М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
О. М. Коломієць, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк

Геометрія

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Профільний рівень

Київ
Оріон
2018

УДК 514(075.3)
Б91

Бурда М. І.
Б91 Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, О. М. Коломієць, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2018. — 224 с. : іл.

ISBN 978-617-7485-16-1.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-7485-16-1

ЗМІСТ

Дорогі учні та учениці!

Ви приступаєте до вивчення стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі.

Ви дізнаєтеся про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про властивості паралельних та перпендикулярних прямої і площини, двох площин та про їх ознаки, як обчислювати у просторі відстані й кути. Ознайомитеся з координатами, векторами та геометричними перетвореннями в просторі. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач і на практиці. Ви переконаєтесь, що знання і вміння із стереометрії потрібні багатьом фахівцям — архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам тощо.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на чотири розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним** шрифтом. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять. У «Словничку» до кожного параграфа ви знайдете переклад основних термінів англійською, німецькою та французькою мовами.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Зверніть увагу на задачі рубрики «Проявіть компетентність». Розв'язуючи їх, ви виробите вміння застосовувати вивчений матеріал на практиці, під час вивчення інших предметів.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання, дізнатися про походження термінів і математичних позначень, про внесок у науку видатних математиків.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

 Поміркуйте

 Типова задача

 Зверніть увагу

 Домашнє завдання

 Як записати

 Запам'ятайте

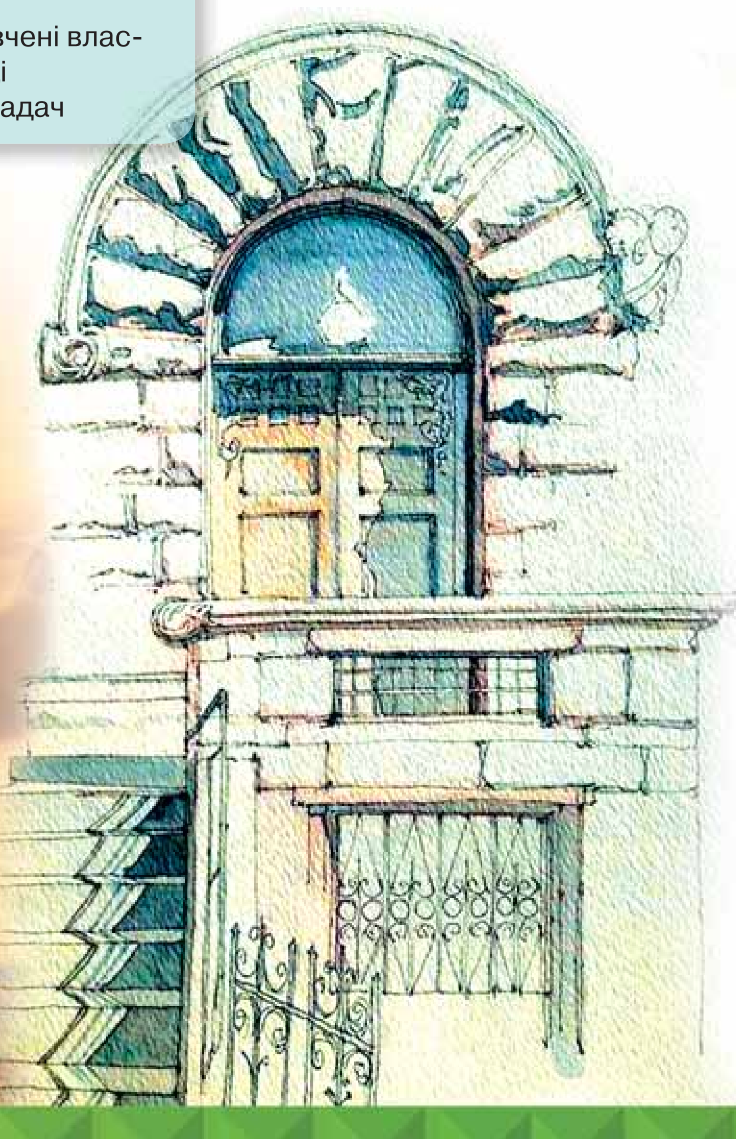
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового й задоволення від навчання!

