивного досвіду побудови та фактичного змісту вступу до шкільного курсу геометрії деяких, на нашу думку, основних етапів розвитку геометрії минулого та нинішнього століття.

Першою визначною реформою минулого століття була реформа шкільної математичної освіти в 60-70-х роках та мала іменну назву – «колмогоровська». Така назва була дана на честь провідного математика світу того часу академіка А. М. Колмогорова, який виступив зачинателем, головним ідейним натхненником і безпосереднім виконавцем теоретичних і практичних реформаторських заходів. Основна мета колмогоровської реформи – осучаснити зміст навчання математики, наблизити його до проблем сучасної науки й певною мірою відійти від класичних питань, що розглядалися з прадавніх часів. Зокрема планувалась алгебраїзація курсу математики молодшої школи, уведення в старшій школі диференціального та інтегрального числення й теорії ймовірностей, повна перебудова курсу геометрії на основі геометричних перетворень і векторів. Тому заслуговують на особливу увагу способи реалізації цих задумів у тогочасних програмах і підручниках, особливо з геометрії. Детальніше цей період реформ було висвітлено нами у [1].

Проте й інші здобутки геометрів минулого та нинішнього століття варті уваги й детального аналізу, зокрема, це підручники О. Ф. Семеновича, О. В. Погорєлова та сучасні підручники з геометрії групи авторів під керівництвом М. І. Бурди та Н. А. Тарасенкової.

Мета статті – проаналізувати та порівняти особливості підручників для 7-9 (раніше 6-8) класів базової школи різних історичних етапів розвитку вітчизняної освіти, схарактеризувати особливості розгортання змісту навчання в таких підручниках, який було розроблено за вимогами реформаторських інновацій того часу, зокрема в підручниках А. М. Колмогорова, О. Ф. Семеновича і Р. С. Черкасова, О. В. Погорєлова, М. І. Бурди і Н. А. Тарасенкової.

Згідно з періодизацією Г. В. Кондратьєвої [2], колмогоровська реформа у часовому вимірі охоплює дві фази (реформаторську та експериментально-еклективну) нового циклу розвитку шкільної математичної освіти на теренах колишньої держави, який припадає на другу половину XX ст.

Початок реформаторської фази (1965 р.) цілком погоджується зі значною подією того часу – створенням Центральної комісії Академії наук та Академії педагогічних наук СРСР із визначення змісту середньої математичної освіти (голова – академік О. І. Маркушевич, науковий керівник і водночас голова Комісії з математики Вченої методичної ради Міністерства освіти СРСР – академік А. М. Колмогоров).

У 1968 р. було затверджено нову програму з математики для середньої школи й почалася робота зі створення нових підручників. У 1970 році було прийнято «Положення про загальноосвітню школу», що знаменувало собою, за Г. В. Кондратьєвою [2], початок наступної, експериментально-еклективної фази реформ.

Згідно з новими навчальними планами і програмами:

- початкова освіта стала трирічною, вводився курс «Математика» на заміну арифметики (*нині початкова школа є чотирирічною*);

- змінилися структура і назви складових систематичного курсу математики: 4-5 класи – пропедевтичний курс «Математика» з елементами алгебри і геометрії, 6-8 класи – систематичні курси «Алгебра» і «Геометрія» (планіметрія), 9-10 класи – систематичні курси «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія» (стереометрія) (*зміни збереглися дотепер*);

- побудова курсів стала лінійно-концентричною (*зміни збереглися дотепер*);

- теорія множин і математична логіка набули статусу основоположних і стали використовуватися в якості основної мови викладу змісту (*зміни не збереглися дотепер*);

- із курсів були вилучені архаїчні питання (наприклад, алгоритм добування квадратного кореня з числа) (*зміни збереглися дотепер*);

- до програми були включені окремі питання про ЕОМ та програмування (*зміни в явному вигляді не збереглися дотепер, але в сучасному навчальному плані загальної середньої освіти є окрема дисципліна – «Інформатика»*);

- була запропонована нова форма навчання – факультативні курси, як от: «Додаткові розділи й питання математики» (поглиблення окремих тем програми) та «Вибрані питання математики» (програмування, обчислювальна математика, векторна алгебра, задачі лінійного програмування тощо) (*зміни збереглися дотепер і набули розвитку*);

- оцінка за результати опанування факультативних курсів набула офіційного статусу і стала заноситися в атестат про середню освіту (*зміни не збереглися дотепер*);

- систему шкіл і класів з поглибленим теоретичним та практичним вивченням окремих предметів, зокрема математики, яку було започатковано в 1959 році, із 1966 року доповнили фізико-математичні школи-інтернати, які стали створювати при провідних університетах (*зміни збереглися дотепер*).

За декілька років до затвердження програми, а саме у 1961-1963 рр., вийшли друком пробні підручники з геометрії для 6, 7 та 8 класів О. Ф. Семеновича [3-5]. Ці підручники були створені на базі чинних на той час програм (не «колмогоровських»), але, як відзначають академіки В. М. Глушков і С. М. Черніков [6], ці підручники вже відображали ті нові тенденції, які пізніше лягли в основу нових програм з геометрії середньої школи. На базі цих книг авторський колектив у складі О. Ф. Семеновича, Ф. Ф. Нагібіна і Р. С. Черкасова розробив і подав на конкурс підручник з геометрії для 8-річної школи, де отримав другу премію Міністерства освіти РРФСР (першої премії не був удостоєний жоден підручник). А. М. Колмогоров високо оцінив спроби авторів вибудувати шкільний курс геометрії на теоретико-множинній основі із широким залученням геометричних перетворень і векторів, запросивши авторів цього підручника до співпраці. Утворився авторський колектив на чолі з А. М. Колмогоровим, який із середини 60-х років до початку 80-х років трудився над створенням та удосконаленням підручників з геометрії для 6, 7 і 8 класів. Підручники видавалися окремими книгами й поодинці проходили апробацію в експериментальному навчанні у відповідних класах середніх шкіл країни. Щороку збирались експериментальні дані, на основі яких авторський колектив вносив корективи у підручники. Вийшло друком близько 10 видань пробних підручників для кожного класу. Вінцем цього процесу став підручник «Геометрія 6–8» [7], який був виданий майже 20-ма мовами.

Охарактеризуємо структурно-змістові особливості курсу планіметрії, реалізованого в цьому підручнику.

Навчальний матеріал для кожного класу в підручнику [7] представлено в кількох програмових темах (у підручнику їх подано як розділи), зокрема:

- у 6 класі – теми «Початкові поняття геометрії», «Конгруентність фігур і переміщення»;

- у 7 класі – теми «Паралельність і паралельне перенесення», «Многокутники», «Вектори», «Подібність»;

- у 8 класі – теми «Повороти і тригонометричні функції», «Метричні співвідношення в трикутнику», «Вписані й описані многокутники», «Початкові відомості зі стереометрії».

Кожну програмову тему розбито на параграфи, а параграфи – на пункти. Винятком є перша і п'ята теми, у яких не передбачено розбиття навчального матеріалу на параграфи, але виділено від 7 (тема «Вектори») до 14 (тема «Початкові поняття геометрії») пунктів. Загалом підручник містить 100 пунктів. У кожній програмовій темі є один пункт (і не завжди останній) із додатковим (позапрограмовим) матеріалом. Наприкінці кожного розділу розміщено окремий пункт (без нумерації) «Додаткові задачи до розділу». Наприкінці підручника (перед додатками) розміщено «Задачі на повторення з курсу 6-8 класів» та відповіді. Деякі додаткові відомості, як от: «Про логічну будову геометрії», «Мова теорії множин в геометрії», а також довідковий матеріал розміщено на 10 сторінках «Додатків».

У структурі кожного пункту є теоретичний матеріал, а також запитання і задачі для відпрацювання знань, навичок і вмінь учнів. Обсяг навчального змісту є невеликим і розрахований здебільшого на 1 урок. Запитання за теоретичним матеріалом і задачі не відокремлені, а перемежаються, утворюючи єдиний блок. У наборах задач використовується і явна, і прихована диференціація задач за ступенем їх складності. Явно виділено задачі для усного розв'язування (біля номера задачі розміщено позначку «нулик») та задачі підвищеної складності (біля номера задачі розміщено позначку «зірочка»). Внутрішня диференціація реалізується через приховане для учнів нарощування складності задач – кожна наступна задача і змістово, і операційно є складнішою за попередню.

Важливим етапом у становленні та розвитку геометричної освіти було впровадження в школах підручника з геометрії О. В. Погорєлова, який ґрунтувався на ідеях Евклідової геометрії та продовжив лінію підручника з геометрії А. П. Кисельова. На думку О. В. Погорєлова, основною задачею геометрії є навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити [8]. Підручник О. В. Погорєлова «Геометрія» був одним з основних шкільних підручників в 1980-2007 роках. В Україні останнє його видання датується 2008 роком. Підручник призначений для учнів 7-9 класів у зв'язку з переходом з 8 на 9-річну базову неповну середню освіту. Він складається з 15 параграфів, відповідей та вказівок до задач, предметного покажчика.

Змістове наповнення підручника наступне.

У *7 класі* автор пропонує для вивчення наступні теми:

1. Основні властивості найпростіших геометричних фігур.
2. Суміжні і вертикальні кути.
3. Ознаки рівності трикутників.
4. Сума кутів трикутника.
5. Геометричні побудови.

Курс геометрії *8 класу* містить такі теми:

1. Чотирикутники.
2. Теорема Піфагора.
3. Декартові координати на площині.
4. Рух.
5. Вектори.

У *9 класі* для вивчення учнями пропонуються такі теми:

1. Подібність фігур.
2. Розв'язування трикутників.
3. Многокутники.
4. Площі фігур.
5. Елементи стереометрії.

Кожен параграф складається з кількох пунктів, у яких викладено лише теоретичний матеріал. Після цього йде рубрика «Контрольні запитання», а вже далі набір задач для розв'язання за матеріалом всього параграфа. Набори задач відповідали навчальній програмі тих років та призначені для відпрацювання базових навичок і вмінь. Як зазначав сам автор, багато задач було взято з підручника «Геометрія» А. П. Кисельова та «Збірника задач з геометрії» М. О. Рибкіна. Крім пунктів з теоретичним матеріалом, автор включив до підручника [8], наприклад, й такі: «Що потрібно робити, щоб добре встигати з геометрії», «З історії виникнення геометрії», «Як самостійно готуватись за підручником», що сприяло покращення роботи школярів з даним підручників та викликало їх зацікавленість.

Зазначимо, що в сучасних українських підручниках з геометрії застосовано більшу деталізацію рубрик та пропонуються й інші рубрики, яких немає в підручнику [7]. Наприклад, у підручнику з геометрії для 7 класу [9] (відповідає 6-му класу в 60-70 роки XX століття) міститься чотири розділи із навчальним матеріалом, а також (як окремі розділи книги): вступне слово до учнів, підсумкові таблиці та завдання для повторення вивченого матеріалу наприкінці навчального року, відповіді й предметний покажчик. Кожний розділ розпочинається рубрикою «У розділі дізнаєтесь», навчальний матеріал розміщено в кількох параграфах, а завершується розділ контрольними запитаннями і тестовими завданнями. Кожен параграф містить навчальний матеріал, який мають засвоїти учні, додаткові відомості (рубрика «Дізнайтеся більше»), контрольні запитання (рубрика «Пригадайте головне»), задачі для відпрацювання навичок і вмінь (рубрика «Розв'яжіть задачі»). Зазначимо, що в рубриці «Дізнайтеся більше» можна зустріти: цікавий матеріал із теми, що вивчається, а також матеріал, прив'язаний до цієї теми, але який виходить за межі навчальної програми; дані про походження назв і позначень; історичні відомості; біографічні довідки про видатних вітчизняних та зарубіжних математиків. Основний блок задач до параграфа містить задачі чотирьох рівнів складності. Перший рівень позначено штрихом – це здебільшого усні задачі. Другий рівень позначено нуликом – це обов'язкові задачі для відпрацювання базових умінь. Третій рівень не має позначок. Ці задачі відповідають достатньому рівню навчальних досягнень учнів. Четвертий рівень позначено зірочкою – це задачі високого рівня складності, які дозволять учням проявити свої математичні здібності. У підручнику задачі подано як традиційно – у текстовій формі, так і в іншій формі, зокрема у вигляді таблиць та з опорою на готові малюнки. Частину задач до параграфа виділено жирним шрифтом. Це базові задачі (задачі-факти). Учням треба запам'ятати їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач. Прийоми розв'язування задач подаються не лише в навчальному тексті параграфа, а й у блоці задач на відпрацювання навичок і вмінь. Крім основного блоку, до кожного параграфа пропонуються задачі практичного змісту (рубрика «Застосуйте на практиці»).

Отже, як бачимо, апарат організації засвоєння та апарат орієнтування в сучасних підручниках є більш ємним і деталізованим порівняно з підручниками часів колмогоровської та постколмогоровської реформ.

Зупинимося на особливостях розкриття змісту кількох початкових пунктів першої програмової теми «Початкові поняття геометрії» у підручнику [7]. Як уже зазначалося вище, у цій темі автори виділили 14 пунктів, а саме:

1) що таке геометрична фігура;
2) основні поняття, що приймаються без означень;
3) величини і числа;
4) основні властивості відстаней;
5) взаємне розміщення трьох точок на прямій, нерівність трикутника;
6) відрізок і промінь;
7) координати на прямій;
8) ламана;
9) площина, планіметрія;
10) область;
11) многокутник;
12) півплощина, кут;
13) взаємне розміщення двох кіл;
14) з історії геометрії.

Основні з вихідних ідей авторської концепції побудови змісту та його розгортання в підручнику стають очевидними при розгляді перших трьох пунктів першого розділу. Зупинимося на них детальніше.

У п. 1 «Що таке геометрична фігура?» основним об'єктом засвоєння є поняття геометричної фігури. Геометрична фігура визначається як будь-яка множина точок. До цього поняття автори підводять учнів індуктивно, починаючи з конкретного прикладу (кола), а закріплення нового поняття проводять на прикладах інших відомих учням фігур – круга і сфери. При цьому кожному із цих понять (геометричній фігурі, колу, кругу, сфері) дається строге означення. Автори тут же визначають поняття простору як множини всіх точок і уточнюють поняття геометричної фігури, формулюючи висновок: будь-яка геометрична фігура є підмножиною простору. Одразу ж використовується символіка математичної логіки та вводяться правила оформлення скорочених записів: $|AO|$ – відстань між точками A і O; $|AO|$ = 1,5 см – міра відстані між точками A і O; знаки $\in$ і $\notin$ для формалізації факту належності/неналежності заданих точок певній фігурі. Поняття відрізка та його довжини в даному пункті не використовуються.

У п. 2 «Основні поняття, що приймаються без означень» пояснюється, як будуються означення та чому необхідні неозначувані поняття для побудови певної теорії. Указуються основні поняття для даного курсу: 1) точка; 2) пряма; 3) площина; 4) відстань від однієї точки до іншої. Також зазначається, що в підручнику будуть використовуватися і деякі загальноматематичні основні поняття – множина, величина, число. Про такі основні поняття геометрії, як «належати» та «лежати між» для точок і прямих, у даному пункті не йдеться.

У п. 3 «Величини і числа» основним об'єктом засвоєння є поняття величини та властивості дій з величинами. Спочатку через опис, показ і характеристику пояснюється суть поняття величини. За допомогою прикладів вводиться поняття однорідних величин та дій з ними – порівняння, додавання, множення на невід'ємне число. Для введення понять «одиниця вимірювання», «числове значення величини» та «відношення величин» застосовується дедуктивний підхід із формалізацією основних висновків. Наприклад, введення поняття «числове значення величини» здійснюється так: «Прийнявши деяку величину e за одиницю вимірювання, можна за її допомогою виміряти будь-яку іншу величину a того самого роду. У результаті вимірювання одержимо, що $a = xe$, де x – число. Це число x називається числовим значенням величини a за даної одиниці вимірювання e» [7, с. 14]. Далі на прикладі довжини кімнати пояснюються такі важливі властивості величини, як її інваріантність та залежність її числового значення від одиниці вимірювання. У даному випадку автори послаблюють строгість міркувань і не використовують названу вище математичну термінологію, а залишаються в межах побутового тезаурусу.

У підручнику О. В. Погорєлова [8] здійснено спробу строго дедуктивної побудови курсу планіметрії, хоча й в адаптованому для школи варіанті. Для цього автор вводить систему аксіом на початку курсу в явному вигляді й тим самим надає їм статусу основних об'єктів засвоєння. З одного боку, для досвідченого читача курс геометрії набув ще більшої стрункості. Але з іншого боку, для учня постала проблема оперування розгорнутими текстами аксіом для обґрунтування власних суджень. І це стало непереборним бар'єром для багатьох школярів, здебільшого через об'єктивні причини – у даному віці вербальна функція мозку дитини знаходиться лише в стадії становлення, у когнітивних процесах домінує права півкуля. А це означає, що така побудова курсу фактично не відповідає віковим можливостям учнів базової школи та зумовлює їх навчання далеко за межами «зони найближчого розвитку».

До системи аксіом шкільного курсу планіметрії [8] увійшли наступні аксіоми.

Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
2. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

3. Пряма розбиває площину на дві півплощини.
4. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля.

Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

5. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

6. Від будь-якої півпрямої у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою від 180°, і тільки один.

7. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

8. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Зазначимо, що в сучасних українських підручниках навчальний зміст, пов’язаний з основними поняттями та відношеннями, величинами та їх властивостями, а також аксіоматика подається виключно індуктивно, на прикладах, із застосуванням опису, показу і характеристики. Інші вихідні положення основ шкільного курсу геометрії розкриваються також індуктивно. Загалом, у сучасних підручниках значно повніше забезпечується доступність змісту навчання, а способи його подання в підручниках більш ємно й різносторонньо реалізують його відповідність віковим особливостям учнів.

На завершення відмітимо, що застосування методів компаративної дидактики математики [10], зокрема тих, що пов’язані з її часовим (ретроспективним) вектором, дозволяють стверджувати наступне. Реформа шкільної математичної освіти 60-70 років XX століття внесла кардинальні зміни до навчальних планів, програм і підручників з математики загальноосвітньої школи. Більшість змін у навчальному плані залишились і дотепер, а деякі з них набули подальшого розвитку. Змістові інновації шкільного курсу геометрії часів колмогоровської та постколмогоровської реформ не витримали випробування часом і нині не є доцільними для наслідування.

Список використаної літератури

1. Тарасенкова, Н. А., Сердюк, З. О. (2015). Особливості курсу планіметрії у період реформи 60-70-х років XX століття. *Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки»*. Випуск № 36 (369). Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 95–101.

2. Кондратьева, Г. В. (2009). К вопросу о периодизации развития школьного математического образования в России. *Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Педагогика». № 3*. М.: Изд-во МГОУ. 124-131.

3. Семенович, А. Ф. (1961). *Геометрия. Пробный учебник для шестого класса*. Ульяновск.

4. Семенович, А. Ф. (1962). *Геометрия. Пробный учебник для седьмого класса*. Ульяновское книжное издательство. 94 с.

5. Семенович, А. Ф. (1963). *Геометрия. Пробный учебник для восьмого класса : пособие для учителей*. Ульяновское книжное издательство. 90 с.

6. Глушков, В. М., Черников, С. Н. Отзыв о научной и педагогической деятельности заведующего кафедрой геометрии и методики преподавания математики Черкасского педагогического института, кандидата физико-математических наук, доцента Семеновича А. Ф. : [препринт]. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції “Проблеми математичної освіти” (ПМО – 2010), м. Черкаси, 24-26 листопада 2010 р.; Н. А. Тарасенкова (відп. ред.). Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2010.

7. Колмогоров, А. Н., Семенович, А. Ф., Черкасов, Р. С. (1979). *Геометрия : учеб. пособие для 6-8 кл. средней школы*; под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение. 382 с.

8. Погорєлов, О. В. (2004). *Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. 7-ме видання*. Київ: «Школяр». 240 с.

9. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А. (2007). *Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів*. К. : Зодіак-ЕКО. 208 с.

10. Тарасенкова, Н. А., Сердюк, З. О. (2013). Основи порівняльної педагогіки у дослідженні шкільної математичної освіти різних країн. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт*. *Вип. 40.* Донецьк: Вид-во ДонНУ. 55–59.

ВПРОВАДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ У ПРОЦЕС НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Наталія Кульчицька, Юліана Черняхівська

Якісна математична підготовка є важливою складовою професійної компетентності сучасного фахівця у багатьох галузях виробництва, економіки, інформаційного середовища. Вона полягає у вмінні вибудовувати математичні моделі, а також у розробці ефективних алгоритмів для розв'язування поставлених завдань. Особливо гостро постає проблема математичної підготовки випускників у закладах загальної середньої освіти. Одним із актуальних напрямків вдосконалення математичної освіти є інформатизація освітнього процесу та посилення технологічного спрямування змісту математичної освіти. Це вимагає від учнів досконалого володіння новітніми досягненнями в галузі інформаційних технологій, необхідності побудови математичних моделей різної складності. Персональні комп'ютери в закладах середньої освіти почали широко використовуватись наприкінці минулого століття. Зрозуміло, що науковці й учителі почали детально розглядати можливості використання комп'ютерних динамічних стереометричних об'єктів на уроках математики [1; 2]. Адже труднощі сприйняття учнями великих масивів інформації при вивченні стереометрії, проблеми формування просторової уяви, неуміння правильно виконувати проективні рисунки для розв'язування геометричних задач – проблеми, які піднімав свого часу й О. Ф. Семенович [3], і які залишаються актуальними сьогодні. Автори сучасних шкільних підручників з геометрії, серед яких є й учні Олександра Федоровича [4; 5], доклали максимум зусиль, щоб навчальна інформація у тексті, особливо ілюстративна, сприяла засвоєнню школярами знань із стереометрії та умінь їх практичного застосування.

Метод моделювання в освітньому процесі сучасної школи застосовується досить широко. А от динамічні інформаційні моделі – порівняно нещодавно. Їх використання є особливо важливим та актуальним при вивченні курсу стереометрії, оскільки розв'язування будь-якої стереометричної задачі передбачає дії із побудови абстрактної моделі, визначення взаємозв'язків усередині моделі та дослідження впливу цих зв'язків на розв'язок задачі. Процес розв'язування стереометричних задач неможливо уявити без використання рисунка, зокрема йому належить важлива роль у створенні абстрактної моделі. На відміну від задач планіметрії, стереометричні задачі мають суттєву специфічну особливість – тривимірний простір. Складності при розв'язуванні цих задач виникають через спотворення тривимірного простору при побудові рисунка на площині [3]. Наприклад, у планіметрії, говорячи про прямий кут, учні креслили на площині кут 90^{o}, говорячи про прямі, які не перетинаються – малювали паралельні прямі. Натомість, у стереометрії через спотворення тривимірного простору на площинному малюнку гострий кут може відповідати як прямому, так і тупому куту, а прямі, що перетинаються на рисунку, у тривимірному просторі, насправді, можуть бути паралельними. Саме через трудності просторового сприйняття стереометрія набагато важча від планіметрії. І найбільше проблем виникає при зображенні тіл обертання, невидимих елементів многогранників та комбінацій многогранників із тілами обертання. Тут на допомогу приходить процес математичного моделювання, що складається з чотирьох етапів:

1. Побудова моделі для розв'язування даної задачі.
2. Перевірка побудованої моделі на відповідність критеріям вихідних даних та логічному ланцюгу міркувань.
3. Остаточний аналіз моделі та дослідження умов її існування.
4. Дослідження зв'язків між елементами моделі, побудова алгоритму розв'язування від умови до отримання результату.

У даній статті ми ставимо за мету розглянути процес розвитку програмних засобів для здійснення математичного моделювання в процесі вивчення різних розділів стереометрії та провести аналіз можливостей програмних функціоналів, зокрема “STEREO”, “GRAN-3D” та “GeoGebra”, з огляду на час їх створення.

Зупинимось на таких базових темах шкільного курсу стереометрії:

1. Відстані та кути, включаючи: відстань від точки до площини, відстань між двома точками, відстань від точки до прямої, відстань між мимобіжними прямими, кут між двома прямими, кут між прямою і площиною, кут між двома площинами.
2. Площі та об’єми, включаючи: площа поверхні многогранника, площа перерізу многогранника, об’єм багатогранника.
3. Методи побудови перерізу многогранника площиною.
4. Перетин тіл обертання.

З описаного вище випливає, що найбільшу значущість курсу геометрії для учнів шкіл, з урахуванням розгляду лише розділу стереометрії, відіграють задачі на побудову многогранників і тіл обертання, задачі на побудову перерізів та обчислення площі чи об’єму, задачі на обчислення відстаней і задачі на обчислення кутів.

Математичне моделювання з використанням інформаційних технологій для динамічного розв’язування задач зі стереометрії у 90-х роках минулого століття було зреалізоване в програмному продукті “STEREO” [1]. Як приклад, розглянемо вивчення поняття “конус” у даній програмі.

За означенням, конусом називається просторове тіло, яке складається з основи конуса, якою є круг; вершини – точки яка не лежить у площині основи, – та всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи. Програма давала можливість супроводжувати дане означення комп’ютерними ілюстраціями і використовувала анімацію.

На екрані дисплея з’являється: зображення круга (основи конуса); точка *S*, яка не належить площині круга (вершина конуса) та декілька відрізків, які сполучають точку *S* з точками круга (рис. 1).

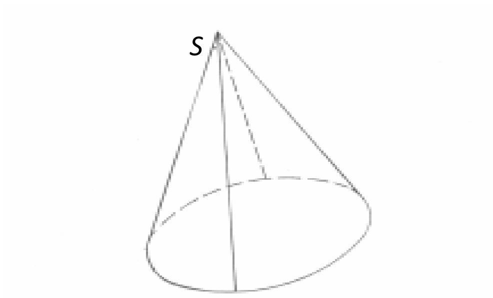


Рис. 1. Зображення конуса в програмі “STEREO”.

Програма “STEREO” дозволяла зробити вершину та основу конуса рухомими. Це досягалося плавним пересуванням точки *S* в полі екрану, у результаті чого можна було отримати зображення різних конусів із спільної основою. За допомогою програми можна також фіксувати положення вершини, при цьому переміщаючи основу конуса.

Після цього доречно ввести поняття “висота конуса”. За означенням, висотою конуса називається перпендикуляр, проведений з вершини конуса до площини основи. Програма давала можливість проілюструвати дане зображення, розглянувши випадки, коли основа висоти належить або не належить основі конуса (рис. 2).

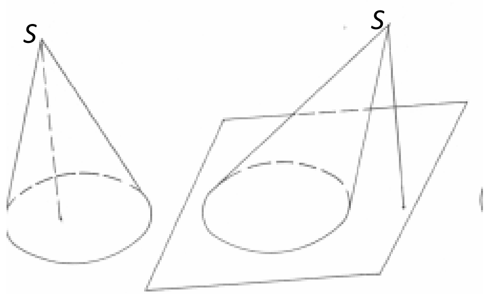


Рис. 2. Зображення висоти конуса в програмі “STEREO”.

Вибравши положення вершини S так, щоб пряма, яка сполучає вершину і центр основи, була перпендикулярною до площини основи, вводиться поняття "прямого конуса" (рис. 3).

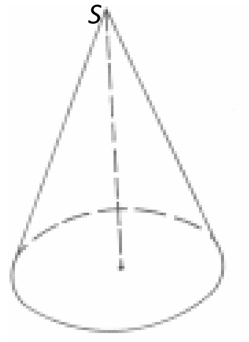


Рис. 3. Зображення прямого конуса в програмі "STEREO".

Із даного унаочнення випливає важливий висновок, що прямий конус можна отримати в результаті обертання прямокутного трикутника навколо катета як осі. На робочому полотні прямокутний трикутник, обертаючись, залишає за собою "слід". Так вводиться поняття осі прямого кругового конуса.

За допомогою програмного продукту "STEREO" можна було продемонструвати утворення розгортки конуса.

Розглянувши на прикладі створення конуса можливості програмного продукту, слід зазначити, що програма дозволяла унаочнювати стереометричні об'єкти та відображати їх основні властивості.

"STEREO" – один із перших програмних продуктів, розроблений для візуального супроводу навчання стереометрії, який не потребував від учнів додаткового навчання. Він розроблявся для ПК "YAMAHA", які отримали школи. Зрозуміло, що за кілька десятиліть і техніка, і програмне забезпечення стали досконалішими й пропонують продукти іншого рівня якості.

Далі розглянемо можливості програми GRAN-3D, яка завдяки зусиллям авторів постійно оновлюється й досі використовується вчителями в освітньому процесі. Зупинимось на прикладі побудови перерізу трикутної призми $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площиною, що проходить через вершини A_1, B_1 і середину ребра D_1F_1 (рис. 4).

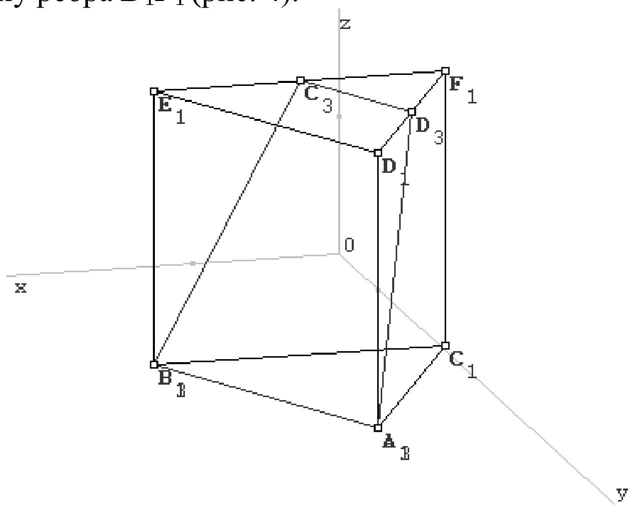


Рис. 4. Зображення трикутної призми в програмі GRAN-3D.

Побудуємо переріз чотирикутної піраміди $A_1B_1C_1D_1E_1$ площиною, яка проходить через середини ребер B_1C_1, C_1D_1, A_1B_1 (рис. 5).

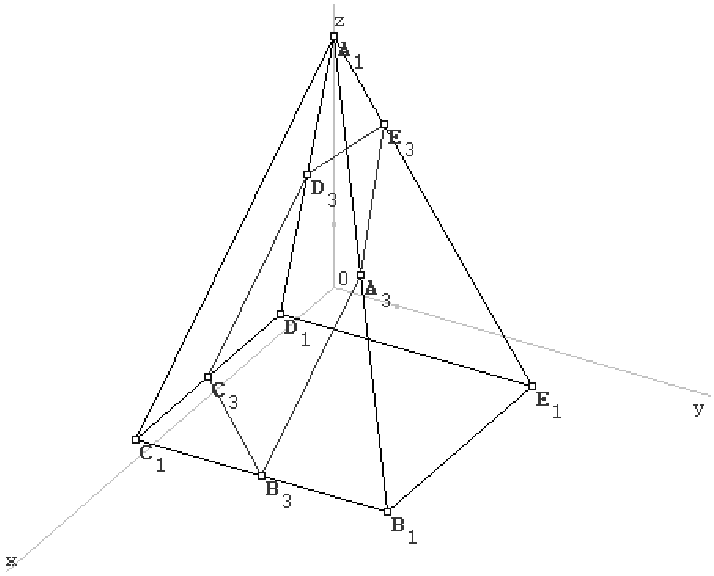


Рис. 5. Зображення піраміди в програмі GRAN-3D.

З'ясуємо, які многокутники можна отримати, перетинаючи куб площиною (рис. 6).

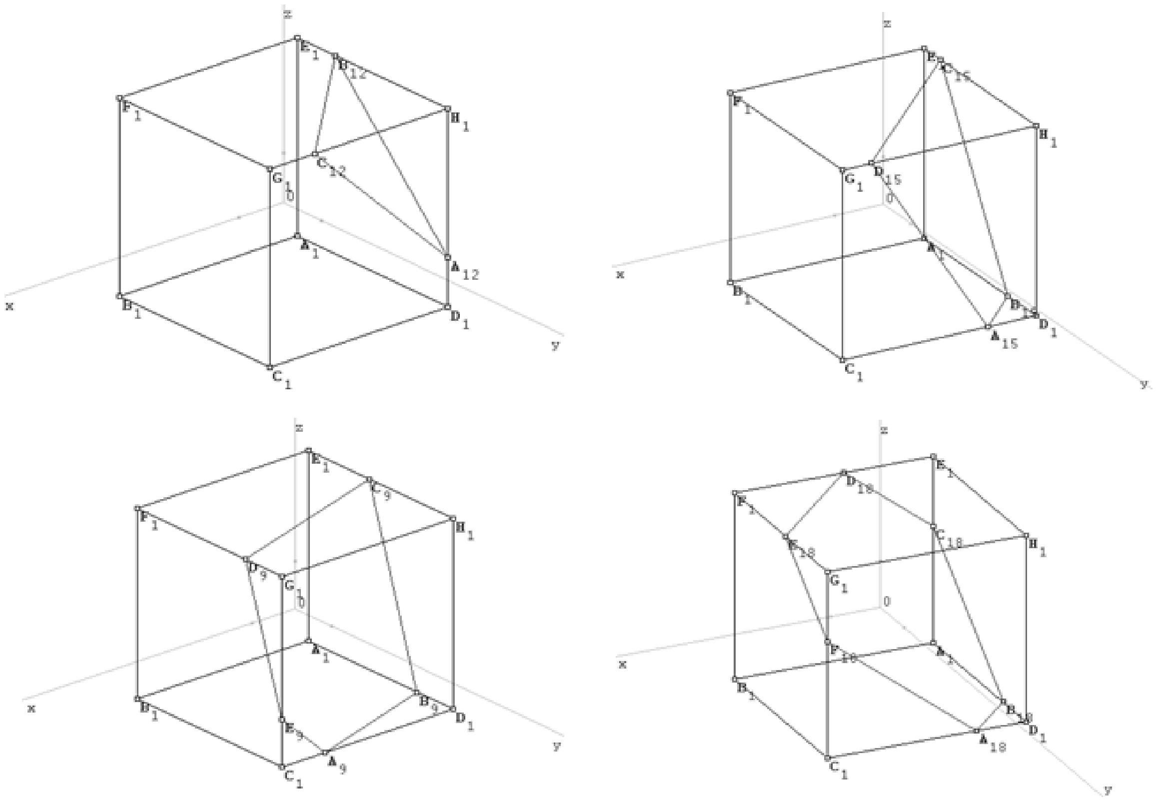


Рис. 6. Зображення перерізів куба в програмі GRAN-3D.

Як бачимо, програма для графічного аналізу просторових об'єктів GRAN-3D дає можливість оперувати у просторі точками, відрізками, ламаними, площинами, многогранниками, поверхнями обертання та довільними поверхнями. За допомогою даної програми можна також виконувати паралельне перенесення, поворот та деформацію об'єктів, а також здійснювати переріз опуклих многогранників площинами. Програму доцільно використовувати для розв'язування різноманітних математичних задач дослідницького характеру, а також як інструмент для унаочнення теоретичного матеріалу [2].

Великим інтересом сьогодні у вчителів-предметників загальноосвітніх шкіл користується середовище GeoGebra. Це пов'язано з кількома причинами:

- GeoGebra є безкоштовною, вільно поширюваною, кроссплатформною системою;
- GeoGebra розробляється співтовариством з усього світу;
- у багатьох країнах є локальні інститути GeoGebra, які займаються навчанням вчителів, розробкою методичних рекомендацій для шкільних курсів.

GeoGebra – це некомерційна організація з діючим центральним інститутом GeoGebra, яка займається розвитком світової математичної співпраці. Ставить перед собою за мету вдосконалення глобальної математичної освіти та розробку якісних математичних додатків. GeoGebra розробляє програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом для учнів та вчителів у всьому світі [6].

Використання динамічних 3D-креслень у середовищі GeoGebra при вивченні курсу стереометрії дозволяє вчителю розв'язати ряд проблем, як от [7]:

- нерозуміння учнями видимих і невидимих граней, ребер, відрізків тощо;
- поняття належності точок, прямих і площин та їх перетину, паралельності прямих і площин у просторі, які не є надто очевидними при побудові зображення на площині;
- неочевидність взаємного розташування прямих і площин, при побудові зображення на площині.

Розглянемо методику побудови кількох можливих перетинів тетраедра і паралелепіпеда з використанням 3D-креслень у середовищі GeoGebra [8].

Побудова перерізів тетраедра. Перерізами тетраедра можуть бути тільки трикутники та чотирикутники.

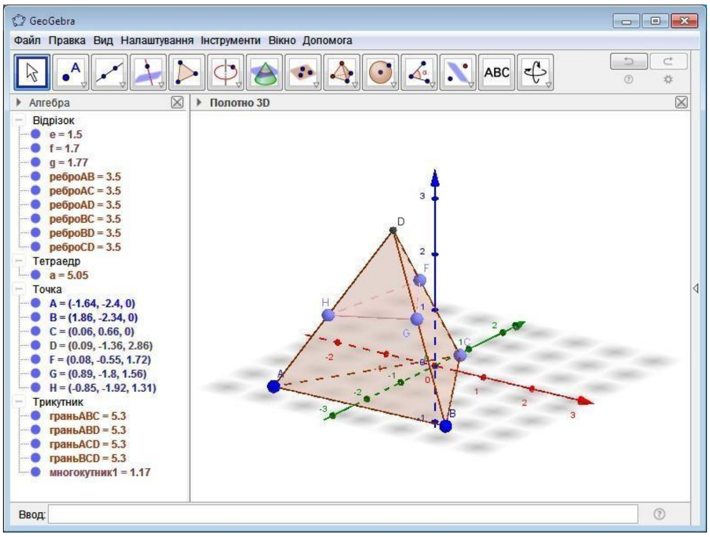


Рис. 7. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Завдання 1. «Переріз тетраедра – трикутник».

Дано тетраедр *DABC*. Побудувати в ньому переріз так, щоб він проходив через ребра, що виходять з однієї вершини [9].

Розв'язання: Можливі декілька способів побудови перерізу за допомогою функціоналу середовища GeoGebra.

1) Позначимо на ребрах *DA*, *DB*, *DC* довільні точки *H*, *G* і *F* (рис. 7). За допомогою інструменту «Точка», при наведенні курсору миші на відрізки (грані тетраедра) з'являється відображення символу «Точки». Це допомагає закріпити точку безпосередньо на відрізку. Потрібно сполучити дані точки за допомогою інструменту «Відрізок». Таким чином отримаємо трикутник *GHF* – шуканий переріз тетраедра *DABC*.

2) Закріпимо на ребрі *DB* точку *G* за допомогою інструменту «Точка». Через цю точку проведемо пряму *GH* яка перетинає ребро *DA* в точці *H*, для цього скористаємося інструментом «Пряма. Аналогічно побудуємо прямі *HF* і *FG*. Трикутник *GHF* – шуканий переріз тетраедра *DABC*.

3) Тепер скористаємося інструментом «Багатокутник» та побудуємо трикутник *GHF*, по черзі клікаючи вказівником миші на ребра *DA*, *DB*, *DC* (рис. 8).

Отже, трикутник *GHF* – шуканий переріз тетраедра *DABC*.

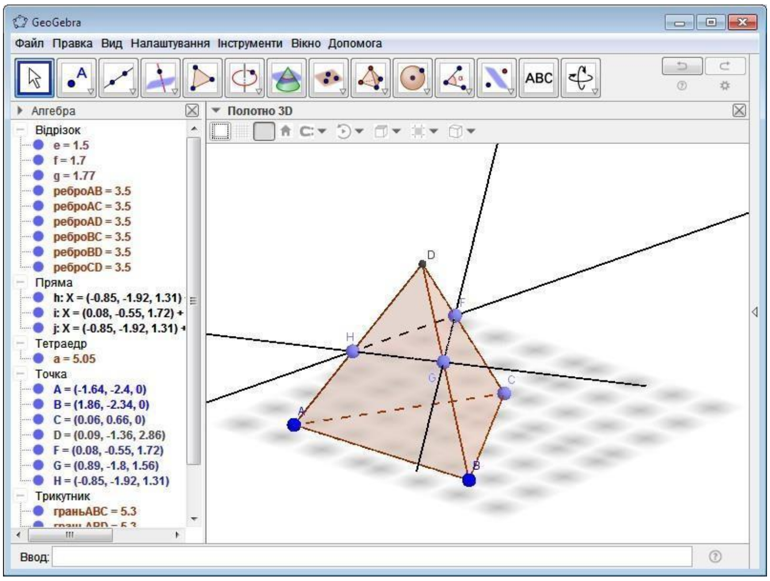


Рис. 8. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Для зручності і наочності виконання в середовищі GeoGebra є можливість повертати креслення видимою межею. Це дає змогу наочно простежити за всією послідовністю побудови. Динамічна 3D-модель стереометричного об’єкта дозволяє провести дослідження побудови. Тобто за допомогою інструмента «Переміщення» можна по черзі змінювати положення точок *H*, *G* і *F*, переміщаючи їх вздовж відрізків *DA*, *DB*, *DC* й простежуючи в такий спосіб зміни виду перерізу. Після проведення таких, наочних експериментів учні можуть зробити відповідні висновки про те, що незалежно від положення цих точок на ребрах, що виходять з однієї вершини, переріз буде залишатися трикутної форми.

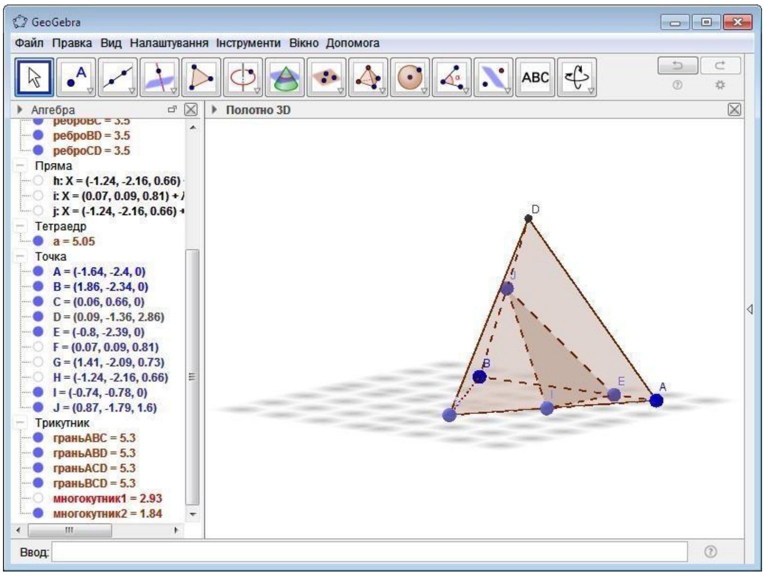


Рис. 9. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Для точності виконання побудови можна виконати побудову перерізу, що проходить через інші три грані, наприклад, *BA*, *BC* і *BD* (рис. 9). Цей експеримент допоможе учням переконатися в тому, що шуканий переріз *ELJ* так само є трикутником [10].

Завдання 2. «Переріз тетраедра – чотирикутник».

На ребрах *AB*, *BD* і *CD* тетраедра *ABCD* позначені точки *F*, *E* та *H* (рис. 10). Побудувати переріз тетраедра площиною *EFH* [9].

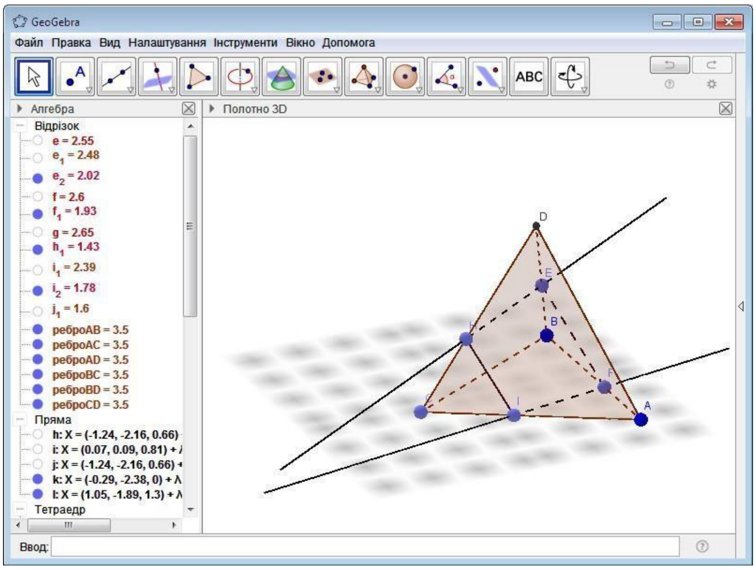


Рис. 10. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Розв'язання. Побудуємо пряму, по якій площина *EFH* перетинається з площиною грані *ABC*. Точка *F* є спільною точкою цих площин. Знайдемо ще одну спільну точку, для цього використаємо інструмент «Пряма» та продовжимо відрізки *EH* і *BC* до їхнього перетину в точці *G*. Відкладемо утворену точку перетину інструментом «Перетин». Точка *G* буде другою спільною точкою площин *EFH* і *ABC*. Отже, ці площини перетинаються по прямій *FG*. Аналогічно будуємо пряму *FG* і точку її перетину з ребром *AC* – точку *I* за допомогою інструментів «Пряма» і «Перетин». Тоді чотирикутник *FIH* шуканий переріз. При побудові перерізу *EFIH* також буде корисно і зручно обертати отриману 3D модель (рис. 11), щоб проаналізувати всі можливі варіанти, переміщаючи точки *E*, *H* і *F* по ребрах *AB*, *DB* і *DC* відповідно.

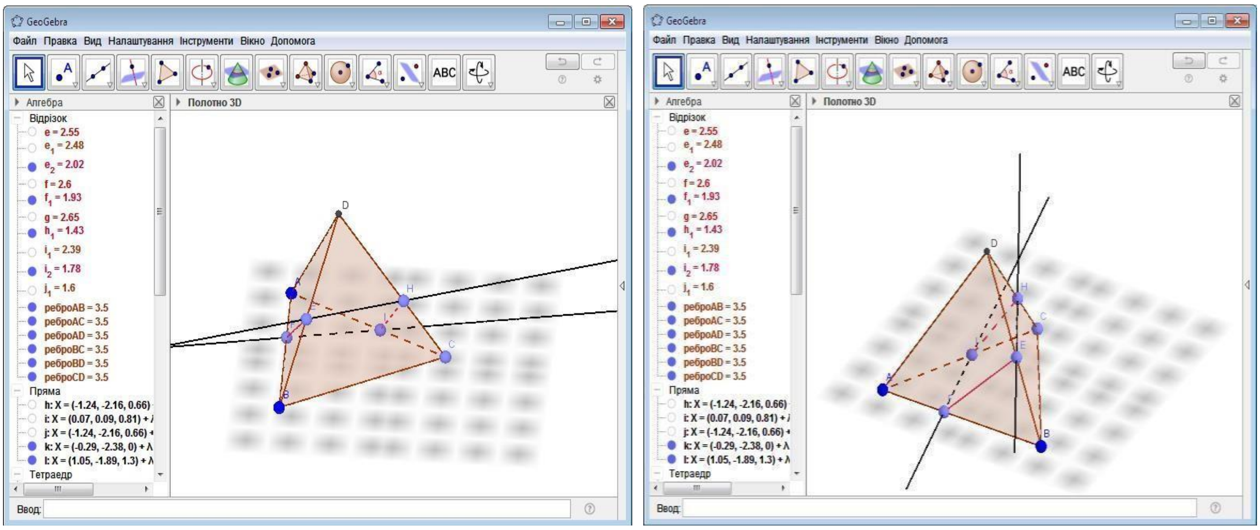


Рис. 11. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Розглянемо другий випадок.

Якщо прямі *EH* і *BC* паралельні, то пряма *EH* паралельна межі *ABC*, тому площина *EFH* перетинає цю площину грані по прямій *FI*, яка є паралельна прямій *EH*. Для побудови паралельної прямої *FI* скористаємося інструментами «Паралельна пряма» (рис. 12) [6].

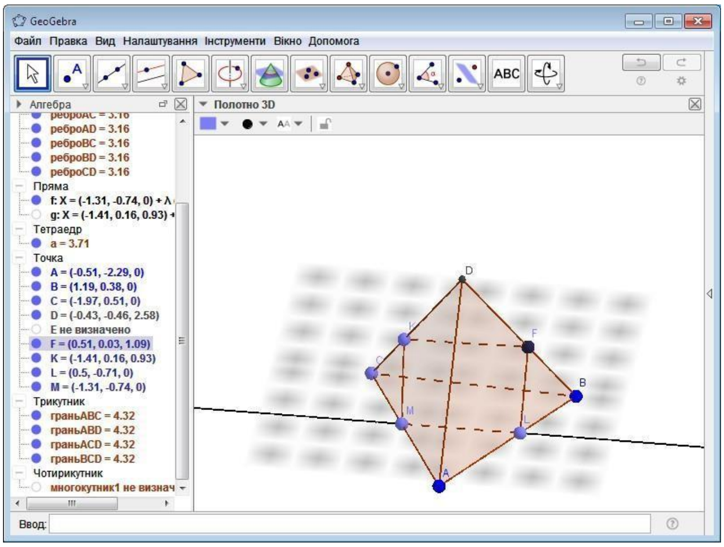


Рис. 12. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Завдання 3. На ребрах паралелепіпеда дано три точки *A*, *B* і *C*. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною *ABC*, де *A*, *B* і *C* – довільні точки на ребрах паралелепіпеда [9].

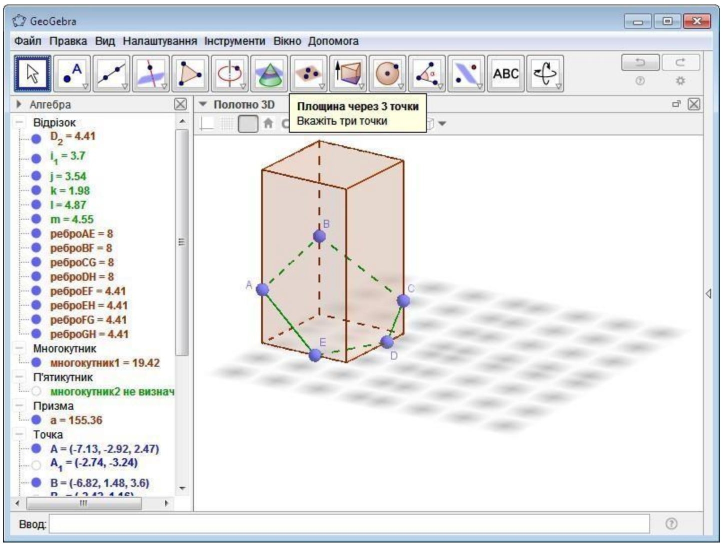


Рис. 13. Зображення перерізу паралелепіпеда в програмі GeoGebra.

Розв'язання. Розглянемо окремі випадки розташування точок *A*, *B* і *C* на ребрах паралелепіпеда.

Найпростіший випадок, коли точки *A*, *B* і *C* лежать на ребрах, що виходять з однієї вершини, тоді шуканий перетин – трикутник *ABC*.

Нехай точки *A*, *B* і *C* розташовані так, як показано на малюнку (рис. 13).

Проведемо спочатку відрізки *AB* і *BC* за допомогою відповідного інструмента «Відрізок». Далі через точку *A* проведемо пряму, що паралельна *BC*. Аналогічно через точку *C* проведемо пряму, яка паралельна *AB*. У цих випадках застосуємо інструмент «Паралельна пряма». Видно, що точками перетину даних прямих з ребрами нижньої основи будуть точки

E і *D*. Їх можна закріпити на аплеті за допомогою інструмента «Точка перетину». Залишається провести відрізок *ED*. П'ятикутник *ABCDE* – шуканий переріз.

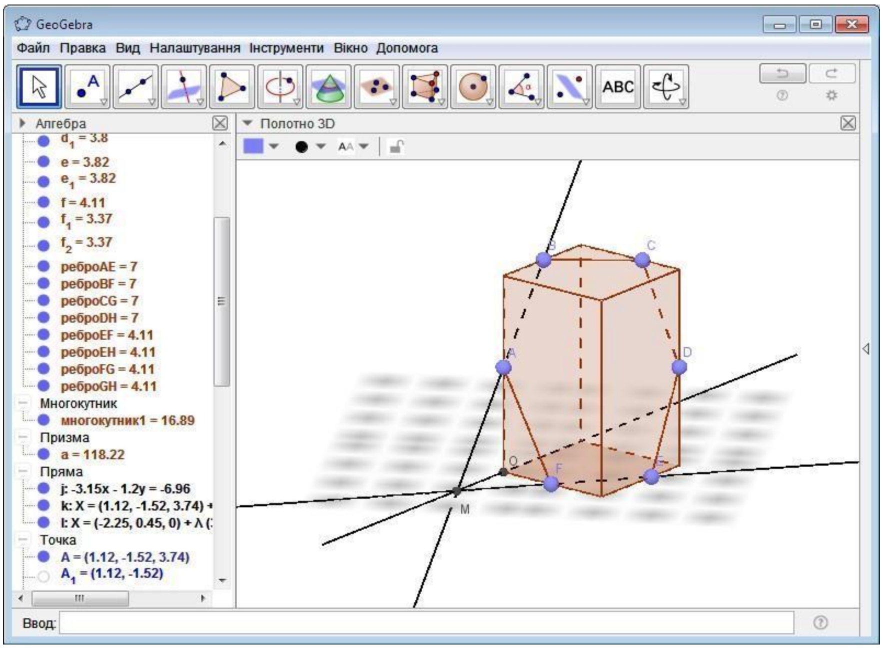


Рис. 14. Зображення перерізу паралелепіпеда в програмі GeoGebra.

Складніший випадок побудови виникає, коли задані точки *A*, *B* і *C* розташовані так, як показано на малюнку (рис. 14). Першим кроком побудуємо пряму по якій перетинається січна площина та площина нижньої основи. Для цього використовуємо основні інструменти, описані в попередній побудові. Побудуємо інструментом «Пряма» пряму *AB*. Далі, продовживши нижнє ребро, яке лежить в тій же площині, що і пряма AB, до перетину з цієї прямої, отримаємо точку *M*. Потім через цю точку *M* проведемо пряму, паралельну прямій *BC*. Отримаємо пряму, по якій січна площина перетинає площину нижньої основи. Побудована пряма перетинається з ребрами нижньої основи в точках *E* і *F*. Далі через точку *E* проведемо пряму, паралельну прямій *AB*, і отримаємо точку *D*. Нарешті, проводимо відрізки *AF* і *CD*. Для того щоб виконати заливку побудованого шуканого перерізу – шестикутника *ABCDEF* необхідно скористатися інструментом «Багатокутник» і побудувати шестикутник *ABCDEF*, по черзі виділивши кожну з шести вершин.