Розділ 1

Вступ до стереометрії

У розділі дізнаєтесь:

- що вивчає стереометрія;
- які фігури та відношення вважають основними в стереометрії;
- про аксіоми стереометрії та наслідки з них;
- що таке переріз прямої призми (піраміди) та як його побудувати;
- як застосувати вивчені властивості на практиці й у розв’язуванні задач



§ 1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У *стереометрії* вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують *аксіоматичний метод*. Спочатку обирають *основні поняття — основні фігури* та *основні відношення*. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження — *аксіоми*. Усі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВІДНОШЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями — відношення «*належати*», «*лежати між*» і «*накладання*». Площину будемо зображати у вигляді паралелограма (мал. 1).

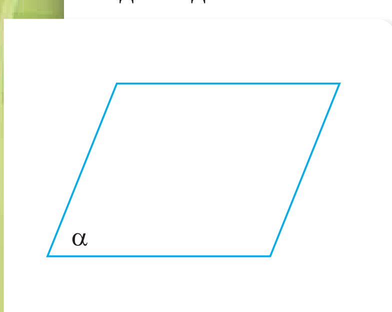
Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами A, B, C,..., прямі — малими латинськими буквами a, b, c,.... Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гама)....

Введення у просторі нової геометричної фігури — площини — потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом планіметрії.

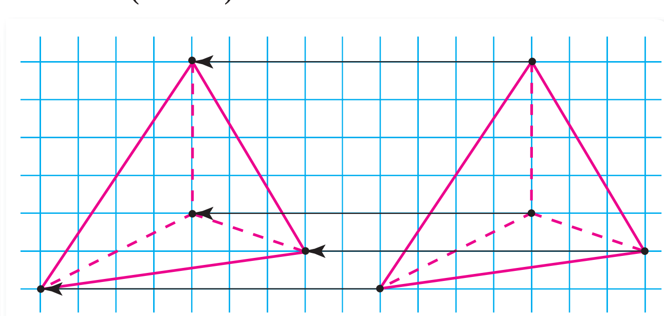
Відношення «належати» розглядають не лише для точки і прямої — точка *лежить на* прямій, але й для точки і площини та прямої і площини — точка (пряма) *лежить у* площині.

Відношення «лежати між» для трьох будь-яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в стереометрії.

Відношення «накладання» у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 2).



Мал. 1



Мал. 2

2. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них включає всі аксіоми планіметрії. **Вони виконуються в кожній площині простору.**

1) Усі фігури, які ви вивчали в планіметрії, можна вважати визначеними, а їх властивості — доведеними в кожній площині простору;
2) якщо йдеться про дві точки (прямі), то ці точки (прямі) є різними, тобто вони не збігаються.

Друга частина системи аксіом стереометрії включає аксіоми, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Коротко називатимемо їх *аксіомами стереометрії*. Сформулюємо ці аксіоми.

Аксіома 1
(належності точки площині).

Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

На малюнку 3 ви бачите, що точка A лежить у площині α, а точка B не належить їй.

Коротко записуємо: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Аксіома 2
(існування і єдиності площини).

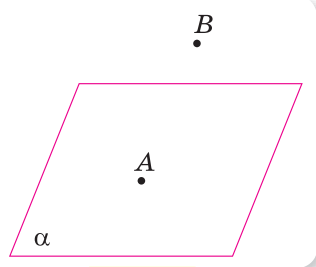
Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками. Наприклад, на малюнку 4 площина ABC — це площина α.

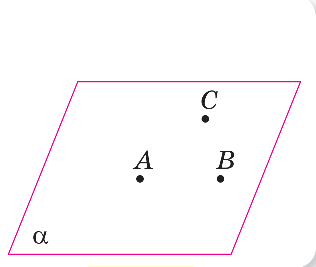
Аксіома 3
(належності прямої площині).

Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

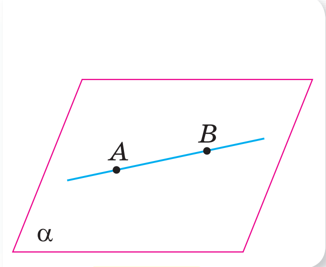
Записуємо: якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$ (мал. 5). Знак $\subset$ означає, що точки прямої AB утворюють підмножину точок площини α.



Мал. 3



Мал. 4

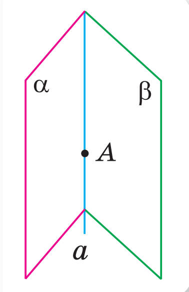


Мал. 5

Аксіома 4

(про перетин двох площин).

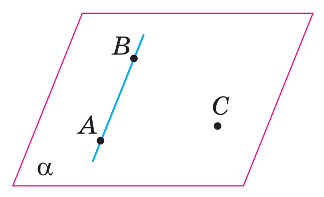
Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.



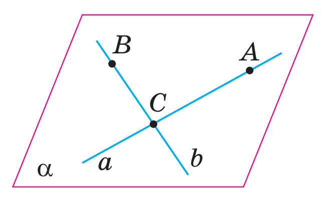
Мал. 6

Записуємо: якщо $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = a$, $A \in a$ (мал. 6). Запис зі знаком $\cap$ означає, що переріз множин точок площин α і β утворює пряму a.

3. НАСЛІДКИ З АКСІОМ СТЕРЕОМЕТРІЇ



Мал. 7



Мал. 8

З наведених аксіом випливають такі наслідки.

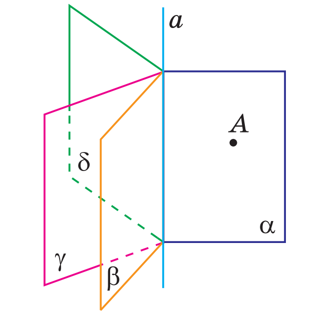
НАСЛІДОК 1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 7) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

НАСЛІДОК 2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, та точку перетину (мал. 8), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.

Площину можна задати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.



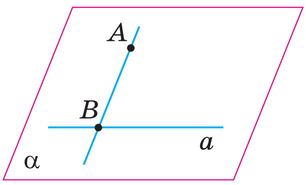
Мал. 9

НАСЛІДОК 3. Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин.

Справді, через пряму a і точку A, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. Позначимо її α (мал. 9). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α. Через кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α. Тому таких площин безліч.

На малюнку 9 ви бачите, що через пряму a проходять площини α, β, γ і δ.

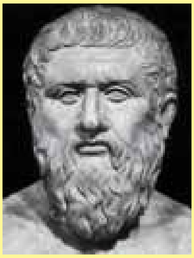
З а д а ч а. Дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a, лежать в одній площині.



Мал. 10

Р о з в' я з а н н я. Через дані точку A і пряму a, за наслідком 1 з аксіом стереометрії, проходить площина і до того ж тільки одна. Позначимо її α (мал. 10). Через точку A проведемо довільну пряму так, щоб вона перетинала пряму a. Позначимо точку їх перетину B. Точки A і B лежать у площині α. Тоді, за аксіомою 3, пряма AB лежить у площині α. Аналогічно можна довести, що будь-яка інша пряма, що проходить через точку A і перетинає пряму a, лежить у площині α.

Дізнайтеся більше



Термін «стереометрія» походить від грецьких слів στερεοξ — просторовий і μετρεο — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого **Платона** (427–347 до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка мала назву «Академія». Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко відстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був надпис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».

Пригадайте головне

1. Що вивчають у стереометрії?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Які відношення вважають основними у стереометрії?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.

Розв'яжіть задачі

1'. Які поняття вводять без означень у стереометрії?

2'. Що таке аксіома? Наведіть приклади.

3'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

1) точка;	2) відрізок;	3) промінь;	4) пряма;
5) кут;	6) трикутник;	7) коло;	8) ромб;
9) куб;	10) куля;	11) площина;	12) призма?

4'. Які з наведених відношень є основними в стереометрії:

1) належати;	2) перетинати;	3) лежати між;
4) дорівнювати;	5) бути подібним;	6) накладання?