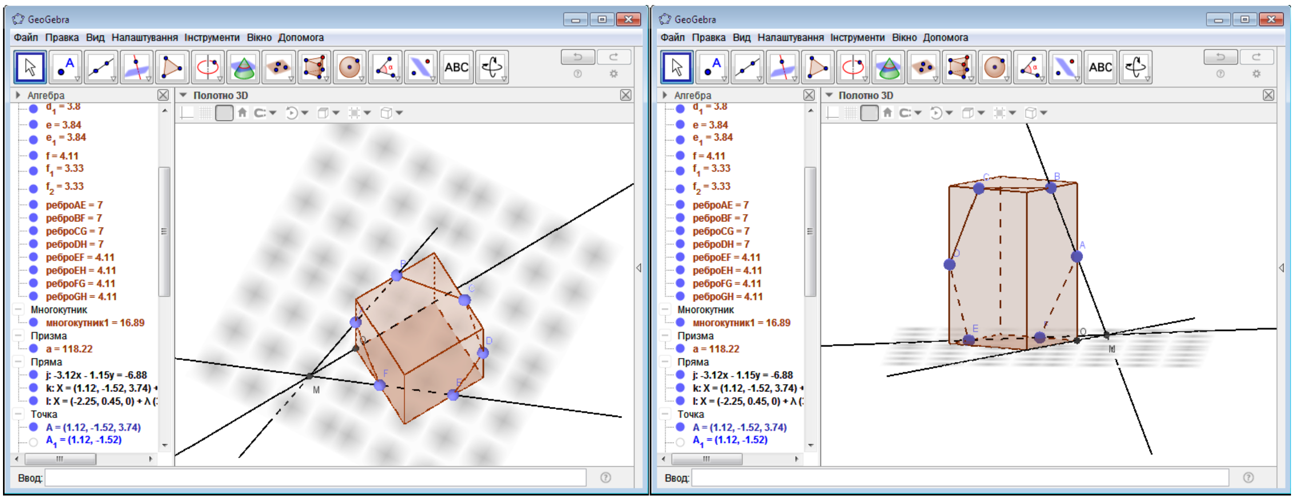


Рис. 15. Зображення перерізу паралелепіпеда в програмі GeoGebra.

Коли перерізом многогранника є многокутник, що має більше за 3 вершини, завжди цікаво перевірити правильність побудови, повернувши динамічні креслення таким чином, щоб побудовані перерізи проектувалися в одну лінію (рис. 15).

Як правило, у задачах на побудову перерізів, на шуканий переріз накладаються певні умови, які він повинен задовольняти. І для розв'язання деяких завдань не завжди достатньо застосування розглянутих вище методів побудови перерізів.

Слід виділити види побудови перерізів многогранників, застосування яких можливо і є доволі простим завдяки широкому функціоналу динамічного середовища GeoGebra [11]:

- побудова перерізу площиною, що проходить через задану точку паралельно заданій площині;
- побудова перерізу многогранника, що проходить через задану точку паралельно двом заданим прямим, що перетинаються;
- побудова перерізу площиною, що проходить через задану пряму паралельно іншій заданій прямій;
- побудова перерізу многогранника, що проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини;
- побудова перерізу, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої.

Розглянемо застосування цих методів на конкретних прикладах розв'язування задач на побудову.

Завдання 4. Зобразіть тетраедр *DABC* і побудуйте переріз цього тетраедра площиною, що проходить через точку *M* паралельно площині грані *ABC*, якщо: а) точка *M* є серединою ребра *AD*; б) точка *M* лежить всередині межі *ABD* [9].

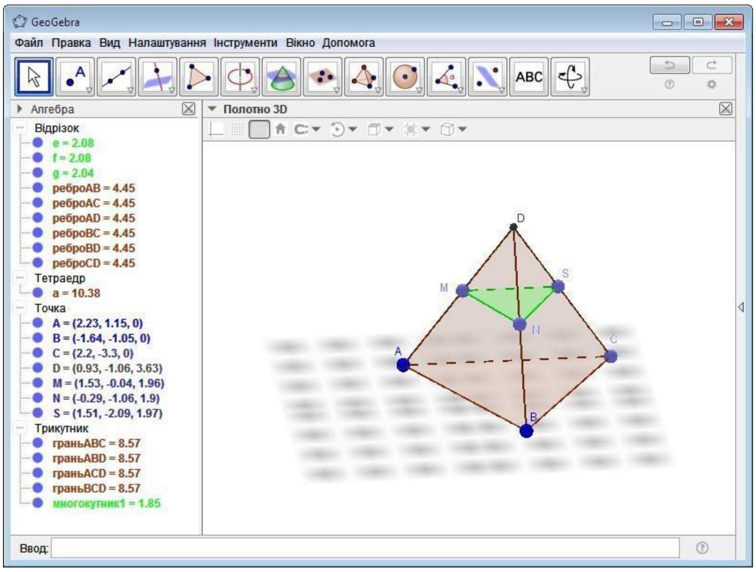


Рис. 16. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Розв'язання:

а) точка *M* є серединою ребра *AD*. Побудову 3D-креслення (рис. 16) можна виконувати кількома способами:

1) по точках, позначивши *N* і *S* як середини ребер *DB* і *DC* (інструмент «Середина або центр») відповідно, *MN*, *NS* і *MS* середні лінії трикутників будуть паралельні відповідним ребрах підстави, отже, *MNS* – шуканий переріз.

2) побудувати прямі, що проходять через точку *M*, паралельно прямим *AB* і *AC* (інструмент «Паралельна пряма»), позначити точки *N* і *S* перетину побудованих прямих з ребрами *DB* і *DC* («Точка перетину»), з'єднати точки *N* і *S*, *MNS* – шуканий переріз.

3) побудова перерізу площиною, що проходить через задану точку *M* паралельно заданій площині *ABC* (інструмент «Паралельна площина»). Знайдемо точки перетину побудованої площини й ребер *DB* і *DC* («Перетин»). *MNS* – шуканий переріз.

б) точка *M* лежить всередині межі *ABD* (рис. 17). Для даного випадку виконувати побудови так само можна кількома способами. Якщо час уроку дозволяє, то можна виконати почергові побудови прямих, паралельних ребрам основи, починаючи з прямої, що проходить через точку *M*. Потім для перевірки правильності креслення скористатися інструментом «Паралельна площина» і побудувати площину, паралельну *ABC*, що проходить через задану точку *M*.

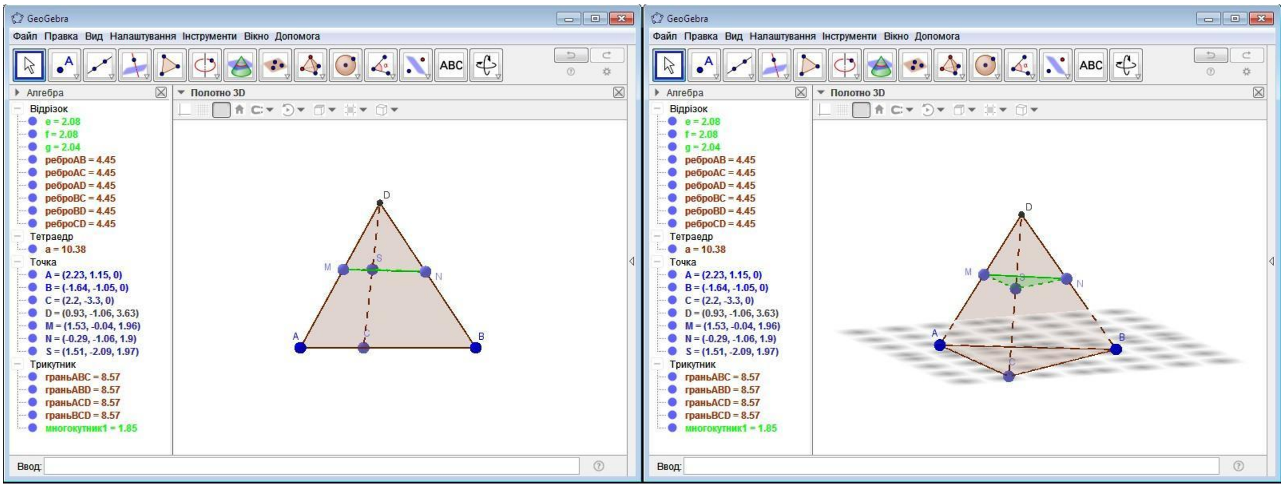


Рис. 17. Зображення перерізу піраміди в програмі GeoGebra.

Визначення перетину многогранників. Побудова перерізів призми, паралелепіпеда, піраміди методом слідів. Як правило, у шкільному курсі стереометрії використовуються задачі на побудову перерізів многогранників, які розв’язуються основними методами. Інші методи у зв’язку з їх більш високим рівнем складності вчитель може залишити для розгляду на факультативних заняттях або на самостійне вивчення. У задачах на побудову основними методами потрібно побудувати площину перерізу, що проходить через три точки.

На підставі проведеного аналізу функціональних можливостей та досвіду використання програми GeoGebra в Україні та інших країнах можна зробити висновок, що дана система динамічної математики є сучасним й інноваційним засобом для вивчення і викладання математики, використання якого сприяє підвищенню якості освітнього процесу. Організація навчання за допомогою інтерактивних комп’ютерних моделей є перспективним напрямком у модернізації процесів вивчення і викладання математики.

Програма GeoGebra має розширений інструментарій для створення різноманітних геометричних побудов. Можливість додавання на робочу область полотен планіметричних та стереометричних фігур дозволяє розглянути креслення у всіх проекціях. За допомогою GeoGebra можна створювати високоякісні графічні зображення математичних об’єктів. Створені динамічні моделі можна використовувати як наочні приклади, вбудовувати їх у мультимедійні презентації та в онлайн-посібники. Подальші дослідження застосування програми GeoGebra для реалізації різних форм навчання дозволять створити широку мережу методичних дидактичних розробок для ефективного засвоєння знань учнями під час вивчення різних тем шкільного курсу стереометрії. Учитель, використовуючи сервіси GeoGebra, має можливість долучати до навчальної діяльності не тільки власні розробки [12], але й доробок своїх колег.

Динамічна наочність дає змогу складати й розв’язувати геометричні задачі за готовими малюнками, варіювати їх умови й вимоги, організовувати змістову роботу над розв’язаною задачею.

Список використаних джерел

1. Кульчицька, Н. В. (1994). *Вивчення стереометрії в старшій школі в умовах використання нової інформаційної технології* : автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02. Український державний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова. Київ.
2. Жалдак, М. І., Горошко, Ю. В., Вінниченко, Є. Ф. (2004). *Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів*. К. : РННЦ ДІНІТ.
3. Семенович, О. Ф., Ломаєва, Т. В. (1998). *Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії : в 3 ч. : Посібник для студ. фіз.-мат. фак. пед. ін-тів*. Черкаси.
4. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Коломієць, О. М., Лов'янова, І. В., Сердюк, З. О. (2018). *Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 класу закл. загальної середньої освіти*. Київ : УОВЦ "Оріон".
5. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Богатирьова, І. М., Коломієць, О. М., Сердюк, З. О. (2013). *Геометрія : [підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів; академічний та профільний рівні]*. Київ : Видавничий дім "Освіта".
6. Лутфуллін, М. В., Золотухіна, А. О., Богданець, Н. М. (2015). Про використання GeoGebra під час вивчення стереометрії. *FOSS Lviv 2015*, 23-26 квітня 2015 року. Львів. 130-133.
7. *Порівняльний аналіз платформ підтримки дистанційного навчання* [Електронний ресурс]. Режим доступу : http://uiite.kpi.ua/ua/about-uiite/public/singlerecord.html?tx_wfqbe_pi1[id]=6.
8. *GeoGebra. Матеріали.* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.geogebra.org/.
9. Істер, О. С., Єргіна, О. В. (2019). *Геометрія: підруч. [для 11 кл. закладів загальної середньої освіти]*. Київ: Генеза.
   Режим доступу : file:///C:/Users/Yuliana/Downloads/Geometrija-11-klas-Ister- 2019.pdf
10. Биков, В. Ю. (2010). Сучасні завдання інформатизації освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання. № 1*(15).
11. Семенихіна, О. В., Друшляк, М. Г. (2014). Інструментарій програми Geogebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. *Інформаційні технології і засоби навчання. Т. 44*, вип. 6. 124-133.
12. *Доступ до персонального кабінету вчителя*. *Черняхівська Ю.* : Джерело доступу: https://www.geogebra.org/m/d6hkewah

МОДЕЛЬ ІНТЕРАКТИВНОГО НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПОЧАТКІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Віталій Забранський, Станіслав Федосєєв

Розбудова Нової української школи вимагає оновлення освітніх технологій, створення інноваційного освітнього середовища. Ці процеси нормативно задекларовані й забезпечені законом України «Про освіту», концепцією «Нова українська школа», положеннями «Про Національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року», «Про порядок здійснення інноваційної освітньої діяльності».

Опанування старшокласниками математичних понять, фактів і способів діяльності з початків математичного аналізу (ПМА) є важливим і складним водночас. Спричинено це низкою об'єктивних і суб'єктивних чинників. До об'єктивних чинників відносимо те, що відомості з ПМА поряд зі своїм вагомим світоглядним і прикладним значенням вирізняються й досить високим ступенем абстрактності, що об'єктивно ускладнює їхнє сприймання й засвоєння школярами. Водночас існують і суб'єктивні фактори, пов'язані з особливостями навчання ПМА у практиці роботи вчителів: від надмірного, необґрунтованого й недоцільного захоплення інноваціями, геймифікацією навчання всупереч об'єктивним закономірностям перебігу навчально-пізнавальної діяльності учнів до повної відмови від будь-яких нововведень і побудови навчання ПМА в старшій школі за усталеними й, можливо, дещо застарілими шаблонами. Зауважимо, що 55,9% учасників ЗНО 2019 року не змогли успішно виконати завдання (з вибором однієї правильної відповіді) з початків математичного аналізу. Відтак констатуємо необхідність подолання недоліків у навчанні старшокласників початків математичного аналізу та вважаємо, що одним із шляхів розв'язання цієї проблеми є модернізація освітнього процесу з математики в старшій профільній школі шляхом упровадження дидактично виважених, науково верифікованих інновацій. Актуальною, в контексті розв'язання зазначеної проблеми, вбачаємо побудову навчання старшокласників ПМА на засадах інтерактивності. Проблематиці інтерактивного навчання математики присвячені дослідження Л. Ампілогової, Т. Аргірової, Н. Лосєвої, І. Маркової, Н. Непомнящої, А. Панової, В. Прокопенко, Г. Скинець, Ш. Фрей, Н. Харіної та інших. Але поза увагою досліджень залишилася проблема інтерактивного навчання початків математичного аналізу у старшій профільній школі.

Мета – описати модель інтерактивного навчання старшокласників початків математичного аналізу.

У рамках нашого дослідження інтерактивне навчання – це «процес навчання, який побудований на взаємодії учня з навчальним оточенням, навчальним середовищем, ґрунтується на психології людських взаємин і взаємодій, сутність якого полягає в організації спільного процесу пізнання, коли знання здобуваються в спільній діяльності через діалог, полілог учнів між собою» [1, с. 4]. Інтерактивне навчання математики сприяє формуванню ключових компетентностей, зокрема уміння вчитися впродовж життя. В цьому аспекті О. Комар зазначає, що навчання варто організовувати таким чином, щоб джерелом знань виступав не тільки вчитель, а й книга, інші люди, комп'ютер, телевізор, відео тощо. Учителю варто бути не тільки обізнаним користувачем сучасних ІКТ, використання яких сприятиме встановленню діалогу у системі «мультимедіа–учень», а й уміти організувати процес навчання таким чином, щоб його учні навчались осмислювати кожну задачу, теорему, її доведення, самостійно їх відтворювати, застосовувати математичний апарат в конкретних умовах як професійного, так і буденно-повсякденного життя, а, отже, думати, розуміти суть речей, вміти висловити свою власну думку [2, с. 112]. Інтерактивне навчання математики реалізує, зокрема ідеї розвивального навчання, коли учні не тільки засвоюють готові знання (пояснювально-ілюстративний метод), але, насамперед, навчаються способам самостійного пізнання, у них створюється творче відношення до діяльності, розвивається мислення, уява, увага, пам'ять, воля. З. Слєпкань [3] дослідила психолого-педагогічні та методичні засади розвивального навчання математики, та визначила місце та роль загальних та специфічних розумових дій і прийомів розумової діяльності у процесі навчання математики, зокрема, у трьох провідних видах навчальної діяльності учнів: формування математичних понять, доведення тверджень і розв’язування задач. Важливими в організації інтерактивного навчання математики є ідеї символічного інтеракціонізму. Символічний інтеракціонізм, за дослідженнями Г. Блумера [4], ґрунтується на інтерпретаціях людської поведінки, на переконанні, що природа людини й упорядкованість суспільного життя є продуктом соціальної комунікації, повсякденної взаємодії людей. Ключовим поняттям символічного інтеркціонізму є поняття «інтеракції». Символічними посередниками інтеракції здебільшого є слова, але виконувати цю функцію можуть будь-які предмети або дії (наприклад, вираз обличчя, жест тощо). Під час інтерактивного навчання зі старшокласниками вчителям математики варто враховувати той факт, що мотивами спілкування у парі і в групі є пошук найсприятливіших психологічних умов для комунікативної взаємодії, очікування співчуття і співпереживання, потреба у щирості та єдності у поглядах, самовираженні, тому під час об’єднання старшокласників у пари, групи, вчителю варто враховувати особливості їх соціонічного типу, що є передумовою психологічної комфортності старшокласників. Соціонічний тип – це тип структури мислення людини, який визначається взаємним розташуванням психічних функцій, що обробляють інформацію різних аспектів. У соціоніці, зокрема, В. Гуленко[5] описано чотири «клуби за інтересами», у кожному з яких по чотири соціонічних типи (таблиця1) та способи об’єднання у соціонічні квадри.

Таблиця 1

СОЦІ-АЛИ	▙ ○ Етико-сенсорний екстраверт (ЕСЕ) ○ ▙ Сенсорно-етичний інтроверт (СЕІ) ∟ ● Етико-сенсорний інтроверт (ЕСІ) ● ∟ Сенсорно-етичний екстраверт (СЕЕ)	● □ Сенсорно-логічний екстраверт (СЛЕ) □ ● Логіко-сенсорний інтроверт (ЛСІ) ○ ■ Сенсорно-логічний інтроверт (СЛІ) ■ ○ Логіко-сенсорний екстраверт (ЛСЕ)	**УПРАВ-ЛІНЦІ**
ГУМАНІ-ТАРІЇ	▙ △ Етико-інтуїтивний екстраверт (ЕІЕ) △ ▙ Інтуїтивно-етичний інтроверт (ІЕІ) ∟ ▲ Етико-інтуїтивний інтроверт (ЕІІ) ▲ ∟ Інтуїтивно-етичний екстраверт (ІЕЕ)	▲ □ Інтуїтивно-логічний екстраверт (ІЛЕ) □ ▲ Логіко-інтуїтивний інтроверт (ЛІІ) △ ■ Інтуїтивно-логічний інтроверт (ІЛІ) ■ △ Логіко-інтуїтивний екстраверт (ЛІЕ)	**САЙЕН-ТИСТИ**

У представників клубу «сайентисти» у вроджені задатки для успішного вивчення математики та теоретичних аспектів наукових дисциплін. Представники клубу «управлінці» також мають задатки, які сприяють опануванню математики, але їх особливістю є те, що математика їм цікава з точки зору практичного застосування у житті. Основні області діяльності представників клубу «соціали»: спілкування, налагодження контактів. Представники даного клубу не мають тих вроджених задатків до вивчення математики, які мають представники попередніх двох клубів. Вони можуть досягти непоганих результатів у вивченні математики шляхом постійної і копіткої роботи над засвоєнням певного матеріалу. Через вроджені соціальні якості, представники даного клубу вміють, як правило, гарно пояснити навчальний матеріл іншим, створюючи позитивний мікроклімат у групі. Представники даного клубу можуть бути хорошими помічниками вчителя математики та консультантами груп. Основні області діяльності представників клубу «гуманітарії»: культура і мистецтво, акторська діяльність, психологія, реклама і суспільні стосунки. Гуманітарії в першу чергу знаються на психології людей і їх духовних потребах. Представники даного клубу зрідка досягають вагомих результатів у вивченні математики. Відповідно математика даним старшокласникам може бути цікава як елемент їх загальної культури. Враховуючи особливості старшокласників, які належать до даного клубу, вчителю доцільно давати їм завдання переважно «гуманітарного» спрямування, наприклад, підготувати презентацію з повідомленням про вчених-математиків, про роль того чи іншого математичного об’єкту для прогресу людства тощо. Ефективну працездатність на уроці математики можна забезпечити об’єднанавши їх у соціонічні квадри: 1-а – альфа (ІЛЕ, СЕІ, ЕСЕ, ЛІІ); 2-а – бета (ЕІЕ, ЛСІ, СЛЕ, ІЕІ); 3-я – гамма (СЕЕ, ІЛІ, ЛІЕ, ЕСІ); 4-а – дельта (ЛСЕ, ЕІІ, ІЕЕ, СЛІ). Чотири соціонічні типи, що утворюють квадру, характеризуються не тільки спільними установками, життєвими цінностями, світоглядом, а й міжособистісним взаєморозумінням та високою працездатністю. Якщо вчителеві потрібно обрати учня-організатора під час групового навчання, то варто обрати того учня, який за своєю соціонічною суттю є природженим лідером. Так, у другій і третій квадрах, є соціонічні типи, програмною функцією яких є вольова сенсоріка – це відповідно сенсорно-логічний екстраверт та сенсорно-етичний екстраверт. Ці соціонічні типи є організаторами і лідерами за своєю соціонічною суттю, оскільки основними програмними цінностями цих типів є сила, влада, цілеспрямованість, наполегливість. У першій і четвертій квадрах у ролі учня-організатора можуть бути обрані носії вольової сенсоріки у фоновій функції – це відповідно етико-сенсорний екстраверт та логіко-сенсорний екстраверт. Соціонічний тип учня доцільно визначити до початку інтерактивного навчання, залучивши шкільного психолога.

Важливим етапом педагогічного проєктування, пов’язаного з реалізацією інтерактивного навчання ПМА, є побудова моделі інтерактивного навчання старшокласників початків математичного аналізу, методологічною основою якої є концепції: НУШ, особистісно орієнтованого навчання, розвивального навчання, символічного інтеракціонізму, інформатизації освіти та педагогічні підходи: діяльнісний, системний, синергетичний, компетентнісний, комплексний, диференційований, соціонічний. Модель інтерактивного навчання старшокласників ПМА (рис. 1) – це схематичне відображення навчального процесу. Модель визначає цілі та основи організації навчального процесу. Основними її складовими є цільовий, концептуальний (методологічний), теоретичний, змістовий, організаційно-діяльнісний, діагностувально-оцінювальний компоненти (блоки).

Особливе науково-теоретичне і практичне значення для реалізації інтерактивного навчання старшокласників початків математичного аналізу має визначення організаційно-дидактичних умов навчання. На основі власного досвіду та аналізу робіт О. Пометун [6], С. Сисоєвої [1], О. Комар [2] та інших дослідників нами визначено такі дидактичні умови:

1. Створення діалогічного простору під час навчання.
2. Забезпечення комфортності навчання.
3. Впровадження активно-рольової (ігрової) і тренінгової організації навчання.
4. Формування рефлексивності навчання.
5. Забезпечення готовності вчителя до організації інтерактивного навчання [7].

У дослідженнях зарубіжних науковців, зокрема, А. Олдноу, Р. Тейлор, Л. Тетлоу [8] термін «інтерактивне навчання» найчастіше використовується у зв’язку з інформаційними технологіями, дистанційним навчанням, використанням ресурсів Інтернету, а також електронних підручників і довідників, роботою в режимі онлайн. Використання сучасних комп’ютерних телекомунікацій допомагає учасникам навчального процесу вступати в діалог (письмовий або усний) з реальним партнером, а також роблять можливим активний обмін повідомленнями між користувачем і інформаційною системою в режимі реального часу. Тобто, інтерактивному навчанню надаються комп’ютерно орієнтовані характеристики. Але, очевидно, що інтерактивне навчання старшокласників ПМА є більш ефективним, якщо реалізуються два підходи: комунікативно-діалоговий (з використанням засобів навчання, які сприяють ефективній міжособистісній комунікації; інтеракція відбувається у режимі «людина – людина», тобто у системах відносин «учень – учень», «вчитель – учень», «учень – група учнів», «вчитель – група учнів», «група учнів – група учнів») і комп’ютерно-мультимедійний (з використанням оргтехніки, комп’ютерно-орієнтованих засобів навчання; інтеракція відбувається переважно у режимі «людина – техніка – програмне забезпечення»). Впровадження інтерактивного навчання ПМА потребує доцільного застосування ІКТ: як за комунікативно-діалогового підходу, так і за комп’ютерно-мультимедійного (навчання у віртуальному освітньому середовищі).

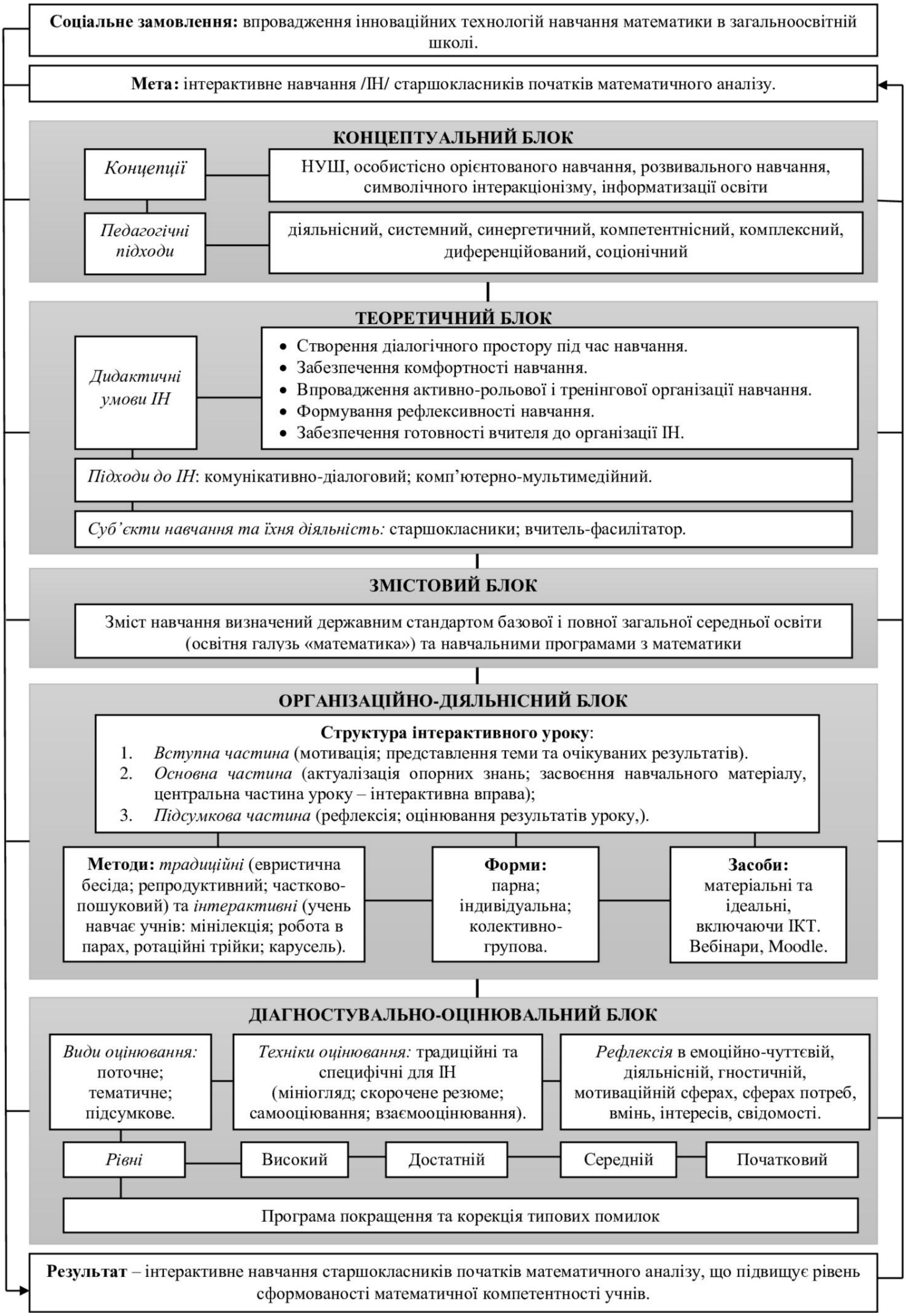


Рис. 1. Модель інтерактивного навчання старшокласників початків математичного аналізу

Інтерактивне навчання ПМА у віртуальному освітньому середовищі, організоване у формі вебінарів і на платформі Moodle, довело свою ефективність [9]. Вебінари з математики доцільні під час консультацій, шкільних карантинів, написання наукової роботи МАН, підготовки учнів до олімпіади, перевірочних робіт тощо. Застосування платформи Moodle є доречним, зокрема, і при диференціації навчання. Інтерактивний курс «Початки математичного аналізу» на платформі Moodle має містити такі елементи: відео-уроки, презентації, інтерактивні тести, форуми, чати, опитування, які допомагають встановлювати діалог в системі відносин «учень – програмне середовище», «учень – учитель». Створені за допомогою програми GeoGebra й інтегровані на платформу Moodle динамічні наочні посібники, дозволяють змінювати певну кількість параметрів модельованих об’єктів, шляхом динамічного варіювання вихідних математичних об’єктів для візуалізації їх властивостей.

Організацію навчання математики у старшій профільній школі ґрунтовно досліджено у монографії за ред. Н. Тарасенкової [10]. Враховуючи результати даного дослідження, зупинимось на особливостях саме форм, методів і засобів інтерактивного навчання ПМА. Форма інтерактивного навчання старшокласників математики – зовнішнє вираження узгодженої діяльності вчителя математики та учнів, що здійснюється в режимі як міжособистісного діалогу, полілогу, так і діалогу у системі «людина – комп’ютер, педагогічний програмний засіб». Методи інтерактивного навчання старшокласників математики – система способів діалогічної взаємодії суб’єктів навчального процесу, спрямованих на засвоєння старшокласниками системи знань, набуття умінь і навичок, здійснення рефлексії навчальної діяльності. Методи інтерактивного навчання описані у науково-методичній літературі, зокрема С. Кашлєвим [11]. В контексті відбору методів, що є ефективними в умовах інтерактивного навчання ПМА, важливою є структура уроку, яка представлена в науково-методичній літературі, зокрема О. Пометун [6], що складається з трьох частин: вступна (мотивація навчально-пізнавальної діяльності учнів; представлення теми та очікуваних результатів, до 7 хвилин уроку), основна (актуалізація опорних знань; подання нового навчального матеріалу та організація його засвоєння школярами, до 30 хвилин), підсумкова (оцінювання результатів уроку, рефлексія, до 8 хвилин). У вступній частині уроку, зокрема на етапі мотивації навчальної діяльності, ефективними виявилися такі інтерактивні методи, як «Рукостискання», «Командний клич», «Зобрази фігуру», «Якби я був математичним поняттям». Ці методи сприяють виявленню емоційного стану старшокласників, створенню сприятливої атмосфери для подальшого ходу уроку. У вступній частині уроку доцільно послуговуватись також різними прийомами для мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів на основі активізації їхньої міжособистісної взаємодії, долучаючи інтерактивні прийоми із застосуванням афоризмів, загадок, віршів, історичного матеріалу, мотиваційних картинок, проблемних задач та ситуацій, інсценувань, що супроводжуються бесідою вчителя з учнями, створення ситуацій успіху, інсайту, здивування. Детальніше про технологію організації в наші роботі [12]. Під час представлення теми і очікуваних результатів варто особливу увагу приділити прийомам інтерактивного навчання, що забезпечують суб’єктивне прийняття учнями мети і завдань уроку, формують їхнє особистісне ціннісне ставлення до процесу навчання, виводять заплановані вчителем результати навчання у фокус особистісно вартісних очікувань школяра. Центральна(основна) частина інтерактивного уроку вмотивована як закономірностями перебігу навчально-пізнавальної діяльності старшокласників у процесі опанування понять, фактів і способів діяльності з початків математичного аналізу, так і варіативністю інтеракцій учнів із суб’єктами освітнього процесу та з навчальним середовищем, спроєктованим вчителем. В основній частині уроку особливості змісту навчального матеріалу початків математичного аналізу спонукають під час представлення нового матеріалу поєднувати традиційні методи навчання із такими методами інтерактивного навчання, як «Учень навчає учня», «Ажурна пилка», «Мінілекція, проведена учнями». Задля формування вмінь та навичок учнів поряд із репродуктивним та частково-пошуковим методами ефективними є такі методи інтерактивного навчання, як «Робота в парах», «Ротаційні трійки», «Карусель», «Парна робота», «Два – чотири – всі разом» (сприяють формуванню вмінь та навичок розв'язування задач та вирішення проблемних навчальних ситуацій); «Евристична бесіда», «Мозковий штурм», «Незакінчені речення», «Асоціативий кущ» (сприяють пошуку різних способів розв'язування одного завдання, приверненню уваги учнів до складних або проблемних питань у навчальному матеріалі). Підсумкова частина інтерактивного уроку залучає такі методи і прийоми інтерактивного навчання, які створюють умови для самоаналізу старшокласниками своєї діяльності, внутрішніх психологічних станів, власного досвіду, рівня усвідомленості навчального матеріалу. На цьому етапі уроку ефективними є методи – «Закінчи фразу», «Анкета», «Оцінка «приросту» знань та досягнення цілей», «Плюс – мінус – цікаво». Зазначимо, що на кожному етапі уроку варто застосовувати не більше одного-двох методів інтерактивного навчання. В умовах інтерактивного навчання ПМА важливим є оцінювання особистісного поступу учня – тобто порівняння особистісного приросту навчальних досягнень учня (порівнюються дії, які проводить учень зараз, з аналогічними, що проводились ним раніше). У процесі поточного оцінювання навчальних досягнень учнів доцільним є аксіологічний підхід, що полягає у визнанні кожного учасника освітнього процесу активним ціннісно-мотивованим суб'єктом діяльності. Під час поточного оцінювання відзначається також прагнення старшокласників до удосконалення, старанність, зростання особистих навчальних досягнень. Наголос – на позитивних сторонах. Процес оцінювання та оцінка навчальних досягнень учня є також засобом управління інтерактивним навчанням у цілому та індивідуальною навчальною діяльністю кожного старшокласника, що передбачає налагодження зав'язків між наступними основними елементами ланцюга: «оцінювання – оцінка – бал – програма особистісного зростання – реалізація цієї програми – оцінювання – оцінка – бал – …». В умовах інтерактивного навчання математики під час поточного оцінювання бал не займає центральне місце, ключовими тут є ланки: якісна оцінка, програма особистісного зростання, реалізація цієї програми. Такий підхід до оцінювання формує у старшокласників: 1) критичне відношення до власних навчальних досягнень, відчуття радості за позитивні досягнення, вміння аналізувати власні навчально-комунікативні досягнення – це локальні індивідуальні цілі; 2) вміння оцінювати та аналізувати життєво-практичні ситуації, з якими стикаються як самі учні, так і їх оточення, аналізувати проблемні ситуації, які трапляються у житті, та вирішувати їх – глобальні індивідуальні цілі. Нашими дослідженнями встановлено, що процес самооцінювання і самооцінки та взаємооцінювання і взаємооцінки старшокласниками навчальних досягнень під час поточного оцінювання сприяє формуванню їх позитивної мотивації до навчання математики. Самооцінювання та взаємооцінювання є потужними інструментами розвитку свідомості, формує вміння аналізувати власні навчальні досягнення та досягнення своїх однокласників. При цьому учень, який здійснює самооцінювання чи взаємооцінювання повинен мати можливість зіставити власні результати з оцінкою вчителя (особливо на перших етапах такої практики). Учень має бути задіяним і в процес оцінювання і у його аналіз. Для організації ефективного самооцінювання та взаємооцінювання на уроці варто критерії оцінювання розробляти спільно з учнями, створювати психологічну атмосферу довіри і взаєморозуміння. Наведемо приклад організації взаємооцінювання на інтерактивних уроках на етапі перевірки домашнього завдання чи актуалізації опорних знань. Кожен учень, працюючи у парі з іншим учнем, отримує картку від учителя із запитаннями. Учні по черзі запитують один одного, слухають і оцінюють відповіді один одного. Наприкінці взаємоопитування учні оцінюють один одного та кожен себе. Під час поточного оцінювання доцільно застосовувати накопичувальну систему балів, використовуючи «Рейтингову картку досягнень учня», яка містить такі рубрики «Групова робота» (0–4 балів), «Індивідуальна робота» (0–4 балів), «Активність на уроці» (0–4 балів), «Примітки про порушення правил». На інтерактивних уроках алгебри і початків аналізу заохочуються будь-які прояви навчально-пізнавальної активності учнів: відповіді на питання, доповнення до відповіді іншого учня, влучно задане питання, допомога однокласнику розібратися з певним теоретичним матеріалом чи у розв'язуванні задачі тощо. Позначки у рубрику «Примітки про порушення правил» доцільно вносити у крайньому випадку: для уникнення можливого хаосу під час використання групових форм роботи. Бал за урок дорівнює сумі набраних балів з рубрик «Групова робота», «Індивідуальна робота», «Активність на уроці». Під час поточного оцінювання варто уникати стресових та травмуючих ситуацій. Інтерактивний урок має бути пронизаний позитивними емоціями і вчителя, і самих учнів. Наприкінці вивчення кожної теми вираховується середній бал поточного оцінювання, як середній бал з рейтингових карток досягнень учня. Бал за тему в умовах інтерактивного навчання математики є середнє арифметичне балів за контрольні та самостійні роботи по темі, балу за ведення зошита та домашні роботи і середнього балу поточного оцінювання.

Розглянемо окремі приклади методів інтерактивного навчання початків математичного аналізу «Учень навчає учнів», «Парна робота» і «Карусель».

I. Метод інтерактивного навчання «Учень навчає учнів».

Тема уроку: «Найбільше і найменше значення функції на відрізку».

Порядок організації роботи:

I. За тиждень до проведення даного уроку вчитель обирає учня (пару учнів) за їх бажанням, який буде виступати в ролі учня-вчителя. Завданням учня-вчителя (пари учнів) є пояснення нового матеріалу та розв'язування типових вправ. Найкраще на роль учня-вчителя підійде учень або учениця соціального клубу, тобто етико-сенсорний екстраверт, сенсорно-етичний інтроверт, етико-сенсорний інтроверт, сенсорно-етичний екстраверт. Через вроджені соціальні якості ці представники вміють, як правило, гарно пояснити навчальний матеріл іншим, створюючи позитивний мікроклімат у групі. Якщо урок проводитиме пара учнів, то доцільними є дуальні пари, один з представників якої належить до соціального клубу, а інший до клубу сайентистів, а саме: етико-сенсорний екстраверт з логіко-інтуїтивним інтровертом; сенсорно-етичний інтроверт з інтуїтивно-логічним екстравертом; етико-сенсорний інтроверт з логіко-інтуїтивним екстравертом; сенсорно-етичний екстраверт з інтуїтивно-логічним інтровертом.

II. Учитель надає учню-вчителю (парі учнів) дані про те, де можна ознайомитися зі змістом нової теми. Також учитель пропонує план виступу учня-вчителя (пари учнів) та надає коментарі про те, на які моменти в темі варто звернути особливу увагу. Зв'язок з ними вчитель підтримує, використовуючи електронну пошту, соціальні мережі, програми відеозв'зку Skype, Viber, Telegram тощо. Прикладом початкового етапу взаємодії між вчителем і учнем може бути такий електронний лист: «Микита, вітаю! Нагадую, що 20 листопада ти будеш на уроці виступати у ролі вчителя. Тема уроку: «Найбільше і найменше значення функції на відрізку». Для ефективної підготовки до уроку пропоную:

1) Прочитай п.13 підручника автори: А. Мерзляк та інші,
2) Переглянь відео-уроки, за посиланнями:
   а) https://www.youtube.com/watch?v=ixHUfqhwjnQ
   б) https://www.youtube.com/watch?v=O7bmsPtxteY
   в) https://www.youtube.com/watch?v=B1fdc5f6xfo
3) Розв'яжи №55 (1, 2) на стор. 13 збірника задач автори: А. Мерзляк та інші.

Пояснення нового матеріалу раджу здійснювати за таким планом:

1. Аналіз різних випадків розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого і найменшого значення. Оформити пояснення даного етапу уроку раджу, так як показано у відео №1 з 0:33 по 3:38. Графіки різних випадків варто підготувати завчасно на слайдах або на дошці.

2. Сформулювати та записати в зошитах алгоритм (правило-орієнтир) знаходження найбільшого і найменшого значення функції на заданому відрізку.

3. Розв'язати №55(1) стор. 13 по збірнику задач автори А. Мерзляк та інші.

До наступного уроку (16 листопада) підготуй, будь ласка, конспект цього уроку і ми обговоримо твій виступ. Якщо будуть запитання, пиши. Я вірю, що ти підготуєшся і успішно проведеш урок. Твої однокласники проводячи уроки, братимуть з тебе приклад. Успіхів!

III. За декілька днів до уроку вчитель обговорює з учнем його виступ. Відбувається мінірепетиція проведення уроку учнем.

IV. Під час самого уроку вчитель не втручається у пояснення матеріалу учнем, але, у разі потреби, допомагає йому.

V. Учні під час уроку задають запитання учню-вчителю.

Цей метод доцільно застосовувати на уроках засвоєння нових знань. Однак, метод «Учень навчає учнів» недоцільно використовувати під час введення поняття похідної, первісної, визначеного інтеграла. Ці поняття вчитель має вводити сам, використовуючи пояснювально-ілюстративний метод або евристичну бесіду.

II. Метод інтерактивного навчання «парна робота».

Порядок організації роботи:

1. Учитель оголошує учням завдання і пояснює його.
2. Учні об'єднуються у пари (як сидять за партами). Учитель визначає час за який учні мають обговорити свої ідеї один з одним і досягти консенсусу щодо розв'язання.
3. По закінченні відведеного часу на обговорення, пари представляють результати роботи, обмінюється своїми ідеями та аргументами з усім класом.

Даний інтерактивний метод навчання ПМА доцільно використовувати під час уроків формування вмінь та навичок. При об'єднанні учнів у пари варто враховувати соціонічний тип учнів. Ефективна працездатність буде між учнями, які знаходяться в таких інтертипних відносинах: дуальні відносини («ІЛЕ – СЕІ», «ЕСЕ – ЛІІ», «ЕІЕ – ЛСІ», «СЛЕ – ІЕІ», «СЕЕ – ІЛІ», «ЛІЕ – ЕСІ», «ЛСЕ – ЕІІ», «ІЕЕ – СЛІ»), ділові відносини («ІЛЕ – СЛЕ», «СЕІ – ІЕІ», «ЕСЕ – ЛСЕ», «ЛІІ – ЕІІ», «ЕІЕ – ЛІЕ», «ЛСІ – ЕСІ», «СЛІ – ІЛІ», «ІЕЕ – СЕЕ»), відносини суперего («ІЛЕ – СЕЕ», «СЕІ – ІЛІ», «ЕСЕ – ЛІЕ», «ЛІІ – ЕСІ», «ЕІЕ – ЛСЕ», «ЛСІ – ЕІІ», «СЛЕ – ІЕЕ», «ІЕІ – СЛІ»), напівдуальні відносини («ІЛЕ – СЛІ», «СЕІ – ІЕЕ», «ЕСЕ – ЛСІ», «ЛІІ – ЕІЕ», «ЕІЕ – ЛІІ», «ЛСІ – ЕСЕ», «СЛЕ – ІЛІ», «ІЕІ – СЕЕ»). Розшифровка кожного соціонічного типу – у таблиці 1.

Приклад фрагменту уроку.

Тема «Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей» (профільний рівень).

На етапі пояснення нового матеріалу вчитель на конкретному прикладі показує («евристична бесіда») особливості розв'язування рівнянь і нерівностей із застосуванням похідної та разом з учнями складає правило-орієнтир розв'язування таких вправ. Після чого організовує роботу в парах. Учні об'єднані у пари з урахуванням соціонічних типів або власних побажань. Приклад можливого діалогу між учнями, які розв'язують рівняння:

$3^x + 3^{2-x} = 3(1 + cos\, 2\pi x)$.

Учень 1. Пропоную діяти за правилом-орієнтиром, з яким нас ознайомили. Які у тебе є ідеї щодо розв'язування даного рівняння?

Учень 2. Оскільки в нас немає формул, за якими можна перетворювати показникові й тригонометричні вирази, то можна спробувати розв'язати це рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій, зокрема, спробувати оцінити область значень функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння. Для функції, що стоїть у правій частині рівняння, це неважко зробити й без похідної, а для дослідження функції, що стоїть у лівій частині рівняння, можна використати похідну.

Учень 1. Добре, я згодний. Але спочатку давай проілюструємо корені даного рівняння. Застосуємо графічний метод розв'язування рівнянь.

Учень 2. Потрібно побудувати графіки функцій $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$ і $g(x) = 3(1 + cos\, 2\pi x)$. Абсциси точок перетину графіків цих функцій і будуть розв'язками даного рівняння.

Учень 1. Будувати графіки дуже легко за допомогою GeoGebra.

Учень 2.

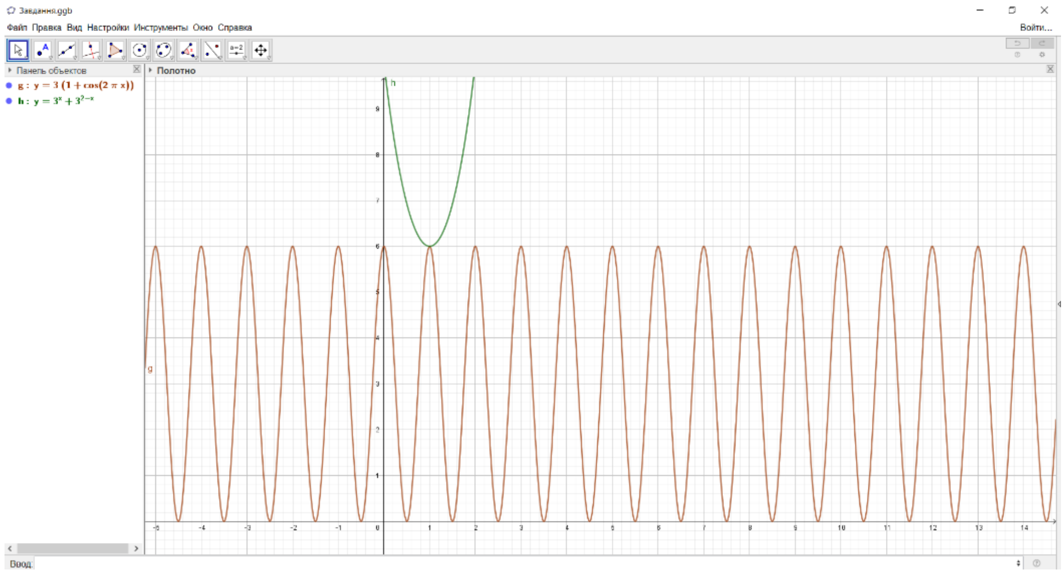


Рис. 2. Побудова графіка за допомогою GeoGebra.

За побудованими графіками (рис. 2) двох функцій бачимо, що вони перетинаються в точці з абсцисою $x = 1$. Це і є розв'язок даного рівняння. Інших розв'язків немає.

Учень 1. Давай подивимося, яка область допустимих значень заданого рівняння? ОДЗ заданого рівняння – усі дійсні числа.

Учень 2. Знайдемо область значення функції $g(x) = 3(1 + cos\,2\,\pi x)$.

Оскільки $-1 \leq cos\,2\,\pi x \leq 1$, то $0 \leq 1 + cos\,2\,\pi x \leq 2$,

а $0 \leq 3(1 + cos\;\,2\,\pi x) \leq 6$.

Тоді область значення функції $g(x) = 3(1 + cos\,2\,\pi x)$: $E(g) = [0; 6]$.

Учень 1. Яка область значення функції $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$?

Учень 2. Функцію $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$ дослідимо за допомогою похідної. $D(f) = R$.

$f'(x) = 3^x\,ln\,3 - 3^{2-x}\,ln\,3 = 3^{2-x}\,ln\,3\,(3^{2x-2} - 1)$ існує на всій області визначення функції.

Знайдемо критичні точки заданої функції. $x = 1$ – критична точка. Позначаємо критичну точку на області визначення функції, знаходимо знак похідної на кожному проміжку (рис. 3).

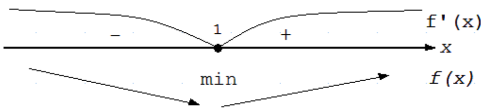


Рис. 3. Знаходження знака похідної на кожному проміжку.

Неперервна функція має тільки одну критичну точку – точку мінімуму (у ній похідна змінює знак з плюса на мінус).

Звідси випливає, що точка $x = 1$ є точкою мінімуму.

Знайдемо значення мінімуму: $f(1) = 6$.

Отже, область значення функції $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$: $E(f) = [6; \infty)$.

Учень 1. Оцінимо область значення функцій $f(x)$ і $g(x)$ і зробимо висновки щодо коренів заданого рівняння.

Учень 2. Враховуючи, що $E(g) = [0; 6]$ і $E(f) = [6; \infty)$, маємо, що задане рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі рівнянь

$\begin{cases} f(x) = 6, \\ g(x) = 6 \end{cases}$ або $\begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6, \\ 3(1 + cos\,2\,\pi x) = 6. \end{cases}$

Учень 1. Звідси $x = 1$ – єдиний корінь. Зараз пропоную порівняти знайдені результати з результатами розв'язання даного рівняння за допомогою програми Matlab, скориставшись комп'ютером.

Учень 2.

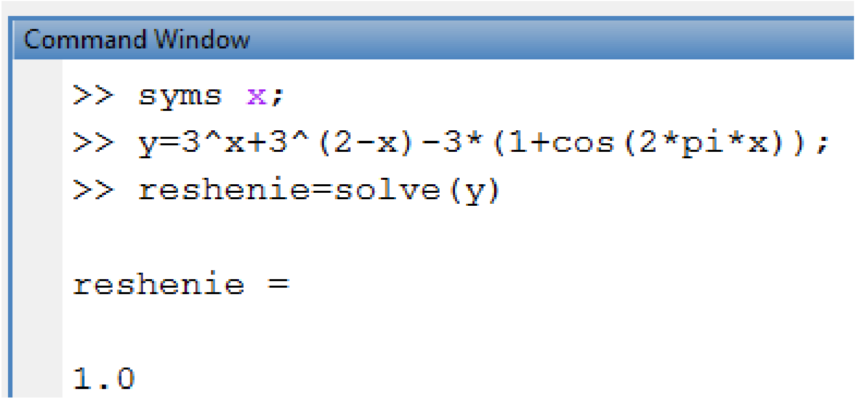


Рис. 4. Розв'язання рівняння за допомогою програми Matlab.

Наша відповідь збігається з результатом розв'язання даного рівняння за допомогою програми Matlab (рис. 4). Задане рівняння має єдиний дійсний корінь: $x = 1$.

III. Метод інтерактивного навчання «карусель»

Порядок організації роботи.

Парти у класі розставлені у вигляді кола чи прямокутника. Учні сидять обличчям один до одного, утворюючи тим самим два кола – внутрішнє і зовнішнє. Внутрішнє коло нерухоме, а зовнішнє рухається. Учитель дає завдання учням (проєктуючи на екран для кожної позиції «Каруселі»), учні розв'язують його в парах. За сигналом вчителя відбувається заміна партнерів, і робота вже продовжується у складі інших пар.

Приклад фрагменту уроку. Тема: «Розв'язування вправ на дослідження функцій»

Актуалізувавши з учнями загальну схему дослідження функції, вчитель пропонує дослідити функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$ і побудувати її графік.

Враховуючи, громіздкість одного завдання вчителю доцільно карусель «рухати» після виконання у парі двох етапів із загальної схеми дослідження функції. Перебуваючи у новій парі, учні звіряють результати роботи, виконані у попередній парі і продовжують виконувати наступні етапи дослідження функції.

<u>Початкова позиція «каруселі»</u>

1. Знайдіть область визначення функції.

Функція визначена на множині $D(f) = \left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$.

2. Знайдіть точки перетину графіка функції з осями координат.

Розв'язавши рівняння $\frac{x^4}{x^3-2} = 0$, установлюємо, що що $x = 0$ – єдиний нуль даної функції. Отже, $(0; 0)$ – єдина точка перетину з осями координат, тобто графік функції проходить через початок координат.

<u>Перший поворот «каруселі»</u>

3. Знайдіть проміжки знакосталості.

Знаходимо проміжки знакосталості f

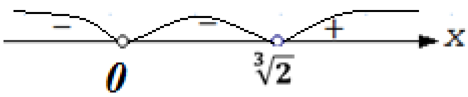


Рис. 5. Проміжки знакосталості.

Застосовуючи метод інтервалів, установлюємо, що $f(x) > 0$ при $x \in \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; +\sqrt[3]{2}\right)$.

4. З'ясуйте, чи є функція парною чи непарною.

Оскільки область визначення не симетрична відносно початку координат, то одразу можна стверджувати, що дана функція не є ні парною, ні непарною.

Другий поворот «каруселі»

5. Знайдіть похідну і критичні точки функції.

Знайдемо похідну заданої функції:

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x^3 - 2) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^3(x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}$$

Визначимо, при яких значеннях змінної x похідна функції дорівнює нулю або не існує: $f'(x) = 0$ при $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$ Оскільки $f(x)$ не існує при $x = \sqrt[3]{2}$, тому й $f'(x)$ не існує при $x = \sqrt[3]{2}$. $x = \sqrt[3]{2}$ не є критичною точкою.

6. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).

Нанесемо отримані значення на числову вісь та визначимо знак похідної в цих проміжках (рис. 6):

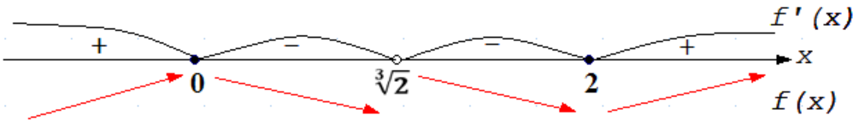


Рис. 6. Знак похідної.

Функція $f(x)$ зростає від $-\infty$ до 0 та від 2 до $+\infty$.

Функція $f(x)$ спадає від 0 до $\sqrt[3]{2}$ та від $\sqrt[3]{2}$ до 2.

$x_{min} = 2$ – точка мінімуму, $y_{min} = f(2) = \frac{8}{3}$ – мінімум функції;

$x_{max} = 0$ – точка максимуму, $y_{max} = f(0) = 0$ – максимум функції.

Третій поворот «каруселі» (для учнів, які вивчають математику на профільному рівні)

7. Знайдіть другу похідну функції, знайдіть точки перегину і проміжки, на яких функція опукла догори та донизу.