5'. На малюнках 11 –12 зображено площину α і прямі AB, BC, AD і CD.
1) Які з точок A, B, C і D лежать у площині α?
2) Яку іншу назву можна дати площині α?
3) Які з прямих лежать у площині α?

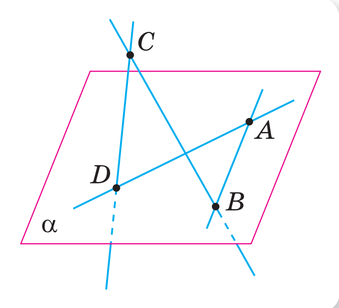
6'. За даними на малюнках 13–14 з'ясуйте:
1) які спільні точки мають площини α і β;
2) по якій прямій перетинаються площини α і β.

7°. Назвіть неозначувані поняття стереометрії.

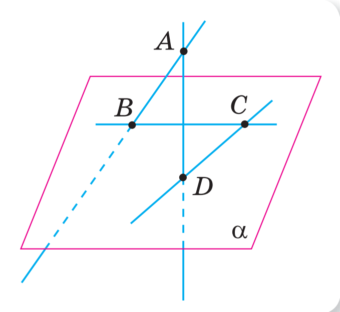
8°. Які з наведених аксіом планіметрії справджуються у просторі без уточнень:
1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;
2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;
3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;
4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один;
5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;
6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і тільки один;
8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180°;
9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°;
10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?

9°. Сформулюйте для простору уточнені аксіоми планіметрії.

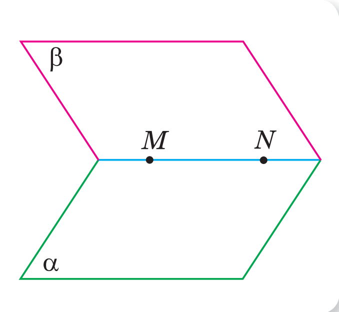
10°. За даними на малюнках 15 –16 визначте точки: 1) які лежать у площині α; 2) не лежать у площині β; 3) через які не проходить площина α; 4) через які проходить площина β. Зробіть відповідний запис.



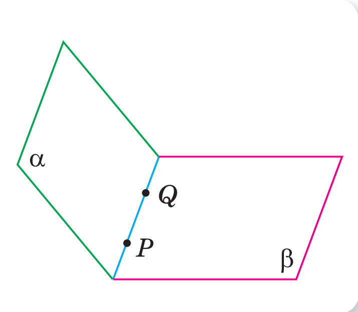
Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14

11°. У площині α позначте точки A, B, C і D, а поза нею — точки M і N. Чи можна дати площині α таку іншу назву:
1) AN; 2) ADB; 3) $BCDM$; 4) ACD; 5) BAC; 6) CNB; 7) DAB; 8) MDC; 9) CAD?

12°. Проведіть площину α. Позначте: 1) точки B і C, які лежать у площині α, і точку A, що не лежить у цій площині; 2) точки A і C, які лежать у площині α, і точку B, що не лежить у цій площині. Проведіть прямі AC, AB, BC. Які з цих прямих лежать у площині α? Зробіть відповідний запис.

13°. **Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?**

14°. Пряма a і точка A лежать у площині α (мал. 17). Точки B і C не лежать у даній площині. Чи визначають площину, відмінну від площини α: 1) пряма a і точка B; 2) пряма a і точка C; 3) прямі AB і AC; 4) прямі AB і BC? Відповідь поясніть.

15°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать: 1) тільки у площині α; 2) тільки у площині β; 3) у площинах α і β. Зробіть відповідний запис.

16. **Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири? Відповідь поясніть.**

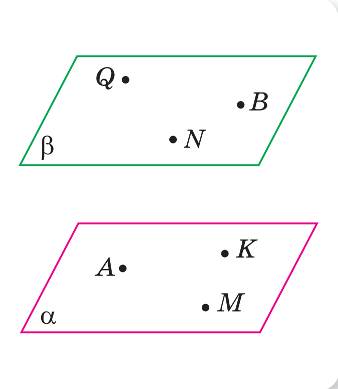
17. Якщо три точки кола лежать у площині α, то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

18. Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута? Відповідь поясніть.