Визначимо другу похідну заданої функції:

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^3 + 4)}{(x^3 - 2)^3}$$

З'ясуємо, що при $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\sqrt[3]{4} \end{array}\right.$ $f''(x) = 0$, а при $x = \sqrt[3]{2}$ $f(x)$, а тому й $f''(x)$ не існує. Нанесемо отримані значення на числову вісь та визначимо знак другої похідної на цих проміжках (рис. 7):

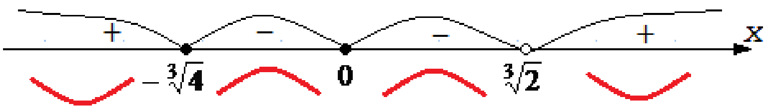


Рис. 7. Знак другої похідної.

Отже, $x = -\sqrt[3]{4}$ – точка перегину і $f(-\sqrt[3]{4}) = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$: $\left(-\sqrt[3]{4}; -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$.

Функція f є опуклою вниз на проміжках $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ і $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$.

Функція f є опуклою догори на проміжку $[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}]$

Четвертий поворот «каруселі» (для учнів, які вивчають математику на профільному рівні)

8. Знайдіть асимптоти графіка функції.

Пряма $x = \sqrt[3]{2}$ – вертикальна асимптота графіка даної функції, оскільки в цій точці функція має нескінченний розрив.

Загальний вигляд похилої асимптоти (сюди ж відносимо і горизонтальні асимптоти) має вигляд: $y = kx + b$.

Визначимо k і b за формулами: $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx)$.

$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3-2} = 1$, $b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x}{x^3-2} \right) = 0.$

Отже, $y = x$ – похила асимптота графіка функції.

9. На основі проведеного дослідження побудуйте графік функції.

Ураховуючи отримані результати, будуємо у зошитах графік функції. Після побудови графіка функції в зошитах учням пропонується побудувати графік функції на комп'ютері з використанням програми Advanced Grapher (або іншої програми: Gran 1, Master function 2. 0, derive та інше) і порівняти його з побудованим. Якщо учні не мають доступу до комп'ютерів, вчитель з метою перевірки точності зображення графіка функції будує графік функції на центральному комп'ютері, проєктуючи результат за допомогою проєктора на екран (рис. 8).

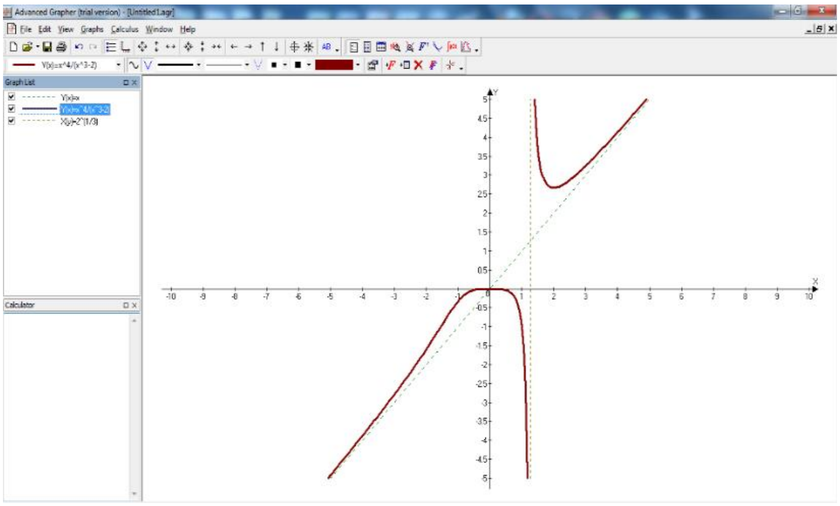


Рис. 8. Побудова графіка функції у програмі Advanced Grapher.

Представлена модель відображає інтерактивне навчання старшокласників ПМА, результативність, якого забезпечується дотриманням відповідних психологічних та дидактичних умов для створення сприятливої комунікативної взаємодії суб'єктів навчального процесу і раціональним поєднанням традиційних методів навчання математики з окремими методами інтерактивного навчання та доцільним використанням ІКТ.

Список використаних джерел

1. Сисоєва, С. О. (2011). *Інтерактивні технології навчання дорослих: навчально-методичний посібник*. К.: ВД «ЕКМО». 324 с.
2. Комар, О. А. (2011). *Теоретичні та методичні засади підготовки майбутніх учителів початкової школи до застосування інтерактивної технології: дис. ... докт. пед. наук*: 13.00.04. Умань. 512 с.
3. Слєпкань, З. І. (2004). *Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики*. Тернопіль: Підручники і посібники. 240 с.
4. Блумер, Г. (2017). *Символический интеракционизм*. Пер. А. Корбута. Москва: Элементарные формы. 346 с.
5. Гуленко, В. В., Тыщенко, В. П. (2010). *Соционика идет в школу. Педагогам, родителям, детям о типах и отношениях*. Москва: Чёрная белка. 280 с.
6. Пометун, О. (2007). *Інтерактивні методики та системи навчання*. Київ: Шк. світ.
7. Федосєєв, С. Е., Забранський, В. Я. (2016). Організаційно-дидактичні умови інтерактивного навчання старшокласників математики. *Науковий часопис: збірник наукових статей*. Вип. CXXIX (129); упор. Л. Л. Макаренко. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. 230-237.

8. Oldknow, A., Taylor, R., Tetlow, L. (2010). *Teaching Mathmatics using ICT*. London & New York: Continuum. 328 p.
9. Федосеев, С. Э., Забранский, В. Я. (2015). Организация интерактивного обучения математике старшеклассников средствами информационно-коммуникационных технологий. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. Budapest. №III (21).* Issue: 43. 54-57.
10. Тарасенкова, Н. А., Акуленко, І. А., Лов'янова, І. В., Сердюк, З. О. (2017). *Організація навчання математики у старшій профільній школі: монографія*; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко. 216 с.
11. Кашлев, С. С. (2013). *Интерактивные методы обучения: учеб.-метод. пособие*. Минск: ТетраСистемс. 224 с.
12. Федосєєв, С. (2015). Інтерактивне навчання старшокласників алгебри і початків аналізу. *Математика в рідній школі. №7-8*. 23-31.

ПРО ДЕЯКІ ТИПИ ПОШУКОВИХ ЗАДАЧ

Ольга Чернобай

Успішність вивчення оновленого шкільного курсу математики в значній мірі залежить від того, якими засобами та методами проводиться навчання. Досвід показує, що ідеї, закладені в чинній програмі та підручниках, не засвоюються учнями на належному рівні, якщо саме навчання математики не базується на основі збудження пізнавальної активності школярів, а ведеться застарілими методами, нехай навіть за досить активної діяльності вчителя, але пасивному ставленні учнів.

Одним із найбільш важливих засобів інтенсифікації навчання математики є ефективна організація та управління пошуковою діяльністю учнів в процесі розв'язування різноманітних математичних задач і вправ.

Важливим є той факт, що під час розв'язування задач в процесі навчання математики існує можливість найбільш природним чином формувати у школярів творчу активність поряд зі створенням системи математичних знань, умінь і навичок, що передбачені програмою та у шкільних підручниках математики.

Якщо термін «задача» розуміти досить широко (зокрема віднести до числа задач і довільну обчислювальну вправу, і довільну теорему, спосіб доведення якої потрібно встановити і вивчити, встановлення тих чи інших ознак математичного поняття, що вивчається, та відбір серед них тих ознак, котрі характеризують згадане поняття), то можна стверджувати, що вивчення математики здійснюється в процесі розв'язування задач. Але водночас уміння розв'язувати математичні задачі в наш час проявляються недостатньо, хоча саме ці вміння найбільш яскраво характеризують стан математичних знань здобувачів освіти та рівень їх математичного розвитку. Здебільшого це відбувається тому, що математичні задачі, які пропонуються в підручниках, як правило, обмежені однією темою, вимагають для їх розв'язування певних знань, умінь і навичок з одного, окремо взятого питання програмового матеріалу і не передбачають широких зав'язків між розділами курсу математики. Роль таких задач вичерпується протягом того часу, який відводиться на вивчення розглядуваного питання програми. Функціями таких задач при вивченні теоретичного матеріалу є: відображати теоретичне питання, що вивчається; роз'яснити його зміст; допомогти засвоїти навчальний матеріал через простіші вправи, що виконуються за зразком.

Звичайно, у системі задач шкільного курсу математики необхідні задачі ілюстративного характеру, тренувальні вправи, задачі, пов'язані з відпрацюванням певного математичного уміння, тобто задачі, які є звичайними для навчального курсу математики. Але, в той же час, місце, яке вони повинні займати в навчанні математики, повинно бути чітко визначене, а час, що витрачається на їх розв'язання, повинен відповідати запланованим результатам навчання та їх значимості у всій системі математичної підготовки учнів. Той навчальний час і та навчальна енергія школярів, які можуть звільнитись у результаті обмеження числа традиційних задач та вправ, можуть бути використані з більшою користю на інші цілі, зокрема на виховання в учнів постійного інтересу до вивчення математики, творчого ставлення до навчальної діяльності математичного змісту. Зрозуміло, що для цього необхідна не тільки постановка навчальних математичних задач проблемного характеру, які навчають загальних методів розв'язування задач, діяльності пошукового змісту на різноманітних конкретних матеріалах, а й використання задач для навчання школярів способів самостійної діяльності, оволодіння ними методами наукового пізнання явищ реальної діяльності.

У даній роботі ми не прагнемо зробити повну класифікацію математичних задач. Назвемо задачу пошуковою, якщо при її поданні учні заздалегідь не знають ані способу її розв'язування, ані того, на який навчальний матеріал спирається спосіб її розв'язування. Тобто в процесі розв'язування таких задач учні повинні спочатку здійснити пошук плану розв’язання задачі, встановити, який теоретичний матеріал дає ключ до того чи іншого способу розв’язування. На відміну від пошукової, задачу вважаємо стандартною, якщо її розв’язування вимагає від учнів застосувати той чи інший відомий їм алгоритм або використати доведення за аналогією, який в практиці називається розв’язуванням за зразком.

Мета нашої роботи – наповнити зміст оновлених програм шкільного курсу математики задачами практичного спрямування, як пошуковими, так і стандартними відповідно до деяких тем. До таких пошукових задач можна віднести задачі з фінансовим та податковим змістом. Деякі типи таких задач вже розглядалися й раніше. Наприклад, у роботі (Задорожня, 2016) сформульовано задачі з податковим змістом відповідно до тем, які вивчаються у 5-11 класах загальноосвітніх шкіл, а також деякі задачі, опубліковані в навчальному посібнику (Руденко, 2017) та збірнику задач (Бащук, 2019).

В оновлених програмах навчальних дисциплін для закладів загальної середньої освіти (Математика, 2020) розглядаються наскрізні змістові лінії, до яких відноситься і громадянська відповідальність.

Громадянська відповідальність – це готовність і здатність людини, громадянина до активної участі у справах суспільства та держави на основі глибокого усвідомлення своїх прав та обов’язків. Основи громадянської відповідальності закладаються в шкільні роки на різних навчальних та виховних заняттях, зокрема під час навчання математики.

Наприклад, вже у четвертому класі учні вивчають нумерацію чисел у межах мільйона, засвоюють поняття класу та розрядів, що входять до складу перших двох класів, узагальнюють позиційний принцип запису чисел; засвоюють алгоритми письмового додавання і віднімання, множення і ділення багатоцифрових чисел. У п’ятому класі ці знання узагальнюються.

У зв’язку з цим, ми пропонуємо наступну творчу задачу (Чернобай О.Б., 2019).

Завдання 1. Прочитайте текст, запишіть числа, які зустрічаються в тексті цифрами, укажіть розряди кожного числа. «У 2017 році податок на нерухоме майно, відмінне від земельної ділянки в м. Дніпро, заплатили п’ять тисяч чотириста осіб, а у 2018 році більше ніж сімнадцять з половиною тисяч осіб. Бюджет міста отримав чотирнадцять мільйонів триста тисяч гривень у 2017 році, а у 2019 році на десять мільйонів сімсот тисяч гривень більше».

Разом з вивченням арифметичного матеріалу вводять також елементи алгебри, що визначаються темою «Математичні вирази. Рівності. Нерівності». У цей час на конкретних прикладах варто розкрити поняття про вирази – числові та зі змінною; рівності – числові, рівняння, формули; нерівності – числові та зі змінною. Основним питанням пропедевтики алгебраїчних знань у початковій школі є формування уявлення про залежність результату арифметичної дії від зміни одного з її компонентів. Робота із цим змістом є підготовкою до засвоєння функціональної залежності на наступному ступені математичної освіти.

У цьому аспекті пропонуємо розглянути пошукові задачі, пов’язані з цікавими історичними відомостями про податки.

Завдання 2. Скласти вираз для обчислення сумарного податку, та знайти його значення при конкретних значеннях змінних a та b. В Англії у XVI столітті існував податок на капелюхи. Кожен житель міста, який носить капелюх, платив два фунти за рік, а села – 0,5 фунта. Скільки фунтів податків надійшло до державної казни за рік, якщо у місті носили шляпи a чоловік, а в селі b жителів.

Завдання 3. У Новій Гвінеє існує податок на мир. За рік без війни кожен житель сплачує 17 євро. Скласти вираз, щоб знайти скільки євро заплатять жителі міста, в якому проживає a жителів, за b років. Визначити скільки євро заплатять жителі міста при $a = 5; 12;$ b = 213542; 52346.

Завдання 4. Записати у стандартному вигляді суму податкових надходжень до бюджету України у 2018 році – 494 663 744,8 тисяч гривень, зокрема:

а) податок на доходи фізичних осіб – 55750356 тисяч гривень;

б) податок на прибуток підприємств − 469 25000 тисяч гривень;

в) внутрішні податки на товари та послуги – 312 428 000 тисяч гривень.

Завдання 5. Записати у стандартному вигляді суму податкових надходжень до бюджету міста Ірпінь у 2017 році − 276 914,3 тисяч гривень, зокрема:

а) податок на доходи фізичних осіб − 198 902,5 тисяч гривень;

б) податок на прибуток підприємств – 99,8 тисяч гривень;

в) внутрішні податки на товари та послуги − 10000 тисяч гривень.

У програмі з математики для 5-6 класів (Математика, 2020) окремо виділена наскрізна лінія «Підприємливість і фінансова грамотність», націлена на розвиток лідерських ініціатив, здатність успішно діяти в технологічному швидкозмінному середовищі, забезпечення кращого розуміння учнями практичних аспектів фінансових питань. Ця наскрізна лінія пов’язана з розв’язуванням практичних задач щодо планування господарської діяльності та реальної оцінки власних можливостей, складання сімейного бюджету, формування економного ставлення до природних ресурсів. Вона реалізується під час вивчення відсотків, рівнянь та функцій.

Для реалізації згаданої наскрізної ліній при викладанні теми «Відсоткові розрахунки», частину стандартних завдань також можна сформулювати з фінансовим та податковим змістом. Вашій увазі пропонуємо кілька таких задач.

Завдання 6. Населення міста становить 36000 осіб, податки до місцевого бюджету сплачує 25%. Скільки жителів сплачує податок до місцевого бюджету?

Завдання 7. Податок на додану вартість в Люксембурзі становить 15%, в Угорщині – 25%, а в Україні – 20% від ціни товару. Яку суму податку на додану вартість буде сплачено в кожній країні за товар ціною 9876 гривень?

Завдання 8. Податок на прибуток у Франції становить 31%, в Іспанії – 25%, у Словаччині – 21%, а в Україні – 18%. Визначити яку суму буде сплачено у кожній державі, якщо прибуток становить 235 567 гривень.

При вивченні теми «Відношення та пропорції» доцільно запропонувати учням наступні творчі задачі.

Завдання 9. Податок на додану вартість з коробки фломастерів становить n гривень, а з п’яти зошитів − m гривень.

1) Визначити яку суму складає частка податку на додану вартість у ціні товарів, якщо купили дві коробки фломастерів і п’ятнадцять зошитів.
2) Обчислити суму грошей, що сплатили за покупку до каси, якщо ставка податку становить 20%.

Завдання 10. Записати у стандартному вигляді суму внутрішніх податків на товари та послуги у 2016 році – 312428000 тисяч гривень, зокрема:

а) акцизний податок із вироблених в Україні підакцизних товарів − 52711000 тисяч гривень;

б) акцизний податок із ввезених на територію України підакцизних товарів − 29181000 тисяч гривень;

в) податок на додану вартість із вироблених в Україні товарів (робіт, послуг) із урахуванням бюджетного відшкодування − 59336000 тисяч гривень;

г) податок на додану вартість із ввезених на територію України товарів – 171200000 тисяч гривень;

д) податки на міжнародну торгівлю та зовнішні операції − 19642000 тисяч гривень;

е) ввізне мито − 19276000 тисяч гривень;

є) вивізне мито − 366000 тисяч гривень;

ж) інші податки і збори − 1168024,9 тисяч гривень.

Завдання 11. Шість однакових підприємств сплачують 280 тисяч гривень податку до державної казни. Який податок сплачує 15 таких підприємств?

Завдання 12. Побудувати кругову та стовпчасту діаграми податкових надходжень у 2019 році до місцевого бюджету міста Ірпінь, якщо податок на доходи фізичних осіб становив 77%, податок на прибуток підприємства – 2%, а місцеві податки і збори – 21%.

Особливе місце займають задачі, пов'язані з сімейним бюджетом.

Завдання 13. Робітнику за один місяць роботи була нарахована деяка зарплата. З усіх нарахувань утримали: профспілкові внески – 1%, податок на доходи фізичних осіб – 1843,96 грн., що становить 18% від усіх нарахувань, військовий збір – 1,5%. Усі утримання разом становлять 2100,06 грн. У результаті працівник отримав 79,2% від нарахованої суми. Заповнити таблицю 1 у грошових одиницях.

Таблиця 1

Нарахування	
Утримано	
Профспілкові внески	
Податок на доходи фізичних осіб	
Військовий збір	
Інші	
Усього утримано	
Видано	

При вивченні теми «Функції» особливо цікавим для аналізу можуть бути наступні завдання.

Завдання 14. До податкової реформи 2016 року податок на доходи фізичних осіб становив 15% при сумі доходу не більше за 12180грн. та 20% при доході, більшому за 12180 грн. Скласти функцію залежності податку від доходу. Побудувати графік.

Завдання 15. Після змін в Податковому кодексі податок фізичних осіб становить 18%. Скласти функцію залежності податку від доходу. Побудувати графік.

Завдання 16. За графіками, побудованими в попередніх задачах:

а) знайти, за якої суми доходу податок не змінився;

б)визначити, в якому випадку податок зменшився;

в) встановити, за яких доходів податок виріс.

Завдання 17. За рішенням місцевих рад $a\%$ від мінімальної заробітної плати b грн. громадяни відраховують щороку до місцевого бюджету як податок на нерухоме майно за один квадратний метр житлового будинку, площа якого більша за 120 квадратних метрів. Якщо площа будинку більша за 500 квадратних метрів, то додатково щороку до місцевого бюджету власник будинку сплачуватиме ще 25000 гривень. Скласти функцію залежності податку від площі житлового будинку.

Завдання 18. Власник квартири, площа якої більша за 60 квадратних метрів, сплачує до бюджету міста податок на нерухоме майно за ставкою $a\%$ від мінімальної заробітної плати. Мінімальна заробітна плата становить b гривень. Якщо площа квартири більша за 300 квадратних метрів, то він додатково сплачує 25000 гривень. Квартири, площею до 60 квадратних метрів включно, податком не обкладаються. Потрібно:

а) скласти функцію залежності податку від площі квартири;

б) побудувати графік при $a = 3\%$ та $b = 3200$ грн;

в) визначити суму податку на нерухоме майно, яку сплачує власник квартири площею 120 кв. м, 320 кв. м, 500 кв. м.

Продемонструвати необхідність свідомої сплати податку можна досить наочно не лише в навчанні зазначених тем курсів математики та алгебри, а й при вивченні теми «Елементи комбінаторики, теорія ймовірностей та математична статистики». Учням можна запропонувати наступні задачі з податковим змістом, алгоритми розв'язування яких розглядалися у роботах (Chernobai, 2019) та (Чернобай, 2019).

Завдання 19. Напочатку XX століття за Гетьманату українці сплачували чотири прямі податки та шість акцизів. У той період було введено дві монополії. Припускаємо, що підприємець сплачує три прямі податки, один акциз та має право на одну монополію. Визначити, скільки різних варіантів сплати податків може бути.

Завдання 20. Визначити, скільки існує способів скласти ваш ідентифікаційний код, який утворюється з 10 цифр.

Завдання 21. Серія та номер паспорта складається з двох букв українського алфавіту та шести цифр. Визначити скільки існує варіантів для утворення серії та номера паспорта.

Завдання 22. Знайти, яка ймовірність того, що ідентифікаційний код закінчується нулем; парною цифрою; числом 25.

Завдання 23. Група з 25 студентів Університету державної фіскальної служби України проходять практику у відповідних установах міста Києва, а сааме: 10 осіб у Шевченківському районі, 7 осіб у Деснянському районі та 8 осіб у Оболонському районі. Визначити, яка ймовірність того, що двоє друзів потраплять до однієї установи.

Завдання 24. Ймовірність того, що громадянин X скористається правом податкової пільги, дорівнює 0,4, а громадяни Y та Z – 0,5 та 0,6 відповідно. Визначити, яка ймовірність того, що правом на податкові пільги скористались:
а) всі три особи;
б) лише громадянин X;
в) жодна особа;
г) хоча б один громадянин;
д) тільки один громадянин;
е) дві особи.

Завдання 25. На оформлення кожної з десяти справ працівником фіскальної служби було затрачено наступний час (хв). За даними таблиці 2 визначити відносну частоту події; середнє значення, моду та медіану вибірки.

Таблиця 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i *	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40

* Символом x_i позначено час, затрачений на оформлення справи з номером i.

Задачі, подані в цій роботі, як правило, нестандартні та можуть бути використані для введення вивчення нової теми, для самостійного встановлення школярами певного факту, що підлягає вивченню, для ілюстрації цього факту, для більш глибокого засвоєння теоретичного матеріалу, для набуття деяких необхідних умінь та навичок з метою контролю та самоконтролю, для відродження інтересу до математики, для залучення учнів до творчої діяльності, розвитку у школярів математичного мислення, а також з метою виховання.

Деякі системи задач, подані в чинних навчальних посібниках, не мають потрібної повноти та послідовності для повноцінного пізнання учнями основних аспектів фінансової грамотності.

У даній роботі є задачі, за типом, ідеєю чи змістом яких викладач або учень може скласти аналогічні, якщо він вважає це необхідним. Представлені задачі можна пропонувати не тільки на уроках, а також і на позакласних заняттях.

Від ефективності використання творчих задач у навчанні математики залежить не тільки якість навчання, виховання та розвиток учнів, а також і рівень їх практичної підготовленості до майбутньої професійної діяльності в будь-якій сфері життєдіяльності.

Глибоке та досконале засвоєння школярами основ сучасного курсу математики є надзвичайно важливим у формуванні їхньої математичної культури. Разом з тим, формування високої математичної культури випускників шкіл сьогодення пропонує принципово нову організацію пізнавальної діяльності учнів, у процесі якої у них повинні формуватися вміння вивчати математику самостійно і творчо, створювати задатки до активного застосування математичних знань у майбутньому.

Формування у школярів інтересу до розв’язування задач є важливим інструментом формування у них зацікавленості до математики і разом з тим ефективним способом залучення учнів до навчальної математичної діяльності творчого змісту. Для цього в процесі навчання математики необхідно систематично ставити певні задачі або серії задач, які легко формуються на базі задач, що містять навчальні посібники. Використання задач, що розвивають творчі здібності учнів є важливою умовою підвищення якості освіти.

Саме активізація самостійної пізнавальної діяльності учнів при вивченні математичних дисциплін сприяє більш ефективному використанню системи навчальних задач, які є важливим інструментом формування у школярів системи основних математичних знань та способів діяльності, що є провідною формою навчальної діяльності учнів в процесі вивчення математики, одним з ефективних засобів їх математичного розвитку.

Список використаних джерел

1. Задорожня, Т. М. (2016). Задачі про податки/Задорожня Т. М., Харенко С. Б., Кучменко С. М., Чернобай О. Б., Бащук О. Ю., Скасків Л. В., Мамонова Г. В., Салієнко В. Д. *Математика в рідній школі, № 10*, pp. 16-21.
2. Руденко, І. Б. (2017). *Вища та прикладна математика : навч. посіб. / Руденко І. Б., Чернобай О.Б.* Ірпінь: Університет ДФС України.
3. Бащук, О. Ю. (2019). *Вища та прикладна математика: збірник вправ та задач/ Бащук О. Ю., Кучменко С. М., Скасків Л. В., Чернобай О. Б.* Ірпінь: Університет ДФС України.
4. *Математика.* (2020, травень). Retrieved from Міністерство освіти і науки Украъни: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli
5. Чернобай О.Б. (2019). Роль та значення задач з податковим змістом приформуванні громадянської свідомості. *Управління публічними фінансами та проблеми забезпечення національної економічної безпеки* (сс. 217-218). Ірпінь: Університет державної фіскальної служби України.
6. Chernobai, O. (2019). On the use of Algorithms in Teaching Probability Theory. In N. Tarasenkova, *Curent Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education* (pp. 138-154). Budapest: SCASPEE. : https://seanewdim.com/other-publications.html#
7. Чернобай, О. Б. (2019). Алгоритмізація в процесі навчання теорії ймовірностей. *Матеріали Сьомої Міжнародної науково-практичної конференції "Математика всучасному технічному університеті"* (сс. 197-200). Київ: НТУУ "КПІ".

РОЗДІЛ 4

ОРГАНІЗАЦІЯ
ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ
В ЗП(ПТ)О

ВИКОРИСТАННЯ ОНЛАЙН-ІНСТРУМЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ У ЗП(ПТ)О МАШИНОБУДІВНОГО ПРОФІЛЮ

Дар'я Тінькова

Вступ. Наразі стрімко розвиваються наука і технології, завдяки чому швидко змінюється навколишнє технічне середовище. Це безпосередньо впливає на організацію освітнього процесу.

Останнім часом розвиток інформаційно-комунікаційних технологій відбувається в напрямку розробки достатньо функціональних та простих у використанні онлайн-інструментів, які відкривають нові перспективи для освітнього процесу. На їх актуальності та доцільності наголошується у Концепції інноваційного розвитку загальноосвітнього навчального закладу [1]. З огляду на це виникає потреба у здійсненні аналізу педагогічно доцільних онлайн-інструментів та окреслення можливостей їх використання при вивченні стереометрії.

Огляд останніх публікацій за темою показав, що дослідження українських (М. Жалдак, Т. Крамаренко, С. Семеріков, С. Раков, С. Шокалюк та ін.) та закордонних вчених (Р. Аткінсон, А. Бішоп, Б. Гласс, М. Мілованович та ін.) акцентують увагу на необхідності використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання математики. Однак питання їх використання при вивчені стереометрії учнями закладів професійної (професійно-технічної) освіти є недостатньо дослідженим, що й зумовило вибір теми.

Метою дослідження є показати застосування онлайн-інструментів при вивченні стереометрії майбутніми робітниками машинобудівного профілю.

Виклад основного матеріалу. Наразі в Україні великий соціальний попит на робітників за професіями токаря, електрогазозварника, верстатника широкого профілю, коваля, слюсаря з ремонту автомобілів. Ці професії опановують учні, що навчаються переважно у ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю. Одночасно з вивченням предметів професійної підготовки, учні опановують цикл загальноосвітньої підготовки, зокрема стереометрію. Метою вивчення стереометрії у ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю є формування математичної компетентності для використання у професійних та життєвих ситуаціях. Н. Тарасенкова [2] виділяє два рівні математичної компетентності – фактологічній та праксеологічний. Фактологічний рівень математичної компетентності – це вміння застосовувати математику в суто математичних завданнях, праксеологічний рівень математичної компетентності – це вміння застосовувати математику в компетентнісних завданнях. Для того, щоб майбутні робітники машинобудівного профілю могли застосовувати математику в професійних та життєвих ситуаціях, необхідно, щоб в них сформувалися знання, навички і вміння розв'язувати математичні завдання. Розв'язування учнями ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю суто математичних завдань на початковій стадії вивчення нового матеріалу зі стереометрії є необхідністю для подальшого розв'язування учнями завдань, які моделюють реальні ситуації. Наші спостереження показують, що учнів ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю досить складно мотивувати розв'язувати суто математичні завдання.

Стереометрія – це розділ математики, у якому візуалізація є одним із найважливіших елементів для розуміння представлених означень і теорем, а також для розв'язування поставлених задач. Досвід роботи з учнями ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю показав, що їм важко уявити «картинку» певної математичної задачі і що вони будуть більш успішними у розв'язуванні математичної задачі, якщо вона буде представлена і в текстовому, і в графічному плані. Для цього вважаємо педагогічно доцільним використання інтерактивного контенту при вивченні стереометрії. Під інтерактивним контентом в широкому значенні розуміють тип контенту, у якому в реальному часі поєднуються тексти та зображення. Основна мета інтерактивного контенту полягає в тому, що учні ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю можуть перевірити і закріпити свої знання в ігровій формі, що сприяє формуванню їхнього пізнавального інтересу.

Ефективне застосування інтерактивного контенту при вивченні стереометрії залежить від обраних для цього онлайн-інструментів. Нами було здійснено пошук і проведено аналіз онлайн-інструментів для розробки інтерактивного контенту і подальшого його використання при вивченні стереометрії учнями ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю (табл. 1).

Таблиця 1

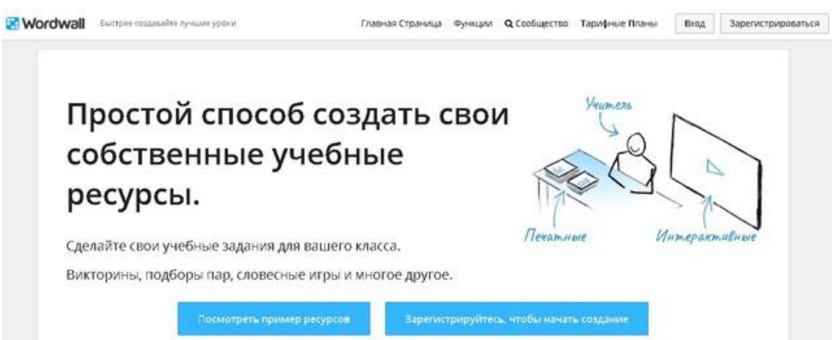
Онлайн-сервіси для створення інтерактивного контенту

Онлайн-інструменти	Вартість	Можливості
Thinglink https://www.thinglink.com/	Безкоштовна версія (без можливості скачування контенту на пристрій)	Дозволяє створювати інтерактивні зображення і відео за допомогою маркерів-посилань на різний контент
Blendspace https://www.tes.com/lessons	Безкоштовна версія (без можливості скачування контенту на пристрій)	Дозволяє створювати уроки, розміщуючи різний контент в одному просторі
WordWall https://wordwall.net	Безкоштовна версія (без можливості скачування контенту на пристрій)	Дозволяє створювати інтерактивні ігри
LearningApps https://learningapps.org/	Безкоштовна версія (без можливості скачування контенту на пристрій)	Дозволяє створювати інтерактивні пазли, кросворди, вікторини, хронологічні лінійки, інтерактивне аудіо, відео, інтелектуальні карти та інші види інтерактивних завдань
Сервіс H5P https://h5p.org/	Безкоштовна версія (без можливості скачування контенту на пристрій)	Дозволяє створювати інтерактивні презентації, відео, стрічки часу, вправи, опитування, інтерактивні плакати, ігри.

Результати проведеного нами аналізу дозволяють стверджувати, що за допомогою онлайн-інструментів можна створювати інтерактивні плакати, відео, презентації, вправи тощо.

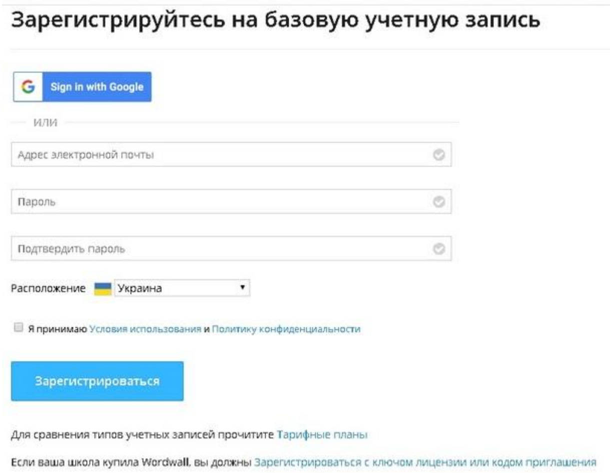
Розглянемо більш детально створення інтерактивних завдань за допомогою застосунку Wordwall – багатофункціонального онлайн-інструменту для створення як інтерактивного, так і друкованого матеріалу.

Для створення нового контенту доцільно зайти за посиланням www.Wordwall.net (мал. 1). Для користувачів доступна як англомовна, так і російськомовна версії. Далі потрібно натиснути кнопку «Зарегестрироваться».



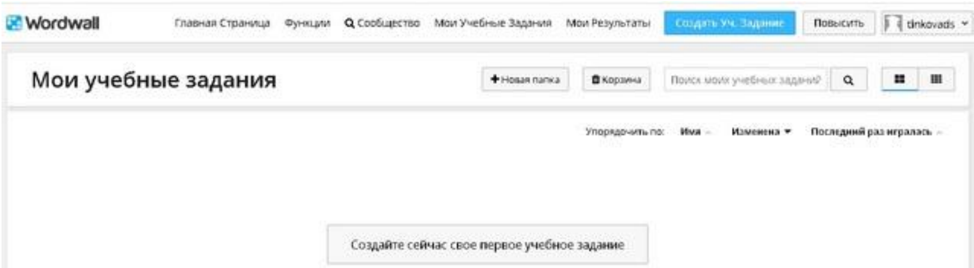
Мал. 1. Вікно сайту Wordwall.

З’являється вкладка вікна реєстрації. Реєстрація можлива через пошту або акаунт Google.



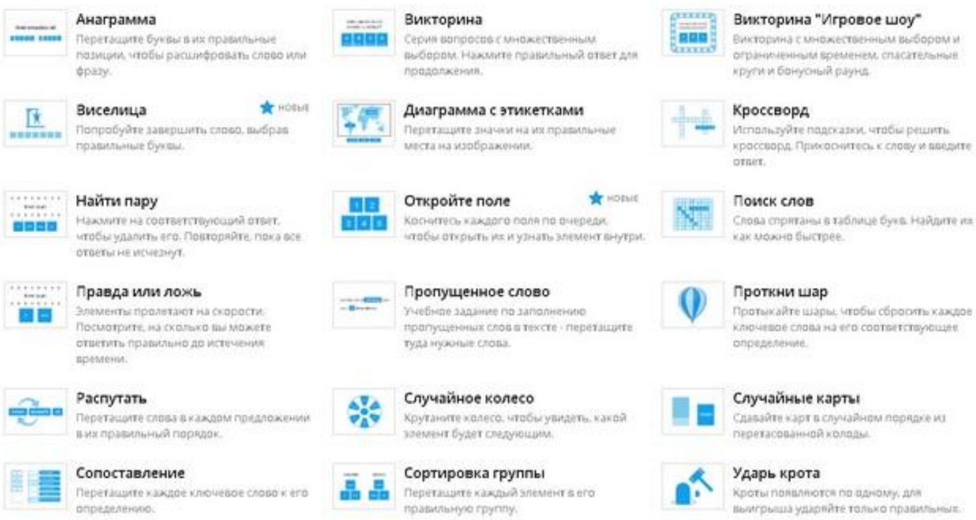
Мал. 2. Вікно «Реєстрація».

Після успішної реєстрації відкривається робоча сторінка (мал. 3), де пропонується або за допомогою пошуку знайти готове завдання, або створити нове завдання.



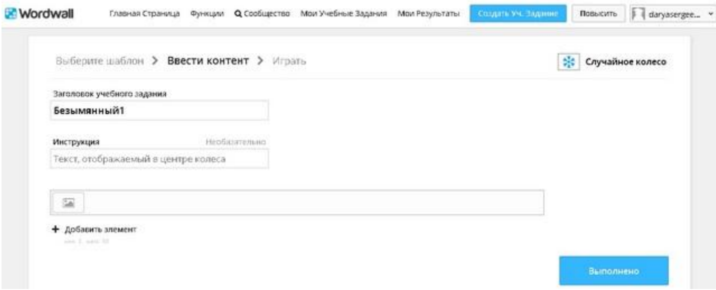
Мал. 3. Вікно «Робоча сторінка».

Вибравши опцію «Создать уч. задание» відкривається вікно з пропонованим переліком шаблонів інтерактивних ігор (мал. 4): 1) відповідності; 2) сортування; 3) відкрий коробку; 4) вдар крота; 5) пропущене слово; 6) випадкові карти; 7) вікторина; 8) анаграма; 9) знайди співпадання; 10) пошук слова; 11) хибне чи істинне; 12) повітряна куля; 13) випадкове колесо; 14) віднови порядок; 15) діаграма з міткою; 16) кросворд; 17) шоу-вікторина; 18) лабіринт.



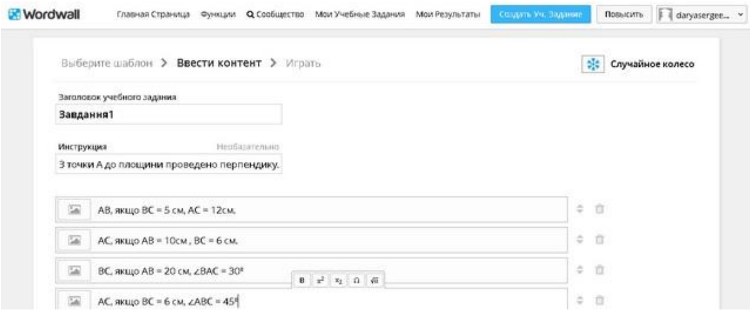
Мал. 4. Вікно «Шаблони інтерактивних завдань».

Виберемо, наприклад, шаблон інтерактивної гри «Випадкове колесо» (мал. 5). У вікні, яке відкрилося, потрібно ввести назву завдання, інструкцію (в нашому випадку це буде умова задачі з теми «Перпендикуляр і похила до площини») та, натиснувши «+», потрібно додати елементи (в нашому випадку це будуть елементи задачі з теми «Перпендикуляр і похила до площини»).



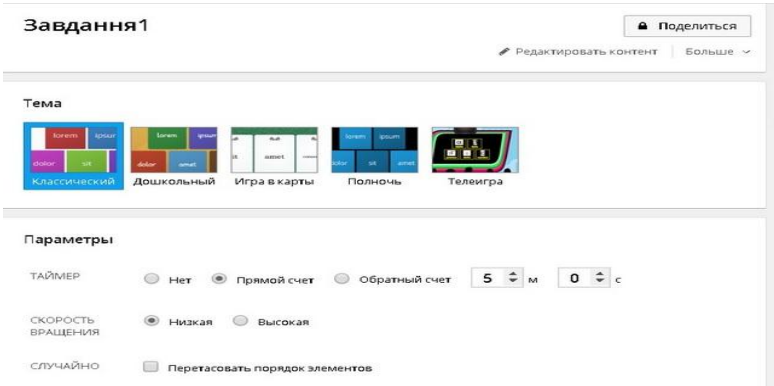
Мал. 5. Шаблон інтерактивної гри «Випадкове колесо».

При додаванні елементів можливо вставляти зображення, символи, математичні формули (мал. 6). Після заповнення шаблону потрібно натиснути «Выполнено».



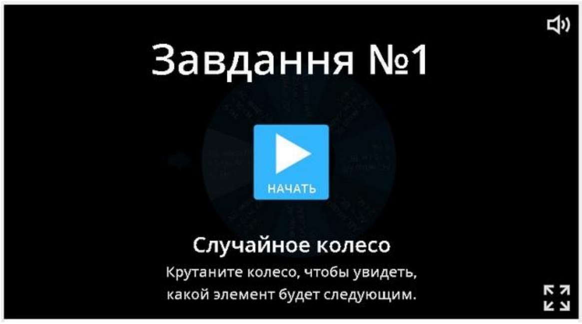
Мал. 6. Заповнення шаблону «Випадкове колесо».

Далі з'являється вікно з налаштування створеної інтерактивної гри (мал. 7). Є можливість змінити тему – оформлення гри, виставити таймер (у реальному часі, за певний проміжок часу), швидкість обертання колеса (швидко, повільно), застосувати випадковий порядок елементів.



Мал. 7. Вікно «Налаштування створеної інтерактивної гри».

Також є можливість «Поділитися» – відправити через соціальні мережі, вбудувати у власний сайт чи блог. Надати доступ необмеженій кількості людей, певній групі людей чи конкретній людині. Після процедури редагування з'являється створене завдання з теми «Перпендикуляр і похила до площини» (мал. 8). Для того щоб почати грати учням необхідно натиснути значок «Начать».



Мал. 8. Створене завдання.

З'являється колесо, у центрі якого написана умова задачі: «З точки *А* до площини α проведено перпендикуляр *АС* і похилу *АВ*. Знайдіть: ...» У кожній частині колеса вказані елементи завдання (мал. 9).

Мал. 9. Гра «Випадкове колесо».

Коли учень/учениця натискає кнопку «Раскрутить его», колесо починає обертатися та зупиняється на випадкових частинах завдання (мал. 10). Учень/учениця читає умову задачі разом з тим елементом, який йому/їй «випали» і починає розв'язувати задачу.

Мал. 10. Завдання, яке випало для розв'язування.

Якщо натиснути кнопку «Устранить», завдання, яке випало, зникає з колеса і наступний учень/учениця розкручує колесо з тих елементів, що залишилися.

Дотримуючись алгоритму, створимо інтерактивну гру «Випадкова карта». Учень/учениця натискають на карту, де написано твердження. Учень/учениця мають сказати, чи є терження (на їхню думку) правильним чи неправильним.

Мал. 11. Завдання «Випадкова карта».

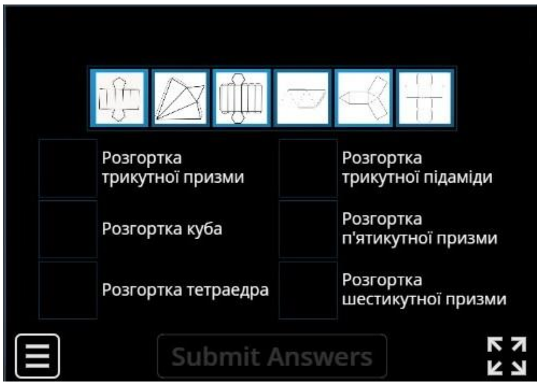
Таку форму завдання доцільно пропонувати учням ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю при повторенні навчального матеріалу. Це дає змогу викладачу обговорювати разом з учнями матеріал та корегувати рівень засвоєння цього матеріалу.

Дотримуючись алгоритму, створимо інтерактивну гру «Вікторина» (мал. 12). Учням пропонується завдання та варіанти відповідей. Учні натискають на відповідь, яка (на їх думку) є правильною. Якщо відповідь виявилася неправильною, програма показує правильну відповідь. У гру «Вікторина» доцільно закласти 4-6 завдань та разом з учнями їх розв'язувати.

Мал. 12. Завдання «Вікторина».

Таку форму завдання доцільно пропонувати учням ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю не лише при формуванні нових знань, а й при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання.

Дотримуючись алгоритму, створимо інтерактивну гру «Знайди пару» (мал. 13). Учням пропонується завдання, яке передбачає встановлення логічних пар. Учні з'єднують між собою логічні (на їх думку) пари між собою. Після з'єднання всіх пар програма показує правильність обраних сполучень.



Мал. 13. Завдання «Знайди пару».

Усі пропоновані завдання доцільно виконувати на інтерактивній дошці. Це підсилює інтерес учнів до роботи.

Важливим є той момент, що роз'язування завдань, створених за допомогою онлайн-інструменту Wordwall, фіксується у програмі. Запропонувавши учням такі завдання як домашні, викладач може зайти у «Результати» під кожною інерактивною грою та побачити відповіді учнів.

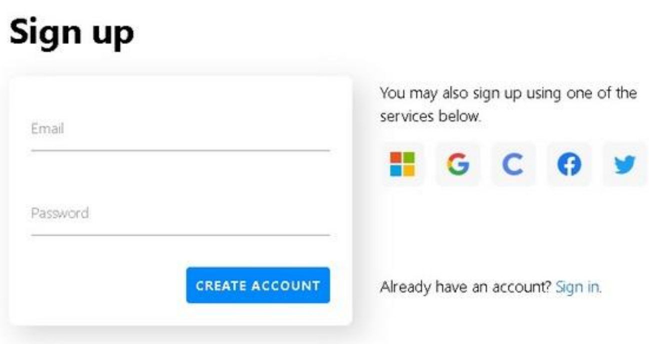
Отже, переваги використання онлайн-інструменту Wordwall при вивченні стереометрії ми вбачаємо в тому, що є:

– безкоштовна версія;
– реєстрація через пошту або акаунт Google
– 18 типів шаблонів інтерактивних ігор;
– можливість завантаження у форматі PDF;
– можливість перемикання шаблонів;
– можливість редагувати будь-яке завдання;
– можливість вбудовувати будь-яке завдання у сайт чи блог;
– можливість ділитися у соціальних мережах;
– підвищення інтересу учнів до розв'язування математичних завдань;
– можливість корегувати знання учнів в ігровій формі.

Ще одним онлайн-інструментом, який доцільно використовувати при створенні інтерактивних завдань зі стереометрії, є Thinglink. Цей онлайн-інструмент дозволяє робити інтерактивні зображення, додаючи спеціальні мітки з мультимедійним контентом (посилання на певні ресурси, відео, аудіо, світлини, текст). Ресурс дозволяє працювати над широким діапазоном типів проектів як індивідуально, так і спільно. Для створення інтерактивного контенту доцільно зайти за посиланням www.thinglink.com (мал. 14). Ресурс доступний лише англійською мовою, є безкоштовна версія.

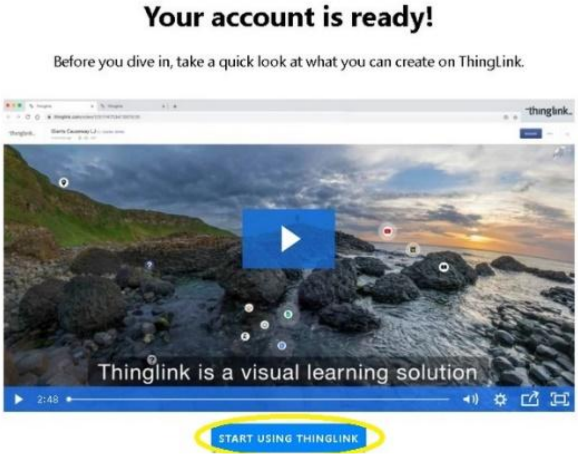
Мал. 14. Головна сторінка сайту Thinglink

Для того, щоб зареєструватися, необхідно натиснути «START NOW». Реєстрація можлива через пошту, акаунт Google, Microsoft або соціальні мережі (мал. 15).



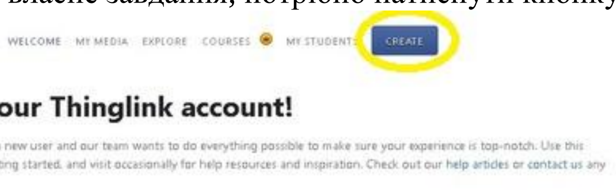
Мал. 15. Вікно «Реєстрація».

Під час реєстрації потрібно вибрати, з якою метою використовується сайт: для бізнесу, для аудиторного навчання, для електронного навчання. Обравши відповідний напрямок, треба натиснути «SELECT». При заповненні анкети треба вказати «викладач» Ви чи «учень» (учень не може створювати завдання), навчальний предмет та рівень освіти (програма буде пропонувати вже готові завдання відповідно до предмета та рівня освіти). Після заповнення анкети потрібно натиснути «GET STARTED». Після успішної реєстрації потрібно натиснути «START USING THINGLINK» для продовження роботи в акаунті (мал. 16).



Мал. 16. Новостворений акаунт.

Для того, щоб створити власне завдання, потрібно натиснути кнопку «CREATE» (мал. 17).

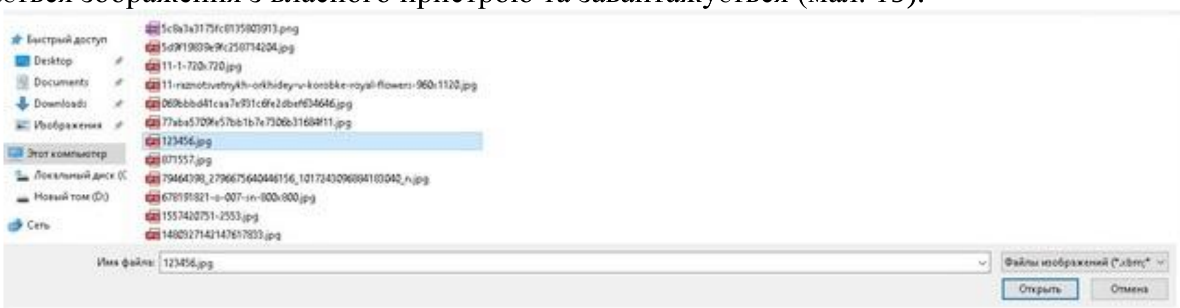


Мал. 17. Створення інтерактивного завдання.

При натисканні даної кнопки пропонується завантажити власне зображення, відео, зображення 360° або відео 360°. (мал. 18)

Мал. 18. Вкладка «CREATE».

При обранні відповідної опції (у даному випадку зображення) відкривається вікно і обирається зображення з власного пристрою та завантажується (мал. 19).



Мал. 19. Завантаження зображення.

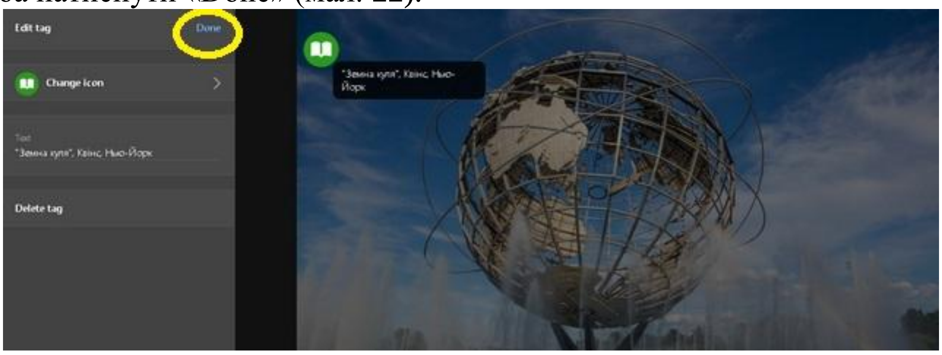
Після того, як зображення з'явилося на сторінці, необхідно натиснути «Add Tag» для додавання спеціальних міток з мультимедійним контентом (мал. 20).

Мал. 20. Додавання мітки.

При натисканні «Add Tag» відкривається вкладка з чотирма позиціями-можливостями (мал. 21): додати текст і медіа, додати текст заголовка, додати вебресурс, додати тур (перехід на інший інтерактивний контент).

Мал. 21. Різновиди міток.

При обранні відповідної позиції (у даному випадку текст заголовка) потрібно заповнити графу «Text». Також є можливість вибрати мітку – іконку – зображення, яке позначатиме питання, чи твердження чи інший посил, який закладається в мітку. Після заповнення всіх елементів, треба натиснути «Done» (мал. 22).



Мал. 22. Створення мітки.

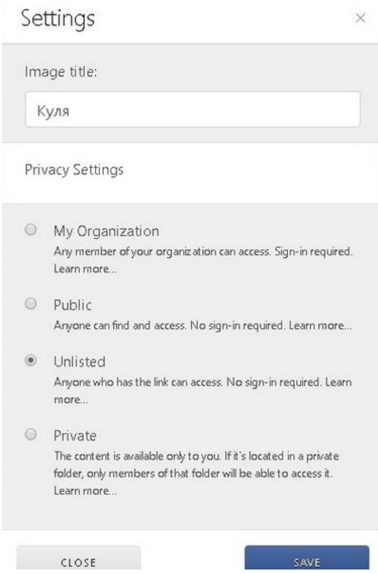
Аналогічно, при повторенні відповідної процедури проставляється стільки міток, скільки потрібно для виконання завдання. Після завершення створення міток треба натиснути «Done» (мал. 23).

Мал. 23. Завершення створення інтерактивного завдання.

Після успішного створення інтерактивного зображення, необхідно перейти на кнопку «Settigns» (мал. 24).

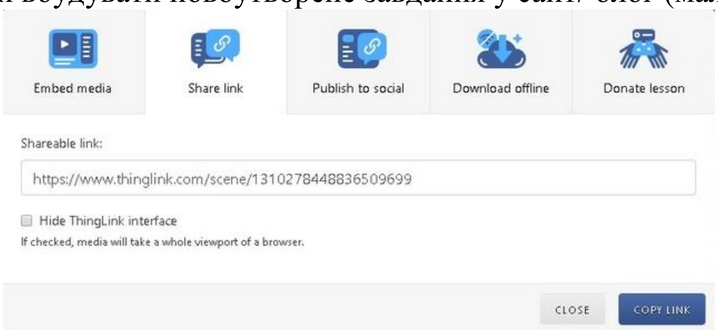
Мал. 24. Кнопка «Settigns».

Вкладка «Settigns» пропонує дати назву новоутвореному зображенню та вибрати умови доступу до завдання (мал. 25): доступний будь-кому; доступний тим, хто має посилання; доступний обраним; нікому недоступний. Після обрання відповідної позиції, треба натиснути «SAVE».



Мал. 25. Вкладка «Settigns».

Після успішного налаштування, треба натиснути «SHARE». У безкоштовній версії застосунку доступно скопіювати посилання на новоутворене завдання або поділитися ним у соціальних мережах чи вбудувати новоутворене завдання у сайт/ блог (мал. 26).



Мал. 26. Вкладка «SHARE».

Коли учням пропонується розв'язати таке інтерактивне завдання, то перше, що він/вона бачить, це яскраве зображення (у даному випадку інсталяцію «Земна куля») з мітками. У мітці «Оклик» зашифровано інформацію про радіус кулі. У мітці «Питання» зашифровано завдання «Знайти об'єм та площу повної поверхні кулі». Учням потрібно безпосередньо розв'язати завдання. У мітці «Підручник» зашифровано теоретичний матеріал.

Зауважимо, що в онлайн-інструменті Thinglink при завантаженні відео необхідно задати час, коли у відео з'являються відповідні мітки завдання. Решта етапів створення інтерактивного завдання аналогічна до створення інтерактивних завдань-зображень.

Отже, переваги використання онлайн-інструменту Thinglink ми вбачаємо в тому, що є:

- безкоштовна версія;
- реєстрація через електрону пошту, акаунти Google та Microsoft, соціальні мережі;
- можливість працювати із зображеннями та відео 360°;
- можливість імпортувати роботи інших користувачів;
- можливість створювати аудіосупровід;
- можливість створювати класи;
- можливість вбудовувати готовий проект у сайт чи блог;
- можливість ділитися у соціальних мережах;
- підвищення інтересу в майбутніх робітників машинобудівного профілю до розв'язування математичного завдання.

Висновки. Використання онлайн-інструментів для створення інтерактивного контенту при вивченні стереометрії учнями ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю дозволяє привернути увагу учнів до розв'язування суто математичних завдань. Інтерактивна оболонка дозволяє зацікавити учнів, математичне наповнення виконує навчальну функцію. Розв'язування таких видів завдань формулює у майбутніх робітників машинобудівного профілю фактологічний рівень математичної компетентності. У подальшому це позитивно вплине на формування праксеологічного рівня математичної компетентності учнів ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю.

Список використаних джерел

1. Концепція інноваційного розвитку загальноосвітніх навчальних закладів. Взято з http://undip.org.ua/photo/koncepciya_ innovaciynogo_rozvytku_ZNZ.pdf.
2. Тарасенкова, Н. А. (2016). Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. Математика в рідній школі, 11 (179), 26-30.
3. Bishop, A., (1989). Review of research on visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), 7-16.
4. Glass, B., Deckert, W., (2001). Making Better Use of Computer Tools in Geometry, Mathematics teacher, Volume 94, Issue 3, Page 224.
5. Milovanović, M., Obradović, J., Milajić, A. (2013). Application of interactive multimedia tools in teaching mathematics - Examples of lessons from geometry. Turkish Online Journal of Educational Technology. 12. 19-31.
6. Wilkie, S., Zakaria, G., McDonald, T., Borland, R. (2018). Considerations for designing H5P online interactive activities. Open Oceans: Learning without borders. Proceedings ASCILITE 2018 Geelong (pp. 543-549).
7. Биков, В. Ю., Лапінський, В. В. (2012). Методологічні та методичні основи створення і використовування електронних засобів навчального призначення. Комп'ютер у школі та сім'ї, 23, 3-6
8. Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Колесник, Т. В., Мальований, Ю. І. (2018). Математика [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: рівень стандарту]. К.: УОВЦ «Оріон».

9. Корольський, В. В., Крамаренко, Т. Г., Семеріков, С. О., Шокалюк, С. В., Жалдак, М. І. (2009). Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики. Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвсього.

10. Пушкарьова, Т. О. (2011). Електронний контент: особливості застосування і нові можливості пізнання світу. Комп'ютер у школі та сім'ї, 4, 7-10.

11. Раков, С. А. (2005). Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Харків: Факт.

12. Таблер, Т. І. (2019). Використання інтерактивного контенту в електронних освітніх ресурсах у навчальному процесі сучасної школи. Ukrainian Journal of Educational Studies and Information Technology, 7(1), 54-66.

ВПРОВАДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ STEM-НАВЧАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ В ЗП(ПТ)О

Оксана Юхименко

Ми живемо в часи стрімких змін і перетворень. Вплив науково-технічного прогресу, розвиток інформаційних технологій приводять до соціально-економічних змін та трансформації ринку праці, відбувається переорієнтація українського суспільства на європейські стандарти й цінності. Усі ці чинники вимагають відповідних системних змін і у сфері освіти. Панівною є думка, що освіта повинна бути випереджальною, відповідати тенденціям розвитку суспільства в майбутньому. У Навчальній програмі для 10-11 класів «Математика. Рівень стандарту» зазначається, що «провідним засобом реалізації вказаної мети є запровадження компетентнісного підходу у навчально-виховний процес загальноосвітньої школи шляхом формування предметних і ключових компетентностей… Значні вимоги до володіння математикою у розв’язуванні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах» [1]. Актуальним напрямом модернізації та інноваційного розвитку природничо-математичної освіти виступає STEM-орієнтований підхід до навчання. Саме STEM-освіта забезпечує всебічну підготовку та отримання знань із різних освітніх царин природничих наук, інженерії, IT-технологій та математики. Цього й потребує опанування сучасних професій.

Розвинені країни світу вже давно впроваджують державні програми в галузі STEM-освіти. Австралія, Китай, Велика Британія, Ізраїль, Корея, Сінгапур, США та інші країни активно вводять STEM-орієнтований підхід до навчання молодого покоління з метою подолання дефіциту фахівців з технічних напрямів. Проте STEM – це не просто технічна освіта. Вона охоплює значно ширші поняття, зокрема сприяє успішному поєднанню креативності та прикладних знань. Цей підхід до навчання дитини передбачає, що за основу береться не набуття знань, а вміння їх здобути, застосувати, не втрачаючи при цьому себе як особистості.

Людина живе у багатогранному середовищі. Похід у кіно, купівля чого-небудь в магазині, поїздка у транспорті, та й загалом, кожна секунда її життя пов’язана з різними сферами пізнання. Наш світ не розділено на окремі дисципліни чи предмети, тому й учням важливо бачити його цілісним. Сьогодні вони часто отримують фрагментарні знання, які можна порівняти з пазлами. І лише у небагатьох учнів ці «пазли» складаються в єдину картину світу, даючи можливість зрозуміти, як застосовувати ті чи інші знання за різних буденних обставин. Доволі часто цей процес проходить з помилками, і саме STEM-орієнтований підхід до навчання дає можливість вчитись комбінувати отримані знання для розв’язання реальних життєвих ситуацій. На перший план виходить здатність навчатись та сприймати зміни, а не самі знання, які нині стають застарілими з неймовірною швидкістю. Учень стає не споживачем, а замовником знань. Вчитель – своєрідним наставником, людиною, що допомагає пояснити, як використовувати потенціал кожної технології для власної користі й користі суспільства.

Всебічно інтегруючись у глобальні світові процеси, Україна також не стоїть осторонь описаних вище освітніх тенденцій. Система STEM-освіти створює основу для успішної самореалізації особистості як фахівця та як громадянина, що відповідає ключовим компетентностям концепції «Нової української школи» [2] та вимогам сучасної економіки – бути конкурентоспроможним як всередині країни, так і на міжнародному ринку праці.

Ця стаття має на меті показати можливості впровадження STEM-орієнтованого підходу до вивчення математики в закладах професійної (професійно-технічної) освіти на прикладі досвіду розробки та застосування цієї методики навчання у Державному навчальному закладі «Черкаський професійний ліцей» (ДНЗ «ЧПЛ»).

У методичних рекомендаціях щодо розвитку STEM-освіти у закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2020/2021 навчальному році зазначається, що створення STEM-простору потребує сучасного обладнання, використання IT-технологій та вимагає змін в організації освітнього процесу [3]. На превеликий жаль, ДНЗ «ЧПЛ» не забезпечений сучасним обладнанням (наприклад, цифровою лабораторією Einstein™), тому впровадження технологій STEM-навчання відбувається за рахунок інших, доступних викладачам, засобів.

У закладі професійно-технічної освіти перед викладачем математики постає завдання створення умов для усвідомлення кожним учнем політехнічного змісту їхнього навчання. Забезпечити формування політехнічних умінь можна через використання в навчальному процесі завдань прикладного (виробничого) змісту. При доборі таких завдань необхідним є залучення додаткового матеріалу, що виходить за межі визначеного навчальною програмою змісту шкільної освіти. У зв'язку з цим викладач мусить познайомитися з виробничим оточенням своїх учнів, професіями, за якими вони навчаються, проаналізувати зміст програм відповідного професійного напряму. Основні критерії добору матеріалу для завдань прикладного змісту: реальність виробничих ситуацій, пізнавальність інформації про відповідну галузь діяльності, реальність числових даних і результатів, лаконічне, без переобтяження професійними термінами, формулювання, основною в задачі має бути матеріал, органічно пов'язаний зі змістом навчальної програми з математики. Розв'язування задач з виробничим змістом викликає в учнів позитивні емоції як до предмета математики, так і до майбутньої професії, підвищує рівень їхньої навченості, зменшує ступінь упередженого ставлення до власних інтелектуальних можливостей [4–7]. Перелічені критерії також були покладені в основу розробки дидактичного засобу навчання «Геометрія і твоя майбутня професія» [8], призначеного для допомоги вчителеві в організації продуктивної навчально-пізнавальної діяльності учнів, формування у них цілісного сприйняття вивчення геометрії, спеціальних дисциплін та виробничого навчання.

Разом з тим, Інститут модернізації змісту освіти зазначає: «Однією з форм STEM-навчання є уроки/заняття, які спрямовані на встановлення міжпредметних зв'язків і сприяють формуванню в учнів цілісного, системного світогляду, актуалізації особистісного ставлення до питань, що розглядаються на уроці/занятті. Такі уроки/заняття можуть проводитися шляхом об'єднання схожої тематики кількох навчальних предметів або формування інтегрованих курсів чи окремих спецкурсів» [3]. Тому в ліцеї запроваджено інтеграцію різних навчальних предметів при вивченні дотичної тематики (математика – фізика, математика – біологія, математика – урок виробничого навчання) [9]. Під час розробки інтегрованих уроків увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями. Вони забезпечують успішне вивчення загальноосвітніх предметів (фізики, біології) та предметів, необхідних для опанування основ майбутньої професії (спеціальної технології, матеріалознавства, креслення). З метою усвідомлення учнями політехнічного змісту навчання підсумкові уроки з геометрії проводяться у майстернях для виробничого навчання.

Так, урок виробничого навчання та геометрії «Кладка кута з пілястром. Узагальнення з теми «Паралельність прямих і площин у просторі» проводиться у майстерні мулярів для учнів, що опановують цю професію. Відповідно до теми уроку виробничого навчання учні виконують кладку кута з пілястром, а потім використовують знання, отримані на уроці геометрії, для перевірки якості збудованих споруд. Учні повторюють аксіоми, теореми з теми «Аксіоми стереометрії. Паралельність прямих і площин у просторі», розв'язують задачі та обґрунтовують їх, використовуючи збудовані ними на уроці виробничого навчання стіни, простінки, кути, обмеження за однорядною системою перев'язування швів. Вони вчаться інтегрувати знання з різних освітніх галузей для розв'язання однієї проблеми. Майстер виробничого навчання перевіряє правильність виконання трудових прийомів, а учні допомагають йому зробити це, використовуючи знання, отримані на уроках геометрії.

Урок «Узагальнення знань з теми «Об'єми тіл обертання» проводиться в лабораторії будови автотранспортних засобів. Учням демонструється, як можна поєднати вивчення геометрії та знання з професії «Слюсар з ремонту колісно-транспортних засобів». Оскільки багато деталей та механізмів вантажних автомобілів мають форму тіл обертання, то вони використовуються як наочність при розв'язуванні задач з геометрії. Учні за допомогою штангенциркуля роблять необхідні вимірювання та обчислюють об'єми фланця маховика колінчастого вала, кулі редукційного клапана масляного насоса, конічної частини рульової цапфи автомобіля КАМАЗ та багатьох інших деталей.

Мейкерство як один із напрямів STEM-освіти застосовується на уроці геометрії на тему «Об'єм призми» для учнів, що опановують професію «Муляр; штукатур». Вони вирізають з паперу розгортки прямокутного паралелепіпеда і трикутної призми та конструюють модель будинку, вимірюючи необхідні довжини сторін многогранників та обчислюючи їхні об'єми. Учні вчаться створювати об'ємно-просторові композиції, визначати мету навчальної діяльності, добирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети. Вони мають можливість переконатися, що навички, отримані на уроці, будуть їм у нагоді й у майбутній трудовій діяльності.

Ефективним засобом формування компетентностей є проєктна діяльність. Виконання STEM-проєктів передбачає інтегровану дослідницьку, творчу діяльність учнів, спрямовану на отримання самостійних результатів. Як відомо, STEM-проєкт – це спосіб досягнення мети шляхом детальної розробки проблеми, що завершується реальним практичним результатом [3]. Прикладом такої діяльності у ДНЗ «ЧПЛ» є робота учнів, що опановують професію «Слюсар з ремонту колісно-транспортних засобів», над проєктом «Геометрія у моїй професії». Завданням проєкту було виявити пошкодження кузова автомобіля, розрахувати кількість і вартість матеріалів для його ремонту та навчитись раціонально використовувати матеріальні ресурси під час ремонтних робіт. Разом з викладачем математики учні визначили алгоритм обчислення площі кузова автомобіля. Оскільки площі окремих частини кузова автомобіля складно знайти, використовуючи відомі формули геометрії, було вирішено застосувати метод математичного моделювання. Для цього окремі елементи кузова автомобіля були описані плоскими многокутниками: трапецією, трикутником, прямокутником, квадратом. Були зроблені необхідні вимірювання, обчислені площі визначених фігур та розраховані кількість і вартість матеріалів, необхідних для ремонту. У підсумку учні пересвідчилися, що знання з математики та отриманий досвід буде корисним у їхній майбутній трудовій діяльності.

У Черкаському професійному ліцеї на уроках геометрії широко застосовується такий елемент STEM-освіти, як фотопроєкт. Фотопроєкт – це фотографічне висловлювання, об'єднання фотографій за схожим принципом, що розкриває певну ідею через смислову і візуальну сутність. Використання методу фотопроєктів спонукає учнів до активних дій із використанням інформаційно-комунікаційних технологій з навчальною метою, сприяє збагаченню власного досвіду та вмінню цим досвідом поділитися, умінню побачити красу в звичайному та формуванню загальнолюдських цінностей – поваги до того, що тебе оточує.

Так, проєкт «Геометрія в архітектурі та промисловості» дає можливість розглянути геометричні об'єкти на будівництві, в архітектурі м. Черкас та інших населених пунктів Черкаської області, виділити геометричні образи в деталях автомобіля та різних промислових об'єктах. Проєкт «Геометрія у природі» має на меті навчити бачити геометричні об'єкти у природі. Його навчальна складова – виділяти геометричні образи у розмаїтті природних ліній; він розвиває увагу, вміння читати природні «креслення», виховує любов до природи. Проєкт «Геометрія на подвір'ї» дозволяє виявити геометричні об'єкти поруч зі своєю домівкою або ліцеєм, повторити геометричні поняття та їх властивості, розвинути уяву, вміння порівнювати, зіставляти, дивитися навколо себе, виховувати повагу до навколишнього світу.

Формуванню всіх цих навичок сприяла робота учнів над спільним фотопроєктом під час карантину, запровадженого з метою запобігання поширенню на території України коронавірусу COVID-19, коли навчання відбувалося дистанційно. Вивчаючи тему «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», учні фотографували вдома та на вулиці об'єкти, які демонструють перпендикулярність прямих у просторі, перпендикулярність прямої і площини, теорему про три перпендикуляри, перпендикулярність площин, визначення відстаней та вимірювання кутів у просторі. Пояснення до кожної світлини із зазначенням необхідної теореми або іншого твердження записували в зошиті. Фото об'єкта, який досліджувався, та фото сторінки зошита із поясненням до нього учні розміщували на власному слайді презентації для спільного редагування, створеної на Google диску викладачем. Учні мали можливість додавати свій коментар до матеріалів, розміщених на всіх слайдах презентації, висловлюючи власну думку щодо відповідності світлини темі з геометрії, яка вивчалася.

Як показує досвід, застосування методу фотопроєктів є ефективним на всіх етапах уроку. Так, на уроці геометрії на тему «Перпендикулярність площин», для учнів, які опановують професію «Муляр, штукатур», на етапі актуалізації опорних знань у формі фронтальної бесіди пропонуються фотографії певних технологічних процесів будівництва монолітно-каркасного будинку. Учні мають назвати найпростіші геометричні фігури, зображені на світлині, що розміщується на слайді презентації до уроку, і дати відповіді на запитання, пов'язані з перпендикулярністю прямих і площин у просторі. За допомогою анімації на фотографії накладаються геометричні побудови до кожного запитання, що сприяє єдиному сприйняттю технологічного процесу будівництва і предмета «Геометрія». Для підвищення ефективності навчання та позитивного сприйняття матеріалу уроку, використовуються запитання від учнів, які перебувають на виробничому навчанні. Вони супроводжуються слайдами, ілюстрованими оригінальними фотоматеріалами, статичними та динамічними моделями технологічних ситуацій, зробленими в майстернях ліцею під час уроків виробничого навчання. На етапі формування нових знань для визначення величини кута між площинами аналізується питання: «Як можна з'ясувати, чи будуть стіни в кімнаті розташовані перпендикулярно?». Застосовуючи фотографії зроблені на уроці виробничого навчання у майстерні мулярів, відбувається демонстрація динамічної моделі реального процесу, а учні дають відповідь на запитання: «Як на практиці перевіряють, чи буде вертикальною збудована стіна відносно площини підлоги?». Оскільки така перевірка ґрунтується на ознаці перпендикулярності площин, то викладач має можливість від демонстрації технологічної ситуації перейти до формулювання і доведення відповідної теореми. Ознака перпендикулярності площин використовується, зокрема, і при зведенні будівель монолітно-каркасним методом, тому на наступному слайді на відповідній фотографії демонструється динамічна модель особливостей зведення стін будівель монолітно-каркасним методом та показується зв'язок між перпендикулярністю і паралельністю площин. На етапі формування вмінь і відпрацювання навичок у формі фронтальної бесіди з метою формування уявлення про використання перпендикулярності площин та ознаки перпендикулярності площин у різних сферах життя людини учням пропонуються питання, пов'язані із зварювальним виробництвом та столярною справою. Запитання супроводжуються слайдами, ілюстрованими оригінальними фотоматеріалами, статичними та динамічними моделями відповідних технологічних ситуацій. Під час колективного виконання вправ учням пропонується розв'язати задачу, складену за наданою фотографією технологічної ситуації за їхньою професією.

Прикладом застосування STEM-підходу при викладанні математики у ДНЗ «ЧПЛ» є задача такого змісту: «Збудували гараж завширшки 4 м. Висота стін 2,2 м. На стіні необхідно виконати отвір для вентиляції на відстані 20 см від стелі. Яка відстань від отвору до точки, що знаходиться посередині ширини підлоги?»

Для виконання цього завдання учні створюють геометричну модель, маючи фотографію будівництва гаража. Розв'язують задачу, обґрунтовуючи геометрично послідовність дій, та інтерпретуючи отриманий результат до реального виробничого завдання. Для підтримки процесу навчання, крім фотографії, учням надається динамічна геометрична модель досліджуваного процесу.

Іншим прикладом доречності застосування фотоілюстрації є розв'язування задачі з підручника [10]: «Задача № 316 (а). Із точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AC = 3$ см і $BD = 4$ см, $CD = 12$ см». Для її розв'язування, з метою формування навичок застосування отриманих знань на практиці, використовується фотографія кімнати у новобудові. Стіни кімнати є моделлю перпендикулярних площин. З використанням анімації, створюється малюнок до задачі, який демонструється учням на слайді.

Таким чином, фотопроєкт дає можливість формувати майже всі групи компетентностей учнів, а саме: інформаційну, соціальну, полікультурну, комунікативну, а також компетентності саморозвитку та самоосвіти.

Перелічені прийоми STEM-освіти застосовуються в навчанні всіх учнів ДНЗ «ЧПЛ», які опановують математику на рівні стандарту. Однак, крім того, STEM-методика використовується і в роботі з найбільш математично обдарованими учнями при підготовці їхніх робіт до участі у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт серед учнів-членів Малої академії наук України. Зокрема учениця ліцею, яка навчалася за спеціальністю «Оператор програмного забезпечення; налагоджувальник технологічного устаткування (електронна техніка)», працюючи над дослідженням на тему «Аналітичні моделі представлення візуальних ознак високотемпературних технологічних процесів» (відділення «Математика», секція «Прикладна математика»), вивчала теоретичні основи зварювальної справи, отримувала практичні навички зі зварювання у спеціалізованій майстерні. Ці знання і навички сприяли кращому розумінню нею структури та особливостей застосування математичних моделей в сучасних інтелектуальних системах управління зварювальними процесами, призначених для використання в роботизованому промисловому обладнанні. В іншому випадку, учениця, яка навчалася за цією ж спеціальністю, готуючи дослідження на тему «Використання математичних методів у дослідженні дискретних сигналів» (відділення «Математика», секція «Прикладна математика»), знайомилася з окремими розділами фізіології людини, інформаційних технологій, метрології.

Дослідницькі проєкти дають можливість учням випробувати свої здібності в нових видах діяльності. Вони бачать, наприклад, як можна використати знання з геометрії про прямокутник, коло, еліпс та їхні властивості для розробки аналітичних моделей, необхідних для управління виробничими процесами, а знання про тригонометричні функції – для дослідження прикладних аспектів застосування математичних методів обробки дискретних сигналів. Така робота сприяла засвоєнню окремих розділів математики поза обсягом обов'язкового навчання відповідно до програми рівня стандарту. Зокрема у згаданих дослідженнях використовувалися перетворення Фур'є, функції Уолша, методи аналітичної геометрії, спектрального аналізу та цифрової фільтрації сигналів. У процесі їхнього виконання застосовувалися середовища математичного моделювання та оригінальне прикладне програмне забезпечення. Рівень завдань за такими темами вимагав досить глибокого ознайомлення з методами науково-дослідної роботи, актуальними науковими напрямами та сучасним математичним інструментарієм дослідників і розробників високотехнологічних проєктів. Загалом, робота над такими проєктами стимулювала процес самовизначення, самоусвідомлення, сприяла розширенню математичного світогляду учнів, усвідомленому вибору напряму подальшого навчання у вищій школі.

Отже, STEM-технології є необхідною складовою навчання математики в закладах професійної (професійно-технічної) освіти. Навіть без необхідного матеріально-технічного забезпечення та сучасного обладнання є можливість реалізувати більшість напрямків, характерних для STEM-освіти: навчальні інтегровані заняття з впровадженням STEM-елементів; мейкерство; STEM-проєкти та ін. Досвід впровадження цих прийомів навчання засвідчує взаємодоповнюваність професійно-технічної та STEM-освіти при формуванні навичок розв'язування складних (комплексних) практичних проблем, забезпечує всебічний розвиток особистості шляхом виявлення її нахилів і здібностей, розвиває навички оволодіння засобами пізнавальної, дослідницької та практичної діяльності, виховує особистість, яка прагне до здобуття освіти упродовж життя, формує уміння практичного і творчого застосування здобутих знань, що цілком узгоджується з положеннями Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) [11].

Список використаних джерел

1. Навчальні програми для 10-11 класів [Електронний документ]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv)
2. Нова українська школа [Електронний документ]. Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola)
3. Лист ІМЗО від 19.08.2020 № 22.1/10-1646 “Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2020/2021 навчальному році” [Електронний документ]. Режим доступу: https://imzo.gov.ua/2020/08/20/lyst-imzo-vid-19-08-2020-22-1-10-1646-metodychni-rekomendatsii-shchodo-rozvytku-stem-osvity-v-zakladakh-zahal-noi-seredn-oi-ta-pozashkil-noi-osvity-u-2020-2021-navchal-nomu-rotsi/)
4. Юхименко, О. В. (2007). Задачі з виробничим змістом на уроках алгебри. Математика. К.: Шкільний світ. № 3. 1-6.
5. Юхименко, О. В. (2008). Об’єм тіл обертання. Урок геометрії у професійно-технічному навчальному закладі. Математика. К.: Шкільний світ. № 3. 11-14.
6. Юхименко, О. (2013). Розробка уроку з геометрії «Перпендикулярність площин». Профтехосвіта, №1. (е-журнал) [Електронний документ]. Режим доступу: http://www.osvitaua.com/shkilniy-svit/evers.html)
7. Юхименко, О. В. (2015). Формування практичної компетентності учнів на уроках математики в системі професійно-технічної освіти. Проблеми математичної освіти. Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції „Проблеми математичної освіти” (ПМО – 2015), м. Черкаси, 4-5 червня 2015 р. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького.
8. Юхименко, О. В. (2013). Дидактичний засіб навчання геометрії учнів у групах професійного спрямування. Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції „Проблеми математичної освіти” (ПМО – 2013), м. Черкаси, 8-13 квітня 2013 р. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б.Хмельницького. 115-116.
9. Юхименко, О. В., Пірус, В. М. (2014). Застосування інтегративного підходу при викладанні фізики і математики. Профтехосвіта. № 7. 37-45.
10. Бурда. М. І., Колесник, Т. В., Мальований, Ю. І., Тарасенкова, Н. А. (2011). Математика: Підруч. для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів: Рівень стандарту. – К. : Видавничий дім «Освіта». 288 с.
11. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) [Електронний документ]. Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text)

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНИЙ
ТА МЕТОДИЧНИЙ КОМПОНЕНТИ
ПІДГОТОВКИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

СТРАТЕГІЇ РОЗВИТКУ ГОТОВНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ НАВЧАТИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

Вадим Кірман

Вступ. Комбінаторна змістова лінія шкільного курсу математики має тенденцію перетворитися на одну з найважливіших через важливість дослідження дискретних структур та необхідність пропедевтики теоретико-ймовірнісних уявлень. У зв'язку з цим важливою стає задача підготовки вчителя до реалізації навчання учнів розв'язувати комбінаторні задачі. Навички розв'язування математико-комбінаторних задач, значну частину яких становлять задачі перелічувальної комбінаторики, починають формуватися ще в шкільному курсі, потім – в педагогічному університеті і далі набувають розвитку в системі неперервної післядипломної математичної освіти. Водночас численні спостереження та наші дослідження [1; 2] свідчать про наявність глибинних проблем, перш за все, в математичній підготовці вчителів щодо розв'язування комбінаторних задач, отже, питання розвитку готовності вчителя математики навчати розв'язування комбінаторних задач стає актуальним. У структурі готовності вчителя навчати розв'язування комбінаторних задач можна виділити математичну, спеціально-методичну та технологічну складові. Дві останні, очевидно, хоча і мають певну специфіку, але в основному визначаються характером математичної діяльності. Тобто методично грамотний учитель за наявністю відповідних математичних навичок зможе ефективно організувати процес навчання. Отже, специфічною проблемою для комбінаторики стає саме математична складова і задачею системи неперервної математичної освіти стає розвиток навичок вчителя розв'язувати різноманітні комбінаторні задачі.

Огляд останніх публікацій за темою. Ми будемо дотримуватися концепції Н. Тарасенкової про структурування математичної компетентності та виділення в ній відповідних "підкомпетентностей" [3]. Зокрема можна вести розмову про комбінаторну, а точніше, математико-комбінаторну компетентність вчителя математики, розвиток якої ми будемо досліджувати в системі післядипломної педагогічної освіти. Відповідні питання неможливо розкрити без розуміння основних тенденцій післядипломної педагогічної освіти, що схарактеризовані в роботах [4; 5]. Сучасні тенденції професійної математичної педагогічної освіти базуються на компетентністному підході [6; 7], також доведено ефективність інтеграції математичної та методичної підготовки майбутнього вчителя [8]. Для формування змісту післядипломної педагогічної освіти вчителя математики значна увага дослідниками надається спеціально-дидактичним питанням [9; 10], водночас у наших роботах підкреслюється необхідність активного розвитку та удосконалення математичних компетентностей у системі післядипломної педагогічної освіти [1; 11; 12]. Зміст комбінаторної складової математичної освіти описано в класичних роботах [13; 14] та особливості змісту для математичної педагогічної освіти у [15; 16; 17]. У наших дослідженнях [18] розкрито основні принципи розвитку математико-комбінаторної компетентності вчителів у системі післядипломної педагогічної освіти та висвітлено необхідність узагальнень під час розвитку комбінаторної компетентності [19].

Мета дослідження. Метою дослідження є обґрунтування та побудова можливих варіантів змісту післядипломної математичної освіти в галузі комбінаторики, розробка підходів до реалізації змісту, аналіз результатів апробації та впровадження.

Виклад основного матеріалу.

З огляду на те, що структура професійної компетентності вчителя має формуватися відповідно до характеру його професійної діяльності або можливої професійної діяльності в майбутньому, нами показано, що ефективне вивчення комбінаторики в школі можливе лише завдяки неперервної пропедевтики, тому вчитель має бути готовим до відповідної діяльності [18]. Вивчення комбінаторики на пропедевтичному рівні породжує специфічну математичну діяльність, що пов'язана з розв'язуванням комбінаторних задач без звернення до теоретичних фактів, а лише на наочно-інтуїтивному рівні з використанням основних правил комбінаторики. Діяльність вчителя математики пов'язана з навчанням розв'язувати задачі про основні комбінаторні сполуки та їх гібриди з використанням базових фактів комбінаторики різної складності. Ми виходимо з гіпотези про ефективність систематичного вивчення комбінаторики лише після пропедевтичного етапу. Діяльність учителя також передбачає узагальнення комбінаторних задач, розв'язування складних задач з більш широким апаратом при поглибленому вивченні математики та індивідуальній творчій роботі зі здобувачами освіти. Усі ці фактори формують зміст післядипломної освіти для удосконалення комбінаторної компетентності вчителів математики.

У закладах післядипломної освіти, на нашу думку, є змішані форми навчання. Чимало матеріалів вчителі отримують через навчальні платформи, опрацьовуючи лекції, віртуальні тренінги, проходячи тестування тощо. Для формування ефективних методик навчання необхідно визначитись з адекватними для відповідних задач методами. Треба усвідомлювати, що, незважаючи на деякі проблеми в математичній підготовці в галузі комбінаторики в значної групи вчителів, більшість теоретичного матеріалу є знайомим учителям. Отож активізація пізнавальної діяльності для вчителя, на нашу думку, відбудеться при використанні класичного методу доцільних задач, який буде використовуватись у симбіозі з іншими методами, але буде стрижневим. Отож в подальшому при формуванні змісту ми будемо ілюструвати його, будуючи ланцюжок базових ключових задач, які описують основні математичні ідеї.

Проаналізуємо можливий зміст комбінаторної компетентності вчителя математики, який формується на базі можливої діяльності учителя. Спочатку розглянемо пропедевтику базових комбінаторних понять. Неформально елементарна комбінаторика базується на основних правилах: правилі множення та правилі додавання. У нашій роботі [11] описано підходи до формалізації відповідних тверджень та їх строгих доведень. Отже, для правила додавання відповідне формальне твердження має таку структуру: якщо скінчені множини A_i попарно не перетинаються, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{l} A_i\right| = \sum_{i=1}^{l} |A_i|,$$

тут $|X|$ – кількість елементів скінченої множини X.

Аналогічно, правило множення формально (хоча це не завжди відповідає змісту конкретних задач) можна описати мовою декартових добутків. А саме, якщо задано l множин $A_1, A_2, \dots A_l$, то множину усіх можливих впорядкованих наборів $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, де $a_1 \in A_1, \dots$, $a_l \in A_l$, називаємо декартовим добутком множин $A_1, A_2, \dots, A_l$ та позначаємо $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_l$. Тоді справедливе співвідношення:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_l| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_l|.$$

Неформально правила додавання та множення легко формулюються мовою дій. Далі ми покажемо, що можна побудувати неформальну схему, що ілюструє основні поняття елементарної комбінаторики на інтуїтивному рівні (більшість комбінаторних понять у шкільному курсі також не формалізовано). Ця схема являє собою гнучкий ланцюжок задач, кожна з яких підводить до того чи іншого комбінаторного поняття. Опишемо цю схему в такий спосіб – зафіксуємо етапи та для кожного етапу запропонуємо задачі патерни.

Етап перший – експериментальне обґрунтування правил (принципів) множення та додавання мовою дій. Після простих ілюстрацій з деревом вибору в патерни першого етапу можна запропонувати такі відомі задачі [20]:

Приклад 1. В одному магазині є 7 різних чашок і 3 різних блюдці. Скількома способами можна утворити комплект із чашки з блюдцем?

Розв'язання. Якщо ми купуємо деяку чашку, то до неї можна обрати одне з трьох блюдець. Так як чашок усього 7, то кількість можливих комплектів 7 · 3 = 21.

Приклад 2. У тому ж магазині є ще 5 ложок. Скількома способами можна утворити комплект з чашки, блюдця, ложки?

Розв'язання. Якщо ми оберемо будь-який комплект з попередньої задачі, то його можна доповнити ложкою 5 способами. Тому загальна кількість компонентів дорівнює 21 · 5 = 105.

Приклади на зразок розглянутих прикладів 1 і 2 дозволяють сформулювати правило множення мовою дій, а саме: якщо послідовно виконуються k дій $Д_1 \to Д_2 \to ... \to Д_k$, причому кількість способів виконання кожної наступної дії не залежить від того, як виконувалась попередня, то тоді кількість способів виконання ланцюжка дій дорівнює добутку кількості способів виконання кожної дії. На базі правила множення на першому етапі можна розглядати підтверджувальні ілюстративні задачі.

Приклад 3. У деякій країні є міста А, Б, В. З міста А в Б веде 7 доріг, з Б у В – 4 дороги. Скількома способами можна переїхати з міста А в місто В (рис. 1) ?

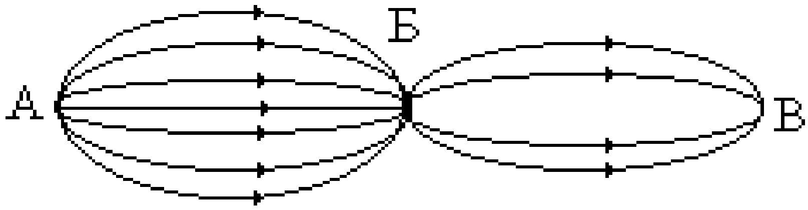


Рис. 1. Ілюстрація до прикладу 3.

Розв'язання. З правила множення випливає, що шукана кількість дорівнює 7 · 4 = 28.

Тривіальні приклади також приводять до формулювання правила додавання: якщо для досягнення деякої мети треба виконати одну з k дій $Д_1, Д_2, ..., Д_k$, причому способи виконання для всіх дій різні, то тоді число способів досягнення мети дорівнює сумі кількості способів виконання всіх дій.

Етап другий – комбіноване застосування правил множення та додавання. Наведемо приклади задач-патернів.

Приклад 4. У даній країні в місто Д з міста А можна проїхати тільки через міста Б і В або через місто Г (рис. 2). Скількома способами можна доїхати з міста А в місто Д, якщо з А до Б веде 5 доріг, з Б до В – 3, з В до Д – 3, з А до Г – 4, з Г до Д – 4?

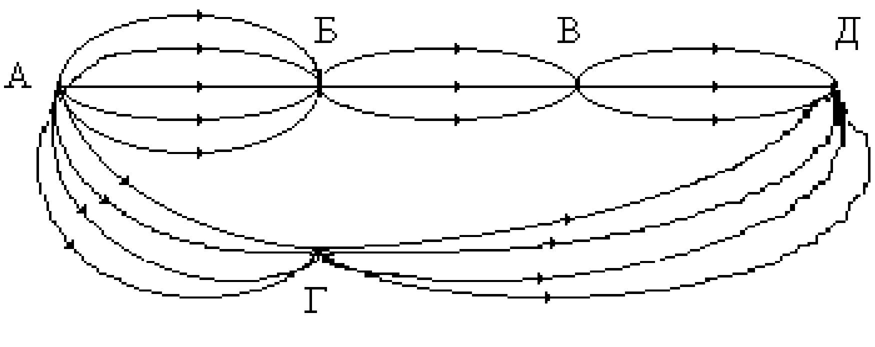


Рис. 2. Ілюстрація до прикладу 4.

Розв'язання. З міста А до міста Д можна проїхати маршрутами АБВД або АГД.

Для АБВД маємо: 5 · 3 · 3 = 45 (способів).

Для АГД маємо: 4 · 4 = 16 (способів).

Тому всього маємо: 45 + 16 = 61 (спосіб).

Приклад 5. У країні з попередньої задачі побудували дві дороги між Г і В із двостороннім рухом. Скількома способами можна доїхати з А до Д так, щоб кожною дорогою не проїжджати більше як один раз (рис. 3)?

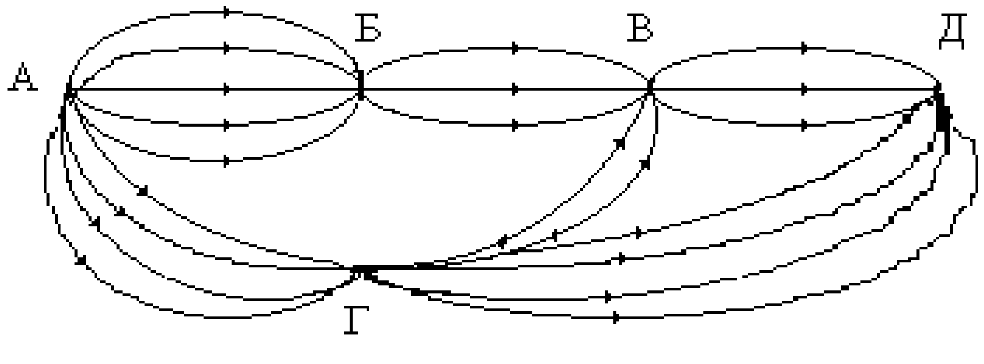


Рис. 3. Ілюстрація до прикладу 5.

Розв'язання. Можливі маршрути:

АБВД – $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ (способів);
АГД – $4 \cdot 4 = 16$ (способів);
АБВГД – $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$ (способів);
АГВД – $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ (способів);
АБВГВД – $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 90$ (способів);
АГВГД – $4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 32$ (способи);

Тому переїхати з А в Д можна $45 + 16 + 120 + 24 + 90 + 32 = 327$ способами.

Приклад 6. У магазині, як завжди, продають 7 чашок, 3 блюдці, 5 ложок. Скількома способами можна купити дві різні речі з різними назвами?

Розв'язання. Можливі такі варіанти.

Купуємо чашку з блюдцем – $7 \cdot 3 = 21$ (спосіб).
Купуємо чашку та ложку – $7 \cdot 5 = 35$ (способів).
Купуємо блюдце та ложку – $3 \cdot 5 = 15$ (способів).

Тому всього – $21 + 35 + 15 = 71$ спосіб.

Приклад 7. Алфавіт деякої мови складається з трьох букв А, Б, В. Слова в цій мові не можуть складатися більше ніж з 4 букв. Скільки слів у цій мові?

Розв'язання. Слів з однієї букви – 3, з двох – 32, з трьох – 33, з чотирьох – 34, тоді всього слів: 3 + 32 + 33 + 34 = 120.

Етап третій. Неформальне введення основних комбінаторних сполук.

Приклад 8 (розміщення без повторень). У групі 30 студентів. Скількома способами можна обрати старосту, його заступника і фізорга?

Розв'язання. Вважаємо, що можна виконати три дії:

1) обираємо старосту (30 способів);
2) обираємо заступника (29 способів);
3) обираємо фізорга (28 способів)

Тоді загалом $30 \cdot 29 \cdot 28$ способів.

Приклад 9 (розміщення без повторень). Скількома способами можна поставити на шахівницю білу та чорну туру, щоб вони не били одна одну?

Розв'язання. Білу туру можна поставити на 64 поля. Вона б'є 15 клітинок. Залишається 49. Тому можлива кількість варіантів: $64 \cdot 49 = 3136$.

Приклад 10. (Розміщення з повтореннями). Алфавіт деякої мови складається з трьох букв А, Б, В. Скільки існує слів у цій мові завдовжки 10 букв?

Розв'язання. Першою дією при формуванні слова визначаємо першу букву (3 способи), другою дією – другу букву (3 способи) і т. д. Таким чином, загалом 3^{10} способів утворити слово.

Приклад 11 (перестановки без повторень). Скількома способами 10 підручників можна розставити на полиці в ряд?

Розв'язання. Для утворення розстановки підручників треба виконати десять дій: поставити перший підручник (10 способів), за ним другий (9 способів), … , останній (1 спосіб).

Тоді загалом маємо $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 1 = 10!$ способів.

Приклад 12 (перестановки без повторень). Скількома способами 10 підручників можна розставити на полиці так, щоб підручники з математичного аналізу, лінійної алгебри та диференціальних рівнянь стояли поруч?

Розв'язання. Якщо ці три підручники стоять разом, то їх можна вважати одним об'єктом, назвемо його X. Тоді для утворення розстановки підручників треба виконати дві дії:

Дія 1: сформувати X (3! способів)

Дія 2: переставити 8 об'єктів (8! способів)

Тоді всього маємо 3!8! способів.

У задачах 13-16 треба обчислити скільки слів (разом з даним) можна утворити, переставляючи букви. Ці приклади пояснюють формулу кількості перестановок з повтореннями.

Приклад 13 (перестановки з повтореннями). Скільки слів (разом з даним) можна утворити, переставляючи букви у слові „МЕТРО"?

Розв'язання. Усі букви різні, тому слів – 5!

Приклад 14 (перестановки з повтореннями). Скільки слів (разом з даним) можна утворити, переставляючи букви у слові „БАРАН"?

Розв'язання. Будемо вважати, що букви „А" у слові різні – A_1 та A_2, тоді слів – 5! Слів треба зменшити в 2 рази: 5! : 2 = 120 : 2 = 60.

Приклад 15 (перестановки з повтореннями). Скільки слів (разом з даним) можна утворити, переставляючи букви у слові „ПАРАБОЛА"?

Розв'язання. Якщо букви „А" різні – A_1, A_2, A_3, то існує 8! слів. Але A_1, A_2, A_3 можна переставляти 3! способами. Тому 8! слів розбиваються на 3! однакових і кількість слів 8! : 3!.

Приклад 16 (перестановки з повтореннями). Скільки слів (разом з даним) можна утворити, переставляючи букви у слові „АБРАКАДАБРА"?

Розв'язання. У даному слові 11 букв. Будемо вважати, що маємо букви A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $Б_1$, $Б_2$, $Р_1$, $Р_2$. Тоді загалом слів $\frac{11!}{5!2!2!}$.

Приклад 17 (розбиття на класи). Група з 25 студентів вирішила виїхати на пікнік та замовила 4 мікроавтобуси, кожен з яких може вмістити 7 пасажирів, а інші три по 6 пасажирів. Скількома способами можна розділити групу за мікроавтобусами?

Розв'язання. Позначимо автобуси буквами А, Б, В, Г. Подумки вишикуємо учнів у шеренгу та призначимо кожному учню позначення автобуса, де він має їхати. Тоді утвориться слово завдовжки 25 букв, у якому букви А, Б, В, Г зустрічаються відповідно 7, 6, 6, 6 разів. Таких слів $\frac{25!}{7! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}$.

Приклад 18 (розбиття на класи плюс правило додавання). Група з 25 студентів вирішила виїхати на пікнік та замовила 4 мікроавтобуси, кожен з яких може вмістити не більше за 7 пасажирів, але менше від 6 пасажирів водії везти відмовляються. Скількома способами можна розділити групу за мікроавтобусами?

Розв'язання. З умови задачі випливає, що в одному автобусі повинно бути 7 пасажирів, а у трьох інших по 6. Пронумеруємо автобуси. Очевидно, що можливі чотири випадки: 7 у першому автобусі, 7 у другому, 7 у третьому, 7 у четвертому. Розглянемо перший випадок. Тоді кількість способів розподілити студентів за автобусами знаходимо за схемою попереднього прикладу: $\frac{25!}{7! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!}$. Для інших випадків ця кількість така сама. Остаточно маємо кількість способів розсадки студентів: $\frac{4 \cdot 25!}{7! \cdot (6!)^3}$.

Приклад 19 (комбінації без повторень). Скількома способами з 9 різних олівців можна обрати 3?

Розв'язання. Розмістимо олівці в один рядочок. Якщо олівець обирається, то позначимо його буквою "а", якщо ні – "б". Таким чином, утворюється слово завдовжки 9 букв, у якому 3 букви "а" та, відповідно, 6 букв "б". Таких слів $\frac{9!}{3!\cdot 6!}$.

Формально, але не даючи строгих означень, можна працювати з позначенням:

$$C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}.$$

Приклад 20 (комбінації без повторень). Скількома способами можна вибрати 2 олівці й 3 ручки з 6 різних олівців і 8 різних ручок?

Розв'язання. Олівці можна вибрати C_6^2 способами, а ручки C_8^3 способами. Отже, загалом $C_6^2 \cdot C_8^3 = 840$ способів.

Приклад 21 (комбінації без повторень). Скількома способами з колоди в 52 карти (з них 4 тузи і 4 королі), можна вибрати 6 карт, що мають туза і короля однієї масті, а інші – не тузи і не королі.

Розв'язання. Візьмемо туза і короля однієї масті, тоді добрати 4 карти до 6 можна C_{52-8}^4 способами. Так як у колоді карт 4 масті, то кількість способів дорівнює $4C_{44}^4$.

Приклад 22 (комбінації без повторень плюс перестановки без повторень). У хореографічному гуртку займаються 18 дівчат та 10 юнаків. Скількома способами з них можна утворити 6 танцювальних пар?

Розв'язання. Шість пар можна утворити, якщо виконати три дії.

Дія перша – обрати 6 дівчат, це можна зробити C_{18}^6 способами.

Дія друга – обрати 6 юнаків, це можна зробити C_{10}^6 способами.

Дія третя – утворити 6 пар з обраних дівчат та юнаків. Цю дію можна уявити так. Дівчата вишикуються в шеренгу, а юнаки підходять до них. Таким чином, задача знаходження кількості способів виконання цієї дії зводиться до задачі обчислення кількості перестановок з 6 елементів. Таких перестановок 6!.

Отже, загалом кількість способів утворити 6 пар дорівнює $6!C_{18}^6 C_{10}^6$.

Приклад 23 (комбінації з повтореннями, ідея кодування). У кондитерському відділі продають 4 типи тістечок. Скількома способами можна купити 20 тістечок, якщо кожного типу тістечок у відділі більше за 20 одиниць?

Розв'язання. Будемо вважати, що кількість відповідних тістечок t_1, t_2, t_3, t_4. Тоді задача зводиться до пошуку четвірок (t_1, t_2, t_3, t_4) цілих невід'ємних чисел, для яких справедливе рівняння:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 20.$$

Такі четвірки природно закодувати двійковими словами типу $\overbrace{0...0}^{t_1}1\overbrace{0...0}^{t_2}1...1\overbrace{0...0}^{t_4}$ завдовжки 23, у яких 20 нулів, а таких слів, очевидно, C_{23}^{20}.

Приклад 24 (зведення до комбінацій з повтореннями). У кондитерському відділі продають 4 типи тістечок. Скількома способами можна купити 20 тістечок, якщо кожного типу тістечок у відділі більше за 20 одиниць і в такому разі хоча б одне тістечко кожного типу купується?

Розв'язання. Можна вважати, що вже купили 4 тістечка. Тоді треба купити ще 16 тістечок 4 типів. Проводячи міркування, аналогічні до прикладу 23, приходимо до висновку, що купити можна $C_{16+4-1}^{16} = C_{19}^{16} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 969$ способами.

Описані вище 24 приклади-патерни фактично охоплюють увесь клас задач шкільної комбінаторики. Описані три етапи є стрижнем активної пропедевтики комбінаторики до її систематичного вивчення. Учитель для здійснення своєї пропедевтичної діяльності має володіти відповідною технікою міркувань. Звернемо увагу, що прикладам 1-24 притаманна суміш наочно-інтуїтивного та напівформального рівнів обґрунтувань [21], у той же час, базові твердження комбінаторики тут строго не обґрунтовуються, лише ілюструються неявно за допомогою дерев вибору, тому тут можна вести розмову лише про наочно-інтуїтивний рівень обґрунтувань. Але, як ми бачимо, вже на наочно-інтуїтивному рівні можна розв'язувати основні елементарні комбінаторні задачі.

Для реалізації діяльності вчителя, пов'язаної з навчанням комбінаторики відповідно до чинних програм, необхідно, щоб вчитель володів формулюваннями відповідних означень та тверджень, по можливості вмів строго їх доводити. Водночас відповідні формулювання не можна вважати строгими. Наведемо приклади типових означень (вони можуть змінюватись, але рівень формалізації залишається тим самим). Ми наводимо типові означення близько до [13].

1. *"Будемо казати, що множину A впорядковано, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певний номер елемента від 1 до n, де n число елементів множини, так що різним елементам відповідають різні числа. Якщо кожному елементу множини приписується деякий номер, то будемо казати, що маємо справу з упорядкованою множиною (упорядкованим набором без повторень)".*

2. *"Упорядковані l-елементні підмножини називають розміщеннями з n по l."*

3. *"Комбінація з n елементів по l – це невпорядкований набір із заданих n елементів довжини l, у якому елементи не повторюються".*

4. *"Комбінаціями з m елементів по n елементів з повтореннями (m по n з повтореннями) будемо називати групи, що містять n предметів, причому кожен предмет належить до одного з m типів, а порядок розташування предметів в групі не є істотним. Тобто, комбінація з повтореннями – це невпорядкований набір довжини n, у якому елементи належать деяким m типам".*

Наведені формулювання деяких комбінаторних понять, а разом з ними й обґрунтування основних комбінаторних тверджень, як бачимо, мають напівформальний характер. Робота на цьому рівні в комбінаториці – основне поле діяльності вчителя під час навчання комбінаторики. Водночас при обґрунтуванні математичних тверджень залишаються основним інструментом неформальні принципи комбінаторики, що зводяться неявно до дерев вибору, та методи елементарної алгебри. Так, "напівформальне" доведення формули числа комбінацій без повторень можна побудувати з використанням ланцюжка дій: спочатку формуємо комбінацію (кількість способів невідома), а потім розміщення без повторень. Потім правило множення дає просте рівняння для невідомого числа комбінацій. Більш строге доведення може бути з використанням, наприклад, методу математичної індукції. Важливо, щоб учитель усвідомлював рівень строгості для відповідних доведень.

Рівень формалізації може бути підвищеним і при формулюванні означень основних комбінаторних сполук. Наприклад, у нашій роботі [22] пропонуються такі конструкції.

Нехай задано базову множину $S=\{a_1,...,a_n\}$. Тоді розміщення – будь-яке відображення множини $F_k=\{1,...,k\}$ у множину S. Розміщення без повторень – це ін'єкції F_k в S. Для випадку, коли $n=k$, перестановки з n елементів – це бієкції між F_k та S. Перестановка з повтореннями – це сюр'єкція F_k та S. При цьому визначається набір цілих невід'ємних чисел $(t_1,...,t_n)$ – тип перестановки, що t_j це кількість прообразів елемента a_j, $j=1,...,n$. Комбінації, мовою відображень, це відображення базової множини S у множину цілих невід'ємних чисел. Якщо розглядаємо відображення f, таке, що $f(S)=\{0;1\}$, то мова йде про комбінації без повторень. Комбінація з повтореннями із заданих n елементів по m – це таке відображення $f:S\to\{0;1;2...\}$, що $f(a_1)+...+f(a_n)=m$.

Важливо проаналізувати інструментарій розв'язування елементарних комбінаторних задач. Крім елементів елементарної алгебри з використанням методу математичної індукції, до елементарного інструментарію можна віднести метод рекурентних співвідношень. Він базується на такій схемі. Нехай послідовність задано лінійним однорідним співвідношенням

$$a_{n+k} = \omega_1 a_n + \ldots + \omega_k a_{n+k-1}.$$

Тоді многочлен

$$P(x) = x^k - \omega_k x^{k-1} - \ldots - \omega_1$$

називають характеристичним многочленом відповідного лінійного однорідного рекурентного співвідношення.

Алгоритм розв'язування лінійних однорідних співвідношень базується на таких твердженнях [15]:

1) *нехай γ – корінь характеристичного многочлена P(x). Тоді послідовність $\{c\gamma^n\}$, де c – довільна константа, задовольняє лінійне і однорідне рекурентне співвідношення.*

2) *Якщо $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ – прості корені характеристичного многочлена, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд:*

$$a_n = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \ldots + c_k\gamma_k^n,$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні константи.

3) *Якщо γ_i – корінь кратності τ_i $(i = 1, \ldots, s)$ характеристичного многочлена, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд:*

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}\left(c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{i\tau_i}n^{\tau_i - 1}\right)\gamma_i^n,$$

де c_{ij} – довільні константи.

Знаючи загальний розв'язок рекурентного рівняння за початковими умовами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, можна знайти невідомі сталі c_{ij} і тим самим отримати розв'язок рівняння з даними початковими умовами.

Неоднорідне лінійне рівняння має вигляд:

$$a_{n+k} = \omega_1 a_n + \ldots + \omega_k a_{n+k-1} + f(n).$$

І, очевидно, загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння представляється у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного лінійного рівняння і деякого часткового розв'язку неоднорідного рівняння. В окремих випадках є відомі загальні "рецепти" знаходження часткового розв'язку.

Типовими прикладами використання рекурентних співвідношень в комбінаториці можуть служити такі задачі-патерни [23].

Приклад 25. Скількома способами смугу $2 \times n$ можна розрізати на прямокутники 2×1?

Розв'язання. Нехай шукана кількість способів u_n. Очевидно, що $u_1 = 1$ та $u_2 = 2$. Нехай є смуга завдовжки *n+2*. Якщо вона розбита на прямокутники, то можливі такі варіанти: а) останній прямокутник розміщений вертикально; б) два останніх прямокутники розміщені горизонтально. У випадку а), крім останнього прямокутника, залишається смуга $2 \times (n+1)$, яку можна розрізати u_{n+1} способами, а у випадку б) смуга $2 \times n$, яку можна розрізати u_n способами. Отже, маємо:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ (*)}.$$

Зі співвідношення (*) бачимо, що доцільно вважати $u_0 = 1$. Приходимо з використанням описаної вище схеми до формули Біне:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Приклад 26. Матеріальна точка переходить за вершинами трикутника ABC, за один крок переходячи в одну з двох сусідніх вершин. Скількома способами вона може потрапити з вершини A до тієї ж вершини за n кроків?

Розв'язання. Нехай A_n – кількість траєкторій завдовжки n, які ведуть з точки A в точку A. Аналогічно вводимо послідовності B_n та C_n. Очевидно, що $A_1 = 0$ та $A_2 = 2$, а також, що виконуються співвідношення:

$A_{n+1} = B_n + C_n$,

$B_{n+1} = A_n + C_n$,

$C_{n+1} = A_n + B_n$.

Перепишемо дві останні рівності у вигляді:

$B_n = A_{n-1} + C_{n-1}$,

$C_n = A_{n-1} + B_{n-1}$.

Додаючи ці дві рівності до першої, маємо:

$A_{n+1} = 2A_{n-1} + A_n$.

Використовуючи характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$,

приходимо до загального розв'язку:

$A_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$.

Враховуючи початкові умови, остаточно маємо:

$A_n = \frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n$.

Для більш глибинних комбінаторних задач використовують так звані твірні функції. Значну кількість задач-патернів з використанням твірних функцій продемонстровано в [24], тому ми тут не будемо зосереджувати увагу на таких задачах.