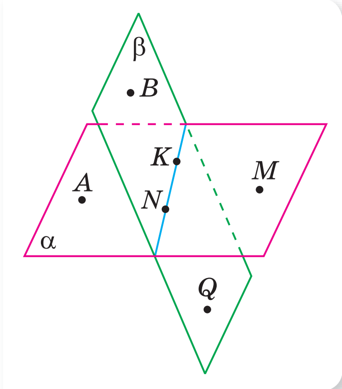
19. **Дві прямі перетинаються в точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі й не проходять через точку A, лежать в одній площині.**

20. Дано два відрізки, що перетинаються: 1) AC і BD; 2) AB і CD. Чи лежать в одній площині прямі BA, DC, DB і CA? Відповідь поясніть.

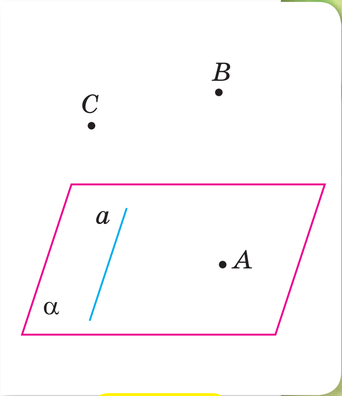
21. Прямі AB і CD не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BD також не лежать в одній площині.



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

22. Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві з цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.

23. Доведіть, що через пряму можна провести принаймні дві різні площини.

24. Площини α і β перетинаються по прямій a. Пряма c лежить у площині β, пряма b — у площині α. Ці прямі перетинаються в точці B. Чи лежить точка B на прямій a? Відповідь поясніть.

25. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що жодні три з них не лежать на одній прямій.

26*. Скільки різних площин можна провести через чотири точки, що не лежать в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

27*. Три площини попарно перетинаються по прямих a, b і c. Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку A, то прямі a, b і c перетинаються в точці A.

28*. Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b. Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

29*. Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб в кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів: 1) три; 2) чотири; 3) n?

Проявіть компетентність

30. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?

31. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямах. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, повинен повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?

32. Перевіряючи, чи лежать кінці ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він робить це?

33. Чому табурет з трьома ніжками, розміщеними по колу, завжди стоїть стійко на підлозі, а із чотирма — не завжди стійко?

34. Чому мотоцикл з коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?

35. Під час формування цеглини (або будівельного блоку) паралельними краями форми, наповненою відповідною масою, ковзає прямолінійний брусок. Чому при цьому грань цеглини (блоку), що розрівнюється, стає плоскою?

§ 1.2. ПРОСТІШІ МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ

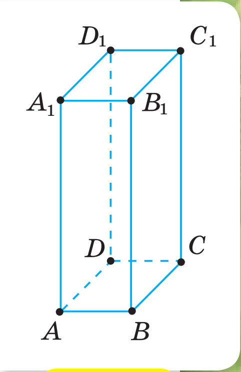
1. ПРОСТІШІ МНОГОГРАННИКИ

Вам знайомі деякі просторові фігури, наприклад, прямокутний паралелепіпед (мал. 19) і куб (мал. 20). Вони належать до особливого класу фігур — *многогранників*. Поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називають його *гранями*. Звідси й походить назва «многогранник». Зараз ви ознайомитеся з двома різновидами многогранників — *прямою призмою* (мал. 21) і *пірамідою* (мал. 22). Ці геометричні фігури будемо використовувати для ілюстрації властивостей прямих і площин, на їх зображеннях будуватимемо перерізи.

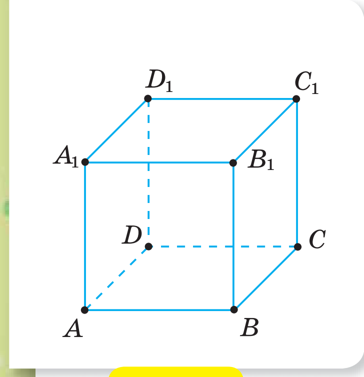
? Що відрізняє призми й піраміди? Поміркуємо.