Підкреслимо, що вище ми розглядали так звані перелічувальні задачі комбінаторики. У шкільній практиці існує ряд задач творчого, евристичного характеру, що мають комбінаторний зміст. До них відносяться задачі доведення існування, конструювання об'єктів, порівняння кількості елементів скінчених множин тощо. Для розв'язування відповідних задач можуть бути використані як стандартні методи підрахунків перелічувальної комбінаторики, так і спеціальні методи, наприклад, встановлення типів відображень, побудова процесів та інші. Приклади таких задач зібрано, наприклад, у [25; 26].

Підведемо підсумки щодо структури змісту післядипломної освіти вчителів у галузі комбінаторики. Проводячи аналіз прикладів-патернів, можна запропонувати тривимірну структуру цього змісту: комбінаторні об'єкти (КО), методи (інструменти) дослідження комбінаторних об'єктів (І), рівень формалізації (РФ). Шкала КО – категорійна, номінальна, включає основні типи комбінаторних сполук (розміщення, комбінації, перестановки) з повтореннями та без повторень, їх гібриди та інші дискретні об'єкти (графи, масиви, відношення на скінчених множинах тощо). До гібридів можна відносити такі об'єкти, як, наприклад, комбінації без повторень, елементами яких є перестановки, чи розміщення з комбінацій. Звернемо увагу, що ідентифікація гібридів може стати складною задачею. Наприклад, розглянемо ситуацію, коли групу з 10 людей треба розбити на дві рівні підгрупи. Якщо ставиться запитання, скількома способами це можна зробити, то відповідь $\frac{10!}{(5!)^2}$ не є правильною. Для того, щоб це зрозуміти, треба усвідомити структуру відповідного комбінаторного об'єкта – невпорядкований набір (множина) з двох комбінацій (підмножин), що не перетинаються, із заданих 10 елементів по 5. Із цих міркувань запропонований вираз ще треба поділити на 2.

Шкала РФ, очевидно, відображає дані з порядковою структурою. Ми виділяємо чотири рівні формалізації: наочно-інтуїтивний, напівформальний, формальний, сильно формалізований. Останній майже не використовується в шкільній практиці, передбачає аналіз з аксіоматичною базою. Введення порядку на шкалі І ускладнюється наявністю комбінованих методів дослідження. Будемо комбіновані методи розміщувати за таким правилом. Якщо виписано деякий порядок $M_1 \prec M_2 \prec \ldots \prec M_n$, то якщо комбінований метод містить M_n, то цей метод має бути розміщений тільки після M_n. Якщо є два методи, що містять M_n, то їх далі розміщуємо за лексикографічним принципом відносно методів з рівнем, меншим від M_n. Шкала І спочатку формується базовими методами: арифметичні обчислення, алгебраїчні перетворення, лінійні рівняння, системи, рівняння вищих степенів, метод математичної індукції, рекурентні співвідношення, твірні функції, теоретико-множинний аналіз.

Звернемо увагу, що заповнення шкали не носить статичний характер. Гіпотетично процес заповнення (маркування) шкал може продовжуватися нескінченно. Такий підхід будемо ототожнювати з принципом відкритості шкал.

Отже, нами побудовано тривимірний семіотичний простір (КО; І; РФ). Загальною схемою (ЗС) реалізації стратегії розвитку компетентності вчителів у галузі комбінаторики можна вважати недетерміновану траєкторію у цьому просторі. Принциповою є позиція недетермінованості, що передбачає гнучкість, переключення на інші пріоритети, наявність точок біфуркації.

Принцип паралелізму для неперервної післядипломної математичної освіти передбачає удосконалення, формування та розвиток навичок, які проектуються в навчальну діяльність, а також їх узагальнення. Виходячи з принципу паралелізму для неперервної післядипломної математичної освіти, пропонуємо таку базову триетапну послідовність. Перший етап – модельно-пропедевтичний. На цьому етапі ставиться задача засвоїти технологію розв'язування комбінаторних задач, що відображають послідовність прикладів-патернів 1–24. Цей етап розвиває техніку розв'язування комбінаторних задач вчителями та моделює їх можливу пропедевтичну діяльність. Другий етап – основний. Повторюються означення комбінаторних сполук, обговорюються доведення основних формул, ключові задачі, у тому числі підвищеної складності. Третій етап – узагальнювальний. Наводяться формальні означення комбінаторних сполук, розглядаються узагальнення класичних задач на абстрактні схеми для відношень на множинах. Четвертий етап – розвивальний. Розглядаються класичні "олімпіадні" комбінаторні задачі, дослідницькі задачі з використанням більш широкого спектру інструментів (рекурентні співвідношення, твірні функції тощо). Обов'язковими є перші та другі етапи, інші етапи здійснюються за індивідуальними траєкторіями залежно від потреб та рівня досягнень вчителів на перших етапах.

Нами проведено апробацію методики розвитку комбінаторних компетентностей учителів математики при проходженні ними планової курсової перепідготовки. Загалом через відповідні курси пройшли 748 вчителів протягом 2018-2019 років. Під час діагностичної контрольної роботи пропонувались три задачі відповідної тематики. У першій задачі пропонувалося розпізнати відповідні комбінаторні сполуки зі списку відомих сполук шкільної програми рівня "Стандарт" та застосувати правило множення. Із цією задачею впоралися 68% респондентів. Друга задача – просте застосування правил комбінаторики в атипічних ситуаціях, де виникають сполуки, що не входять до стандартної класифікації (наприклад, упорядкований набір, де частина елементів може повторюватися, а інша – ні). Відсоток вчителів, які впоралися з цією задачею вже нижчий – 44%. І, нарешті, третій тип задач – з гібридними сполуками. Тут позитивний результат мали 13% опитаних вчителів.

Для розвитку комбінаторних компетентностей пропонується використання змішаного навчання. Слухачам курсів пропонується спочатку оглядова лекція "Комбінаторика без формул за 40 хвилин", де моделюється пропедевтика комбінаторики на прикладах патернів 1-24, з активним включенням слухачів у методичну дискусію з реалізації пропедевтики. Далі слухачі ознайомлюються з відеолекціями “Основні комбінаторні сполуки”, виконують тематичні тести, далі беруть участь у командному тренінгу, в якому пропонуються серед інших 4 комбінаторні задачі. Залежно від виконання залікових завдань та після співбесід викладач разом зі слухачем складають індивідуальний план математичної самоосвіти, в якому виділяють за необхідності комбінаторну складову. Своєю чергою, слухачам надається не тільки детальний список літератури для самоосвіти, але й серія відеолекцій “Олімпіадна комбінаторика”, де відображено третій та четвертий етапи розвитку комбінаторної компетентності вчителів. Вимірювання під час вихідного модульного контролю для групи вчителів, що досліджувалася, показали суттєве зростання відсотка учасників, які впоралися із завданнями типів, аналогічних до вхідного діагностичного контролю. За нашими даними, частка вчителів, які розв’язали успішно задачі першого, другого та третього типів, становлять відповідно 72%, 66% та 31%. Як бачимо, для 30% фахівців запропоноване навчання залишилось неефективним, водночас спостерігається значна динаміка спадання утруднень для задач другого типу та суттєва для третього. Це пов’язано з усвідомленням вчителями простого механізму аналізу базових комбінаторних задач, загалом завдяки модельно-пропедевтичному етапу.

Висновки. Проведені нами дослідження виявили наявність проблеми недостатнього розвитку математико-комбінаторної компетентності у значної кількості вчителів математики. Аналіз ключових комбінаторних задач, методів розв’язування комбінаторних задач дозволив побудувати тривимірну модель змісту неперервної математичної освіти вчителів математики в галузі комбінаторики. Запропонований нами підхід підвищення рівня комбінаторної компетентності вчителів математики, заснований на принципі паралелізму, показав свою ефективність для підвищення результативності успішного розв’язування завдань середньої складності. Водночас відкритими залишаються питання цілісного підвищення рівня комбінаторної компетентності вчителів математики, ретельного статистичного аналізу запропонованих методик для рандомізованих вибірок респондентів.

Список використаних джерел

1. Кірман, В. К. (2017). Векторна модель математичної компетентності учителя математики та підходи до її ідентифікації. *Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2,* 10, 94-101,
2. Кірман, В. К. (2018). Підходи до оцінювання параметрів моделей математичної компетентності. *Science and Education a New Dimension, VI(65),* 155, 23, 23-27.
3. Тарасенкова, Н. А., Кірман, В. К. (2008). Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Математика в школі, 6,* 3-9.
4. Олійник, В. В., Даниленко, Л. І. (2005). *Післядипломна педагогічна освіта України: сучасність і переспективи розвитку.* Київ: Мілениум.
5. Базелюк, В. Г., Лушин, П. В., Снісаренко, О. С., Сніцар, Л. П., Солодков, В. Т. (2012). *Післядипломна освіта в умовах євроінтеграції: сутність, зміст, технології, готовність до змін: навч.- метод. посібник*. Київ: Педагогічна думка.
6. Кузьмінськкій, А. І., Тарасенкова, Н. А., Акуленко, І. А. (2009). *Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики : [монографія]*. Черкаси : Видавець Чабаненко Ю.
7. Акуленко, І. А. (2013). *Компетентісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія.* Черкаси : Видавець Чабаненко Ю.
8. Чашечникова, О. С., Колесник, С. А. (2014). Інноваційні підходи до майбутньої підготовки вчителя математики. Навчання елементарної математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 8,* 42, 262-269.
9. Тарасенкова, Н. А. (2018). Дидактична аналітика як основа професійного тренінгу для вчителів математики. *Science and education a new dimension.VI, 63,* 54-58.

10. Голодюк, Л. С. (2016). Оновлення методичних форм роботи з педагогами на засадах інтеграції. *Науково-методичний супровід функціонування інформаційного простору регіону. Науково-методичний вісник. 52,* 113-122.

11. Kirman, V. (2019). Flexible Model of Training Mathematics Teachers in the System of Postgraduate Pedagogical Education. *Current Issues in Ensuring the Quality of Mathematical Education: Monograph. In L. Kyba (A. Ed.).* Budapest, Hungary: SCASPEE., 189-205.

12. Кірман, В. К. (2019). Підходи до формування змісту післядипломної математичноїосвіти вчителів. *Реалії та перспективи природничо-математичної підготовки у закладах освіти: Збірник матеріалів науково-практичної конференції 11-12 вересня 2019*. Херсон, 62-64.

13. Ядренко, М. Й. (2003). *Дискретна математика*. Київ: Експрес.

14. Ямненко, Р. Є. (2009). *Дискретна математика: навч.- метод. посібник*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет".

15. Бушмакін, В. М., Гануліч, В. К., Мохонько, А. З., Томецька, С. І. (2002). *Комбінаторика: навч. посіб.* Київ: Наукова думка.

16. Капітонова, Ю. В., Кривий, С. Л., Летичевський, О. А. (2002). *Основи дискретної математики.* Київ: Наукова думка.

17. Нікольський, Ю. В., Пасічник, В. В., Щербина, Ю. М. (2007). Дискретна математика. Львів: Магнолія.

18. Кірман, В. К. (2018). Про розвиток комбінаторної складової математичної компетентності вчителя математики. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу "ІТМ*плюс – 2018". Матеріали ІІІ міжнародної науково-методичної конференції.* 8-9 листопада 2018. Том1. Суми. 119-121.

19. Кірман, В. К. (2019). Комбінаторний аналіз бінарних відношень в курсах фахової перепідготовки вчителів математики. *Матеріали Всеукраїнськоїї науково-практичної конференції з міжнародною участю "Наступність у навчанні математики в умовах реформи освіти: реалії та переспективи",* 20 – 21вересня 2019 р. Одеса. 182-184.

20. Генкин, С. А., Итенберг, И. В., Фомин, Д. В. (1994). *Ленинградские математические кружки.* Киров: АСА.

21. Кірман, В. К. (2011). Рівні аргументації в процесі навчання математики. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики : Міжнар. наук.-практ. конференція до 80-річчя з дня народження доктора пед. наук, проф. З. І. Слєпкань: тези доповідей 11–13 травня 2011 р*., Київ. 152–153.

22. Кірман, В. К. (2010). *Методична система вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю.* (Дисертація кандидата педагогічних наук). Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. Черкаси.

23. Алфутова, А. Б., Устинов, А. В. (2002). *Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.* Москва: МЦНМО.

24. Виленкин, Н. Я. (1969). *Комбинаторика.* Москва: Наука.

25. Мерзляк, А. В., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2008). *Алгебра. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики.* Харків: Гімназія.

26. Конет, І. М., Паньков, В. Г., Радченко, В. М., Теплінський, Ю. В. (2005). *Обласні математичні олімпіади.* Кам'янець-Подільський: Абетка.

СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ УДОСКОНАЛЕННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Володимир Таточенко

Динамічна галузь освіти постійно зазнає змін і реформ, що впливає на підготовку та діяльність педагогічних працівників, які повністю мають відповідати новим викликам. Сучасні та інформаційні технології – ті методичні інструменти, з якими майбутні вчителі повинні ознайомитися ще під час навчання в закладах вищої освіти, а пізніше – застосовувати у своїй професійній діяльності. Варто враховувати і зміщення акцентів освітньої моделі: якщо раніше переважали тільки знання, то сьогодні головну роль виконують компетентності, які необхідно формувати та розвивати у здобувачів освіти. Оскільки постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1341 затверджена Національна рамка кваліфікацій, то зрозуміло, що послідовно відбувається перегляд цілей фахової підготовки педагогічних працівників у ЗВО.

У зв'язку з усіма змінами та оновленнями професійна освіта потребує принципового перегляду складових освітнього процесу, від яких залежить якість підготовки учнів. Аналізуючи професійну діяльність вчителя математики, розуміємо, що це – складне, інтегральне утворення, сукупність різних за цілями та характером видів діяльності, що спрямовані на створення і внесення вчителем змін у математичну освіту, що постійно оновлюється [24, с. 111].

Інформаційний простір, який сьогодні стрімко розвивається та, безумовно, домінує, вносить свої корективи у педагогічну діяльність вчителя математики. Численні комунікаційні канали дозволяють даним настільки швидко оновлюватися, що це випереджає процес навчання. Завдання вчителя – не тільки встигнути за всіма змінами, а й допомогти учням користуватися лише якісною інформацією з усього масиву відомостей.

У період, коли шкільна математична освіта перебуває у стані кризи, висновок про що можна зробити зі статистик вступних кампаній, які свідчать про невисоку популярність математики серед молоді, роль вчителя математики та його рівень професійної підготовки особливо актуалізуються. Тенденції останніх років свідчать, що підготовка педагогічних працівників має модернізуватися для того, щоб знання, вміння і навички, які вчитель дає учням, могли стати для останніх фундаментом подальшого становлення себе як конкурентоспроможного фахівця.

Огляд останніх публікацій за темою. Над проблемою професійної підготовки майбутніх вчителів працювали представники різних відгалужень педагогічної науки:

- методологічні основи професійно-педагогічної підготовки вчителів (А. Алексюк, Н. Бібік, В. Гриньова, І. Новик, І. Пальшикова, О. Пометун, О. Савченко, Л. Хоружа та ін.);
- з'ясування структури та сутності педагогічної діяльності (Ф. Гоноболін, В. Сластьонін, В. Семиченко та ін.);
- розроблення організаційних форм, методів, засобів професійного становлення майбутнього вчителя (О. Абдуліна, І. Зязюн, Л. Спірін, Р. Хмелюк та ін.);
- виявлення та обґрунтування психолого-педагогічних аспектів формування готовності майбутніх учителів до професійної діяльності (М. Дяченко, Г. Костюк, В. Сластьонін, О. Ярошенко та ін.);
- розвідки творчої особистості вчителя, його підготовки до формування творчої особистості здобувачів освіти (Н. Кузьміна, М. Поташник та ін.);
- виявлення та дослідження теоретичних засад педагогічного проєктування (І. Зязюн, І. Підласний, В. Безпалько, Н. Кузьміна, В. Монахов та ін.);
- готовність вчителя до проєктувальної діяльності у закладах вищої освіти (О. Дубасенюк, Ю. Жиляєва, І. Ковальчук та ін.);
- використання, моделювання в освітньому процесі як методу розвідки (Е. Івутіна, Н. Кузьміна, Н. Нечаєв, В. Штофф);

- імплементація компетентісного підходу в освітній процес закладів вищої освіти (Н. Бібік, І. Зимня, Н. Кузьміна, О. Пометун, О. Савченко, Н. Тарасенкова та ін.);
- шляхи модернізації підготовки майбутніх вчителів у сучасних умовах постіндустріального суспільства (А. Алексюк, Н. Бібік, Н. Глузман, Н. Кузьміна, О. Пєхота, О. Савченко, С. Скворцова, В. Сластьонін, Л. Хоружа, А. Хуторськой та ін.);
- формування особистості майбутнього педагога у процесі навчання ув ЗВО (Г. Балл, І. Бех, М. Євтух, В. Загвязинський, І. Зязюн, Л. Кондрашова, В. Крутецький, В. Моляко, К. Платонов, С. Сисоєва, Р. Хмеляк, О. Щербаков та ін.);
- сутність та структура професійної підготовки майбутнього вчителя (О. Абдулліна, А. Алексюк, Ю. Бабанський, В. Беспалько, Н. Кузьміна, В. Моляко, О. Пєхота, О. Савченко, В. Семиченко, В. Сластьонін та ін.);
- сучасні педагогічні технології освітнього процесу як основа ефективної підготовки до майбутньої професійної діяльності в педагогічному закладі вищої освіти (В. Безпалько, І. Дмитренко, О. Дубасенюк, В. Монахов, О. Пєхота, І. Підласий, С. Сисоєва та ін.);
- особливості підготовки педагогів за кордоном (М. Лещенко, О. Матвієнко, Л. Пуховська, І. Руснак, О. Сухомлинська та ін.).

Мета дослідження – аналіз нових тенденцій модернізації підготовки вчителя математики та встановлення чинників, що визначають організаційно-педагогічні умови професійної діяльності вчителів математики у закладах загальної середньої освіти.

Виклад основного матеріалу. Питання професійної підготовки вчителя математики неодноразово висвітлено в науковій літературі. Хоча на сьогодні залишаються нерозв'язаними питання, що стосуються таких аспектів:

1) відповідності практичної підготовки вчителя математики в закладах вищої освіти України вимогам сьогодення;
2) інформаційно-комунікаційної компетентності вчителя математики, що реалізовується на заняттях у закладах загальної середньої освіти;
3) розуміння нормативних вимог щодо організації навчального процесу в закладах загальної середньої освіти та наслідків скорочення аудиторних годин для вивчення дисциплін під час фахової підготовки;
4) неузгодження теоретико-методичних і нормативних засад підготовки вчителя математики та стандартизованих індикаторів якості фахового рівня випускників закладів вищої освіти.

Проблема підготовки вчителя математики невід'ємна від питань, спрямованих на якість освіти загалом. Запорукою успішного функціонування будь-якої системи є чітке формулювання цілей. Для освітнього процесу цілі продиктовані соціальними потребами, що виникли в конкретний період суспільного розвитку. Через це аналіз суто методико-педагогічних проблем має розпочатися з характеристики типу суспільства та відносин всередині нього.

Цілі освітньо-виховної системи насамперед формуються під впливом і для забезпечення потреб суспільного замовлення. Слід визнати, що поняття *суспільне замовлення* потребує конкретизації та уточнення. Особливої уваги потребують випадки термінологічної плутанини, коли під суспільним замовленням розуміють державне замовлення і навпаки. Насправді ці два типи замовлення не можуть бути тотожними, бо суспільство та держава мають різні запити, а розбіжність інтересів і потреб може призводити до революцій, що стають своєрідним рушієм прогресу. У сфері освіти діє саме суспільне замовлення. Демонструвати суспільне замовлення здатен стан суспільного виробництва, для якого важливо мати фахівця, який володіє низкою особистісних і професійних якостей, має досвід і потенціал для свого розвитку. У зв'язку з тим, що суспільне виробництво визначає умови та обставини формування типу суспільства, можемо звернути увагу на останній для визначення цілей суспільного виховання.

Детально розглянемо особливості суспільних відносин, що впливають на формування суспільних типів. До таких належать:

1) провідна цінність, наявність якої може призвести до конфліктів, зокрема військових;
2) економічна галузь, яку необхідно забезпечити висококваліфікованими фахівцями;
3) орієнтація виробництва, пов'язана з рівнем продуктивності праці;
4) панівна соціальна група, що може створювати державні інститути і формувати державне замовлення;
5) спрямованість суспільного розвитку;
6) організаційний тип культури, що має відношення до стосунків між членами суспільства;
7) спосіб нормування діяльності, що визначатиме організацію навчання та його змістове наповнення;
8) часові горизонти, для яких важливим є суспільний розвиток у хронологічному аспекті.

Для індустріального суспільства провідною цінністю є капітал, а провідною сферою економіки – промисловість, тут суспільне виробництво спрямоване на створення промислових виробів. Власники капіталу – домінуюча соціальна група. Економічне зростання: державний або приватний контроль над інвестиційними рішеннями є базовим принципом індустріального суспільства. У такому суспільстві нормування здійснюється через теоретичні знання у формі тексту. Часові горизонти опираються на пристосування до конкретних ситуацій, прогнозування. Емпіризм, досліди – це методологія індустріального суспільства. Досвід стає провідним об'єктом соціалізації даного типу суспільства. Формування та розвиток особистості, яка здатна відповісти на виклики виробництва – це мета суспільного виховання та освіти індустріального суспільства.

Нині, коли ми живемо в добу постіндустріального суспільства, найвиразнішими рисами суспільних відносин можна назвати домінування інформаційного простору та споживання. Віртуальний формат життєдіяльності має впливову функцію: людина здатна стати анонімною, позбувшись впізнаваності, що є важливою суспільною ознакою. На психологічному рівні тепер на перше місце виходить егоїзм, якщо говорити про реальність суспільства споживання.

Насамперед важливу роль відіграють ці процеси, які лежать в основі встановлення рівня суспільних відносин, суспільного виробництва та замовлення у галузі освіти. Останнім часом там, де є сталий розвиток виробництва, освіти, науки, техніки тощо, сформовано постіндустріальне суспільство. Наявність сприятливих економічних умов не є обов'язковою засадою для розвитку постіндустріального суспільства.

На межі XX-XXI століть між виробництвом та наукою почали знаходити більше точок перетину. Результати досліджень стали корисними для виробництва. З одного боку, це прискорило технічний розвиток та покращило якість і процесів, і кінцевих продуктів виробництва. З іншого боку, беззаперечним є той факт, що технології виробництва швидко втрачають актуальність, потребують заміни та оновлення, а це певною мірою збільшило продуктивність праці на тих виробництвах, що особливо тісно співпрацюють із наукою.

Математична освіта в частині її змісту базується на конкретизованій меті суспільного виховання. У закладах вищої освіти викладачі мають підготувати майбутніх педагогів до того, що в індустріальному чи постіндустріальному суспільстві технології навчання будуть нетривалими в часі, тому постійні зміни супроводжуватимуть діяльність вчителя математики, який повинен регулярно чи за потреби переглядати підходи та коригувати їх відповідно до поточного запиту суспільства. Отже, навчальне середовище повинно бути придатним до змін та оновлення.

Навчальне середовище – це складна, штучно побудована система, спрямована на досягнення мети освітнього процесу, зорієнтована на провідний об'єкт соціалізації (досвід; відношення) та опирається на певні підсистеми, що забезпечують готовність здобувачів вищої освіти до успішної професійної самореалізації. Навчальне середовище підготовки майбутніх вчителів математики характеризується цілісністю, відкритістю, динамічністю, певною нестабільністю, багаторівневістю, самоорганізованістю, інтегральністю [24, С. 117].

Виходячи зі сформульованого визначення навчального середовища, розуміємо, що треба спиратися на названі ознаки для якісної підготовки освітян-математиків, як і вчителів інших навчальних дисциплін. Однак підготовка не обмежується лише навчанням у закладі вищої освіти: педагог має постійно підтримувати свою форму, вдосконалюватись, чому сприяє неперервна освіта. Процес навчання вчителя математики логічно завершується підготовкою професійного педагога, для діяльності якого властиві наступні аспекти: предметно-математична, психолого-педагогічна, методична підготовки.

Викладач закладу вищої освіти повинен розуміти, що невід'ємною складовою підтримання та покращення професійного рівня є система неперервної педагогічної освіти, яка націлює майбутнього вчителя математики на постійний саморозвиток, особистісно-орієнтоване навчання, удосконалення методичної підготовки, роботу над володінням як традиційними технологіями навчання, так і активним впровадженням сучасних пропозицій, особливо що стосується інформаційно-комунікаційних інструментів.

Актуальні сьогодні підходи до формування професійних якостей вчителя-математика мають узгоджуватися з інтересами та потребами студентів, мотивувати їх до навчання, пошукової роботи, креативності та набуття інших рис сучасного фахівця педагогічної галузі. Із часом, коли з'явиться педагогічний досвід, усі ці якості необхідно удосконалювати та доповнювати.

Неперервна педагогічна освіта сприяє тому, що здобувачі виробляють потребу постійної роботи над своїми кваліфікаційними вміннями: вдала професійна самореалізація буде можлива лише за умови відповідності рівня вчителя викликам сучасної системи освіти та запитам суспільства. Висока мотивація навчально-дослідницької діяльності, ефективна комунікація між всіма учасниками освітнього процесу, особливо за схемою здобувач-викладач, забезпечує те, що майбутній учитель математики бере безпосередню участь у процесі навчання на партнерських засадах. Такі умови проведення занять відіграють важливу психологічну роль, адже студент набуває впевненості у своїх силах, відчуває свій рівень тощо.

Учитель математики має чітко розуміти:

1) види педагогічної діяльності;
2) принципи логіко-дидактичного аналізу викладеного матеріалу;
3) методичні моделі вивчення компонентів програми математики в закладах загальної середньої освіти, що стосується, наприклад, пояснення математичних понять і теорем, демонстрації способів розв'язання задач тощо;
4) особливості змістових ліній програми з математики в закладах загальної середньої освіти;
5) змістове наповнення шкільної програми відповідно до закладених у ній фундаментальних математичних ідей (множина, відношення, математична структура, ізоморфізм алгебраїчної операції тощо);
6) способи наукового аналізу загальноматематичних понять (функція, величина, число, алгоритм, фігура тощо).

Професійне становлення вчителів математики можливе за умови знань низки дисциплін, таких як математичний аналіз, алгебра і теорія чисел, геометрія, математична логіка, числові системи, МНМ, а також дисциплін загальної професійної підготовки – психології та педагогіки.

Звертаючись до видів педагогічної діяльності, розглядаємо низку різновидів, що в сукупності дозволяють координувати та реалізовувати навчальних процес у частині викладання математики. До цих різновидів належать:

1) аналіз навчально-методичної літератури (програми, підручники, посібники, навчально-методичні комплекси, дидактичні матеріали та інші засоби навчання);
2) пошук навчального матеріалу, що враховує вік та рівень підготовки здобувача освіти;
3) моделювання уроку чи системи уроків, що передбачають викладання запланованої теми;

4) власна професійна робота;
5) формування навичок тайм-менеджменту, зокрема в частині організації, планування та виконання навчальної роботи;
6) організація інших видів діяльності в межах освітнього процесу;
7) оцінювання та самооцінювання результатів діяльності всіх учасників освітнього процесу;
8) корекція та самокорекція дій у межах навчальної діяльності учасниками освітнього процесу.

Указані можливості тільки частково відбивають види діяльності в закладах освіти, оскільки виникає чимала кількість ситуативних потреб, які на практиці кількісно переважають види навчальної діяльності, описані в теорії. Базові уміння з'являються у процесі здобуття вищої освіти майбутніми вчителями математики, а деякі – внаслідок набутого досвіду та практичної діяльності, що вже є свідченням формування професійної майстерності.

Першим показником становлення педагога є розуміння особливостей організації та проведення уроку як основної одиниці навчального процесу. Аналітико-синтетична діяльність сприяє формування цілей навчально-виховної діяльності, спрямованої на учнів. Для логічної побудови матеріалу, що враховує особливості аксіоматичного методу, необхідно застосовувати логіко-математичний аналіз шкільної програми та навчально-методичної літератури з математики. Компонування навчального матеріалу слід здійснювати на підставі одного з кількох розроблених підходів. Ідеться про використання змістової основи, застосування дедуктивного підходу чи дедуктивної основи.

Наступним кроком має бути розмежування тверджень за характером їх подання – з'ясування, доведення, ілюстрація, логічна строгість доведення, визначення методу доведення, введення нових теоретичних тверджень через систему задач і вправ.

Тобто логіко-математичний аналіз дозволяє з'ясувати основну математичну ідею розділу, теми, математичні обґрунтування виконуваних доведень, досліджень, перетворень, осмислити засвоєні математичні методи і прийоми. Основний результат логіко-математичного аналізу – це визначення «ядра» навчального матеріалу, логічної строгості його вивчення та математичних методів і прийомів вивчення цього матеріалу [24, С. 119].

У закладах вищої освіти викладачі мають звертати увагу студентів на прийоми логіко-математичного аналізу основних компонентів навчального матеріалу – означень, теорем, алгоритмів, математичних методів, математичних задач, що стануть у нагоді під час роботи над конкретною темою. Допомогу в цьому забезпечують окремі математичні дисципліни, що викладають майбутнім учителям із метою роз'яснення тем шкільної програми з математики. Додаткову інформацію для здійснення логіко-математичного аналізу тем можна отримати з підручників і посібників з МНМ.

На основі логіко-математичного аналізу теоретичного навчального матеріалу виконується аналіз задач, під час якого вчителю необхідно отримати відповідь на такі запитання:

1) чи є задачі, завдання, на основі яких, враховуючи вік здобувачів освіти, можна створити позитивну мотивацію (проблемні, з нестандартною фабулою, цікаві тощо)?
2) чи є математичні задачі, завдання, що демонструють застосування питань, які вивчалися в раніше вивчених темах, розділах, та інших шкільних предметах?
3) чи є та скільки в системі вправ задач на здійснення пошуку розв'язку, тобто задачі як засіб формування в здобувачів освіти математичної діяльності? Чи достатньо цих задач на досягнення поставлених цілей?
4) чи пов'язані між собою групи задач, спрямованих на вивчення основного навчального матеріалу, із завданнями обов'язкових результатів навчання?
5) якщо задачі, вправи підручника або посібника не розбиті на типові групи, то виконати таке розбиття, виокремити декілька задач, вправ, які будуть слугувати представниками цих груп і на розв'язування яких повинна бути зосереджена увага в класі з наступним закріпленням методів і прийомів їх розв'язування.

6) чи всі задачі, вправи, що відповідають одному питанню, зібрані в одну групу або перемежовуються із завданнями на повторення?
7) яка кількість задач, вправ сприяє розкриттю, конкретизації, поглибленню основного навчального матеріалу? [24, с. 120].

Розв'язування математичних задач забезпечує логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу, поданого у підручниках, посібниках, шкільній програмі з математики та інших виданнях.

Учитель математики має усвідомлювати використання форм і засобів навчання, принципів і критерії оцінювання як системно та цілісно, так і в конкретно взятому випадку. Логіко-дидактичний аналіз у такому разі структурує теми, розділи та змістові лінії. Тему уроку вважаємо такою одиницею навчального матеріалу, яка відносно чітко, логічно та компактно презентує та роз'яснює виділені в ній факти та питання з пропозицією можливих засобів навчання, а також систему контролю та оцінювання набутих знань.

Алгоритм застосування логіко-дидактичного аналізу виражений такою послідовністю дій:
1) визначення мети навчання;
2) логічний і математичний аналіз змісту;
3) постановка основних навчальних задач і вибір відповідних навчально-пізнавальних дій;
4) відбір основних засобів, методів і прийомів навчання;
5) визначення форм контролю і оцінки процесу та результату навчальної діяльності здобувачів освіти.

На завершення, вчитель математики повинен володіти основами аналізу фахової, методичної та психолого-педагогічної літератури і здійснювати методичний аналіз математичної літератури та засобів навчання (ТЗН, наочності та ін.). Аналітика як складова професійної діяльності педагога має місце в тому випадку, якщо стоїть мета навчити здобувачів освіти самостійно опановувати визначений матеріал. Добір усього навчального матеріалу з предмета доцільно здійснювати після аналізу концепції математичної освіти, змісту навчального матеріалу та можливостей учасників освітнього процесу – учнів, учителів та їх колективів загалом.

Безумовно, етапи планування та конструювання є одними з найважливіших у роботі вчителя математики. Цей вид діяльності передбачає тематичне та календарне планування навчального матеріалу, планування уроків. Виконаний аналіз навчального матеріалу та відповідних засобів навчання з врахуванням чітко оформлюваних цілей навчання та поставлених навчальних задач дозволяє вчителю конструювати урок, основні моменти цього знайдуть відображення в контексті або розгорнутому плані уроку [24, с. 121].

Педагог супроводжує діяльність здобувачів освіти на всіх етапах освітнього процесу, що виховує в учнів свідоме ставлення до будь-яких навчальних завдань. Вчитель може організовувати ці процеси як опосередковано шляхом дібраного матеріалу та методичного інструментарію, так і безпосередньо шляхом формування вмінь і навичок, корекції дій здобувачів.

На уроках математики мета та способи вивчення теми мають бути визначені вчителем із врахуванням того, що поставлені завдання не завжди відповідають учнівським цілям. Під час таких розбіжностей можна говорити про появу методичної проблеми, розв'язання якої спрямовано на пошук мотивації учнів до здобуття знань. Тільки наявність мотивації може сприяти ефективному досягненню мети уроку, коли учні спрямовують увагу на усвідомлення навчального матеріалу та зацікавлені в отриманні кінцевого результату. Процес навчання повинен бути осмисленим.

Будь-який урок, згідно з методичними вимогами, передбачає постановку триєдиної мети. Урок математики не є винятком. Звичайно, для початку слід опанувати навчальний матеріал із усією сукупністю понять, термінів, фактів, формул тощо. Наступна мета має бути розвивальною і стосуватися як інтелектуальної, так і психологічної складової особистості учня. Не варто забувати вчителю математики і про виховний аспект, який дотичний до науки, культури, праці та інших виявів життєдіяльності.

Етап формулювання цілей уроку можна поділити на дві частини. Перша полягає у визначенні мети, що відповідає віковому рівню підготовки здобувачів освіти. Це реалізовується із застосуванням логіко-математичного аналізу при викладанні вступних тем із дисциплін «Геометрія» та «Алгебра», що розпочинаються в 7 класі. Далі необхідно на основі раніше набутих знань виділити більш вагомі цілі. На уроках ставляться локальні завдання більш детально опанувати матеріал із тем, наприклад, «Взаємне розташування прямих на площині», «Трикутники», «Чотирикутники», «Функції», «Нерівності».

Крім викладання навчального матеріалу, важливу роль відіграє правильність оцінювання здобутих результатів. Контрольно-оцінювальна компетенція передбачає співпрацю викладача зі здобувачем у плані розуміння критеріїв оцінювання та їх застосування у практичних ситуаціях, а також різниці між системою оцінювання закладів вищої та загальної середньої освіти. Варто також приділяти увагу таким способам оцінювання, як взаємоконтроль і самоконтроль під час різних етапів освітнього процесу. При правильному визначенні рівня виконаної роботи у студентів формується уявлення щодо оціночних суджень. Унаслідок цього починають з'являтися професійні якості, до яких належать комунікабельність, рефлексія, емпатія, володіння сучасними технологіями організації контролю. Уперше апробувати це студенти мають змогу під час проходження виробничої практики в закладах загальної середньої освіти.

Суттєву проблему для педагога являє собою низька успішність. До причин низького рівня знань математики в учнів зараховуємо:

1) труднощі розв'язання та пояснення задач;
2) відсутність учнівських запитань, що стосуються змісту навчального матеріалу;
3) відсутність спроб знайти матеріал у додаткових джерелах, крім підручника;
4) пасивність учня на уроці та несконцентрованість на навчальному матеріалі;
5) апатія до отриманих оцінок та відсутність спроб самооцінювання;
6) неможливість усвідомити мету виконуваних дій (наприклад, розв'язання задачі, вивчення формули), що тягне за собою порушення правил, сплутування алгоритму дій тощо;
7) нерозуміння понять, формул, гіпотез тощо;
8) недоліки організації уроків математики: недостатня мотивація, слабка робота над розвитком умінь самостійної організації навчання учнів.

Для усунення низьких результатів і невстигання вчитель математики має приділяти значну увагу мотивуванню. Особливо це стосується спрямування уваги учня не лише на формальне розв'язування задач, а й на обґрунтування потреби тих чи інших математичних операцій. Розв'язування задач не повинно бути автоматичним і шаблонним, лише за зразком раніше виконаних подібних завдань. Якщо учень детально розмірковуватиме над конкретними задачами, то ефективність такого навчання буде вищою. В іншому випадку виникають передумови до зниження якості знань. Це можна зобразити за таким алгоритмом: спочатку учень виконує однотипні завдання, що приводить до мінімізації обраних дій. Далі учень розв'язує такі задачі механічно, чітко знаючи порядок операцій. Відчуваючи впевненість, здобувач перестає замислюватися над суттю поставленого завдання. Але достатньо змінити хоча б одну ланку в ланцюгу до зниження якості знань, пізнавальна діяльність учня активізується і з'являється потреба в обґрунтуванні розв'язання задачі. Якщо ж учень особисто перевіряє дієвість теореми, то це показник більш якісних результатів.

Погоджуємось із тим, що ефективним засобом активізації навчально-пізнавальної діяльності невстигаючих здобувачів освіти є реалізація на рівні технологій навчання внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків. Це важливий фактор забезпечення методологічного принципу системності й розвитку системного мислення невстигаючих з математики здобувачів освіти [24, с. 137].

Методичне вдосконалення викладання математики безпосередньо залежить від оновлення змісту математичної освіти та його узгодження із суспільними запитами. На поточний момент актуальним лишається використання НІТ. Для уроків математики придатне програмне забезпечення загального користування – текстові та графічні редактори, зокрема для опрацювання таблиць і презентацій, або комп'ютерні технології більш професійного рівня, що є складнішими у використанні, – бази даних, пакети символьної математики та статистичної обробки тощо.

Комп'ютер на уроках математики можна використовувати з різною метою: для викладання теми, виконання учнями завдань, оцінювання результатів навчання, взаємодії кількох учасників освітнього процесу. Відповідно до призначення НІТ, можна говорити про різну інтенсивність використання комп'ютера – як допоміжного засобу навчання і як базового, на якому побудовано навчальну діяльність. Сучасні уроки математики неможливі без використання електронних ресурсів, наприклад, Matific, TED-m, LearningApps.org, за допомогою яких оновлюються підходи до викладання.

Висновки. Учитель математики XXI століття – це фахівець, що здатен відповідати вимогам, які висуває інформаційне суспільство. У сучасних умовах педагог повинен швидко оновлювати інформацію та засоби навчання, формувати в учнів компетентності, а не лише забезпечувати знання фактажу, адаптуватися до умов роботи, широко використовувати НІТ, забезпечувати перехід від теорії до практики тощо. Водночас майбутньому вчителеві на етапі свого становлення слід протистояти і деяким негативним явищам – зменшенню годин для фахової підготовки та часткове заміщення освіти надмірним розвитком деяких інформаційних технологій.

Професійна підготовка майбутнього вчителя математики є, з одного боку, цілеспрямованою, відкритою та динамічною системою, але, з іншого боку, характеризується складністю та нестабільністю. Наявні в ній підсистеми стають основою підготовки педагогічного працівника, яка відповідає вимогам часу та системи освіти. Такому вчителеві математики слід викладати не окремі математичні факти, а загалом працювати з цілісною методико-логічною концепцією предмета.

Якісні методичні вміння вчителя математики, сформовані в закладах вищої освіти та вдосконалені за умови набуття педагогічного досвіду, сприяють усвідомленій роботі з конкретними методичними моделями вивчення компонентів змісту шкільної програми з математики (поняття, теорем, задач як засобу навчання тощо) та реалізації логіко-дидактичного аналізу навчального матеріалу (розділу, теми, окремих уроків).

Список використаних джерел

1. Абдуллина, О. А. (1990). *Общепедагогическая подготовка учителя в системе высшего педагогического образования*. М.: Просвещение. 141 с.

2. Алексюк, А. М. (1998). *Педагогіка вищої освіти України. Історія. Теорія : підруч. для студ., аспірантів та молодих викл. вузів*. Міжнар. фонд "Відродження". Київ: Либідь. 557 с.

3. Андрющенко, В. П., Зязюн, І. А., Кремень, В. Г. (2003). *Неперервна професійна освіта: філософія, педагогічні парадигми, прогноз : монографія*; за ред. В. Г. Кременя. – К. : Наук. думка. 853 с.

4. Балл, Г. О. (2000). Гуманізація загальної та професійної освіти: суспільна актуальність і психолого-педагогічні орієнтири. *Неперервна професійна освіта: проблеми, пошуки, перспективи : [монографія]* ; За ред. І. А. Зязюна. К. : Вид-во «Віпол». 636 с.

5. Барбина, Е. С. (2001). *Теоретико-методологические основы профессиональной подготовки будущих учителей: [науч.-метод. пособ.]*. Херсон: Айлант. 70 с.

6. Бевз, В. Г., Величко, Л. П., Сверчевська, І. А. (2008). Синергетичні принципи в освіті. Нелінійність. Саоорганізація. *Математика в школі. № 11-12*. 14 – 17.

7. Безпалько, В. П. (1989). *Слагаемые педагогической технологии*. М.: Педагогика. 192 с.

8. Биков, В. Ю. (2005). Теоретико-методологічні засади моделювання навчального середовища сучасних педагогічних систем. *Інформаційні технології і засоби навчання: Зб. наук. праць*; за ред. В. Ю. Бикова, Ю.О. Жука; Інститут засобів навчання АПН України. К.: Атіка. 272 с.

9. Богданова, І. М. (2003). *Професійно-педагогічна підготовка майбутніх вчителів на основі застосування інноваційних технологій* : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра пед. наук: 13.00.04 «Теорія та методика професійної освіти». Київ.

10. Гриньова, В. М. (1998). *Формування педагогічної культури майбутнього вчителя (теоретичний та методичний аспект): [монографія]*. Х. 312 с.

11. Зязюн, І. А. (2007). *Філософія педагогічної дії: [монографія]*. Черкаси: Вид.від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 608 с.

12. *Інноваційні форми, методи і технології навчання.* Веб. робота URL: hup://invnz.blogspot.com/

13. Калмыкова, З. И. (1986). *Отстающие в учении школьники: (Проблемы психического развития)*; под ред. З. И. Калмыковой, И. Ю. Кулагиной; Научн.исслед. ин-т общей и педагогической психологии Акад. пед. наук СССР. М.: Педагогика. 208 с.

14. Кічук, Н. В. (1993). *Формування творчої особистості вчителя в процесі вузівської професійної підготовки (на матеріалі початкової школи):* автореф. дис. на здобуття наук.ступеня д-ра пед.наук : 13.00.01 «Теорія і історія педагогіки». Київ.

15. Кузьминський, А. І., Тарасенкова, Н. А., Акуленко, І. А. (2009). *Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики*. Черкаси: Вид. Від.ЧНУ ім. Б. Хмельницького. 320 с.

16. Локшина, О. І. (2009). *Зміст шкільної освіти в країнах Європейського Союзу: теорія і практика (друга половина XX – початок XXI ст.): [монографія]*. К.: Богданова А.М. 404 с.

19. Лященко, Е.И., Зобкова, К. В., Кириченко, Т. Ф. и др. (1988). Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов; под ред. Е. И. Лященко. М.: Просвещение. 223 с.

18. Моляко, В. О. (1989). *Психологія готовності до творчої праці*. К.: Тов. Знання. 43 с.

19. Моторіна, В. Г. (2008). *Інноваційні підходи до навчання математики: [навчальний посібник]*. Х. : ХНПУ імені Г.С. Сковороди, Скорпіон. 112 с.

20. Моторіна, В. Г. (2014). *Професійна компетентність учителя математики профільної школи. Навчальний посібник для студентів природничо-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ*. Х.: Видавництво Іванченко І. С. 266 с.

21. Моторіна, В. Г. (2012). *Професійна компетентність учителя математики профільної школи: [навч. посібник]*. Харків: ХНУ імені Г.С. Сковороди. 268 с.

22. *Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи* (2016). Міністерство освіти і науки України [Електронний ресурс]. Режим доступу: www.mon.gov.ua.

23. Пєхота, О. М., Старєва, А. М. (2005). *Особистісно орієнтоване навчання: підготовка вчителя : [монографія]*. Миколаїв : Вид- во «Іліон». 272 с.

24. Таточенко, В. І., Шипко, А. Л. (2020). Підготовка майбутнього вчителя математики до ефективної професійної діяльності у сучасних умовах. *Теоретико-методологічні основи модернізації навчання: компетентнісний підхід: колективна монографія*; за ред. Г. С. Юзбашева. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти». 111-142.

25. Таточенко, В. І., Шипко, А. Л. (2016). Конторольно-оцінювальна компетентність майбутніх вчителів математики. *Інформаційні технології в освіті. 1* (26). 126-147.

26. Таточенко, В. І., Шипко, А. Л. (2016). Невстигання учнів у процесі навчання математики як соціальна та психолого-педагогічна проблема. *Інформаційні технології в освіті. 3*(28). 53-71.

27. Цетлин, В. С. (1977). *Неуспеваемость школьников и её предупреждение*. М: Педагогика. 120 с.

ІННОВАЦІЙНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ ДОСВІД МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ КРАЇН ЄВРОПЕЙСЬКОГО СОЮЗУ ЯК ЗМІСТОВИЙ КОМПОНЕНТ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Віталій Ачкан

Вступ. Розбудова нової української школи, якій належить центральне місце в забезпеченні особистісного розвитку дітей та юнацтва, вимагає оновлення освітніх технологій, створення інноваційного освітнього середовища, підготовки нової генерації вчителів, здатних виступати агентами змін, інноваторами, реалізаторами нової освітньої політики. Учителі нової генерації мають бути здатні аналізувати український та іноземний педагогічний досвід, тому важливо орієнтувати педагогів на ознайомлення, врахування, апробацію, інноваційного педагогічного досвіду як українських, так і закордонних науковців та вчителів-новаторів, адаптувати та використовувати окремі елементи цього досвіду для підготовки всебічно розвиненої особистості випускника сучасної української школи.

Входження України до єдиного європейського простору вищої освіти, створення передумов для академічної мобільності спонукає до ретельного вивчення інноваційного досвіду країн Європейського союзу, пошуку оптимальних прикладів, що можуть бути адаптовані до українських освітніх потреб і сприятимуть покращенню вітчизняної математичної освіти.

Огляд останніх публікацій за темою. Питанням трансформації систем освіти, інноваційним перетворенням в освіті країн Європейського союзу присвячені дослідження В.В. Борисова [1], С.В. Борисової [1], С.М. Торубари [1], Т.М. Десятова [2], О.І. Локшиної [3], А.А. Сбруєвої [4] та ін. Методологічні та методичні основи порівняльних досліджень математичної освіти різних країн представлені у роботі Н.А. Тарасенкової і З.О. Сердюк [5].

На сучасному етапі окремим складовим проблеми підготовки майбутніх учителів математики в Україні присвячено дослідження І.А. Акуленко [6], В.Г. Бевз [7], К.В. Власенко [8], М.М. Ковтонюк [9], Н.В. Кугай [10], І.В. Лов'янової [8], О.І. Матяш [11], С.О. Скворцової [12], Н.А. Тарасенкової [6], О.С. Чашечникової [13] та ін.

У той же час питання врахування інноваційного досвіду іноземних країн у математичній освіті представлені лише в окремих публікаціях Є.І. Боркача [14], Н.В. Кугай [15], З.О. Сердюк [16] та О.М. Хари [17].

Мета дослідження. Обґрунтувати доцільність включення до змісту підготовки майбутніх учителів математики елементів інноваційного педагогічного досвіду країн Європейського союзу, висвітлити методичні особливості ознайомлення студентів із інноваційним педагогічним досвідом у процесі вивчення дисциплін методичної підготовки.

Виклад основного матеріалу. Уточнимо основні поняття дослідження. Під інноваційним педагогічним досвідом будемо розуміти досвід здійснення організаційно-педагогічної діяльності, що спирається на нові (або вдосконалені, або застосовані у новій комбінації), методи, форми, засоби навчання, зміни у змісті та послідовності подання навчального матеріалу і призводить до позитивних результатів.

Методична підготовка майбутніх учителів математики здійснюється як у процесі навчання фундаментальних математичних дисциплін (математичний аналіз, лінійна алгебра, дискретна математика на ін.), так і у процесі навчання елементарної математики, вступу до спеціальності, історії математики, методики навчання математики. Водночас основними дисциплінами в методичній підготовці вчителя математики (їх ми будемо називати дисциплінами методичної підготовки) є вступ до спеціальності (вступ до фаху), елементарна математика, шкільний курс математики, методика навчання математики та низка дисциплін методичного спрямування вільного вибору студентів або навчального закладу.

Першими дисциплінами у методичній підготовці майбутнього вчителя математики у значній кількості університетів є дисципліни "Вступ до фаху" (або схожа за назвою та метою навчальна дисципліна навчального плану здобувачів першого рівня вищої освіти) та

"Елементарна математика". На першому-другому курсах студенти ознайомлюються із специфікою майбутньої професійної діяльності; відбувається повторення, узагальнення та розширення знань щодо математичних понять та фактів, які розглядались у шкільному курсі математики; формування здатностей використовувати ці знання у практичній діяльності.

Під час окремих лекційних та практичних занять із дисципліни "Вступ до фаху" доцільно ознайомлювати студентів із елементами інноваційного педагогічного досвіду як українських науковців-методистів та вчителів-новаторів, так і педагогів країн Європейського союзу. Наведемо приклади організації такої роботи.

Лекцію на тему "Особливості педагогічної діяльності" доцільно провести у формі лекції-бесіди з використанням елементів відео-лекції. До цієї лекції студенти заздалегідь готуються, опрацьовуючи запропоновану літературу (якої з даної тематики достатньо багато) та методичні рекомендації (рекомендації щодо конспектування, питання відповіді, на які доцільно підготувати, приклади, що необхідно підібрати, завдання, які вимагають наведення прикладів із свого шкільного життя тощо). У процесі лекції викладач демонструє короткі відео-фрагменти уроків (від 2 до 6 хвилин) учителів-новаторів, максимально залучає студентів до аналізу фрагментів із опорою на власний учнівський досвід, зосереджує увагу на тих викликах, які стоять перед сучасним учителем в умовах реформування системи освіти, змінах у соціальному запиті суспільства. За наявності відповідної мовної підготовки викладача та студентів один із цих відео-фрагментів може представляти досвід педагогів-новаторів країн Європейського союзу. Студенти у процесі бесіди висловлюють своє бачення педагогічної професії, змін ролі педагога у швидкозмінному суспільстві XXI століття, особливостей педагогічної діяльності в Україні і в одній із країн Європейського союзу.

Лекцію на тему "Професійне спілкування у структурі діяльності вчителя математики" доцільно організувати у формі лекції-диспуту. Студенти отримують завдання та дидактичні рекомендації щодо підготовки до лекції, а під час заняття висловлюють та обґрунтовують свої думки щодо організації комунікації у педагогічному процесі, структурних компонентів педагогічного спілкування, стилів педагогічного спілкування, механізмів та засобів (у тому числі інноваційних інформаційно-комунікаційних) комунікаційного впливу вчителя математики, важливості вільного володіння математичною мовою та символікою у професійній діяльності, причин виникнення та шляхів подолання педагогічних конфліктів, поведінки вчителя у конфліктній ситуації, вміння вчителя контролювати власні емоції; вчаться вислуховувати та поважати думку колег. При цьому студенти порівнюють погляди українських науковців та педагогів-практиків і педагогів країн Європейського союзу на особливості організації педагогічного спілкування. Особливо жваву дискусію серед студентів викликає досвід педагогів країн Європейського союзу щодо шляхів подолання педагогічних конфліктів.

Семінарське заняття на тему "Вчитель математики у сучасній освіті" розбивається на дві приблизно рівні частини. Перша проводиться у формі конференції, під час якої студенти представляють свої доповіді на заздалегідь запропоновану тематику, знайомляться із елементами інноваційного педагогічного досвіду відомих учителів-новаторів, зокрема із досвідом педагогів, що є членами Центру інновацій у навчанні математики, який знаходиться у Великій Британії, вчаться презентувати результати роботи із джерелами інформації, у них формуються гностичні, комунікативні та конструктивні професійні уміння. Друга половина заняття проводиться у формі групового тренінгу на тему "Моделювання професійного портрету вчителя математики майбутнього".

Завершальне практичне заняття на тему "Організація професійного самовдосконалення майбутнього вчителя математики" доцільно провести у формі звітної конференції, під час якої студенти виступають із доповідями та презентують результати виконання групових проектів. Серед можливих тем таких проектів одна (або кілька) пов'язані із порівнянням шляхів та форм професійного самовдосконалення педагогів України та окремих країн Європейського союзу.

Завдання, пов'язані із ознайомленням із інноваційним педагогічним досвідом країн Європейського союзу доцільно включати до завдань самостійної позааудиторної роботи з дисципліни "Вступ до фаху". Наведемо приклад: «Порівняйте погляди українських науковців та науковців країн Європейського союзу щодо шляхів формування дослідницьких умінь студентів? Які із цих шляхів Ви використовуєте у своїй навчальній діяльності?».

У процесі вивчення дисципліни "Елементарна математика" студенти знайомляться з інноваційними засобами навчання математики: відкритими та інтегративними задачами, математичними пакетами та педагогічними програмними засобами. До завдань для самостійної позааудиторної роботи доцільно залучати підготовку проектів, пов'язаних із аналізом поглядів науковців країн Європейського союзу на поняття відкритої та інтегративної задач та поділ цих задач на види, із ознайомленням студентів з математичними пакетами (пакетами динамічної алгебри та геометрії, наприклад, GEONExT [18] та Elica [19]) та порівняння їх можливостей із розробками українських науковців.

На третьому та четвертому курсах бакалавріату основною навчальною дисципліною методичної підготовки вчителя математики є "Методика навчання математики". Елементи інноваційного педагогічного досвіду доцільно включати до змісту окремих лекційних занять (переважно із загальної методики навчання математики), практичних та лабораторних занять, до змісту (а в окремих випадках і до тем) курсових робіт та інших видів науково-дослідницької діяльності студентів, пов'язаних із методикою навчання математики (підготовкою конкурсних робіт, наукових публікацій, участю у наукових конференціях). Наведено кілька прикладів.

Лекційне заняття на тему "Методика організації позакласної роботи та факультативних занять із математики" доцільно провести у формі лекції-конференції. Перед лекцією викладач пропонує студентам підготувати індивідуальні (або групові) короткі доповіді (5 – 9 хвилин), які висвітлюють питання лекції. В окремі із цих доповідей викладач пропонує студентам додати інформацію про досвід організації позакласної роботи в кількох країнах Європейського союзу. Після кожної доповіді викладач акцентує на ключових моментах, доповнює її, за потреби організовує короткі обговорення, що спрямовані на актуалізацію суб'єктного досвіду студентів, отриманого під час навчання у школі (спогади про діяльність учителів математики) та у процесі вивчення психолого-педагогічних дисциплін і педагогічної практики. Під час лекції доцільно акцентувати на використанні інновацій у рамках традиційних форм позакласної роботи (орієнтація тематики математичних гуртків на вимоги соціуму до шкільної математичної освіти, бінарні гурткові заняття й ін.), на інноваційному досвіді учителів щодо проведення тижнів математики, математичних екскурсій (наприклад, проведення віртуальних екскурсій, веб-квестів), виготовлення математичних моделей (зокрема, інноваційний досвід європейських учнів щодо використання математичних моделей за допомогою 3-D принтеру). Також необхідно акцентувати на інноваційних формах позакласної роботи таких, як елективні курси, дистанційні курси (або використання елементів змішаного навчання у позакласній роботі з математики), дистанційні конкурси та олімпіади. При цьому доцільним є порівняння студентами інноваційного досвіду проведення позакласної роботи в Україні та в кількох країнах Європейського союзу.

Під час проведення практичного заняття на тему "Організаційні форми навчання математики" студенти у формі круглого столу презентують результати виконання групових інформаційних проектів, пов'язаних із класифікацією уроків, використанням як традиційних, так й інноваційних форм навчання математики (зокрема йдеться про інноваційні типи уроків (бінарні, інтегровані уроки, театралізовані уроки, уроки-ділові ігри тощо), віртуальні навчальні екскурсії, вебінари, навчальні майстерні й ін.). Одна із тем проектів може бути пов'язана із використанням інноваційних форм навчання математики у країні (або кількох країнах) Європейського союзу. За результатами практичного заняття студенти розпочинають створення "Банку педагогічних інновацій" (групового портфоліо, в якому в певному порядку представлені відомості (з конкретними прикладами) щодо інновацій у математичній освіті.

Наведемо приклад формулювання теми курсових із дисципліни "Методика навчання математики", що доцільно пропонувати студентам для ознайомлення з інноваційним педагогічним досвідом країн Європейського союзу. Інноваційні технології навчання математики в національних освітніх системах країн … (країну або групу країн, що мають спільні підходи у системи математичної освіти, студенти обирають із переліку, наприклад, країни Балтії, Польща й ін.)

Широкі можливості для органічного ознайомлення студентів із інноваційним педагогічним досвідом надають дисципліни вільного вибору студентів (або закладу вищої освіти), що знайомлять студентів із технологіями навчання. Наприклад, у Бердянському державному педагогічному університеті це дисципліна "Технології профільного навчання математики" для студентів магістратури. Наведемо кілька прикладів.

Лекцію на тему "Інноваційні ігрові технології на уроках математики у профільній школі" доцільно провести у формі лекції конференції. Студенти представляють систему, доповідей (6 – 9 хв.), які вони готують заздалегідь у межах запропонованої викладачем тематики. Одну із завершальних доповідей доцільно присвятити інноваційному досвіду використання ігрових технологій у країнах Європейського союзу. Після одного (або декількох) виступів доповідачі за допомогою (за потреби) викладача відповідають на питання колег. Лекція завершується обговоренням, під час якого викладач акцентує увагу на ключових моментах, формулює проблеми, які будуть розглядатись на практичному занятті.

На практичному занятті на тему "Інноваційна педагогічна діяльність учителя математики в контексті технологічного підходу в навчанні" студенти представляють свої дослідницькі проекти (наприклад, "Інноваційний педагогічний досвід вчителів математики у країнах Скандинавії"), при підготовці яких спираються на суб'єктний досвід педагогічної діяльності, набутий у процесі педагогічної практики. При цьому на етапі підготовки проектів доцільно використовувати елементи змішаного навчання, зокрема консультування з використанням хмарних сервісів, соціальних мереж як у асинхронному режимі, так і у режимі чату.

Із метою ознайомлення майбутніх учителів математики із інноваційним педагогічним досвідом зарубіжних країн, зокрема, країн Європейського союзу вважаємо доцільним включення до варіативної складової навчального плану дисципліни "Сучасна практика світової математичної освіти". Метою дисципліни, що вивчається на четвертому курсі, є ознайомлення студентів із інноваційними тенденціями та особливостями, що характеризують сучасний стан і перспективи розвитку різних національних систем шкільної математичної освіти, розвиток методичної компетентності майбутніх учителів математики, формування в них готовності до інноваційної педагогічної діяльності.

У процесі вивчення спецкурсу у майбутніх учителів математики формуються (розвиваються):

- уявлення щодо основних тенденцій, чинників, напрямків модернізації національних систем математичної освіти школярів, інноваційних процесів, що відбуваються у світовому освітньому середовищі і безпосередньо впливають на визначення перспектив розвитку систем математичної підготовки дітей і молоді в окремих державах і регіонах;
- уявлення щодо ролі міжнародних математичних олімпіад, різноманітних конкурсів та міжнародних і національних проектів ("InnoMathEd", "Fibonacci", "mc"^{2}, TIMSS, PISA, ЗНО) у підтримці математично обдарованої молоді та моніторингу якості математичної підготовки школярів; організацій, що підтримують та координують впровадження інновацій у математичній освіті;
- здатності визначати сучасний стан та чинники вдосконалення систем математичної освіти школярів у різних країнах, порівнювати та аналізувати інноваційні тенденції у математичній освіті;
- здатності аналізувати доцільність упровадження інноваційного педагогічного досвіду зарубіжних країн в українську математичну освіту.

Під час лекційних занять студенти знайомляться із сучасними тенденціями розвитку і реформування математичної освіти та інноваційним педагогічним досвідом у світових системах математичної освіти. Наприклад, у процесі лекції на тему "Тенденції реформування математичної освіти у школах країн Європейського союзу", яка проходить у формі лекції-дискусії студенти не лише знайомляться із основними тенденціями реформування математичної освіти (наприклад, інтеграційні процеси в освіті, посилення уваги до природничо-математичної освіти, активне впровадження інформаційно-комунікаційних технологій навчання і т. ін.), але й порівнюють ситуацію із реаліями української школи, дискутують щодо доцільності, обґрунтованості впровадження певних новацій в українську систему математичної освіти.

Під час лекції на тему "Інновації у шкільній математичній освіті в зарубіжних країнах" студенти у формі лекції-конференції представляють доповіді (за рекомендаціями та посиланнями підготовленими викладачем), викладач скеровує обговорення основних напрямів інноваційного педагогічного досвіду у зарубіжних країнах (вони висвітлені у [20]).

У процесі практичних занять студенти розв'язують завдання міжнародних математичних конкурсів (наприклад, "Кенгуру"), завдання, що пропонувались учасникам TIMSS (Trendsin Mathematics and Science Study – міжнародне моніторингове дослідження), PISA (Programme for International Student Assessment – міжнародна програма оцінювання навчальних досягнень учнів), порівнюють їх із завданнями шкільних підручників, державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання, створюють методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язуванню типових завдань цих конкурсів та програм.

Наприклад, на практичному занятті на тему "Підтримка інноваційної педагогічної діяльності вчителя математики в зарубіжних країнах" студенти представляють доповіді щодо діяльності міжнародних організацій, які стимулюють та допомагають педагогам здійснювати інноваційну педагогічну діяльність, зокрема Центр досліджень та експериментів у математичній освіті (Франція), Центр інновацій у навчанні математики (Велика Британія), Центр досліджень, інновацій та координації учителів математики (Норвегія), і організації міжнародних міждержавних проектів, спрямованих на підготовку вчителів математики до інноваційної педагогічної діяльності. У процесі обговорення студенти порівнюють результати реалізації цих проектів та інноваційні здобутки у відповідних напрямках у математичній освіті в Україні. При цьому під час дискусії доходять до висновку, що у певних аспектах (як-то розробка програмного забезпечення для підтримки навчання математики, розробка теоретико-методологічних засад реалізації дослідницького підходу у навчанні) українська освітня спільнота не лише не поступається, а навіть переважає своїх колег, у той же час у окремих аспектах (як-то реалізація прикладної спрямованості навчання, поширення елементів дистанційного навчання, забезпечення сучасними мультимедійними засобами навчання, створення організаційно-педагогічних умов для індивідуалізації навчання, стимулювання вчителів до інноваційної педагогічної діяльності й ін.) поступається колегам.

У рамках самостійної позааудиторної роботи студенти порівнюють програми та навчально-методичне забезпечення навчання математики у різних країнах, готують групові проекти щодо інноваційного педагогічного досвіду провідних світових держав у галузі математичної освіти, реалій та перспектив його впровадження в українські заклади освіти.

Висновки. Долучати елементи інноваційного педагогічного досвіду країн Європейського союзу до змісту підготовки майбутніх учителів математики доцільно починати із першого курсу. Найбільш доречно це робити у процесі вивчення дисциплін методичної підготовки, зокрема спецкурсу "Сучасна практика світової математичної освіти". Ознайомлювати студентів із інноваційним педагогічним досвідом доцільно через включення його елементів до змісту лекційних, практичних та лабораторних робіт, до завдань для самостійної позааудиторної роботи, тематики курсових робіт та студентських наукових публікацій. Для цього доцільно використовувати такі форми лекційних та практичних занять як лекції-конференції, лекції-диспути, практичні заняття у формі круглого столу, практичні-конференції, практичні заняття у форми захисту проектів. Ознайомлення майбутніх учителів математики із інноваційним педагогічним досвідом дозволяє розширити їх світогляд, формувати уявлення щодо сучасного стану та напрямів удосконалення математичної освіти школярів у різних країнах Європейського союзу, порівнювати та аналізувати інноваційні тенденції у математичній освіті, аналізувати доцільність упровадження інноваційного педагогічного досвіду країн Європейського союзу в українську математичну освіту.

Список використаних джерел

1. Борисов, В. В, Борисова, С. В. Торубара, С. М. (2018). Вплив досвіду участі керівників закладів загальної середньої освіти у міжнародних проектах на рух учителів до змін. *Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки*, 2, 9–15.

2. Десятов, Т. М. (2018). Шляхи й механізми модернізації освітнього менеджменту в зарубіжних країнах та Україні. *Вісник Черкаського університету. Серія Педагогічні науки*, 2, 7–13.

3. Локшина, О. І. (2009). *Зміст шкільної освіти в країнах Європейського Союзу: теорія і практика (друга половина XX–початок XXI ст.)*. Київ: СПД Богданова А.М.

4. Сбруєва, А. А. (2013). Інтернаціоналізація вищої освіти: пріоритети комплексної стратегії Європейського Союзу. *Вища освіта України*, 3, 89–95.

5. Тарасенкова, Н. А., Сердюк, З. О. (2013). Основи порівняльної педагогіки у дослідженні шкільної математичної освіти різних країн. *Дидактика математики: проблеми та дослідження*, 40, 55–59.

6. Tarasenkova, N. A, Akulenko, I. A. (2013). Determination of Students' Beliefs is one of the Aspects of Competence Oriented System of Mathematics Teachers' Methodical Preparation. *American Journal of Educational Research, 1*(11), 477–483.

7. Бевз, В. Г. (2018). Інноваційне навчальне середовище підготовки майбутніх учителів математики. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матер. Міжнар. наук.-практ. конф.* (30 травня–1червня, 2018, Вінниця), 15–17.

8. Vlasenko, K., Lovianova I., Sitak, I., Chumak, O., Kondratyeva, O. (2019). Training of mathematical disciplines teachers for higher educational institutions as a contemporary problem. *Universal Journal of Educational Research, 7*(9), 1892–1900.

9. Ковтонюк, М. М. (2013). *Фундаменталізація професійної підготовки майбутнього вчителя математики-бакалавра.* Вінниця: ТОВ "Фірма "Планер".

10. Кугай, Н. В., Ачкан, В. В. (2016). Методологические знания по элементарной математике как основа формирования готовности будущих учителей математики к инновационной педагогичной деятельности. *Сборник научни трудове «MATTEX 2016», 1,* 226–235.

11. Матяш, О. І. (2013). *Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії*. Вінниця: ФОП Легкун В. М.

12. Скворцова, С. О. (2010). Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики. Retrieved from: www.intellect-invest.org.ua/pedagog_editions_e-magazine_pedagogical_

13. Чашечникова, О. С., Колесник, Є. А. (2014). Інноваційні підходи до підготовки майбутнього вчителя математики. Навчання елементарної математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 8*(42), 262–269.

14. Боркач, Є. І. (2013). *Система підготовки вчителів природничо-математичних дисциплін в умовах запровадження Болонського процесу в Угорщині*. Черкаси: Чабаненко Ю.А.

15. Кугай, Н. В. (2015). Порівняльний аналіз підготовки майбутніх учителів математики у Польщі та Україні. *Український педагогічний журнал, 2,* 23–31.

16. Сердюк, З. О. (2018). Відсотки у шкільному курсі математики у Словаччині. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матер. Міжнар. наук.-практ. конф.* (30 травня–1червня, 2018, Вінниця), 70–73.

17. Хара, О. М. (2012). Королівська математика. Досвід шкільної математичної освіти в Норвегії. *Математика в сучасній школі*, *6*, 27–34.

18. GEONExT. Retrieved from: http://geonext.uni-bayreuth.de/

19. Elica. Retrieved from: http://www.elica.net/site/index.html

20. Ачкан, В. В. (2016). Інновації у шкільній математичній освіті в зарубіжних країнах. *Математика в рідній школі, 6*, 38–44.

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТЬ В УЧНІВ: ПСИХОЛОГО – ДИДАКТИЧНИЙ АСПЕКТ

Тамара Коростіянець, Катерина Нєдялкова

Вступ. На сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти основні зміни пов’язуються з переглядом цілей навчання у контексті компетентнісного підходу: основною метою стає формування у здобувачів середньої освіти однієї з ключових компетентностей – вміння вчитися впродовж життя. Засобом розвитку цього вміння стає формування у учнів певних навчальних дій, у зв’язку з чим актуальною залишається проблема ефективного використання вчителем психолого-педагогічних основ формування математичних понять. Найпотужнішим ресурсом у цьому плані є теорія і практика формування понятійного мислення, зокрема на уроках математики.

Огляд останніх публікацій за темою. Проблема формування понятійного мислення у здобувачів середньої освіти на уроках математики вже тривалий час є у центрі уваги науковців, методистів, учителів – практиків, що обумовлюється специфічними властивостями математики як науки і як навчального предмету з точки зору можливостей для розвитку мислення учнів, насиченості понятійного апарату, глибоких внутрішньопредметних зв´язків, прикладної значущості тощо. Психолого-педагогічними основами формування математичних понять у школярів ґрунтовно займались такі вчені – методисти, як-от: П. Я. Гальперін, Э. Г. Гельфман, Н. М. Рогановский, Г. І. Саранцев, М. А. Холодна, З. І. Слєпкань та ін. Однак, на жаль, сучасних розробок у цьому напрямі небагато, особливо що стосується психолого-дидактичних аспектів зазначеної проблеми; водночас, саме знання вчителем психолого-дидактичних основ формування математичних понять забезпечує якість і ефективність такого процесу.

Проблемами професійної підготовки, зокрема формування різних складових методичної компетентності майбутніх учителів математики продовжують займатися сучасні вчені-методисти І. А. Акуленко, М. І. Бурда, О. І. Матяш, О. І. Скафа, С. О. Скворцова, Н. А. Тарасенкова, О. С. Чашечникова та ін. Наразі постає проблема пошуку шляхів удосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики щодо свідомого урахування ними у професійній діяльності психолого-дидактичних аспектів формування в учнів математичних понять.

Метою дослідження є з’ясування психолого-дидактичних засад формування математичних понять у здобувачів середньої освіти і розробка напрямів удосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики в контексті зазначеної проблеми.

Виклад основного матеріалу. Термін "понятійне мислення" ввів Л. С. Виготський (1984), у працях якого зроблено наступний висновок. Мислення людини залежить від: уміння бачити справжню сутність явища; можливості знайти причину того, що відбувається; вміння передбачати наслідки; навичок роботи з інформацією і вміння її систематизувати; здатності вибудовувати повну картину навколишньої дійсності. Справді, саме характер засвоєння понять безпосередньо впливає на особливості усвідомлення учнями свого ставлення до дійсності. Завдяки поняттям, на думку Л. С. Виготського, учні розуміють зв’язки, відносини, взаємозалежності, розширюється середовище їхньої свідомості, запам’ятовування починає спиратися на смислові зв’язки, увага набуває довільного характеру, засвоюється історично сформований досвід людства, "зміст мислення стає внутрішнім переконанням особистості, її інтересом, бажанням і наміром, починається самопізнання" (Виготський, 1984, с. 71). Понятійне мислення – мислення, користуючись яким людина в процесі розв’язування задач звертається до понять, виконує дію подумки, безпосередньо не має справи з досвідом, що одержується за допомогою органів почуттів. Вона шукає розв’язання задачі подумки, користуючись готовими знаннями, здобутими іншими людьми, вираженими у понятійній формі, судженнях, умовиводах.

Відтак перед майбутніми вчителями математики постає завдання навчитися формувати понятійне мислення в учнів як умову формування різних навчальних дій. У методичних дослідженнях розглядаються елементи цієї діяльності. Так, на думку Н. М. Рогановского (Рогановський, 1990, с. 51), підготовка вчителя до формування понятійного мислення повинна включати розвиток умінь організовувати роботу з розчленовування ознак об'єктів, по варіюванню несуттєвих ознак поняття, роз'яснення сутності кожного з них, встановлення зв'язків між ними, визначення місця тієї чи іншої ознаки в системі інших ознак, виділення властивостей відповідно до поставлених задач. У зв'язку з цим З. І. Слєпкань (1983) звертає увагу на те, що для успішної роботи з ознаками понять корисно включати в програму підготовки майбутніх учителів знайомство з роботами психологів, присвяченими вивченню розумової діяльності учнів, спрямованої на вивчення властивостей понять. В. А. Далінгер (1993) виділяє змістові, операційні, методичні та організаційні внутрішньопредметні зв'язки між поняттями; розглядає логіко-математичні зв'язки між різними поняттями алгебри. Усвідомлення таких зв'язків, вміння залучити учнів до їх встановлення допоможе майбутнім учителям впізнавати і конструювати дидактично збагачену систему задач.

Як зазначають Е. Г. Гельфман, Н. В. Метельський, В. В. Реп'єв, Н. М. Рогановський та інші вчені-методисти (2003), майбутній учитель повинен знати можливі помилки учнів під час навчання понять. Наведемо їх.

1. Помилки, викликані відсутністю у школяра образів, адекватних відповідному математичному поняттю:
   а) структура образу, що виник, не відповідає змісту вихідного математичного поняття;
   б) відсутні необхідні перетворення в структурі образу, що виник, – відсталість, адинамічність образної системи;
   в) у процесі оперування математичними поняттями образи взагалі не виникають.
2. Помилки, пов'язані з недоліками в організації змісту даного математичного поняття:
   а) відсутність у змісті даного поняття в учнів повного набору необхідних властивостей;
   б) необхідні властивості представлені в змісті поняття в повному обсязі, проте ці властивості не систематизовані.
3. Помилки, пов'язані з недостатньою активністю операції конкретного аналізу. У цих випадках в учнів відсутня внутрішня установка на аналіз умов задачі, на виділення і співвіднесення окремих компонентів у реальній структурі задачі, яка постає перед учнями як щось фіктивне, нерозчленоване.
4. Помилки, пов'язані з роздвоєністю поняття. У випадку різного способу введення одного і того ж поняття на різних етапах навчання замість поглиблення сформованого поняття, розширення системи його властивостей нерідко має місце роздвоєність поняття.
5. Помилки, викликані відсутністю зв'язку математичного поняття зі змістом відповідного предметно-конкретного досвіду дитини:
   а) поняття інтерпретуються прикладами, неадекватними змісту поняття;
   б) учні не можуть співвіднести практичну задачу зі своїми теоретичними знаннями з області математики.
6. Помилки, пов'язані з відсутністю системності в знаннях, тобто кожне математичне поняття існує ізольовано, воно не включено в загальну систему понять.
7. Помилки, пов'язані з орієнтацією дитини не на зміст відповідного математичного поняття, а на його словесну оболонку, тобто має місце реакція на слово, а не на зміст поняття.

Змістовне засвоєння понять – це розгорнутий у часі процес, у якому можуть бути виділені певні етапи руху думки. Тому, як визначають П. Я. Гальперін (1985), М. А. Холодна, Г. І. Саранцев, З. І. Слєпкань й інші дослідники (2003), майбутні вчителі повинні володіти психолого-педагогічним досвідом, який присвячений етапам формування математичних понять. Огляд досліджень, пов’язаних з підготовкою майбутніх учителів математики до формування понятійного мислення як однієї з психологічних основ формування навчальних дій, дозволяє зробити висновок, що ця діяльність передбачає знання особливостей структури понятійного мислення, усвідомлення вимог до формування понять, розуміння труднощів учнів при вивченні різних понять і причин їх виникнення, вміння конструювати зміст освіти, спрямований на формування понять, уміння добирати методи введення його в практику. Засобом формування математичних понять може бути спеціально сконструйований зміст математичної освіти; причому майбутній учитель математики повинен вміти розпізнавати тексти, спрямовані на формування математичних понять і усвідомлювати способи конструювання таких текстів.

Велику роль у такій підготовці студентів відіграє фахова дисципліна "Методика навчання математики", яка, з нашої точки зору, повинна мати інтеграційний характер. Мета цього курсу – створити умови для усвідомленого підходу майбутніх вчителів до роботи зі змістом сучасної шкільної математичної освіти. Через специфіку предмета математики та особливостей організації процесу засвоєння змісту освіти школярами різного віку професійна діяльність учителя математики характеризується, поряд із навчанням доведень математичних тверджень і розв’язування задач, насамперед, вмінням організовувати пізнавальну діяльність учнів при формуванні математичних понять. Г. Г. Гранатов (2004, с. 189) відзначає: "Керуючи процесом розвитку понять у мисленні учнів (студентів), мі керуємо їхньою рефлексією – формуємо рефлексивні вміння". Це передбачає проєктний характер задач, що створює умови для різних видів рефлексивної діяльності: ситуативної, ретроспективної, перспективної.

Ситуативна рефлексія виступає у вигляді "мотивувань", "самооцінок" і забезпечує безпосередню включеність суб’єкта у ситуацію, осмислення її елементів, аналіз того, що відбувається; вона включає здатність співвідносити з предметною ситуацією власні дії, а також координувати і контролювати елементи діяльності відповідно до мінливих умов.

Ретроспективна рефлексія служить для аналізу вже виконаної діяльності, подій, що мали місце в минулому; рефлексія в даному випадку торкається передумов, мотивів, умов, етапів та результатів діяльності або її окремих етапів, які вже перебувають в минулому, і може слугувати виявленню можливих помилок.

Перспективна рефлексія включає в себе роздуми про майбутню діяльність, уявлення про хід діяльності, планування, вибір найбільш ефективних способів виконання, прогнозування можливих результатів (Карпов, 2004).

Представимо досвід реалізації такого курсу у контексті проблеми, що розглядається, для студентів фізико-математичного факультету Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського. Як засіб організації пізнавальної діяльності студентів застосовувалися інтегративні навчальні задачі – задачі, які концентрують і збагачують психолого-педагогічні, методичні та предметні знання студентів. Інтеграція в задачах здійснюється за рахунок наявності в тексті математичних, методичних, психолого-педагогічних складових; за допомогою таких задач майбутні вчителі математики мають вчитися вмінню встановлювати зв’язки між процесами, що характеризують психічний розвиток учнів і дидактичними умовами (змістом вправ, їх послідовністю, методами навчання і т. д.) через впізнання текстів із певними психологічними функціями, а також через конструювання таких навчальних текстів, які сприяли б формуванню понятійного мислення у здобувачів середньої освіти.

Проілюструємо вищеозначене на прикладі теми "Відсотки". Вибір цього поняття обумовлений тим, що поняття "відсоток" має не тільки теоретичне, а й прикладне значення. З року в рік відзначається, що значна кількість випускників базової і старшої шкіл не можуть впоратися із задачами на процентні обчислення, часто навіть не приступають до їх розв’язування; близько 45% школярів припускаються помилок при розв’язенні практико-зорієнтованих задач і задач із реальним сюжетом, пов’язаних із виконанням нескладних процентних розрахунків. Крім того, на думку багатьох дослідників, труднощі у вивченні поняття "відсотки" пов’язані з тією обставиною, що його часто вважають математично тривіальним, а тому при навчанні не враховуються у повній мірі психологічні закономірності його формування. Зауважимо, що всі труднощі учнів старших класів при роботі з цим поняттям мають своє коріння в особливостях засвоєння ними навчального матеріалу курсу математики 5-6-х класів. Саме в цей період в учнів формується поняття "відсоток": виділяються його істотні та несуттєві властивості, встановлюються зв’язки між поняттям "відсоток" та іншими поняттями математики, розглядаються способи розв’язення найпростіших задач на процентні розрахунки і т. д.

Представимо комплекс навчальних задач, розроблених авторами, який сприяє формуванню навчальних дій.

"Задачі-мотивації". До них відносяться задачі, які допомагають майбутнім учителям математики усвідомити недостатність знань про формування понять у учнів, зокрема поняття "відсоток"; це можуть бути задачі, що вимагають пояснити причини труднощів учнів, хрестоматійні тексти по формуванню понять, дидактичні матеріали вчителів і т. д.

"Задачі-розпізнавання". Ці задачі сприяють формуванню вміння розпізнавати навчальний матеріал, що створює умови для формування компонентів понятійного мислення, визначати призначення даного навчального тексту з цієї точки зору.

"Задачі-порівняння". Ці задачі стимулюють діяльність студентів з точки зору можливості продуктивного формування математичних понять.

"Задачі-конструювання". Це задачі, що формують уміння конструювати навчальні тексти, спрямовані на формування поняття, фрагменти уроків, діагностичні матеріали, спрямовані на визначення рівня сформованості поняття.

Наведемо приклади навчальних задач.

Задача-мотивація. "Розв’яжіть задачу: а) Джинси коштували 900 гр. Ціну на них спочатку збільшили на 10%, а потім зменшили на 10%. Чи змінилася ціна джинсів, а якщо змінилася, то як? б) У розколотому кавуні міститься 99% води. Після його усихання вміст води став становити 98%. У скільки разів усох кавун?

Які помилки можуть допустити учні при розв’язуванні задач? Які труднощі відчувають учні при розв’яженні подібних завдань?".

Такі задачі виконувалися майбутніми вчителями математики в парах. Після обговорення студенти дійшли висновку, що основні труднощі пов’язані з невмінням аналізувати текст задачі і застосовувати ознаки поняття "відсотки".

Задача-мотивація. "Проаналізуйте дидактичні матеріали "Помилки і труднощі учнів при засвоєнні теми "Відсотки". Виписати типові помилки, що припускаються учнями при виконанні задач в межах даної теми. Чи характерні виділені Вами помилки тільки для поняття "відсоток"? Щоб відповісти на питання, прочитайте питання лекції "Про помилки учнів при засвоєнні понять", присвячену обговоренню типових помилок, які припускаються учнями при вивченні математичних понять".

В ході виконання задачі студенти виділили такі типові помилки учнів при засвоєнні даної теми:

- в учнів не сформовані вміння переводити інформацію про подану кількість відсотків з однієї форми у іншу;
- учні недостатньо володіють суттєвими властивостями поняття "відсоток";
- школярі не вміють розв'язувати різними способами задачі основних типів, пов'язані з поняттям "відсоток";
- діти не виділяють властивість поняття "100%" і не аналізують текст задачі з метою планування способів її розв'язання.

Аналіз психолого-педагогічної літератури дозволив майбутнім вчителям математики побачити, що проблемам пошуку труднощів учнів при вивченні понять приділяється увага вчених, що працюють в різних областях. Наприклад, студенти відзначали, що в дослідженні А. В. Усової (1986) стверджується: "Певні труднощі в засвоєнні понять виникають при відсутності міри у співвідношенні образного, словесно-теоретичного і практично-дієвого компонента при формуванні понять". Розглядаючи труднощі учнів при засвоєнні понять, багато дослідників звертають увагу на те, що учні не усвідомлюють суттєві властивості поняття, не можуть виділити із низки суттєвих властивостей ті, які є важливими для розв'язання даного завдання. Таким чином, майбутні вчителі математики відзначили недоліки у процесі навчання поняттям, зокрема поняттю "відсоток", зробили висновки щодо труднощів учнів при його формуванні. Виконання даної задачі дозволило усвідомити недостатність психолого-педагогічних знань для проведення глибокого аналізу типових помилок учнів. Тим самим була викликана необхідність вивчення теорії формування понятійного досвіду.

Далі необхідно, щоб майбутні вчителі переконалися, що не будь-який зміст математичної освіти сприяє формуванню математичних понять в рамках психолого-дидактичного підходу. Наведемо приклад задачі, яка слугує досягненню цієї мети.

Задача-розпізнавання. "Проаналізуйте різні навчально-методичні підходи щодо вивчення математики у 5-6-х класах і дайте відповідь на питання: в якому класі вводиться поняття "відсоток"? яке означення дається поняттю "процент" у кожному з підходів? як встановлюється зв'язок даного поняття з іншими? як виділяються суттєві властивості даного поняття? який із навчально-методичних підходів представляє навчальні тексти, що, на Ваш погляд, сприяє успішному засвоєнню даного поняття? Складіть кластер навчальних текстів (з різних навчально-методичних підходів), які б Ви використовували при формуванні поняття "відсоток". Визначте їх призначення".

Дане завдання носило протокольний і діагностичний характер. Серед запропонованих студентами текстів по темі "Відсотки" були як тексти традиційного характеру, так і тексти психологічно-зорієнтованих моделей навчання. Після аналізу отриманих матеріалів студенти відзначили, що тексти, написані в рамках психологічно-зорієнтованих моделей навчання, більш цікаві дітям, сприяють формуванню навчальних дій, в них використовується практичний досвід учнів, є питання до читача, є способи розв'язування поставленої проблеми, автори використовують історичний матеріал, підводять учнів до необхідності введення поняття "відсоток". Однак повне визначення призначення задач викликало у студентів труднощі в зв'язку з недостатністю знань про навчальні тексти, що сприяють формуванню понять. У зв'язку з цим виникла необхідність виділити вимоги до навчальних текстів, що сприяють засвоєнню понять.

Таким чином, майбутні вчителі математики усвідомлювали, з одного боку, необхідність вивчення теоретичних основ формування понятійного мислення, з іншого боку, необхідність вивчення теорії навчальних текстів і практики їх створення як засобу інтелектуального розвитку учнів.

Наступний етап організації проєктної діяльності, спрямований на розвиток умінь організовувати навчальну діяльність, пов'язану з формуванням поняття, – вміння розпізнавати навчальні тексти з певними психолого - дидактичними функціями. Діяльність студентів на цьому етапі почалася з проблемної лекції на тему «Компоненти понятійного мислення. Формування математичних понять", у ході якої було виділено компоненти понятійного мислення та запропоновано навчальні задачі, що формують вміння працювати з окремими компонентами понятійного досвіду.

Задача-конструювання. "Однією з вимог до організації процесу формування поняття "відсотки" є забезпечення умов для встановлення міжпонятійних зв'язків. Необхідно встановити зв'язки між поняттями "десятковий дріб", "звичайний дріб", "відсоток", "відношення"; зв'язок між поняттями "більше на ...% " - "більше в ... раз". Крім того, повинна бути показана роль поняття "відсоток" у встановленні міжпредметних зв'язків: розв'язуванням задач, пов'язаних із знаходженням успішності, з концентрацією розчину, з прибутковим податком тощо. Зокрема організовується робота щодо встановлення внутрішньопредметних зв'язків, які мали місце між величинами і виражалися за допомогою раціональних чисел, а тепер їх можна висловити за допомогою відсотків: "збільшити в ... раз" - "збільшити на ... відсотків"; "зменшити в ...раз " - "зменшити на ... відсотків". Досягненню цієї мети слугують наступні два тексти.

Перший текст – "текст встановлення відповідностей":

1. "Заповніть пропуски в таблиці відповідностей:

Збільшити в 2 рази	Збільшити на 100%
Зменшити в ... рази	Зменшити на 50%
Збільшити в 1,5 рази	Збільшити на ...%
Зменшити в ... рази	Зменшити на 60%
Збільшити на 300	...
...	Зменшити на 200%

Які рядки таблиці Ви не змогли заповнити? Чому? Продовжіть цю таблицю".

Другий текст демонструє, в яких життєвих ситуаціях доводиться встановлювати такі відповідності між поняттями (тим самим актуалізується особиста значущість навчального матеріалу).

2. "Які висловлення означають одне і те саме:

а) зарплата підвищилася на 1/3; б) зарплата збільшилася на 30 гривень; в) зарплата підвищилася на 30%; г) нова зарплата становить 130% від старої; д) зарплата збільшилася в 1,3 рази? *"*.

Підберіть або напишіть навчальні тексти, які сприяють встановленню різних зв'язків між поняттями, пов'язаними з темою "Відсотки".

На наступному етапі проєктної діяльності, спрямованому на збагачування досвіду, студентам пропонувалося скласти шаблони-характеристики навчальних текстів, що відносяться до певного типу (було обрано групову форму роботи). Кожна група досліджувала одну із основних характеристик понять та тексти, що сприяють його збагаченню. Для кожного із виділених типів текстів наводилися приклади текстів по темі "Відсотки". Крім того, на цьому етапі розв'язувалося питання про послідовність пред'явлення навчальних текстів в процесі формування поняття "відсоток".

У подальшому, на конструктивному етапі проєктної діяльності студентам пропонувалася задача, в якій необхідно дати методичну характеристику запропонованого тексту у вигляді рецензії та реконструювати його.

Задача-порівняння і конструювання. "Розгляньте фрагмент тексту з підручника для 5 класу (Тарасенкова, 2018, с. 212): Відсотком (процентом) називають одну соту частину. ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ! Коротко записують: 1 %. Знак % замінює слово «відсоток». 1 % = 1/100 = 0,01. Наприклад, 1/100 гривні (0,01 гривні) — це 1 копійка, тому 1 копійка — це 1 % гривні". Доповніть або змініть текст так, щоб він відповідав психолого-дидактичним вимогам щодо формування понять".

На останньому етапі проєктної діяльності – діагностичному – студентам було запропоновано підготувати презентації з тем: "Я допоможу учням бути успішними при вивченні поняття "відсотки"; "Діагностичні матеріали, що створюють умови для перевірки сформованості навчальних дій по темі "Відсотки" (можна було вибрати свою тему).

Розгляд представлених презентацій засвідчив, що студенти навчилися проводити порівняльний аналіз навчально-методичних комплексів по темі "Відсотки" з точки зору психолого-дидактичного підходу і конструювати навчальні тексти з психологічним навантаженням.

Висновки. У представленій статті з'ясовано психолого-дидактичні основи формування понятійного мислення здобувачів середньої освіти, знання і дотримання яких учителем у процесі навчання математики є запорукою успішності та ефективності цього процесу. Тому вкрай важливо під час фахової підготовки майбутніх учителів математики досягти усвідомлення ними значущості та сутності психолого-дидактичних основ і етапів формування математичних понять в учнів. Досягненню цієї мети може слугувати використання викладачем комплексів навчальних задач (які містять математичну, методичну, психолого-педагогічну складові), що було продемонстровано на прикладі вивчення теми «Відсотки» у курсі уніерситетської дисципліни «Методика навчання математики». На думку авторів, у такий спосіб може бути удосконалено процес професійної підготовки майбутніх учителів математики у контексті зазначеної проблеми.

Список використаних джерел

1. Выготский, Л. С. (1984). Собрание сочинений: в 6 т. Эльконин, Д. Б. (Ред.) Т. 4. *Детская психология*. Москва: Педагогика.
2. Рогановский Н. М. (1990). *Методика преподавания математики в средней школе*. Минск: Высшая школа.
3. Слепкань, З. И. (1983). *Психолого-педагогические основы обучения математике*. Киев: Рад. школа.
4. Далингер, В. А. (1993). *Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей*. Омск: ОМИПКРО.
5. Гальперин, П. Я. (1985). *Формирование умственных действий и понятий*. Москва: МГУ.
6. Гельфман, Э. Г., Цымбал, С. Н. (Сост.). (2003). *Психолого-педагогические условия развития понятийного мышления*. Томск: Изд-во ТГПУ.
7. Гранатов, Г. Г. (2004). Приёмы измерения уровня рефлексивности профессионально-педагогического мышления студентов. *Наука. Культура. Образование*, 15/16, 189-190.
8. Карпов, А. В. (2004). *Метасистемная организация уровневых структур психики*. Москва: ИПРАН.
9. Усова, А. В. (1986). *Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения*. Москва: Педагогика.
10. Тарасенкова, Н. А. (2018). *Математика. 5 кл.: підруч. для закладів загальної середньої освіти*. Київ: Видавничий дім «Освіта».

РОЗДІЛ 6

МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА У ВИЩІЙ ШКОЛІ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ И МОДЕРНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Инта Володко, Сармите Черняева, Ирина Эглите

Введение. В эпоху современного стремительного развития технологий вырос спрос на квалифицированных специалистов, которые не только способны быстро ориентироваться в новейших технологиях и материалах, но и сумеют применить их в решении конкретных задач. Высшие учебные заведения также должны адаптироваться в соответствии с требованиями эпохи и быть готовы предложить такое образование, чтобы выпускники были конкурентоспособными на рынке труда. Это также относится к учебным программам по различным курсам математики. Преподаватели математики должны разработать систему обучения, основанную на новых технологиях, которые дадут студентам возможность найти применение своих математических знаний уже во время обучения.

Выбор соответствующего метода обучения является одной из важнейших компетенций каждого преподавателя. В наши дни все больше предлагается активно вовлечь студентов в учебный процесс [1]. Поэтому преподаватели должны знать различные системы обучения. Чем более широкий спектр методов обучения, тем лучше его можно применить к разным ситуациям, которые возникают в процессе обучения. Новые методы и направления также появляются в преподавании математики. Увеличивается использование компьютеров и математического программного обеспечения для математических расчетов, а также математического моделирования механических и экономических процессов. Навыки и компетенции, необходимые для исследований и разработки продуктов, также меняются: сегодня роль инженера в математических и вычислительных алгоритмах возрастает [2].

Обзор публикаций по теме. Обучение математическим программам параллельно традиционному курсу математики вводится по всему миру, и именно MATLAB является наиболее популярной программой. MATLAB был введен в математическое обучение во многих странах Европы: например, в работе [3] рассказывается об успешном введении MATLAB в учебном процессе в двух университетах Великобритании, [4] – об использовании MATLAB в Дании, [5] – о новом курсе математики в Техническом университете Софии в Болгарии, который основывается на MATLAB и MAPLE.

MATLAB используется в процессе обучения и в других частях мира. В работе [6] описано, как MATLAB используется при обучении математике студентов инженерных наук в университете в Саудовской Аравии.

В университете Цинциннати в США MATLAB был введен как инструмент, помогающий студентам понять инженерные концепции, исследовать и анализировать решения сложных проблем, а также эффективно отображать результаты [7]. В университете Толедо в США – MATLAB используется, чтобы помочь студентам легче и быстрее решать задачи прикладной математики [8].

В Австралии преподаватели университета Квинсленда [9] уже в начале 21 века начали использовать MATLAB как инструмент для численного анализа и визуализации результатов. В начале студенты Австралии не оценили возможности MATLAB и сопротивлялись этим инновациям. Основные возражения были таковы:

- программа производит численные вычисления, а не символично, поэтому не может использоваться в качестве шаблона решения задачи, данного в лекционных материалах и учебниках;
- многие студенты не видят связи между лабораторными работами и лекционным материалом;
- при ошибках в написании программы, появляются непонятные уведомления об ошибках.

Однако со временем, улучшая и пополняя программное обеспечение, а также после долгих усилий преподавателей, студенты оценили MATLAB как хорошего помощника по математическим расчетам.

Латвия тоже не исключение. В 2014 году в Латвии в одной из крупных компаний, связанных с телекоммуникациями и информационными технологиями, был проведен опрос сотрудников по популярности математического программного обеспечения [10]. В опросе приняли участие 115 работников в возрасте от 20 до 40 лет. Первый из заданных вопросов был следующим: «Какую из математических программ Вы знаете и используете при математических расчетах?». Несомненно, лидер в ответах на этот вопрос был MATLAB, который получил 45% голосов, на втором месте – MATHCAD – 27%, немного отстала MATHEMATICA – 19%, и меньше всего голосов было отдано программе MAPLE – 9%. На вопрос: «Где Вы этому обучались?» – 86% ответили, что в университете, – 9% освоили самостоятельно, – 5% обучение было на работе.

Во всех крупнейших высших учебных заведениях Латвии, в которых есть курс по математике, также используется математическое программное обеспечение.

Цель исследования. Преподавая математику на инженерно-строительном факультете и факультете компьютерных наук и информационных технологий Рижского технического университета, в нашей работе также актуализируется вопрос о применении полученных математических знаний в профессиональной деятельности специалистов. Ищутся ответы на вопросы: чему нужно учить, и как это сделать, чтобы полученные математические знания были полезны в дальнейшем в профессиональной деятельности. При проведении практических занятий по математике необходимо учитывать уровень подготовки студентов, способности их интеллекта и когнитивные преимущества. При этом нужно соблюдать соотношение контактных часов и времени самостоятельной работы в зависимости от степени сложности и значимости темы в других учебных дисциплинах, связанных с математикой.

Изложение основного материала. С конца прошлого века широкую популярность стали получать математические программы. Среди большого многообразия пакетов программ, с помощью которых можно решать широкий круг инженерно-технических задач, можно отметить универсальные: электронные таблицы Microsoft Excel и математические пакеты программ (MathCAD, MATLAB, MATHEMATICA и MAPLE).

Электронные таблицы Microsoft Excel изучаются на уроках информатики в средней школе. Именно поэтому в курс высшей математики в первом и во втором семестре введены по две домашние работы, которые решаются не аналитически, а с использованием Microsoft Excel. В первом семестре решаются система линейных уравнений и уравнение третьего порядка с помощью метода Ньютона. Во втором семестре вычисляется приблизительное значение определенного интеграла по прямоугольной формуле с шагом h , а также численное решение задачи Коши методом Эйлера для уравнения Бернулли. Эти задания решаются абсолютно всеми студентами университета. И, как показала практика, студентам нравятся такие практические задания.

На лекциях по математике студентам инженерно-строительного факультета Рижского технического университета показывается работа с математическим пакетом программ MathCAD. В рамках этой системы математические решения выполняются с использованием обычных математических формул и символов. Популярность программы подтверждается тем фактом, что за последние несколько лет на рынке появилось несколько версий этой программы. Программа работает в среде Windows, относительно проста в использовании, поскольку форма математических выражений соответствует привычному стилю.

В Рижском техническом университете на всех факультетах используют математические программы при изучении различных инженерных курсов, где необходимы трудоемкие вычисления, а также на старших курсах для моделирования реальных инженерных задач.

В период с 2005 по 2014 годы студентам факультета компьютерных наук и информационных технологий параллельно стандартным формам занятий (лекции и практические занятия), проводились лабораторные работы по пакету программ

MATHEMATICA. Впоследствии произошла замена на пакет программ MATLAB. Студенты первого курса на протяжении двух семестров осваивают, как с помощью математической программы решать задачи, аналогичные тем, которые рассчитываются аналитически на практических занятиях.

Во время лабораторных работ студенты учатся с помощью программного пакета MATLAB:

- задавать функции и вычислить их значение с требуемой точностью;
- производить действия с матрицами и векторами;
- рисовать линии на плоскости в декартовых, полярных координатах;
- рисовать линии или поверхности в пространстве;
- решать систему алгебраических уравнений;
- вычислять предел функции и применять для нахождения асимптот функций;
- находить производную функции и применять при исследовании функций;
- вычислять неопределенные, определенные, кратные интегралы и применять их для практических задач;
- решать дифференциальные уравнения;
- определять отображение функции и оригинал, используя преобразование Лапласа и обратное преобразование Лапласа;
- разлагать функцию в ряд и определять область сходимости.
- создавать циклы и применять условные операторы при решении различных задач.

Приобретенные знания MATLAB в дальнейшем используются в курсе по численным методам.

Как показывает опыт, студенты с интересом изучают математическое программное обеспечение, поскольку с его помощью могут решать трудоемкие задачи, которые, решая аналитически, требуют достаточно большого времени. Работа с программой помогает студентам легче понять алгоритм задачи. Однако компьютер не может решить задачу, которая неправильно задана, либо введены в компьютер неправильные данные. Многие из студентов, у которых весьма слабые успехи в математике и которые не могут решить задачу сами аналитически, хорошо справляются с решением этих задач в среде MATLAB, MATHEMATICA или MATHCAD. При этом, используя математическое программное обеспечение, студенты в короткий срок могут решить трудоемкие задачи, решение которых аналитически требует много времени и усилий.

Чтобы проверить, насколько хорошо студенты умеют применять в решении математических задач MATLAB, в обоих семестрах студенты должны выполнять 4 контрольные работы. Каждая работа состоит из 3 задач, которые студенты должны решать, используя MATLAB. Во время выполнения контрольной работы студенты могут использовать свои записи, учебники, online материалы и другие вспомогательные средства. Максимальная оценка составляет 9 баллов.

Были проанализированы результаты контрольных работ 1-го семестра студентов 16 групп факультета компьютерных наук и информационных технологий 2019/20 учебного года. Темы контрольных работ были следующие:

1) Задание и расчет значения функции.
2) Операции с матрицами и решение систем линейных уравнений.
3) Конструирование графиков на плоскости и в пространстве.
4) Пределы и производные.

Первую контрольную работу MATLAB выполняли 359 студентов, вторую – 350 студентов, третью – 336 студентов и четвертую – 275 студентов. Уменьшение количества студентов связано с тем, что часть студентов после первых месяцев обучения понимают, что выбрали неправильную специальность, или, что не справляются с программой обучения, и покидают университет. Контрольные работы оценивались от 0 до 9 баллов. Результаты контрольных работ 1-го семестра показаны на рис. 1.

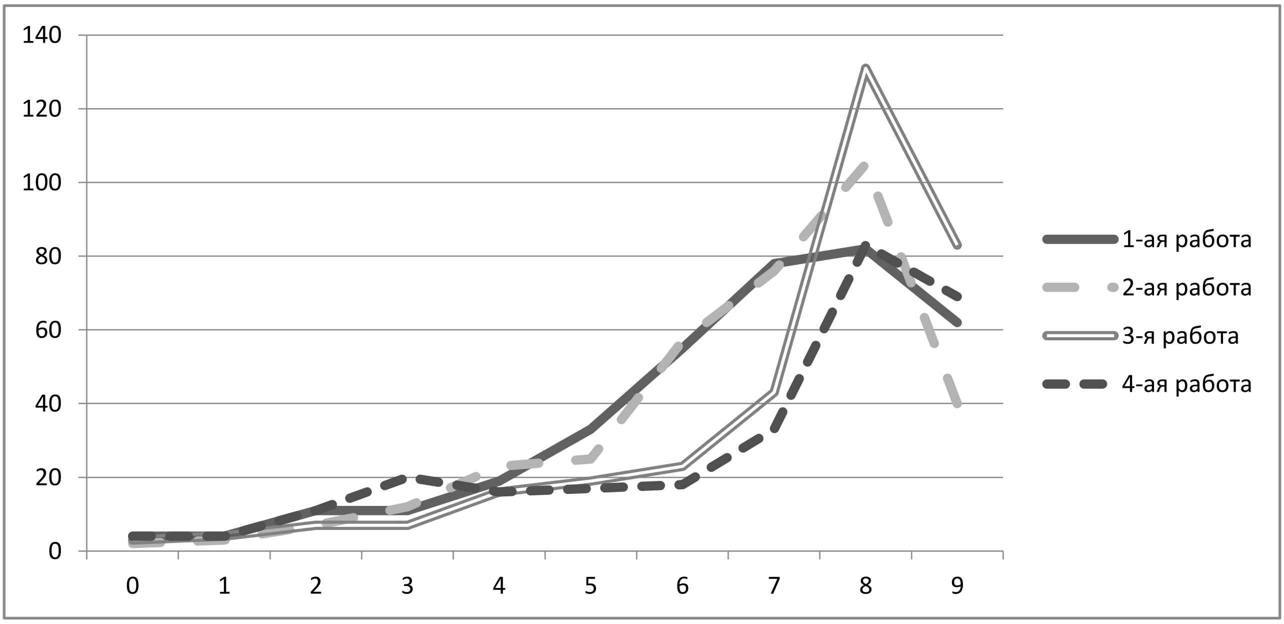


Рис. 1. Результаты контрольных работ за 1 семестр.

Как видно из рисунка, труднее всего дались 1 и 4 работы, хотя в целом результаты очень хорошие. Самые большие проблемы возникают с правильным заданием функции. Часто встречающиеся ошибки являются следующими:

- студенты не понимают, что такое аргумент функции, и не ставят его в скобки, или скобки ставятся неправильно;
- неправильно расставляют скобки в выражении, что приводит к изменению порядка операций;
- неправильные имена встроенных функций (например, в математике функция tgx в MATLAB вводится как tan(x) и т.п.);
- не умеют правильно преобразовывать выражения с корнями к выражениям со степенями, а также неправильно записывают дробную степень.

И, тем не менее, к концу первого семестра студенты уже умеют работать с MATLAB и делают это охотно. В 2-м семестре результаты выполнения контрольных работ еще лучше.

Обобщая результаты всех контрольных работ вместе, мы видим, что наиболее часто встречающаяся отметка составляет 8 (см. рис. 2). Следовательно, в основном студенты выполняют задачи правильно, допуская незначительные ошибки по невнимательности. Из 1320 выполненных работ только 114 работ или 8,6% получили неудовлетворительную оценку.

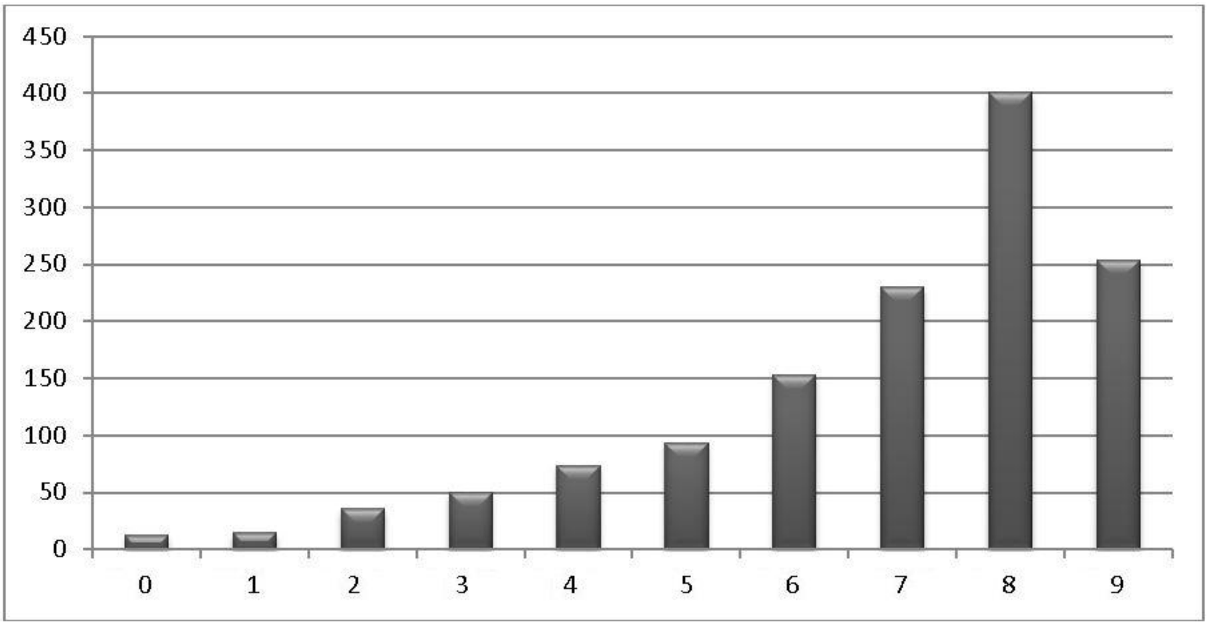


Рис. 2. Результаты всех контрольных работ 1-го семестра.

Чтобы узнать мнение студентов об обучении и применении MATLAB, был проведен опрос студентов 1-го курса факультета компьютерных наук и информационных технологий Рижского технического университета. В опросе приняли участие 172 студента. Ответы на первый вопрос «Пользовались ли Вы пакетом программ MATLAB или другой математической программой (если да, то какой) до поступления в Рижский технический университет?» показаны на рис.3. Оказалось, что 26 из всех опрошенных студентов или 15% были знакомы с MATLAB уже до начала учебы. 14 студентов пользовались другими программами. Среди них чаще всего упоминается WolframAlpha, некоторые упоминали также MATHEMATICA и MathCAD. Но самое большое количество студентов, т.е. 132 студента, ранее никогда не использовали математические программы.

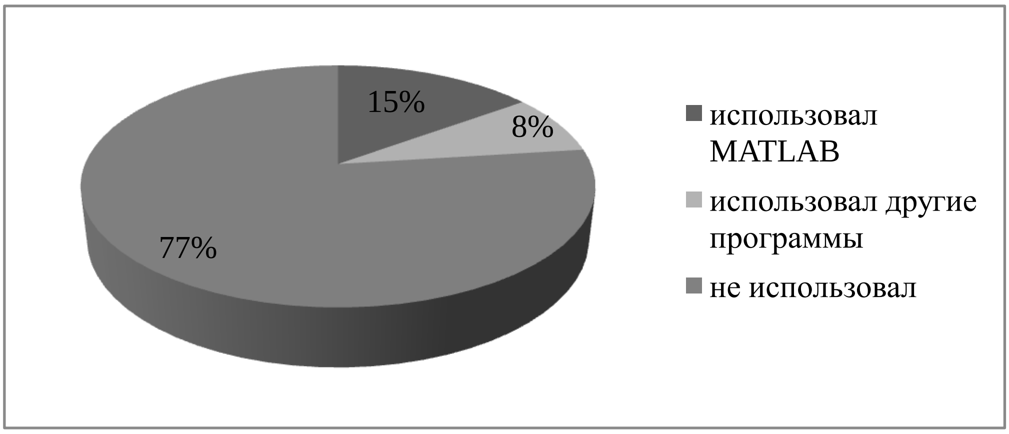


Рис. 3. Количество студентов (в процентах), использовавших математическое программное обеспечение уже до начала учебы

В качестве второго был задан вопрос: «Вы полагаете, что освоение MATLAB будет полезно, это необходимо преподавать студентам?» Ответы были такими (рис. 4): 141 студент или 82% считают, что MATLAB необходимо преподавать студентам, а оставшиеся 18% или 31 студент, что это не нужно. Основные причины, по которым не надо преподавать MATLAB, были следующие:

– это платная программа, которую можно использовать лишь в компьютерном классе университета;
– на первом курсе студенты еще не знают, где эти знания можно использовать в дальнейшем.

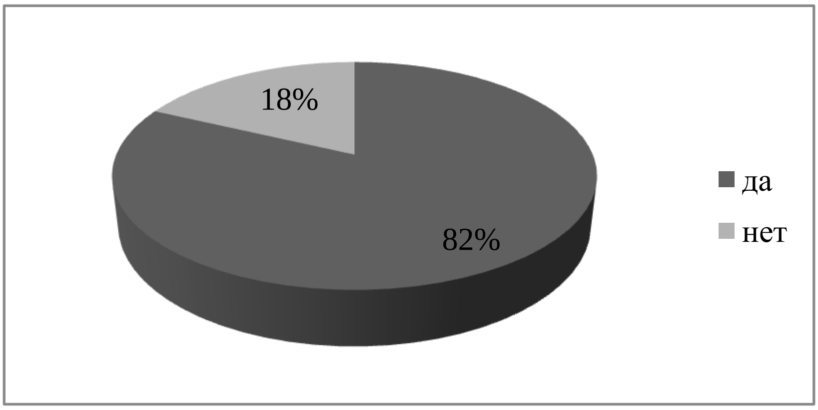


Рис. 4. Число ответов (в %) на вопрос о том, необходимо ли преподавать MATLAB.

К сожалению, всего треть студентов (61 студент или 35%) используют MATLAB вне лабораторных работ (рис. 5).

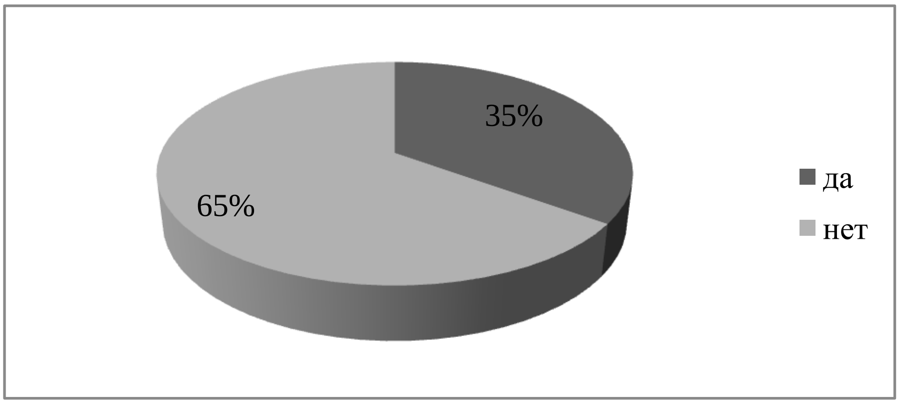


Рис. 5 Количество студентов (в %), использующих MATLAB вне лабораторных работ.

На рис. 6 показаны, для каких целей студенты используют MATLAB вне лабораторных работ. Большинство из этих 61 студента (76%) используют MATLAB при выполнении домашних заданий и численной проверки результатов выполненных домашних заданий. Некоторые студенты (11%) используют MATLAB, готовясь к контрольным работам и экзаменам, так же часто используют как инструмент для выполнения численных расчетов не только по математике, но и по другим учебным предметам, например, в электротехнике и физике. Один из студентов упомянул, что пользуется MATLAB на работе.

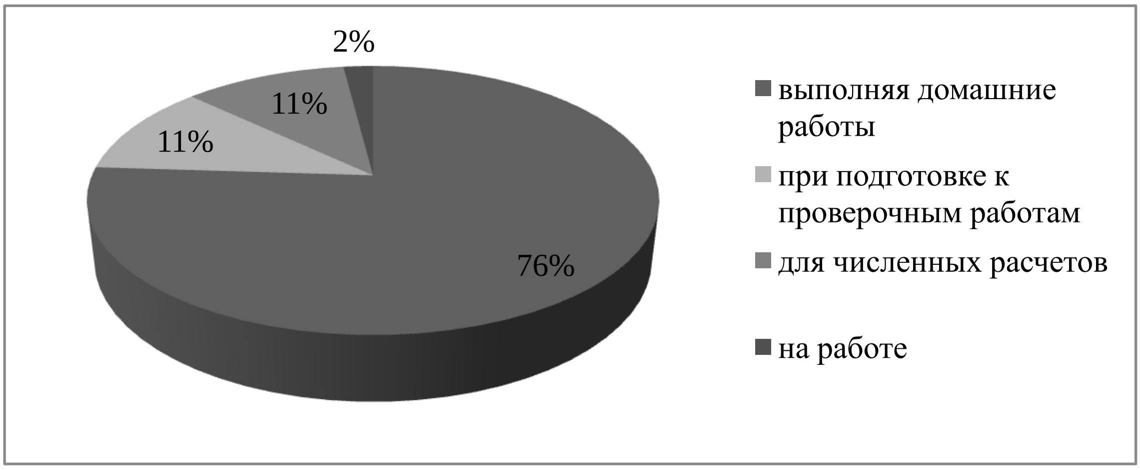


Рис. 6. Занятия, в которых студенты пользуются MATLAB

Большинство студентов (64%) считают, что работа с MATLAB помогает им понять алгоритмы решения задач, однако остальные 36% этого не считают (рис .7).

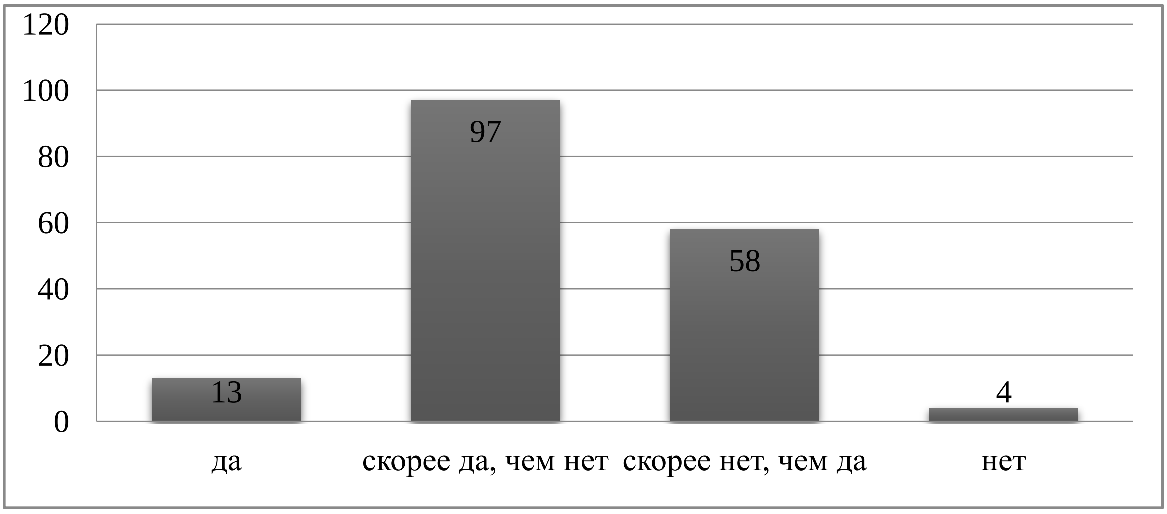


Рис. 7. Число ответов на вопрос о том, помогает ли MATLAB понять алгоритмы решения задач.

Последний вопрос, заданный в опросе, был «Хотели бы Вы освоить другие математические программы?». Только 63 из опрошенных студентов или 37% хотели бы освоить другие математические программы. Чаще всего было упомянуто MathCAD – 22 раза, 10 раз упомянуто MATHEMATICA, 9 раз – Maple. Некоторые студенты отметили, что не слышали ни об одной из этих программ, но с удовольствием изучали бы их все; некоторые – что хотели бы освоить какую-нибудь бесплатную программу. В свою очередь, большая часть из 109 студентов, которые отвечали, что не хотят освоить еще какую-либо программу, в качестве причины упоминали большую учебную нагрузку и отсутствие времени.

По результатам опроса можно судить, что большинство студентов положительно оценивают возможности MATLAB и благожелательно относятся к его освоению. Однако для полноценного использования MATLAB студенты должны владеть базовыми знаниями математики.

Выводы.

1. Работа с математическим программным обеспечением позволяет студентам легче понять алгоритм задачи. При этом, используя математическое программное обеспечение, студенты в короткий срок могут решить трудоемкие задачи, решение которых аналитически требует много времени и усилий. Это также существенно улучшает качество высшего образования и уровень подготовки молодых специалистов на рынке труда.
2. Однако, несмотря на то, что компьютер легко и быстро помогает решать задачи, использование его в курсе математики сегодня не имеет большого эффекта, потому что компьютерные программы предоставляют готовый ответ на проблему, а не показывают ход решения. При обучении только с помощью компьютера студент не сможет выполнить все задания аналитически на экзаменах.
3. Следовательно, лучшая методика преподавания математики – это объединение преподавания аналитической математики и математического программного обеспечения.

Список использованных источников

1. Bobalova, M. (2015). Modern teaching methods in mathematics. *Proceedings of the 26th International Business Information Management Association Conference*, *Spain*, 539–545.
2. Richter, Th., Rudlof, S., Boehringer, D., Grube, P., Gruninger, Gh., Helmig, R., Rohde, Gh., Bernlohr, H., Munz, C.D., & Stock, A. (2012). ViPLab – A virtual programming laboratory for mathematics and engineering. *Proceedings of the 40th SEFI Annual Conference, Greece*.
3. Nyamapfene, A., & Lynch, S. (2016). Systematic integration of MATLAB into undergraduate mathematics teaching: Preliminary lessons from two UK institutions. *Proceedings of IEEE Global Engineering Education Conference, United Arab Emirates,* 1145–1148.
4. Karamehmedovic, M. (2015). Mathematical beauty in service of deep approach to learning. *Proceedings of the 43rd SEFI Annual Conference*, *France*.
5. Konstantinov, M., & Pasheva, V. (2011). Mathematical education in the Bulgarian technical universities. *Proceedings of the 37th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, *Bulgaria*, 375–388.
6. Abdul Majid, M., Huneiti, Z.A., Al-Naafa, M.A., & Balachandran, W. (2013). A study of the effects of using MATLAB as a pedagogical tool for engineering mathematics. *International Journal of Online Engineering*, *9*(2), 27–35.
7. Heeg, J.J., Flenar, K., Ross, J.A., Okel, T., Deshpande, T.A., Bucks, G., & Ossman, K.A. (2014). Effective educational methods for teaching assistants in a first-year engineering MATLAB course. *Proceedings of the 121st ASEE Annual Conference and Exposition*, *USA*, 12.1365.1–12.1365.15.
8. Narayanan, G. (2007). Teaching of Essential MATLAB Commands in Applied Mathematics Course for Engineering Technology. *Proceedings of the 14th Annual ASEE Conference and Exposition*, *USA*, 12.1365.1–12.1365.15.
9. Tonkes, E.J., Loch, B.I., & Stace, A.W. (2005). An innovative learning model for computation in first year mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(7), 751–759.
10. Roscina, I., & Volodko I. (2014). Использование систем компьютерной математики в Латвии и в Рижском Техническом университете. (Using of Computer Algebra Systems in Latvia and Riga Technical University). *Proceedings of the international scientific conference "Education, science and economics in universities and schools. Integration to international educational space": Труды международной научной конференции „Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство"*, *Armenia*, 511–514.

РЕТРОСПЕКТИВНИЙ АНАЛІЗ НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Оксана Коломієць

Аналітична геометрія є складовою фундаментальної підготовки фахівців математичних спеціальностей в усіх університетах України. Аналітична геометрія – галузь математики, в якій досліджуються геометричні образи засобами алгебраїчного аналізу із застосуванням методу координат [1]. Як вказує О. В. Погорєлов [11], аналітична геометрія не має чітко окресленого визначеного змісту, визначальним для неї є не предмет дослідження, а метод. Сутність цього методу (за М. В. Працьовитим [13]) полягає в тому, що із введенням системи координат точки площини (простору) отожнюються з упорядкованими парами (трійками, наборами) дійсних чисел. Це дозволяє задавати геометричні об’єкти за допомогою співвідношень між числами й використовувати при цьому засоби алгебри й аналізу. Геометричним об’єктам ставляться у відповідність рівняння, системи рівнянь, нерівності так, що геометричні відношення фігур виражаються через властивості їх рівнянь. Важко знайти математичну дисципліну ЗВО, в якій не використовувалися б ті чи ті положення аналітичної геометрії. Метод аналітичної геометрії є пізнавальним інструментом у прикладних, природничих та соціальних науках.

Для побудови дидактично виваженої системи навчання студентів аналітичної геометрії проаналізуємо зміст геометричної підготовки студентів університетів у різні часи.

Засновниками аналітичної геометрії вважають Р. Декарта і П. Ферма. Саме вони поставили за мету дослідити геометричні об’єкти за допомогою алгебри. З часів Аполлонія це було перше визначне відкриття в геометрії. Аналітична геометрія в сучасному розумінні вперше викладена у «Вступі до аналізу» Л. Ейлера та в «Елементарному курсі прямолінійної й сферичної тригонометрії та застосувань алгебри до геометрії» С. Лакруа. До середини XVII ст. більшість людей не мали доступу до вищої освіти, здобути вищу математичну освіту можна було переважно за кордоном. Лише наприкінці XVII ст. з’явилися перші заклади вищої освіти на території України – Києво-Могилянська академія, Львівський університет.

До початку XIX ст. вища математична освіта в університетах України була організована досить слабо, викладання математики часто не виходило за межі шкільних предметів. Єдиної та постійної системи підготовки не було. Характерними рисами тогочасних навчальних планів ВНЗ є багатопредметність і мала питома вага спеціальних дисциплін [15].

У XIX ст. відбулася реорганізація університетської освіти: зокрема відкриті університети в Харкові (1805), Петербурзі (1819), Києві (1834), Одесі (1865), Чернівцях (1874); створені фізико-математичні факультети; зростала чисельність студентів в університетах.

Першу половину XIX ст. можна охарактеризувати як епоху діяльності вчених – Г. Ф. Вороного, М. І. Лобачевського, Т. Ф. Осиповського, М. В. Остроградського та ін. У цей час в університетах математичні курси поділялися на «чисту» і «змішану» математику. Викладач математики на свій розсуд вибудовував зміст дисциплін та порядок їх викладання.

Так, у Харківському університеті Т. Ф. Осиповський викладав студентам «чисту» математику: геометрію та тригонометрію, диференціальне, інтегральне та варіаційне числення, застосування аналітичних функцій до вищої геометрії [15; 17]. Геометрія читалася студентам на другому курсі (4 години на тиждень). Програма з геометрії включала питання як з аналітичної геометрії (перетворення координат, координати в просторі, площина і пряма у просторі; поверхні другого порядку тощо), так і з диференціальної геометрії (дотичні, нормалі кривих, радіус кривини кривої, рівняння еволюти лінії, знаходження площі, обмеженої кривими, і довжини дуги тощо). У другому томі «Курсу математики» (1801) Т. Ф. Осиповський у додаткових статтях подає відомості про конічні перерізи, спіралі тощо. У Московському університеті з 1828 року курс математики читався упродовж трьох років. На першому курсі студенти вивчали обчислення за допомогою рахівниць, прямолінійну тригонометрію, вищу алгебру, на другому й третьому – сферичну тригонометрію, аналіз та аналітичну геометрію. Курс аналітичної геометрії читали М. Є. Зернов, М. Д. Брашман, Д. М. Перевощиков. У 1835 році Д. М. Перевощиков розробив проект викладання наук на фізико-математичних відділеннях університетів, за яким вищу геометрію треба читати студентам на другому курсі поряд з теорією ймовірностей та варіаційним численням. Кожен професор мав навчати студентів дві години три рази на тиждень [15]. Базовим у навчанні аналітичної геометрії студентів університетів того часу був «Курс аналітичної геометрії» М. Д. Брашмана. У Казанському університеті на початку XIX ст. М. Бартельс викладав аналітичну геометрію студентам лише на третьому курсі [7]. Після від'їзду М. Бартельса, елементарну, аналітичну й диференціальну геометрію читав на другому курсі М. І. Лобачевский, керуючись працею Г. Монжа «Застосування аналізу до геометрії».

У визначенні мети і змісту математичних дисциплін усі викладачі університетів того часу прислухалися до думки М. В. Остроградського: курс вищої математики потрібно читати в такій послідовності: диференціальне числення з основами вищої алгебри, аналітична геометрія, інтегральне числення. Аналітична геометрія в системі М. В. Остроградського – це застосування відомостей, отриманих в алгебраїчному аналізі, до питань геометрії, які також мали за мету тлумачення основних ідей диференціального числення (у курсі аналітичної геометрії вивчалися тоді й деякі питання диференціальної геометрії) [9]. Щодо викладання аналітичної геометрії М. В. Остроградський радив спочатку повторити з елементарної геометрії властивості прямих і площин, а вже потім показати, в який спосіб алгебраїчний аналіз описує прямі й площини через координати, розв'язує питання взаємного їх розміщення, умов їх паралельності чи перпендикулярності тощо. Він рекомендував розглядати перетворення прямокутних координат, а перетворення косокутних координат віднести до необов'язкових питань, однак доцільних для вивчення зацікавленими студентами. Для кращого вивчення геометрії М. В. Остроградський пропонував розділити її на плоску геометрію та на геометрію у просторі. У першій приділяв особливу увагу загальній теорії плоских кривих, визначенню кривини ліній, знаходженню кутів між лініями, дослідженню плоских кривих, зокрема кривих другого порядку, їх полярних рівнянь. До аналітичної геометрії в просторі він включав і елементи диференціальної геометрії [9].

Серед інших підручників, які залишили помітний слід у розвитку геометричної підготовки студентів, можна назвати «Аналітичну геометрію» О. І. Сомова. Він читав студентам першого курсу аналітичну геометрію на площині та нарисну геометрію, а студентам другого курсу – аналітичну геометрію в просторі.

Знаменним і важливим для другої половини XIX ст. було створення нових університетів, збільшення кількості математичних дисциплін на математичних факультетах університетів; поява наукових шкіл. Для цього періоду характерне розширення математичних інтересів учених. Зокрема в геометрії активно почали досліджувати проблеми диференціальної геометрії, проективної геометрії, неевклідових геометрій, удосконалювати курси аналітичної та нарисної геометрії (М. Є. Ващенко-Захарченко, В. Ф. Каган, С. С. Вижевський) [6; 15]. З 1835 року студенти університетів навчалися математики вже чотири роки. На першому курсі поряд з аналітичною геометрією вони вивчали вищу алгебру, на другому курсі – математичний аналіз, на третьому і четвертому курсах – диференціальні рівняння, варіаційне числення. В університетах перестали читати елементарну математику.

Наприкінці XIX ст. – початку XX ст. студентів навчали за підручниками К. О. Андрєєва, Г. Сальмона, В. П. Єрмакова, Д. М. Синцова та ін. Ідею аналітичної геометрії Г. Сальмон формулює так [16]: будь-яку геометричну умову, яку повинна задовольняти точка, можна завжди виразити рівнянням чи кількома рівняннями, які задовольняють координати цієї точки. Однак виклад матеріалу аналітичної геометрії в тогочасних підручниках супроводжувався громіздкими перетвореннями й обчисленнями. Поняття вектора не розглядалося навіть як додатковий матеріал. Автори значну увагу приділяли проективним властивостям ліній та поверхонь другого порядку. Виклад матеріалу здійснювався за принципом від загального до конкретного [4; 16].

Після 1917 року розпочалася перебудова всієї системи освіти: створювалися фізико-математичні інститути, академії наук, утворювалися наукові школи, виходили математичні наукові журнали. У 1934 р. розроблені перші централізовані програми з математичних дисциплін для університетів, згідно з якими аналітична геометрія стає обов'язковим курсом на математичних факультетах. На аналітичну геометрію відводилося обов'язкових 170 годин, крім яких передбачено й додаткові лекції з аналітичної геометрії [2; 5]. До програм вперше включені елементи векторної алгебри, однак у дослідженнях геометричних об'єктів переважав метод координат. У цьому ж році створені й перші програми з аналітичної геометрії для педагогічних інститутів.

З 1934 до 1953 року видані підручники В. М. Брадіса, Д. О. Граве, Н. М. Душина, А. М. Лопшиця. Нововведенням стало застосування векторів у теорії прямих і площин. Прямі розглядаються у прямокутній та у косокутній системах координат. Дослідження ліній другого порядку в підручниках проводилося із застосуванням теорії проективних перетворень. Це було зумовлено широким застосуванням центральної та ортогональної проекцій на практиці.

У 1953 році затверджено нову програму з аналітичної геометрії для педагогічних інститутів, з якої були вилучені афінні та проективні перетворення. Рекомендувалося вивчати перетворення тільки ПДСК. У зв'язку з реформуванням освіти програми з аналітичної геометрії змінювалися кілька разів. Векторна алгебра почала широко застосовуватися в аналітичній геометрії, що дозволяло подати зміст аналітичної геометрії в більш згорнутому, «економному» вигляді, упорядкувати факти аналітичної геометрії.

З 1963 року педагогічні інститути почали працювати за новими програмами з аналітичної геометрії, які рекомендували досліджувати прямі, площини та поверхні у просторі за допомогою апарату векторної алгебри [5]. Використання векторів, теорії квадратичних форм, інваріантів дозволяло подати зміст аналітичної геометрії в більш згорнутому, «економному» вигляді, упорядкувати факти аналітичної геометрії. На вивчення курсу відводилося 188 годин. У цей період виходять фундаментальні курси аналітичної геометрії.

Серед названих підручників вирізняється «Аналітична геометрія на площині» М. В. Потоцького [12]. Значну увагу автор приділив розкриттю зв'язків аналітичної геометрії з елементарною математикою. У книзі наведено приклади застосування аналітичного методу до розв'язування задач елементарної геометрії, кожна задача супроводжується коментарем щодо переваг та недоліків застосування методу координат у ході її розв'язування.

Процеси реформування шкільної освіти вносили зміни й у геометричну підготовку майбутніх учителів математики, перебудову математичних курсів ЗВО педагогічного профілю. Так, створення нових підручників з геометрії для школи, які ґрунтувалися на ідеї перетворень, вимагали й більш уважного, детального вивчення геометричних перетворень у вищій школі. З огляду на створені новий навчальний план і програми для педагогічних ЗВО В основу програм покладена ідея об'єднання математичних дисциплін у три дисципліни: математичний аналіз, алгебра і теорія чисел, геометрія. У такий спосіб передбачалося позбутися паралелізму, дати цілісне уявлення про математику. Кожна тема курсу геометрії, за деякими винятками, повинна була завершуватися застосуванням теорії до розв'язування шкільних задач і доведення теорем [5; 14].

Таким чином, наприкінці XX ст. у вищій школі аналітична геометрія стала самостійною дисципліною, головна мета якої полягала в тому, щоб показати студентам особливий метод досліджень геометричних об'єктів. У ЗВО, що готують майбутніх вчителів математики, аналітична геометрія – розділ єдиного курсу геометрії, зорієнтований на те, щоб надати майбутньому вчителю знання й уміння для роботи в школі. Сучасний етап характеризується стандартизацією освіти, приєднанням України до європейського освітнього простору. Визначальними тенденціями розвитку освітньої системи стають поглиблення її фундаменталізації, посилення гуманістичної спрямованості, духовної та загальнокультурної складової освіти, формування в студентів системного підходу до аналізу складних технічних і соціальних ситуацій, стратегічного мислення, виховання соціальної та професійної мобільності. У зв'язку з переходом на нову організацію вищої освіти, відбувся перегляд програм, збільшилася кількість годин на самостійну роботу; університети отримали можливість змінювати кількість годин на вивчення курсу аналітичної геометрії при формуванні навчальних планів і, як результат, варіювати змістове наповнення курсу. Тому одне із важливих питань організації навчання курсу аналітичної геометрії студентів – це питання добору навчального матеріалу, який забезпечував би досягнення цілей і завдань навчання курсу. Зміст курсу аналітичної геометрії являє собою трансформований зміст аналітичної геометрії як розділу математики, адаптованого до індивідуально-вікових особливостей студентів. Процес трансформування наукових знань у навчанні є дуже складним, бо залежить від багатьох факторів: суспільних потреб, професійних вимог до спеціалістів, індивідуальних і вікових можливостей студентів, цілей, завдань та вимог вищих навчальних закладів, професорсько-викладацького потенціалу тощо.

Диференціація змісту курсу аналітичної геометрії може бути реалізована через структурування змісту кожного модуля курсу; через перерозподіл тем, які вивчаються під керівництвом викладача і які виносяться на самостійне опрацювання. Структурування змісту навчання аналітичної геометрії має певну специфіку. Його доцільно здійснювати в три етапи. На першому етапі доцільно обрати структуру курсу, зокрема виділити навчальні модулі й установити послідовність їх вивчення, на другому – структурувати матеріал модулів, на третьому – здійснити диференціацію у межах навчальних тем.

Можливі різні способи структурування на рівні курсу, зокрема лінійний; концентричний, комбінований. Наприклад, перший спосіб застосовано при побудові підручника [11], другий – при побудові підручника [3]. Кожен із цих способів має свої переваги й недоліки, але за конкретних умов може стати педагогічно виправданим. На нашу думку, перший спосіб доцільно використовувати задля економії часу, відведеного на виклад матеріалу курсу аналітичної геометрії. У такому разі з'являється час для розв'язування дослідницьких задач, вивчення матеріалу на більш високому рівні [9].

Другий спосіб передбачає вивчення векторів, дослідження алгебраїчних ліній першого й другого порядків на площині у першій частині курсу, аналогічний матеріал у просторі – у другій його частині. З'ясувалося, що другий спосіб побудови курсу дає кращі результати навчання тоді, коли студенти потоку мають переважно середній рівень навченості й навчальності. Це можна пояснити так. Під час дослідження прямих, площин, поверхонь другого порядку в просторі проводяться аналогічні міркування, які використовувалися під час вивчення прямих і ліній другого порядку на площині. Завдяки цьому в студентів відбувається самоактуалізація знань, зокрема щодо методів, прийомів розв'язування задач. А це сприяє появі самостійних міркувань під час дослідження ліній і поверхонь у просторі. Студент не просто стежить за думкою викладача, чекаючи на наступний крок у доведенні, але часто випереджає в прогнозуванні етапів дослідження, їх результатів. І як наслідок, активізується навчально-пізнавальна діяльність студента, формується відповідний стиль міркувань. Наші висновки узгоджуються з результатами досліджень І. П. Підласого [10], згідно з якими ефективність розосередженого навчання вища, ніж концентрованого.

Для структурування модуля курсу аналітичної геометрії в умовах диференційованого навчання доцільно враховувати те, що матеріал кожного модуля допускає кілька способів його розгортання. Спосіб розгортання відомостей з аналітичної геометрії впливає на набір понять і фактів курсу, які подано в підручнику, на означення цих понять, способи доведення теорем, алгоритми й схеми розв'язування основних типів задач.

Розглянемо як приклад навчальну тему «Скалярний добуток векторів». У цій темі базовим є поняття скалярного добутку векторів, розглядаються алгебраїчні та геометричні властивості скалярного множення векторів.

Наведемо кілька способів розгортання матеріалу даної теми.

Перший спосіб.

1. Вводиться означення скалярного добутку: скалярний добуток векторів, які задано координатами в ортонормованому базисі, – це число, що дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.
2. Виводяться алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів.

3. Доводиться теорема: скалярний добуток векторів дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Другий спосіб.

1. Вводиться означення скалярного добутку: скалярний добуток векторів – це число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

2. Виводяться алгебраїчні та геометричні властивості скалярного добутку векторів на основі означення скалярного добутку.

3. Доводиться теорема: скалярний добуток векторів, які задано координатами в ортонормованому базисі, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат. Доведення спирається на алгебраїчні властивості скалярного добутку.

Зауважимо, що доведення алгебраїчних властивостей скалярного добутку можна використати поняття проекції вектора на вісь та його властивості, або означення скалярного добутку й теорема косинусів.

Третій спосіб.

1. Вводиться означення скалярного добутку: скалярний добуток векторів – це число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

2. Виводяться геометричні властивості скалярного добутку векторів.

3. Доводиться теорема: скалярний добуток векторів, які задано координатами в ортонормованому базисі, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат. Доведення теореми ґрунтується на означенні скалярного добутку векторів, теоремі косинусів, формулі знаходження координат вектора за координатами його кінців.

4. Виводяться алгебраїчні властивості скалярного добутку векторів на основі наведеної теореми.

Більшість понять курсу аналітичної геометрії можна визначити по-різному: поняття визначаються через найближчий рід та видові відмінності або рекурсивно, рідше через перелік. Наприклад, наведемо кілька означень еліпса.

Означення 1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок є величина стала й більша, ніж відстань між фіксованими точками.

Означення 2. Еліпсом називається геометричне місце точок M площини, для кожної з яких сума квадратів площ трикутників з вершиною в точці M та основами AB і AC дорівнює квадрату площі трикутника ABC (точки A, B, C – фіксовані точки, що не лежать на одній прямій): $S_{ABM}^2 + S_{ACM}^2 = S_{ABC}^2$.

Означення 3. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, відношення відстані від кожної з яких до фіксованої точки і відстані до заданої прямої є величина стала й менша від одиниці.

Наведені вище означення еліпса є означеннями через найближчий рід і видові відмінності. Родове поняття у цих означеннях однакове, а видові відмінності – різні. Можна дати і конструктивне означення еліпсу.

Означення 4. Еліпсом називається обмежена лінія, яка утворена перетином прямого кругового конуса площиною, яка не проходить через центр конічної поверхні.

Вибір певного означення як основного впливає і на розкриття змісту теми, і на методику їх введення. На лекції доцільно роз’яснити студентам різні можливі підходи до визначення поняття, що вивчається. Це, насамперед, сприятиме розумінню студентом багатогранності геометрії, полегшить самостійне опрацювання підручників і посібників тощо. Від студентів достатньо як мінімум вимагати запам’ятати хоча б одне означення поняття, знати, що існують інші підходи до його визначення та розуміти причину появи різних підходів [9].

Структурування модуля також залежить від того, який підхід застосовується в поданні відомостей модуля – індуктивний чи дедуктивний. Для того, щоб формувати не тільки предметні знання, а й метазнання (знання про структуру теорії, типи зв’язків між її елементами тощо), доцільно, наприклад матеріал теми «Геометричні перетворення площини» розгортати індуктивним шляхом, а матеріал щодо геометричних перетворень простору – дедуктивним. Загалом, у першому семестрі доцільно здійснювати переважно індуктивний підхід до розгортання змісту, а в другому – дедуктивний.

Для більш детального структурування (на рівні окремих занять) доцільно, передовсім, у кожній темі окреслити повний перелік об'єктів засвоєння: поняття, факти, способи діяльності. А у кожній множині – обов'язкові, додаткові програмові, додаткові позапрограмові, допоміжні поняття, факти, способи діяльності відповідно. Після цього треба виділити матеріал, який вивчатиметься під керівництвом викладача, і матеріал, що виноситься на самостійне опрацювання.

Отже, аналіз історії розвитку аналітичної геометрії, вивчення різних підходів до навчання студентів цієї дисципліни в їх ретроспективі, зіставлення, порівняння змісту й структури відомостей з аналітичної геометрії в підручниках і посібниках, їх систематизація й теоретичне узагальнення дало підстави для визначення сучасних підходів до побудови й структурування змісту курсу аналітичної геометрії на диференційованій основі.

Список використаних джерел

1. Білоусова, В. П., Ільїн, І. Г., Сергунова, О. П., Котлова, В. М. (1973). *Аналітична геометрія*. К.: Вища школа. 328 с.
2. Андронов, И. К. (1966). Полвека развития математического образования в СССР. *Математика в школе. № 2*. С.2–11.
3. Борисенко, О. А., Ушакова, Л. М. (1993). *Аналітична геометрія: навч. посіб. для ун-тів*. Х.: Вид-во «Основа» при ХДУ. 192 с.
4. Ермаков, В. П. (1900). *Аналитическая геометрія: курс лекцій. Ч. 2. Геометрія въ пространстве*. Кіевъ : Лито-типографія Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К. 127 с.
5. *История математического образования в* СРСР (1975). К.: Наукова думка. 385 с.
6. *Історія кафедри геометрії* [Електронний ресурс]. Режим доступу: // http://www. mechmat. univ.kiev.ua/u/ ru/node.
7. Каган, В. Ф. (1948). *Лобачевский*. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 506 с.
8. Коломієць, О. М. (2009). *Диференційоване навчання аналітичної геометрії студентів вищих навчальних закладів педагогічного профілю*: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Черкаси. 300 с.
9. Кропотов, И. А., Марон, М. В. (1961). *Остроградский и его педагогическое наследие: пособие для учителей*. М.: ГОС УЧПЕДИЗДАТ. 204 с.
10. Підласий, І. П. (1995). Система засвоєння – забування. *Педагогіка і психологія. № 2*. 29–37.
11. Погорелов, А. В. (1968). *Аналитическая геометрия*. М.: Наука. 176 с.
12. Потоцкий, М. В. (1956). *Аналитическая геометрия на плоскости*. М.: ГОС УЧПЕДИЗДАТ. 447 с.
13. Працьовитий, М. В. (2002). *Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр)*. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. 80 с.
14. *Программы педагогических институтов: сборник № 3. Геометрия*. (1982). Сост.: В. Т. Базылев, В. Г. Болтянский. М.: Просвещение. 16 с.
15. Прудников, В. Е. (1956). *Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков : пособие для учителей*. М.: Гос. УЧПЕДИЗ. 640 с.
16. Сальмон. (1892). *Аналитическая геометрія двухъ измереній*; пер. съ франц. В. Г. Алексеева. М. : Изданіе Елизаветы Гербекъ. 208 с.
17. *Страницы истории развития геометрии и кафедры геометрии Харьковского государственного университета* [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www-mechmath. univer. kharkov. ua / geometry / rus / History / History. htm
18. Стройк, Д. Я. (1978). *Краткий очерк истории математики*. М.: Наука. 336 с.

СИСТЕМА ПРОПЕДЕВТИЧНИХ ВПРАВ СПРИЙНЯТТЯ ОСНОВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОПУКЛИХ МАТЕМАТИЧНИХ СТРУКТУР У ДИСЦИПЛІНІ «МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ» СТУДЕНТАМИ ЗАКЛАДІВ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Тетяна Бохонова, Вікторія Тихонова, Олексій Томащук, Ірина Матвєєва, Валентина Гроза, Олег Лещинський

Автори статті, досліджуючи зміст та форми надання математичної освіти молодшим бакалаврам, звернули увагу на недостатньо фундаментальну підготовку в процесі вивчення дисципліни «Математика» та «Математичний аналіз» студентів з питань основних властивостей функцій, зокрема властивості опуклості. З іншого боку, специфічною особливістю багатьох математичних моделей є те, що вони майже всі в своїх окремих класах спираються на єдиний комплекс математичних фактів, пов'язаних з теорією опуклих множин і перетворень, заданих на цих множинах [1; 2]. Фактично ця обставина й дозволяє сприймати теорію вказаного моделювання як математичну теорію. Сказане, перш за все, відноситься до окремих класів макромоделей економічних, соціальних, політичних систем і процесів [3]. Існують інші, більш глибинні причини підвищеної уваги до опуклості. Деякі важливі структурні властивості евклідового простору, в термінах якого будуються моделі досліджуваних явищ або процесів, тісно пов'язані з його топологічною природою, а частина цих властивостей відноситься і до опуклих множин. Ці властивості стають кардинально важливими, як тільки виникає бажання вийти за рамки традиційних аналітичних і обчислювальних методів і перейти до обґрунтування деяких фундаментальних положень економічної теорії, соціології тощо, наприклад, до доведення існування загальної конкурентної рівноваги [4].

У класичній математиці поняття опуклості довгий час не привертало до себе великої уваги і тому нечисленні результати, які відносились до цієї властивості, були розсіяні в науковій і методичній літературі. На сьогодні в теорії опуклих структур вже стали класичними: алгебраїчна гілка – теорія лінійних нерівностей і суміжних питань, топологічна гілка – численні й потужні теореми існування типу теорем про нерухому точку [5-7]. Тому, на думку авторів, ще на завершальному етапі вивчення елементарної математики студентами закладів фахової передвищої освіти (ЗФПО) можна запропонувати систему пропедевтичних вправ сприйняття і використання властивості опуклості. У процесі отримання математичної освіти в ЗФПО, зокрема студенти-програмісти вивчають дисципліну «Математичні методи дослідження операцій», темою першої лекції в якій є «Моделі лінійного програмування і їх застосування». При вивченні цієї теми передбачається формування у студентів знань про опуклі множини точок. Ось чому ще в процесі вивчення елементарної математики стане корисною заявлена в назві статті розроблена система вправ. Матеріал можна викладати наступним чином.

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X. Вона називається строго увігнутою (I, вниз) або опуклою (II, вгору) на X, якщо для будь-яких u, v з X, $u \neq v$ і $0 < \lambda < 1$ справедливою є нерівність:

$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) < \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \qquad \text{(I)}$$

і, відповідно,

$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) > \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) . \qquad \text{(II)}$$

Геометрично означення 1 тлумачиться наступним чином (рис. 1).

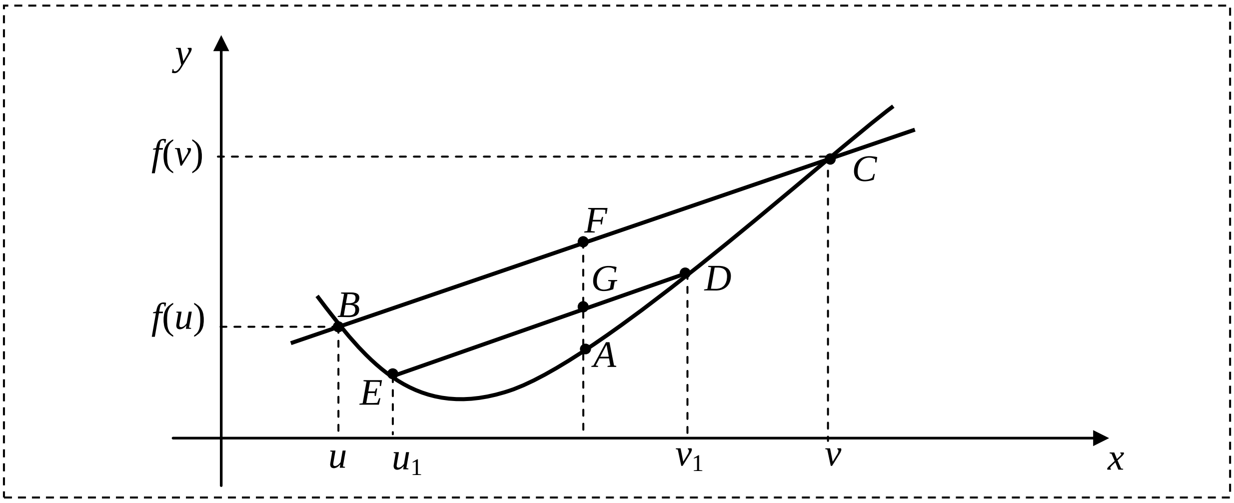


Рис. 1. Геометричне тлумачення опуклості

Довільна точка хорди *BC* (відрізка з кінцями в точках $B(u,\ f(u))$ і $C(v,\ f(v))$), що не збігається з *B* або *C*, знаходиться вище (нижче) точки *A* графіка функції $f(x)$, що відповідає тому ж самому значенню аргумента. Крім того, сегменти числової прямої з кінцями у точках u, v і u_1, v_1 мають спільну середину.

Часто функції, строго опуклі вгору і вниз, називають строго опуклими. Для строго опуклих функцій відомі наступні три елементарні властивості.

Властивість 1. Нехай функція $f(x)$ є строго увігнутою вниз на проміжку *X*, точки u, v та u_1, v_1 належать цьому проміжку, причому $u < u_1 < v_1 < v$ і $u + v = u_1 + v_1$. Тоді має місце нерівність

$$f(u_1) + f(v_1) < F(u) + f(v).$$

Доведення. $u < u_1 < v$. Тоді існує λ: $\lambda = \dfrac{v - u_1}{v - u}$ така, що:

$$u_1 = \lambda u + (1-\lambda)v \ \text{ і } \ 0 < \lambda < 1.$$

Це означає, що:

$$f(u_1) + f(v_1) = f(\lambda u + (1-\lambda)v) + f((1-\lambda)u + \lambda v) <$$

$$< \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) + (1-\lambda) f(u) + \lambda f(v) = f(u) + f(v).$$

Геометричне тлумачення властивості 1 наступне. Якщо умови властивості виконуються, то середина відрізка *BC* (точка *F*) знаходиться вище середини відрізка *ED* – точки *G*, оскільки ордината *F* дорівнює $\dfrac{f(u) + f(v)}{2}$, а ордината *G* дорівнює $\dfrac{f(u_1) + f(v_1)}{2}$. Тут враховано, що кінці відрізка *ED* мають координати $E(u_1,\ f(u_1))$ та $D(v_1,\ f(v_1))$.

Із цієї властивості випливає наступна.

Властивість 2. Якщо функція $f(x)$ є строго опуклою на проміжку X, функції $u = u(x),\ v = v(x),\ u_1 = u_1(x),\ v_1 = v_1(x)$ такі, що для будь якого x з області допустимих значень виконується рівність:

$$f(u) + f(v) = f(u_1) + f(v_1), \qquad (1)$$

значення $u(x),\ v(x),\ u_1(x),\ v_1(x)$ містяться в X і виконується умова:

$$u + v = u_1 + v_1,$$

то рівняння (1) на області допустимих значень рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} u(x)=u_1(x), \\ u(x)=v_1(x). \end{array}\right.$$

Наведемо приклади застосування властивості 2.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\sqrt[4]{544+x}+\sqrt[4]{337-x}=9$.

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in[-544;337]$.

б) Нехай $u=544+x,\quad v=337-x,\quad u+v=881=625+256=5^4+4^4$.

Візьмемо $u_1=5^4,\quad v_1=4^4$. Тоді з властивості 2 випливає, що на ОДЗ дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 544+x=625, \\ 544+x=256, \end{array}\right.$$

звідки знаходимо два розв'язки $x_1=81,\quad x_2=-288$.

Наведемо доведення властивості 2. Очевидно, що розв'язки сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} u(x)=u_1(x), \\ u(x)=v_1(x), \end{array}\right.$$

що містяться в ОДЗ рівняння:

$$f(u)+f(v)=f(u_1)+f(v_1),$$

будуть розв'язками цього рівняння.

Припустимо, що x_0 – розв'язок вказаного рівняння, – не є розв'язком цієї сукупності. Тоді очевидно:

$$u(x_0)\neq u_1(x_0),$$
$$u(x_0)\neq v_1(x_0).$$

Нехай, наприклад, функція $f(x)$ є строго увігнутою вниз на проміжку X, і $u(x_0)\le v(x_0)$. Тоді справджується одна з нерівностей:

$$u(x_0)<u_1(x_0)\le v_1(x_0)<v(x_0),$$

$$u(x_0)<v_1(x_0)\le u_1(x_0)<v(x_0),$$

$$u_1(x_0)<u(x_0)\le v(x_0)<v_1(x_0),$$

$$v_1(x_0)<u(x_0)\le v(x_0)<v_1(x_0).$$

Тоді, в силу властивості 1, маємо:

$$f(u_1(x_0))+f(v_1(x_0))<f(u(x_0))+f(v(x_0)),$$

$$\text{або}\quad f(u(x_0))+f(v(x_0))<f(u_1(x_0))+f(v_1(x_0)),$$

що суперечить припущенню. Із цих міркувань випливає, що розв'язки рівняння є розв'язками рівнянь сукупності.

Зауваження 1. Замість сукупності, записаної у формулюванні властивості 2, можна розглядати рівносильні сукупності, зокрема:

$$\left[\begin{array}{l} u(x)=u_1(x), \\ v(x)=u_1(x), \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} v(x)=u_1(x), \\ v(x)=v_1(x). \end{array}\right.$$

Розглянутий матеріал доцільно опановувати зі студентами після вивчення теми «Похідна та її застосування», звідки студенти дізнаються у т.ч., що двічі диференційована на проміжку X функція $f(x)$, для якої $f''(x)>0$ для всіх $x\in X$, строго увігнута вниз на X, а функція $f(x)$, для якої $f''(x)<0$ для всіх $x\in X$, строго опукла вгору на X.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{32+\sqrt{4-x^2}}+\sqrt[5]{32-\sqrt{4-x^2}}=4$.

Розв'язання:

а) Область допустимих значень (ОДЗ): $x\in[-2;2]$.

б) $f(x)=\sqrt[5]{x},\quad u=32+\sqrt{4-x^2},\quad v=32-\sqrt{4-x^2}$. Тоді $u+v=64,\quad u_1=v_1=32$.

Оскільки функція $f(x)$ є строго опуклою вгору на $[0;+\infty)$, $u(x),\ v(x),\ u_1(x),\ v_1(x)$ містяться в цьому інтервалі при довільному x і $u+v=u_1+v_1$, й до того ж виконується рівність:

$$f(u)+f(v)=f(u_1)+f(v_1),$$

то дане рівняння рівносильне рівнянню:

$$32+\sqrt{4-x^2}=32,$$

розв'язки якого $x_1=2,\quad x_2=-2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{3-x}+\sqrt[4]{4-x}=\sqrt[4]{7-2x}$.

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in(-\infty;3]$.

б) $f(x)=\sqrt[4]{x},\quad u=3-x,\quad v=3-x,\quad u_1=7-2x,\quad v_1=0$.

На ОДЗ виконуються умови властивості 2, тому дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}3-x=0,\\ 4-x=0.\end{array}\right.$$

Розв'язок першого рівняння сукупності ($x=3$) входить в ОДЗ. Розв'язок другого рівняння не належить ОДЗ. Тому дане рівняння має єдиний корінь $x=3$.

Зауваження 2. Із властивості 2 випливає, що запропоновані в статті рівняння (приклад 1, приклад 2) не можуть мати більше двох коренів, оскільки вони рівносильні на ОДЗ сукупності двох зазначених рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{2x^2+x+81}+\sqrt[4]{1-x-2x^2}=4$.

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

б) Нехай $u=2x^2+x+81,\quad v=1-x-x^2,\quad u+v=82$.

З того, що $4=\sqrt{81}+\sqrt{1}$, припустимо, що $u_1=81,\quad v_1=1$. Тоді виконуються умови властивості 2 і дане рівняння рівносильне на ОДЗ сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x+81=81,\\ 2x^2+x+81=1.\end{array}\right.$$

Друге рівняння сукупності розв'язків не має. Перше рівняння зводиться до такого:

$$2x^2 + x = 0, \quad x(2x+1) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Обидва кореня належать ОДЗ даного рівняння, а тому і є його коренями.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{3x+15} = \sqrt[4]{2x+1} + 2$.

а) ОДЗ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

б) Нехай $u = 2 - x, \quad v = 3x + 15, \quad u + v = 2x + 17, \quad u_1 = 2x + 1, \quad v_1 = 16$.

Умови властивості 2 виконуються. Тому на ОДЗ дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} 2 - x = 16, \\ 3x + 15 = 16. \end{array}\right.$$

З урахуванням ОДЗ, розв'язком даного рівняння буде $x = \frac{1}{3}$.

Узагальнюючи приклади 2-4, можна виокремити клас ірраціональних рівнянь виду:

$$\sqrt[4]{a - x} + \sqrt[4]{x + b} = d,$$

де a, b, d – задані числа, $a > b, \quad d > 0$. Для цього класу рівнянь застосовна властивість 2 (за умови, що рівняння цього класу має розв'язки), функція $f(x) = \sqrt[4]{x}$ є строго опуклою вгору на проміжку $[0; +\infty)$. Складність застосування властивості 2 полягає у «вгадуванні» представлення числа d у вигляді суми $\sqrt[4]{u_1} + \sqrt[4]{v_1}$, де $u_1 + v = a + b$.

Другим класом рівнянь, до яких може бути застосована властивість 2, може бути клас:

$$\sqrt[4]{x + a} - \sqrt[4]{x + b} = d,$$

де a, b, d – задані числа, $a \neq b$.

Якщо рівняння цього класу має розв'язки, то їх не може бути більше за один. Дане рівняння на ОДЗ рівносильне рівнянню $x + a = v_1$.

Складним також є «вгадування» представлення числа d у вигляді $\sqrt[4]{v_1} - \sqrt[4]{v}$, де $a + v = b + b_1$. Розглянемо приклад.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{5x + 210} - \sqrt[4]{5x - 414} = 4$.

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x \geq 82{,}8$.

б) Представимо дане рівняння у вигляді:

$$\sqrt[4]{5x + 210} + \sqrt[4]{v} = \sqrt[4]{5x - 414} + \sqrt[4]{v_1}, \quad \sqrt[4]{v_1} - \sqrt[4]{v} = 4.$$

$$u - 5x + 210, \quad u_1 = 5x - 414, \quad v = 1, \quad v_1 = 625,$$

$$u + v = 5x + 211, \quad u_1 + v_1 = 5x + 211.$$

Умови властивості 2 виконуються, тому на ОДЗ дане рівняння рівносильне рівнянню $5x + 210 = 625$, звідки $x = 83$.

Далі можна запропонувати приклади, які також зручно розглядати в контексті властивості 2, якщо вдало «відчути» вигляд функції $f(x)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$\left(2x^2+x+12\right)\left(x^2-5x+16\right)=13\left(3x^2-4x+15\right).$$

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in R$.

б) Прологарифмувавши обидві частини рівняння, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\ln\left(2x^2+x+12\right)+\ln\left(x^2-5x+16\right)=\ln 13+\ln\left(3x^2-4x+15\right).$$

$$f(x)=\ln(x),\quad u=2x^2+x+12,\quad v=x^2-5x+16,\quad u_1=13,\quad v_1=3x^2-4x+15.$$

Функція $f(x)$ є строго опуклою вгору на $(0;+\infty)$, $u(x),\ v(x),\ u_1(x),\ v_1(x)$ додатні для всіх x. Тоді рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x+12=13,\\ x^2-5x+16=13.\end{array}\right.$$

$$2x^2+x+12=13,\quad 2x^2+x-1=0,\quad x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=-1,$$

$$x^2-5x+16=13,\quad x^2-5x+3=0,\quad x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $3^{x^2-1}+3^{4x-3}=9^{x^2-2}+3^{4x-x^2}$.

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in R$.

б) $f(x)=3^x,\quad u=x^2-1,\quad v=4x-3,\quad u+v=x^2+4x-4,$

$u_1=2x^2-4,\quad v_1=4x-x^2,\quad u_1+v_1=x^2+4x-4$.

Функція $f(x)$ є строго увігнутою вниз на множині дійсних чисел, дане рівняння задовольняє умови властивості 2, тому дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+-4=x^2-1,\\ 4x-x^2=x^2-1.\end{array}\right.$$

$$x^2=3,\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{3}.$$

$$2x^2-4x-1=0,\quad x_{3,4}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{3x^2-24x+41}+\sqrt{16x-2x^2}=\left|x-4\right|+5.$$

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in[0;8]$.

б) $f(x)=\sqrt{x},\quad u=3x^2-24x+41,\quad v=16x-3x^2,\quad u_1=x^2-8x+16,\quad v_1=2{,}5$.

Функція $f(x)$ є строго опуклою вгору на $[0;+\infty)$, $u(x)$, $v(x)$, $u_1(x)$, $v_1(x)$ містяться в цьому проміжку для всіх x з ОДЗ. Тому дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2-24x+41=25, \\ 3x^2-24x+41=x^2-8x+16. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2-24x+16=0, \quad D=576-192=384, \quad \sqrt{D}=8\sqrt{6}, \quad x_{1,2}=4\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{3}, \\ 2x^2-16x+25=0, \quad D=256-200=56, \quad \sqrt{D}=2\sqrt{14}, \quad x_{3,4}=4\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}. \end{array}\right.$$

Конструювати (а, значить, розв'язувати) рівняння даного класу можна, спираючись тільки на визначення строго опуклої функції. Для виділення цього класу рівнянь можна розглянути наступну теорему.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ є строго опуклою функцією на проміжку X і $u, v, \lambda v+(1-\lambda)u \in X$. Тоді рівність:

$$f(\lambda v+(1-\lambda)u)=\lambda f(v)+(1-\lambda)f(u)$$

справедлива в тому і тільки в тому випадку, коли або $u=v$, або $\lambda=0$, або $\lambda=1$.

Доведення:

1) Очевидно, що у випадках $u=v,\ \lambda=0,\ \lambda=1$ рівність, яку стверджує теорема, є правильною.

2) Нехай (припущення, що не губить загальності) функція $f(x)$ є опуклою вниз на проміжку $X,\ u, v, \lambda v+(1-\lambda)u \in X$ і виконується рівність, яку стверджує теорема. Припустимо також, що $u \neq v$. Тоді умова $0<\lambda<1$ неможлива за означенням. Припустимо, що $\lambda>1$ і виконується рівність теореми. Нехай $\alpha=\dfrac{1}{\lambda}$, тоді $0<\alpha<1$,

$$v=\alpha w+(1-\alpha)u \quad \text{і}$$

$$f(w)=\lambda f(v)+(1-\lambda)f(u)=\lambda f(\alpha w+(1-\alpha)u)+(1-\lambda)f(u)<$$
$$<\lambda(\alpha f(w)+(1-\alpha)f(u))+(1-\lambda)f(u)=f(w),$$

що також неможливо. Тому λ не може бути більшою за 1.

3) Припустимо, що $\lambda<0$ і $\beta=\dfrac{1}{1-\lambda}$. Тоді $0<\beta<1, u=\beta w+(1-\beta)v,$

$$f(w)=\lambda f(v)+(1-\lambda)f(u)=\lambda f(v)+(1-\lambda)f(\beta w+(1-\beta)v)<$$
$$\lambda f(v)+(1-\lambda)(\beta f(w)+(1-\beta)f(v))=f(w),$$

що також неможливо. Тому λ не може бути меншою від 0. Тому тільки у вказаних трьох випадках $u=v$, $\lambda=0$, $\lambda=1$ можлива рівність, вказана в теоремі.

Геометричний зміст теореми наступний: якщо функція $f(x)$ строго опукла на числовій прямій і $u \neq v$, то пряма, що проходить через точки $D(u;\ f(u))$ і $C(v;\ f(v))$, перетинає графік функції тільки в цих точках.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $(x^2-3x+4)^4=8(x^8+(3x-4)^4)$.

Розв'язання:

Нехай $f(x)=x^4,\quad u=x^2,\quad v=4-x,\quad \lambda=\frac{1}{2}$. Тоді маємо:

$$\lambda v=\frac{1}{2}(4-3x),\qquad \lambda f(v)=\frac{1}{2}(3x-4)^4,$$

$$(1-\lambda)u=\frac{1}{2}x^2,\qquad (1-\lambda)f(u)=\frac{1}{2}x^2,$$

$$f(\lambda v+(1-\lambda)u)=\frac{1}{16}\left(x^2-3x+4\right)^4,\qquad \lambda f(v)+(1-\lambda)f(u)=\frac{1}{2}\left(x^8+(3x-4)^4\right).$$

Очевидно, що вказані припущення приводять нас до наступного рівняння з одного боку:

$$\frac{1}{16}\left(x^2-3x+4\right)^4=\frac{1}{2}\left(x^8+(3x-4)^4\right),\quad \text{або}$$

$$\left(x^2-3x+4\right)^4=8\left(x^8+(3x-4)^4\right),$$

і до рівняння з теореми 1 – з іншого. Оскільки функція $f(x)$ є строго увігнутою вниз на свій числовій прямій, то, за теоремою 1, дане рівняння рівносильне рівнянню $x^2=4-3x$, звідки $x_1=-4,\ x_2=1$ – корені даного рівняння.

Приклад 11. Розв'язати рівняння:

$$\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e+(e-1)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^{\frac{e}{1-e}}=e.$$

Розв'язання:

а) ОДЗ: $0<|x|<2$. При $x=0$ рівність не виконується.

б) Поділимо обидві частини рівняння на e і прологарифмуємо:

$$\frac{1}{e}\left(\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e+(e-1)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^{\frac{e}{1-e}}\right)=1,$$

$$\ln\left[\frac{1}{e}\left(\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e+(e-1)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^{\frac{e}{1-e}}\right)\right]=0.$$

Нехай $v=\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e,\quad u=\left(2-\sqrt{4-x^2}\right),\quad \lambda=\frac{1}{e}$. Тоді:

$$\ln\left[\frac{1}{e}v+\left(1-\frac{1}{e}\right)u\right]=0,\qquad f(x)=\ln x$$

(зліва у першому виразі маємо праву частину рівняння теореми 1).

З іншого боку:

$$\frac{1}{e}\ln v+\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln u=\ln\left[v^{\frac{1}{e}}u^{1-\frac{1}{e}}\right]$$

(вираз зліва – це ліва частина рівняння теореми 1).

$$v^{\frac{1}{e}}u^{1-\frac{1}{e}} = \left[\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e\right]^{\frac{1}{e}}\left[\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^{\frac{e}{1-e}}\right]^{\frac{e}{1-e}} =$$

$$= \frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{x^2}{4-\left(4-x^2\right)} = 1.$$

Наведені міркування вказують на відповідність даного рівняння рівнянню теореми 1 (враховуючи властивості функції $f(x)=\ln x$). Тоді, за твердженням теореми 1, дане рівняння рівносильне рівнянню $u=v$, тобто:

$$\left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^e = \left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^{\frac{e}{1-e}},$$

$$\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}} = \left(2-\sqrt{4-x^2}\right)^{\frac{1}{1-e}},$$

$$\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}} = \left[\frac{\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)}\right]^{\frac{1}{1-e}},$$

$$\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}} = \left(\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\right)^{\frac{1}{1-e}}, \quad \frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}} = 1,$$

$$x^2 = 2+\sqrt{4-x^2}, \quad x^2-2=\sqrt{4-x^2}, \quad x^4-4x^2+4=4-x^2,$$

$x^4-3x^2=0, \quad x^2\left(x^2-3\right)=0$, звідки отримуємо корені $x=\pm\sqrt{3}$.

Ще до одного класу рівнянь може бути застосована властивість опуклості функції, а саме [8]:

$$pf(u)+qf(v)=pf(u_1)+qf(v_1),$$

де p, q – додатні числа, $p+q=1$, u, v, u_1, v_1 – функції відносно шуканої невідомої x; f – деяка функція.

Для розв’язання цього класу рівнянь доцільно застосовувати наступну теорему.

Теорема 2. Якщо в рівнянні:

$$pf(u)+qf(v)=pf(u_1)+qf(v_1)$$

функція $f(x)$ є строго опуклою вгору або строго увігнутою вниз на проміжку X, а функції:

$$u=u(x), \quad v=v(x), \quad u_1=u_1(x), \quad v_1=v_1(x)$$

є такими, що для всіх x з області визначення рівняння D їх значення містяться в X, і виконується умова:

$$pu+qv=pu_1+qv_1,$$

то задане рівняння на множині:

$$D_1 = D\cap\{x; u(x)\le v(x); u_1(x)\le v_1(x)\}$$

рівносильне рівнянню:

$$u(x)=u_1(x).$$

Проілюструємо застосування теореми на прикладі.

Приклад 12. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt[12]{9+x}+3\sqrt[12]{7-\frac{1}{2}x}=\sqrt[12]{3}+3\sqrt[12]{10}\,.$$

Розв'язання:

а) ОДЗ: $x\in[-9;14]$.

б) Поділимо обидві частини рівняння на 4:

$$\frac{1}{4}\sqrt[12]{9+x}+\frac{3}{4}\sqrt[12]{7-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}\sqrt[12]{3}+\frac{3}{4}\sqrt[12]{10}\,.$$

Функція $f(t(x))=\sqrt[12]{t(x)}$ є строго опуклою вгору на області визначення $t\geq 0$. Покладемо:

$$u(x)=9+x,\quad v(x)=7-\frac{1}{2}x,\quad u_1(x)=3,\quad v_1(x)=10,\quad p=\frac{1}{4},\quad q=\frac{3}{4}\,.$$

Очевидно, що $u_1(x)\leq v_1(x)$ для всіх x. Визначимо проміжок, на якому виконується рівність $u(x)\leq v(x)$:

$$9+x\leq 7-\frac{1}{2}x,\quad \frac{3}{2}x\leq -2,\quad x\leq -\frac{3}{4}.$$

Отже, множина D_1 з теореми 2 є відрізком $D_1=\left[-9;-\frac{3}{4}\right]$. Тепер знайдемо, для яких x виконується умова $pu+qv=pu_1+qv_1$ теореми 2:

$$\frac{1}{4}(9-x)+\frac{3}{4}\left(7-\frac{1}{2}x\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot 10,$$

$$\frac{9}{3}+\frac{x}{2}+\frac{21}{4}-\frac{3}{8}x=\frac{3}{4}+\frac{30}{4},\qquad -\frac{x}{8}=\frac{3}{4},$$

$$x=-6\,.$$

Це значення і є розв'язком рівняння $u(x)=u_1(x)$, якому рівносильне задане рівняння:

$$9+x=3\,.$$

Автори вважають, що зазначений матеріал може стати корисним майбутнім програмістам як з точки зору розвитку їх аналітичних здібностей, так і з точки зору поглиблення їх відчуття поняття опуклості математичних множин.

Дана стаття є продовженням досліджень авторів міждисциплінарних зв'язків у процесі надання неперервної математичної освіти [9; 10].

Список використаних джерел

1. Моклячук, М. П. (2004). *Основи опуклого аналізу. Навч. посібник*. – Київ, Видавництво ТВіМС. 236 с.
2. Запорожченко, О. Є., Шинковська, І. Л., Заєць, І. П. (2012). *Застосування похідної: Навч. посібник*. Дніпропетровськ: НМетАУ. 53 с.
3. Жалдак, М. І., Триус, Ю. В. (2005). *Основи теорії і методів оптимізації: Навч. посібник*. Черкаси: Брама-Україна. 608 с.
4. Никайдо, С. (1972). *Выпуклые структуры в математической экономике*. М.: «Мир». 517 с.

5. Чучаев, И. И., Денисова, Т. В. (2005). Выпуклые функции и уравнения. *Математика в школе. №5*. 41-47.

6. Калинин, С. И. (2002). Два «родственных» уравнения. *Математика в школе. № 6*. 70-71.

7. Калинин, С. И. (2004). Неравенство Ки Фана. *Математика в школе. № 8*. 69-72.

8. Далингер, В. А. (2017). Решение уравнений на основе свойства выпуклости функции. *Международный журнал экспериментального образования. № 3* (часть 1). 93-96.

9. Гроза, В. А., Тихонова, В. В., Томащук, О. П., Бохонова, Т. Ю., Лещинський, О. Л. (2020). Елементи поглиблення вмінь та навичок спрощення ірраціональних виразів в процесі надання неперервної математичної освіти. *Modern science: problems and innovations. Abstracts of the 1st International scientific and practical conference*. SSPG Publish. Stockholm, Sweden. Pp. 373-379. URL: http://sciconf.com.ua.

10. Бохонова, Т. Ю., Гроза, В. А., Лещинський, О. Л.,Тихонова, В. В., Томащук, О. П. (2017). Елементи професійно-орієнтовної пропедевтичної системи математичної освіти молодших спеціалістів-програмістів. *Інноваційні технології: теорія, методологія та практика в сучасній науці. Монографія*. Київ: ЦП «Компринт». 163-222.

ОСОБЛИВОСТІ ПРАКТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ З ГАЛУЗІ «ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ» ЗА ОСВІТНІМ КОМПОНЕНТОМ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Наталія Ротаньова, Тетяна Шабельник

Стрімкий науково-технічний прогрес та суцільна інформатизація й комп'ютеризація суспільства висувають потребу у висококваліфікованих фахівцях, які могли б успішно адаптуватися до сучасних умов та бути професіональними, компетентними фахівцями у своїй галузі, які можуть логічно і абстрактно мислити, проводити дослідження, аналізувати отримані результати. Математичні методи інтенсивно застосовуються у різноманітних галузях теоретичного знання і практичної діяльності людини. Математика з її логічним й обчислювальним апаратом є потужним засобом розв'язування прикладних задач, інструментом кількісних розрахунків. Без застосування основних методів вищої математики неможливо уявити науково обґрунтовані способи аналізу, перевірки, прогнозування і прийняття оптимальних рішень, зокрема, з метою здійснення професійної діяльності в галузі інформаційних технологій. Тому знання фахівців галузі інформаційних технологій, їх методологічна та професійна діяльність базуються на математичній основі, а отже, зростає значущість дисциплін математичного циклу для розвитку й становлення майбутнього фахівця.

Досліджуючи модель вивчення математичних дисциплін в університетах, спираючись на праці вчених-математиків, ми згодні з С. М. Шевченко [1], що навчання математики в закладах вищої освіти (ЗВО) має підпорядковуватись наступним цілям:

– повідомляти основні теоретичні положення, необхідні для вивчення загальнонаукових та спеціальних дисциплін, навчати відповідного математичного апарату, ґрунтуючись на принципах фундаментальності й професійної спрямованості та спираючись на логічне обґрунтування емпіричного матеріалу;

– органічно поєднувати традиційні та інформаційно-комунікаційні технології у навчальній діяльності;

– розвивати первинні навички математичних прикладних досліджень: переклад реальної задачі на адекватну математичну мову, вибір оптимального методу дослідження, інтерпретація результату дослідження та оцінка його точності;

– формувати навички доведення розв'язання задачі до кінцевого результату – числа, графіка, точного якісного висновку тощо, застосовуючи при цьому обчислювальні засоби, таблиці, довідники;

– формувати уміння самостійно розбиратися в математичному апараті, який застосовується в літературі зі спеціальності;

– розвивати аналітичне мислення, виховувати у студентів прикладну математичну культуру, необхідну інтуїцію та ерудицію в питаннях застосування математики [1; 2].

На підставі викладеного, необхідність навчання математики є очевидною.

Питанням математичної підготовки студентів ЗВО приділяють увагу такі провідні математики-методисти, як З. В. Бондаренко, К. В. Власенко, О. Г. Євсеєва, С. А. Кирилащук, В. І. Клочко, Т. В. Крилова, Л. Д. Кудрявцева, Т. С. Максимова, В. А. Петрук, М. В. Працьовитий, О. І. Скафа, С. М. Шевченко та ін. Вони одностайні в тому, що розв'язання проблеми підвищення якості математичної підготовки студентів ЗВО пов'язані перш за все з глибоким опануванням студентами основ математичної науки, умінням бачити й використовувати внутрішньопредметні й міжпредметні зв'язки, прикладну спрямованість курсу вищої математики [3]. Це пов'язано з тим, що навіть якщо студент добре засвоює формальні навички, правильно розв'язує алгоритмічні завдання, але виникають проблеми, коли потрібно застосувати ці знання й уміння до розв'язування задач прикладного характеру, які попередньо потребують побудови математичної моделі процесу, вибору для цього необхідного математичного апарату, методу та способу розв'язування [4]. Слід зазначити і те, що зміст формальних задач недостатньо враховує вимоги сьогодення, що висуваються до математичної освіти майбутніх фахівців у галузі інформаційних технологій.

Проблема прикладної спрямованості навчання вже давно є об'єктом дослідження педагогів, методистів, математиків. Цій проблемі приділяли увагу Г. П. Бевз, Б. В. Гнеденко, М. Я. Ігнатенко, Ю. М. Колягін, А. В. Прус, З. І. Слєпкань, В. В. Фірсов, В. О. Швець, С. М. Шевченко та ін. Збірники завдань з вищої математики налічують багато прикладних задач, що відображають різноманітні життєві ситуації, але з галузі інформаційних технологій їх недостатньо.

Тому метою статті є розкриття шляхів та особливостей практичної підготовки здобувачів вищої освіти в галузі «Інформаційні технології» за освітнім компонентом «Вища математика» для досягнення його прикладної спрямованості.

Сутність прикладної спрямованості дисципліни полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання у напрямку: здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зв'язків вищої математики з практикою; набуття студентами в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності. Остання теза передбачає включення до навчання таких специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем, зокрема для розв'язання прикладних задач, під якими ми розуміємо задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату [5].

Прикладні задачі мають задовольняти такі методичні вимоги:

– задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності й значущості набутих математичних знань;

– зміст задачі повинен викликати у студентів пізнавальний інтерес, давати можливість демонструвати ефективне використання математичних знань на практиці;

– поняття й терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі;

– числові дані в прикладних задачах повинні відповідати існуючим на практиці, тобто бути реальними [5].

Отже, ми згодні з Т. В. Криловою [6], що прикладні задачі (міжпредметного змісту чи професійно спрямовані) виконують наступні функції:

– освітню (використання цих задач спрямовано на формування в студентів системи знань, навичок і вмінь на різних етапах навчання математики);

– розвивальну (опрацювання таких задач розвиває вміння осмислювати отримані результати, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки);

– виховну (виховання майбутнього фахівця на заняттях з математики може здійснюватися завдяки означеним задачам);

– контролювальну (ці задачі є навчальними).

Розв'язання задач міжпредметного змісту сприяє формуванню й розвитку базових, предметних, зокрема математичних, професійних і практичних компетентностей у студентів вищої школи [7].

Отже, велике значення в процесі вивчення дисципліни «Вища математика» має розуміння здобувачами практичної значущості навчального матеріалу, перспективи його використання. Тому при повідомленні будь-якого теоретичного матеріалу слід намагатися відразу ж приводити приклади з життя, завдання, у яких цей матеріал знаходить фактичне застосування, а особливо корисно, якщо умова задачі наближена до майбутньої професійної діяльності.

Аналіз освітньо-професійних програм та навчальних планів підготовки бакалаврів освіти в галузі «Інформаційні технології», зокрема зі спеціальності 125 «Кібербезпека», дозволив зробити висновки, що більшість професійно орієнтованих дисципліни, які забезпечують базові знання з усіх аспектів захисту інформації, ґрунтуються на фундаментальній математичній підготовці. Оскільки математичні знання виконують роль методологічної основи наукового знання та базової складової більшості профільних дисциплін, усі математичні дисципліни вивчаються студентами даної спеціальності на I та II курсах [8].

Розглянемо забезпечення прикладної спрямованості освітнього компонента «Вища математика», що викладається на освітньо-професійній програмі 125 «Кібербезпека» (надалі ОПП) Маріупольського державного університету для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти та входить до складу обов'язкових компонентів ОПП як дисципліна циклу професійної підготовки [9].

Дисципліна викладається у 1-му та 2-му семестрах та містить 19 кредитів ECTS (570 годин), лекційні заняття –144, практичні заняття – 144, самостійна робота – 342, формою підсумкового контролю є екзамен.

Завдання курсу: навчання здобувачів теоретичних основ і методів теорії лінійної алгебри, векторної алгебри, аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення і застосуванню цих методів для розв'язування різноманітних задач теоретичного та практичного характеру в галузі інформаційних технологій, формування у здобувачів ключових і міждисциплінарних компетентностей, що забезпечують успішне опанування ними дисциплін практичного, спеціального і професійного спрямування.

Під час вивчення дисципліни «Вища математика» здобувачі вищої освіти спеціальності 125 Кібербезпека, згідно з ОПП, мають оволодіти загальними компетентностями (здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації; вміння виявляти, ставити та розв'язувати проблеми за професійним спрямуванням; здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатність професійно спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово) та фаховими компетентностями (здатність до використання інформаційно-комунікаційних технологій, сучасних методів і моделей інформаційної безпеки та/або кібербезпеки; здатність здійснювати процедури управління інцидентами, проводити розслідування, надавати їм оцінку; здатність аналізувати, виявляти та оцінювати можливі загрози, уразливості та дестабілізуючі чинники інформаційному простору та інформаційним ресурсам згідно з встановленою політикою інформаційної та /або кібербезпеки) [9; 10].

У результаті опанування освітнього компонента здобувач повинен знати й уміти застосовувати на практиці фундаментальні поняття аналітичної геометрії, лінійної алгебри та векторного аналізу, диференціального та інтегрального числення, рядів та інтеграла Фур'є, функціонального аналізу в обсязі, необхідному для розв'язування типових завдань в галузі інформаційної та /або кібербезпеки [9; 10].

Таким чином, серед результатів навчання, що зазначені в ОПП та визначають нормативний зміст підготовки і корелюються з визначеним вище переліком загальних і фахових компетентностей, є: аналізувати, аргументувати, приймати рішення під час розв'язування складних спеціалізованих задач та практичних проблем у професійній діяльності, які характеризуються комплексністю та неповною визначеністю умов, відповідати за прийняті рішення; обирати оптимальні методи та способи розв'язування складних спеціалізованих задач та практичних проблем у професійній діяльності, оцінювати їхню ефективність; використовувати результати самостійного пошуку, аналізу та синтезу інформації з різних джерел для ефективного розв'язування спеціалізованих задач професійної діяльності; адаптуватися в умовах частої зміни технологій професійної діяльності, прогнозувати кінцевий результат; критично осмислювати основні теорії, принципи, методи й поняття в навчанні та професійній діяльності [9].

Викладання дисципліни передбачає наступні форми організації навчання: лекційні заняття; практичні заняття; самостійна робота. Для поглибленого вивчення дисципліни рекомендується систематичне опрацювання додаткової літератури, фахових видань та використання ресурсів Інтернет. З метою роз'яснення найбільш складних питань дисципліни та підвищення якості виконання індивідуальних завдань проводяться групові та індивідуальні консультації.

Основними методами навчання дисципліни «Вища математика» є: пояснювально-ілюстративний; репродуктивний; проблемний; частково-пошуковий або евристична бесіда; дослідницький. Перевага віддається тим методам, використовуючи які, навчальний матеріал не просто повідомляють, а пояснюють, обґрунтовують, коментують, задля того, щоб було менше механічного запам'ятовування, а більше розуміння сутності, методам навчання, що пов'язані з використанням засобів наочності, та евристичним методам, що сприяють активізації евристичної діяльності, розвивають активність, самостійність, творчі здібності.

Під час викладання дисципліни на заняттях використовується лабораторна база комп'ютерних класів Маріупольського державного університету, які обладнано мережею комп'ютерів IBM Pentium та створеної на основі сучасного обладнання останнього покоління, прогресивних програмно-апаратних комплексів і програмного забезпечення (GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, MathCAD, Maxima, Mathematica, MicrosoftExcel тощо), а також навчально-матеріальна база кафедри математичних методів та системного аналізу. Це дає можливість використовувати чисельні методи замість аналітичних при розв'язуванні різноманітних задач вищої математики, а також візуалізовувати результати математичного моделювання.

Отже, враховуючи сучасні стандарти, вимоги, технології, засоби, методи навчання необхідно наповнити зміст дисципліни «Вища математика» прикладними задачами, що можуть виникати у професійній діяльності в галузі інформаційних технологій, зокрема фахівців з кібербезпеки.

Розглянемо більш детально професійно спрямовані завдання, які ми пропонуємо до розв'язування здобувачам спеціальності «125 Кібербезпека» під час вивчення змістових модулів «Диференціальне числення» та «Інтегральне числення», зі змісту яких вони отримають ще й корисну інформацію з кібербезбеки.

З'ясування можливості застосування поняття похідної функції, а саме миттєвої швидкості зміни функції, до задач з галузі інформаційних технологій дає можливість розглядати цікаві прикладні задачі, у яких йдеться про процеси та явища інформаційної безпеки. Серед них можна виділити задачі, у розв'язуванні яких похідна відіграє першорядну роль. Розглянемо деякі з них.

Задача 1. Фахівцями з кібербезпеки встановлено, що в деякій системі є помилки конфігурації. Це помилки адміністраторів, які налаштовують програмне забезпечення для користувачів. Такі помилки конфігурації можуть виникати внаслідок нерозуміння документації чи особливостей функціонування програмного засобу або ж через недбалість. Прикладом такого роду помилок є встановлення слабких паролів для привілейованих облікових записів чи надання надмірних прав без відповідного контролю доступу. Кількість помилок N у системі змінюється за законом $N(t) = 10 + 4t + 2t^2$. Скільки помилок було в системі в початковий момент часу $t = 0$? Яка швидкість приросту числа помилок у момент часу $t = 4$ хв?

Для навчання застосування похідної до дослідження функцій, які є математичними моделями прикладних задач, тобто до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі даної задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; до обчислення наближеного значення функції пропонуємо наступну задачу.

Задача 2. У країні виникла хакерська атака, яка розповсюджується через комп'ютерний вірус-вимагач Petya. А. Він використовує існуючу діру в безпеці Windows, блокує та шифрує сектор завантаження системи, замінюючи його на власний. За розблокування сектора вірус вимагає від користувача перевести на анонімний рахунок 300 доларів у криптовалюті BitCoin. Встановлено, що відсоток p тих інформаційних систем, що уразив комп'ютерний вірус, залежить від часу t (в добах) наступним чином $p = 0{,}005(12t^2 - t^3)$, де $0 \le t \le 12$.

1) Скільки відсотків інформаційних систем буде уражено до кінця другої доби?

2) Скільки діб буде збільшуватись відсоток уражених систем?

3) Починаючи з якої доби хакерська атака почне спадати?

Розглянута задача є прикладом задачі прикладного змісту, математична модель якої міститься в умові. Її також доцільно розглянути на етапі актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед вивченням достатньої умови існування екстремуму в точці. Після того, як студенти будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, корисно розглянути з ними розв'язання цієї задачі та запропонувати для самостійного розв'язування декілька подібних задач. Наприклад:

Задача 3. Швидкість розповсюдження y комп'ютерних вірусів, чисельність яких у момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0{,}001x(100 - x)$. При якій чисельності комп'ютерних вірусів ця швидкість максимальна? Скільки комп'ютерних вірусів повинно бути для того, щоб швидкість розповсюдження дорівнювала нулю?

Задача 4. Зловмисники надсилають інфікований електронний лист з посиланням на небезпечні сайти, тим самим розповсюджують вірус, що вражає операційну систему Windows. Кількість уражених комп'ютерів $p(t)$ змінювалась з часом t (вимірюється днями) від початку розповсюдження комп'ютерного вірусу за законом $p(t) = \dfrac{200t}{t^2 + 100}$. Визначте час максимуму уражених операційних систем Windows, інтервали зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

Метою вивчення теми «Інтегральне числення» є формування уявлення про роль інтеграла у дослідженні реальних процесів, формування навичок знаходження величин за швидкістю їх змінювання та обчислення площ геометричних фігур, навичок дослідження реальних процесів за допомогою інтеграла та диференціальних рівнянь.

Поставлена мета переконує в тому, що вивчення даної теми здобувачами спеціальності «Кібербезпека» має супроводжуватись розглядом прикладних задач, які є засобом реалізації прикладної спрямованості навчання. Отже, серед вправ, що закріплюють поняття первісної, сприяють засвоєнню основної властивості первісної і трьох правил їх знаходження, доцільно розглянути прикладні задачі, розв'язуючи які студенти набуватимуть навички відшукання первісних. Запропонуємо деякі з цих задач.

Задача 5. За допомогою шкідливої програми зловмисники можуть красти облікові дані, логіни та паролі користувачів, номери кредитних карток та іншу конфіденційну інформацію. Початкова кількість комп'ютерів, на які встановлено шкідливу програму, дорівнює 90, і зростає зі швидкістю $W(t) = 20t$ комп'ютерів у день. Знайдіть закон зміни кількості комп'ютерів P залежно від часу t, якщо час виражено у днях.

Задача 6. Під час кібератаки хакери зламали сервери компанії та вкрали особисті дані. Вірусу-вимагач, який блокував роботу комп'ютерів, поширюється зі швидкістю $V(t) = 0{,}1t - 0{,}01t^2$ уражених комп'ютерів за добу, де $t \in [0; 10]$. Знайдіть закон зміни відсотка p уражених комп'ютерів залежно від часу t, якщо за першу добу було уражено 7 % від загального числа комп'ютерів.

Диференціальні рівняння є складовою теми «Інтегральне числення» курсу «Вища математика», а також застосовуються як один з найважливіших засобів математичного моделювання. Тому під час викладання цієї теми основна увага має бути спрямована на застосування диференціальних рівнянь до опису реальних процесів, зокрема тих, що характерні для галузі інформаційних технологій.

Визначивши поняття «диференціальне рівняння», «порядок диференціального рівняння», виділяють найпростіші диференціальні рівняння виду $y'(x) = f(x)$, де $f(x)$ – відома, а $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x. Розв'язки цього рівняння називають первісними функціями для функції $f(x)$. Характерна властивість диференціальних рівнянь – це мати безліч розв'язків. Тому, розв'язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Щоб вибрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка властива саме цьому процесу, треба мати додаткову інформацію, наприклад, знати початковий стан процесу. Без цієї додаткової умови задача є невизначеною [5]. Для конкретизації сказаного вище та введення понять «загальний та окремий розв'язки диференціального рівняння», «початкові умови» доцільно розглянути прикладну задачу, математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння.

Задача 7. Виконання правил кібербезпеки дозволить лише мінімізувати можливість випадкового несанкціонованого проникнення у пристрої та системи. Однак неможливо надати повної гарантії уникнення зламу. Для максимальної мінімізації можливості випадкового несанкціонованого проникнення у пристрої та системи компанії було рекомендовано користуватися послугами фахівців у сфері кібербезпеки з чітким виконанням усіх інструкцій, які вони зазначають. За 30 днів роботи фахівця з кібербезпеки в компанії кількість пристроїв, що наразилися на хакерську атаку, шляхом встановлення шкідливого програмного забезпечення, зменшилась на 50%. Через який час залишиться 1% початкової кількості пристроїв, що були атаковані, якщо відомо, що швидкість розповсюдження шкідливого програмного забезпечення серед пристроїв компанії пропорційна до їх кількості?

Загалом можна зробити висновок, що завдяки використання прикладних завдань студент має можливість побачити прямий взаємозв'язок матеріалу, що вивчається, з його практичним застосуванням. Саме при такому підході створюються передумови активного застосування математичних знань, здатність працювати самостійно й творчо, уміння працювати з навчальною й довідковою літературою, студенти залучаються до сфери професійної культури, тому впровадження прикладної спрямованості курсу «Вища математика» є важливим кроком на шляху до підвищення якості підготовки фахівців з кібербезпеки.

Безумовно, представлена стаття не вичерпує всіх аспектів проблеми прикладної спрямованості дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності «125 Кібербезпека». Подальше дослідження плануємо присвятити розробці прикладних завдань, що передбачають використання інформаційно-комунікаційних технологій і розширюють можливості застосування програмних засобів у навчальному процесі, а також складанню прикладних задач до інших дисциплін математичного циклу. Так як зміст курсу і його спрямованість на професійну діяльність є запорукою успішної та якісної підготовки здобувача, що, в свою чергу, є важливим фактором орієнтації на майбутню спеціальність.

Список використаних джерел

1. Shevchenko, S. M. (2015). Osoblyvosti navchannia matematychnykh dystsyplin u tekhnichnomu universyteti napriamu informatsiino-komunikatsiinykh tekhnolohii [Features of teaching mathematical disciplines at the Technical University in the field of information and communication technologies]. *Tekomunikatsiini ta informatsiini tekhnolohiiel, 2*, 80-896 [in Ukrainian].

2. Shevchenko, S. M., & Zhdanova, Yu. D. (2016). Matematychni kompetentsii maibutnikh fakhivtsiv informatsiinoi bezpeky [Mathematical competencies of future information security specialists]. *Suchasnyi zakhyst informatsii, 4*, 90-96. [in Ukrainian].

3. Krylova, T. V., & Steblianko, P. O. (2008). Profesiino oriientovane navchannia matematyky v tekhnichnomu vuzi – pershocherhova zadacha sohodennia [Professionally oriented teaching of mathematics in a technical university is the primary task of today]/ *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky, 127*, 98-102 [in Ukrainian].

4. Bondarenko, Z. V., & Kirilashchuk, S. A. (2017). Prykladna spriamovanist vykladannia vyshchoi matematyky studentam ekonomichnoho profiliu VNZ [Applied Orientation of Teaching Higher Mathematics for Students of Higher Educational Establishment with Economic Specialization]. *Visnyk Zhytomyrskoho derzhavnoho universytetu imeni Ivana Franka. Pedahohichni nauky, 4*, 22-26. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VZhDUP_2017_4_6.pdf [in Ukrainian].

5. Sokolenko, L. O., Filon, L. G., & Shvets V. O. (2010). *Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursi alhebry i pochatkiv analizu [Applied problems of a natural nature in the course of algebra and the beginnings of analysis*]. Kyiv: NPU imeni M.P. Drahomanova [in Ukrainian].

6. Krylova, T. V. (1998). *Problemy navchannia matematyky v tekhnichnomu vuzi* [*Problems of teaching mathematics in a technical university*]. Kyiv: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

7. Krylova, T. V. Dydaktychni zasady fundamentalizatsii matematychnoi osvity studentiv tekhnichnykh universytetiv [Didactic bases of fundamentalization of mathematical education of students of technical universities]. (n.d.). www.dstu.dp.ua. Retrieved from http://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/3/21/3-21-mzp14.pdf [in Ukrainian].

8. Korzhova, O. V. (2017)/ Teoretychni aspekty mizhpredmetnykh zviazkiv matematychnykh dystsyplin z dystsyplinamy tsyklu profesiinoi pidhotovky maibutnikh fakhivtsiv iz orhanizatsii informatsiinoi bezpeky [Theoretical aspects of interdisciplinary communications between mathematical disciplines and disciplines of professional training of future specialists in organization of information security]. *Fizyko-matematychna osvita*: *naukovyi zhurnal*, *2*(12), 89-93 [in Ukrainian].

9. Osvitno-profesiina prohrama 125 Kiberbezpeka [Educational and professional program 125 Cybersecurity]. (n.d.). mdu.in.ua. Retrieved from http://mdu.in.ua/Ucheb/OPP/bak-2019/kiberbezpeka.pdf [in Ukrainian].

10. Standart vyshchoi osvity Ukrainy: pershyi (bakalavrskyi) riven, haluz znan 12 – Informatsiini tekhnolohii, spetsialnist 125 – Kiberbezpeka [Standard of higher education of Ukraine: first (bachelor's) level, field of knowledge 12 - Information technologies, specialty 125 - Cybersecurity]. (n.d.). mon.gov.ua. Retrieved from https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/12/21/125-kierbezpeka-bakalavr.pdf [in Ukrainian].

ВПРОВАДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ДУАЛЬНОЇ ОСВІТИ ДО НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ ІТ- СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Алла Нестеренко

Вступ. Конкурентоспроможність будь-якої держави на світовому ринку та якість життя її населення значною мірою залежить від рівня професійної підготовки кадрів. Одним із провідних світових лідерів у сфері підготовки кваліфікованих кадрів нині виступає Європейський Союз завдяки дуальній системі професійної освіти й навчання.

Нові технології в усіх сферах виробництва швидко змінюються і вимагають оволодіння певними комплексними уміннями й навичками. На передньому плані знаходиться оволодіння не тільки професійними знаннями, а насамперед уміннями і навичками професійної діяльності, що зумовлює необхідність посилення практичної спрямованості професійної підготовки майбутніх фахівців.

Слід відмітити, що освіта в Україні не встигає за технічним прогресом. Світ так швидко змінюється, що молодь, вступаючи до закладу вищої освіти (ЗВО), по закінченні потрапляє у зовсім інший технологічний світ, який за 5-6 років їхнього навчання змінився до невпізнання. Це особливо характерно для ІТ-сфери. Очевидно, викладачі ЗВО не встигають відстежувати ці тенденції, і наші студенти випускаються не з найсучаснішими знаннями.

Дуальна форма навчання особливо актуальна при підготовці фахівців для галузі інформаційних технологій, які настільки стрімко змінюються і розвиваються, що класичні моделі організації навчання у вищій технічній школі не можуть задовольнити потреби роботодавців, зокрема ІТ-сфери.

Провідні університети України вже почали впроваджувати елементи дуальної форми навчання. Мета такого впровадження – подолання диспропорції між пропозицією щодо надання освітніх послуг університетом та запитами роботодавців, удосконалення й осучаснення структури освітнього процесу, змісту й обсягу навчальних планів і програм, якості підготовки студентів, надання можливості мобільного реагування на зміни виробничих технологій та модернізації змісту вищої освіти, враховуючи вимоги відповідних підприємств під час організації навчального процесу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У працях провідних вітчизняних вчених і педагогів-практиків підкреслюється актуальність проблеми впровадження дуальної форми навчання студентів ЗВО. Про необхідність відповідних перетворень у сфері вищої освіти України зазначають вітчизняні вчені, акцентуючи увагу на таких питаннях: реформування системи вищої освіти (В. Андрущенко[1]), проектування навчання (М. Євтух, О. Сердюк [2]), створення моделі фахівця на засадах теорії освітньої інноватики (О. Матвієнко [3]), навчання впродовж життя (М.Степко, Б. Клименко, Л. Товажнянський [4]).

У Концепції дуальної форми освіти зазначено, що основне завдання впровадження елементів дуальної форми навчання – це усунення основних недоліків традиційних форм і методів навчання майбутніх кваліфікованих робітників, подолання розриву між теорією і практикою, освітою й виробництвом, та підвищення якості підготовки кваліфікованих кадрів із урахуванням вимог роботодавців у рамках нових організаційно-відмінних форм навчання.

Дуальна форма здобуття освіти – це спосіб здобуття освіти, що передбачає поєднання навчання осіб у закладах освіти (й інших суб’єктів освітньої діяльності) з навчанням на робочих місцях на підприємствах, в установах та організаціях для набуття певної кваліфікації, як правило, на основі договору[5] .

В. Ковтунцем у своїй доповіді було зазначено, що «необхідно сприяти подальшому розвитку експорту елементів дуальної форми підготовки кваліфікованих кадрів та прискорити запровадження її елементів у систему професійної освіти України».

Зі слів генерального директора вищої освіти й освіти дорослих О. Шарова, нині законодавче поле з дуальної освіти знаходиться на рівні формування. Адже таке поняття, як дуальна освіта, відзначається в законі «Про освіту» від 2017 року [6]. «Для того, щоб нова нормативка була ефективною й діяльною, зараз нам потрібно виробити декілька моделей, які зокрема будуть регулювати взаємодію університетів, роботодавців і студентів», – відзначає О. Шаров. Він також пояснив, що дуальна освіта безпосередньо залучає студентів до виробничого процесу і не має нічого спільного з «добре організованою практикою». У такий спосіб студент може зразу закріплювати теоретичні знання на практиці. А також оволодівати особливостями професії на виробництві.

Аналіз наукових праць з даної проблеми свідчить про те, що досить ґрунтовно вивчені лише окремі аспекти професійної підготовки фахівців, здебільшого – професійна підготовка в освітньому процесі ЗВО, яка здійснюється в рамках традиційних методів. Водночас існує потреба в дослідженні нових шляхів і засобів формування й розвитку професійної компетентності майбутніх фахівців.

Мета статті. Метою даної статті є висвітлення окремих питань упровадження елементів дуальної освіти в навчання ІТ-фахівців у вищих технічних університетах.

Виклад основного матеріалу. Останнім часом в університетах багатьох розвинених країн світу активно впроваджується дуальна модель освіти. Так, і в Україні в найближчі п’ять років передбачається, що 44 заклади професійно-технічної й вищої освіти будуть втілювати і вже втілюють експеримент щодо впровадження дуальної освіти. У Міністерстві освіти й науки України планують, що за цей час разом із роботодавцями будуть вироблені оптимальні способи використання дуальної освіти, а результати будуть застосовані до створення правил, за якими ця система діятиме в майбутньому.

Під дуальною формою навчання розуміють практико-орієнтоване навчання, побудоване на підґрунті соціального партнерства університету й підприємства, спрямованого на формування нової моделі підготовки здобувачів вищої освіти із обов’язковими періодами виробничого навчання й виробничої практики, що проводяться на базі підприємств, та передбачає зміцнення зв’язків навчання з виробництвом, визначення провідної ролі та підвищення відповідальності роботодавців за якість підготовки фахівців. Термін «дуальна система» (від лат. dualis – подвійний) був введений у педагогічну термінологію в середині 60-х років минулого століття у ФРН – як нова, більш гнучка форма організації професійного навчання. Дуальність як методологічна характеристика професійної освіти передбачає узгоджену взаємодію освітньої та виробничої сфери з підготовки кваліфікованих кадрів певного профілю в рамках організаційно-відмінних форм навчання.

Концепція підготовки фахівців за дуальною формою здобуття освіти, розроблена Міністерством освіти і науки України і схвалена Кабміном 19 вересня 2018 року [7], передбачає: модернізацію освітніх програм; підвищення якості підготовки фахівців; зближення освіти з вимогами ринку праці; посилення ролі та впливу роботодавців на освіту; підвищення мотивації до навчання серед студентів; ріст рівня зайнятості молоді; скорочення адаптаційного періоду випускників на роботі; підвищення конкурентоздатності працівників.

Під системою дуальної освіти у ЗВО мається на увазі практика, коли в підготовці молодих фахівців беруть участь одразу два заклади – навчальний (ВНЗ) і навчальне підприємство (зокрема ІТ-компанії). Освітній процес має бути організований так, що у ЗВО студент спочатку отримує базові теоретичні знання, а потім він проходить практику на підприємстві, яке заздалегідь укладає з університетом угоду про співпрацю, і студент виконує там роботу, пов’язану з обраною спеціальністю. При цьому його праця оплачується підприємством.

У результаті такої організації дуальної освіти студенти поєднують навчання та стажування на підприємстві. При цьому підприємства здійснюють замовлення освітнім установам на конкретну кількість фахівців певної спеціальності, працедавці беруть участь у формування навчальної програми. Зі свого боку, роботодавці можуть мати різні форми співучасті у підготовці фахівців – повністю оплачують навчання; закуповують необхідне обладнання; покривають всі видатки, пов’язані з процесом їх виробничого навчання; виплачують грошові винагороди учням за використання їхньої праці тощо.

Упровадження елементів дуальної форми навчання для здобуття вищої освіти базується на поєднанні в навчальному процесі професійно-теоретичної та професійно-практичної підготовки в обсягах 30% (40%) теоретичних занять до 70% (60%) практичних занять (або обсяги навчання на робочому місці від 25% до 50% кредитів). Виробниче навчання та виробнича практика здійснюється безпосередньо в умовах виробництва з використанням матеріально-технічної бази та кадрового потенціалу підприємства (ІТ-компанії), що надає можливість студентам одночасно з навчанням в університеті опановувати основи обраної професії безпосередньо на виробництві.

З огляду на це, упровадження дуальної форми навчання має передбачати наступні зміни в організації навчально-виробничого процесу:

- зміна співвідношення навчального часу: теоретичне навчання – 30%, виробниче навчання та виробнича практика – 70% навчальних годин;
- блочно-модульна побудова навчального процесу: опанування базового модуля на базі університету, а потім чергування: модуль теорії (1-2 тижні) на базі ЗВО / модуль практики (4-8 тижнів) на базі підприємств, установ, організацій;
- оцінювання результатів навчання відповідно до реальних показників професійної підготовки, підтвердженої в умовах виробництва [8].

Як відомо, однією з основних ланок сучасних технічних університетів провідних країн є інноваційні центри з розробки новітніх технологій у різних галузях. Саме завдяки таким центрам реалізується основний принцип дуальної освіти в університетах світу, коли фахівці інноваційних центрів, які є одночасно викладачами, спрямовують у потрібне русло навчання студентів старших курсів, задіяних у розробці проектів центру. Відсутність або недостатня розвиненість інноваційних центрів у вітчизняних університетах викликає необхідність прямого втручання компаній у систему української ІТ-освіти шляхом коригування навчальних програм та надання своїх фахівців для ведення занять. Тоді впровадження й реалізація дуальної освіти до навчання студентів ІТ-спеціальностей сприятиме заохоченню до успішної роботи старшокурсників в ІТ-компаніях.

Зокрема, слід зазначити, що для успішного навчання студентів за дуальною формою навчання, коригування навчальних програм потребують математичні дисципліни, які є підґрунтям для подальшого навчання студентів ІТ-спеціальностей як в університеті, так і в умовах виробництва. Наприклад, особливої уваги для навчання студентів ІТ- спеціальностей слід надавати наступним дисциплінам: «Математичний аналіз» (теми: диференціальне числення функції багатьох змінних – метод градієнтного спуску, метод найменших квадратів та ін.; елементи теорії поля – потенціал векторного поля, циркуляція, потік поля та ін., теорія рядів – функціональні ряди, їх застосування до наближених обчислень, ряди Фур'є), «Теорія ймовірностей та математична статистика» (теми: випадкові величини – види розподілів та їх практичне застосування; статистичні оцінки параметрів розподілу; елементи теорії кореляції; статистична перевірка гіпотез та ін.).

Навчальні програми дисциплін математичного циклу повинні передбачати розрахунок більшого погодинного вивчення певних програмних тем, які потребують особливого практичного застосування у навчанні студентів спеціальних дисциплін і застосуванні ними набутих знань як в університеті, так і до практичного навчання студентів в ІТ- компаніях або підприємствах під час організації дуальної форми навчання. Інші теми навчальних програм можна виносити як оглядові або для самостійної роботи студентів. Таке коригування навчальних годин сприятиме розвитку мотивації й компетентності майбутніх ІТ-фахівців.

Коригувати навчальний процес, надавати освітянські послуги повинен університет разом із своїм інноваційним центром, але тільки не ІТ-компанії. Тому треба вирішувати проблему із створенням реальних інноваційних центрів в університетах для ІТ-компаній .

Впровадження дуальної освіти є важливоим для вітчизняного ІТ-сектора. Найголовніше – це шанс зупинити чи принаймні зменшити відтік найталановитішої молоді за кордон і тим самим надати можливість кадрово посилити вітчизняні ІТ-компанії, які зацікавлені у нових «мізках», здатних генерувати та апробовувати креативні ідеї. Відповідно, компанії зможуть отримати перспективний продукт, а держава – нові надходження до бюджету.

Розв'язати проблему із зростанням потоку абітурієнтів, які виїжджають для навчання за кордон, можливо завдяки навчальним дисциплінам всіх типів (фундаментальних, базових, прикладних), які мають стати реальним фундаментом для майбутньої праці студентів.

Ураховуючи досвід провідних ЗВО України з організації дуальної освіти, ми вважаємо, що впровадження такої форми навчання є доцільним для студентів 3-4-х курсів, оскільки молоді люди, вже маючи певні теоретичні знання, можуть працювати в напрямах, пов'язаних із тим, що вони вивчають.

Відомо, що багато студентів, починаючи з третього курсу ЗВО, йдуть працювати. Найчастіше вони пропускають заняття, не справляються з навчальним планом тієї чи іншої дисциплін. Тому по закінченні вузу багато хто не може знайти гідну роботу через брак теоретичних знань та практичних навичок і вмінь. Заборонами щодо працевлаштування студентів боротися марно – проблему треба розв'язувати іншим шляхом. Для цього організація навчання за дуальною освітою потребує перебудови навчальних планів таким чином, щоб студенти встигали отримувати теоретичні знання у відведений їм на це час і набувати практичних вмінь зі спеціальності.

Укладення угоди ЗВО з ІТ-компаніями спонукатиме студентську молодь працювати із тими фірмами, які не тільки прагнуть отримати від студентів результат, а й хочуть, щоб вони вчилися та розвивалися далі, і при цьому компанії готові допомагати закладу освіти в підготовці висококваліфікованих фахівців.

Упровадження дуальної освіти до навчання студентів ІТ-спеціальностей має як переваги, так і недоліки.

До переваг дуальної освіти відносяться:

- практична орієнтація освітнього процесу, що сприяє формуванню й розвитку фахових умінь і навичок, умінню працювати в команді, організовувати професійну діяльність, співпрацювати з колегами, спілкуватися з клієнтами тощо;
- формування відповідних компетентностей, інтеграція практичної професійної підготовки у навчальний процес – спочатку практична підготовка, а потім навчання у вищому закладі освіти.
- фінансування навчання майбутнього фахівця підприємством, з яким укладено угоду.

Водночас існують суттєві недоліки дуальної професійної освіти:

- менше «науковості» порівняно з традиційним навчанням у ЗВО;
- велика завантаженість студентів, у них немає семестрових канікул; навчальний графік дуже насичений; навчання проводиться як у ЗВО, так і на підприємстві чи фірмі;
- фінансова підтримка підготовки фахівця відповідним підприємством пов'язана з умовою його працевлаштування і роботи на цьому підприємстві.

Слід зазначити, що ті ознаки й особливості дуальної професійної освіти, які під одним кутом зору розглядаються як переваги, з інших позицій вважаються недоліками. Так, саме збільшення обсягу практичної складової знижує можливість наукового розвитку фахівця. Інтенсифікація навчального процесу через включення до нього практичної підготовки часто призводить до перевантаження студентів. Необхідність працевлаштування після закінчення навчання на підприємстві, де відбувалась практика, обмежує свободу фахівця, але водночас гарантує йому робоче місце і певні фінансові умови.

Висновки. Упровадження дуальної форми освіти дозволяє студентам поєднувати навчання на стаціонарі, здобуваючи практичний досвід роботи на підприємстві, і на практиці освоювати отримані знання (за різними узгодженими з компаніями моделями підготовки).

Проведений розгляд особливостей системи дуальної системи освіти дозволяє зробити висновок про те, що така організація підготовки ІТ-фахівців сприяє скороченню термінів навчання майбутніх бакалаврів, підвищенню рівня їхньої практичної підготовки, формуванню й розвитку в них ключових компетентностей, що, своєю чергою, сприяє підвищенню ефективності подальшої професійної діяльності.

Упровадження системи дуальної освіти в Україні як умови якісної підготовки випускників ІТ-спеціальностей ЗВО потребує подальшого вивчення досвіду європейських країн, розроблення й упровадження дуальних програм, забезпечення рівня зростання практичної значущості в системі вищої освіти країни. Створення гармонійних відносин між вищою школою та потребами на ринку праці дасть можливість не тільки забезпечити високий рівень кваліфікації випускника, зекономити кошти підприємству, а й водночас вирішити кадрові питання, підвищити рівень працевлаштування майбутніх фахівців і зробити їх більш спроможними на ринку праці, що сприятиме збереженню вітчизняних спеціалістів й уникненню відтоку кадрів за кордон.

Отже, необхідно сприяти подальшому розвитку і впровадженню елементів дуальної форми підготовки кваліфікованих кадрів та прискорити запровадження її елементів у систему вищої освіти України.

Список використаних джерел

1. Андрущенко, В. П. (2000). Теоретико-методологічні засади реформування вищої освіти в Україні. *Педагогічна газета. Академія пед. наук України. №12* (78), грудень. 1-2.
2. Євтух, М. Б., Сердюк, О. П. (2000). Дидактичні проблеми проектування навчальних занять в умовах вищої школи. *Теоретичні питання освіти та виховання: Зб. наук. пр. №9.* К.: Вид.
центр КДЛУ. 28.
3. Матвієнко, О. В. (2004). Створення моделі спеціаліста на засадах теорії освітньої інноватики. *Педагогіка і психологія. №3*. 44-52.
4. Степко, М. Ф., Клименко, Б. В., Товажнянський, Л. Л. (2004). *Болонський процес і навчання впродовж життя: Монографія*. Харків: НТУ „ХПІ". 112 с.
5. *Закон України «Про освіту», стаття 9, п. 10*.
6. Що таке дуальна освіта і навіщо вона українцям. *Osvita.ua*. 20.02.2017. Процитовано 01.02.2018.
7. Розпорядження Кабінету Міністрів України від 19.09.2018 № 660-р «Про схвалення Концепції підготовки фахівців за дуальною формою здобуття освіти».
8. Середньостроковий план пріоритетних дій уряду на період 2017 –- 2020 р.р., розділ III «Розвиток людського капіталу», підрозділ 8: «Модернізація професійно-технічної освіти»;
9. Наказ Міністерства освіти і науки України від 16.03.2015 № 298 «Про впровадження елементів дуальної системи навчання у професійну підготовку кваліфікованих робітників».
10. Велика хартія університетів (Болонья, Італія, 18 вересня 1988 р.). (2004). *Болонський процес:Документи*. К.: Вид-во Європ. ун-ту. 7–10.

НАШІ АВТОРИ

Акуленко Ірина	–	доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і математичного аналізу, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, *Україна* *e-mail*: akulenkoira@ukr.net
Ачкан Віталій	–	доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та методики навчання математики, Бердянський державний педагогічний університет, *Україна* *e-mail*: vvachkan@ukr.net
Бохонова Тетяна	–	вчитель математики, Київський природничонауковий ліцей № 145, *Україна* *e-mail*: bohonova@ukr.net
Бурда Михайло	–	доктор педагогічних наук, професор, дійсний член НАПН України, завідувач відділу математичної та інформатичної освіти, Інститут педагогіки НАПН України, *Україна* *e-mail:* mibur5@ukr.net
Володко Инта	–	доктор математики, професор, завідувач кафедри інженерної математики, Ризький технічний університет, *Латвія* *e-mail:* inta.volodko@rtu.lv
Гаєвець Яна	–	кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики і методики її навчання, Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», *Ukraine* *e-mail*: gaevets@i.ua
Гроза Валентина	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний авіаційний університет, *Україна* *e-mail*: valentina.groza@gmail.com
Егліте Ірина	–	доктор математики, доцент, доцент кафедри інженерної математики, Ризький технічний університет, *Латвія* *e-mail*: irina.eglite@rtu.lv
Забранський Віталій	–	кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики і теорії та методики навчання математики, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, *Україна* *e-mail*: vitaliyzabranskiy@gmail.com
Кірман Вадим	–	кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри математики, Дніпровська академія неперервної освіти, *Україна* *e-mail*: vadym.kirman@gmail.com
Кляцька Людмила	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра алгебри і математичного аналізу, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, *Україна* *e-mail*: akulenkoira@ukr.net

Коломієць Оксана – кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, *Україна*
e-mail: ok_kolomiec71@ukr.net

Коростіянець Тамара – кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики і методики її навчання,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», *Україна*
e-mail: lebmax@ukr.net

Кульчицька Наталія – кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри математики та інформатики і методики навчання,
ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», *Україна*
e-mail: kulchytska.natali@gmail.com

Лещинський Олег – кандидат фізико-математичних наук, доцент,
заступник директора, викладач,
Коледж інженерії та управління Національного авіаційного університету, *Україна*
e-mail: oleshchinsky17.1@gmail.com

Матвєєва Ірина – доктор технічних наук, професор,
доцент,
Національний авіаційний університет, *Україна*
e-mail: iryna.valeriivna.matvieieva@gmail.com

Нестеренко Алла – кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики,
Черкаський державний технологічний університет, *Україна*
e-mail: allanesterenko7@gmail.com

Нєдялкова Катерина – кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики і методики її навчання,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», *Україна*
e-mail: ndlvitaliy@ukr.net

Ротаньова Наталія – кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математичних методів та системного аналізу,
Маріупольський державний університет, *Україна*
e-mail: rotanevan@gmail.com

Сердюк Зоя – кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики та методики навчання математики,
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, *Україна*
e-mail: serdyuk_z@ukr.net

Скворцова Світлана – доктор педагогічних наук, професор,
завідувач кафедри математики і методики її навчання,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», *Україна*
e-mail: skvo08@i.ua

Таточенко Володимир – кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу,
Херсонський державний університет, *Україна*
e-mail: tatochenko@ksu.ks.ua

Тарасенкова Ніна	–	доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, *Україна* *e-mail*: ntaras7@ukr.net
Тихонова Вікторія	–	викладач математики, Коледж інженерії та управління Національного авіаційного університету, *Україна* *e-mail*: vivitykhonova@gmail.com
Тінькова Дар'я	–	аспірант, кафедра математики та методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, *Україна* *e-mail*: tinkovads@gmail.com
Томащук Олексій	–	кандидат педагогічних наук, доцент, доцент, Національний авіаційний університет, *Україна* *e-mail*: allatumbrukaki@i.ua
Тумбрукакі Алла	–	старший викладач кафедри математики і методики її навчання, Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», *Україна* *e-mail*: allatumbrukaki@i.ua
Федосєєв Станіслав	–	вчитель математики та логіки, Заклад освіти «Приватний загальноосвітній навчальний заклад "Мідгард"», *Україна* *e-mail*: fedoseev.stanislav90@gmail.com
Чернобай Ольга	–	кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Університет державної фіскальної служби України, *Україна* *e-mail*: chernobai.olga@gmail.com
Черняєва Сарміте	–	магістр педагогічних наук, магістр математики, лектор кафедри інженерної математики, Ризький технічний університет, *Латвія* *e-mail*: sarmite.cernajeva@rtu.lv
Черняхівська Юліана	–	учитель математики, магістрант, ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», *Україна* *e-mail*: kulchytska.natali@gmail.com
Шабельник Тетяна	–	доктор економічних наук, доцент, завідувач кафедри математичних методів та системного аналізу, Маріупольський державний університет, *Україна* *e-mail*: Tanya.shabelnik17@gmail.com
Юхименко Оксана	–	учитель математики, Державний навчальний заклад «Черкаський професійний ліцей», *Україна* *e-mail*: yhokcana@gmail.com

Наукове видання

МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА:

минуле, сьогодення, майбутнє

до 100-річчя від дня народження О. Ф. Семеновича

Монографія

за редакцією Н. А. Тарасенкової

Видавець СГ НТМ «Новий курс»
Вул. Манізера, 3, м. Харків, 61002, Україна
E-mail: nr1989@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК № 6392 від 07.09.2018

Підп. до друку 05.09.2020
Формат 60х84/16. Папір офсет.
Гарнітура Times.
Ум. др. арк 11,8. Наклад 300 прим.

Це видання надруковано на папері із деревини відповідної нормам екологічного лісовикористання

Виготовлено ФОП Гордієнко Є.І.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 4518 від 04.04.2013 р.
Україна, 18000, м. Черкаси,
тел./факс: (0472) 56-56-12, (067) 444-28-94
e-mail: book.druk@gmail.com