Будь-яка призма має дві *основи*, які є рівними многокутниками з відповідно паралельними сторонами, а піраміда — одну основу. *Бічними гранями* прямої призми є прямокутники, а піраміди — трикутники. *Бічні ребра* прямої призми рівні й паралельні, а піраміди — мають спільну точку. Наприклад, основами прямої призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на малюнку 21 є шестикутники $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а її бічними гранями — прямокутники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1, FAA_1F_1. Основою піраміди $SABCD$ на малюнку 22 є чотирикутник $ABCD$, а її бічними гранями — трикутники SAB, SBC, SCD, SDA.

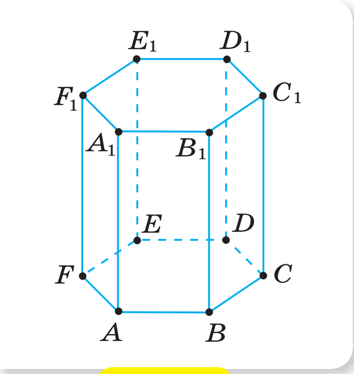
Залежно від того, який многокутник лежить в основі, призму (піраміду) називають *трикутною, чотирикутною*



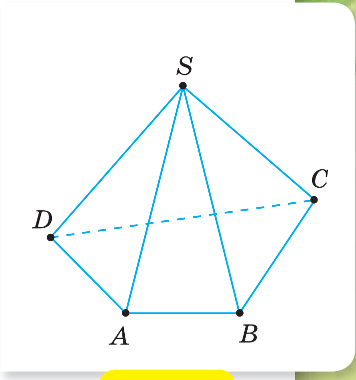
Мал. 19



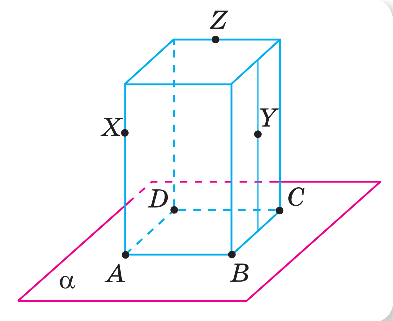
Мал. 20



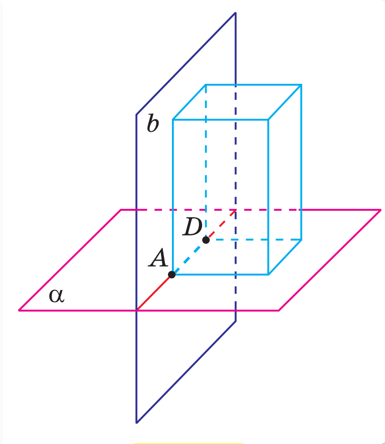
Мал. 21



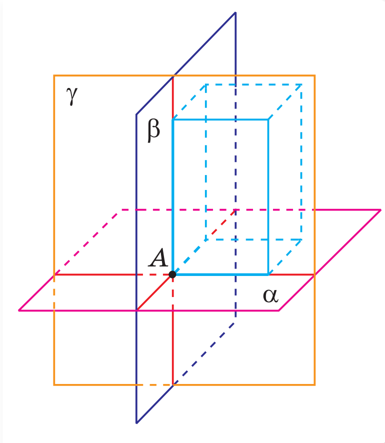
Мал. 22



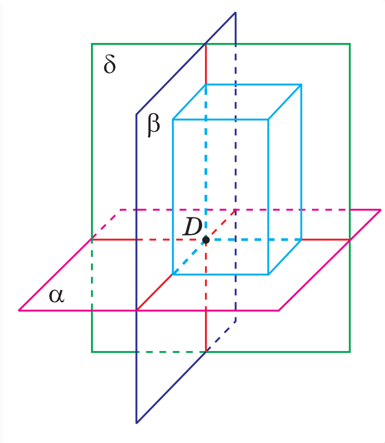
Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25



Мал. 26

чи *n-кутною*. На малюнку 21 ви бачите шестикутну пряму призму, а на малюнку 22 — чотирикутну піраміду. Прямокутний паралелепіпед (мал. 19) і куб (мал. 20) є різновидами чотирикутної прямої призми.

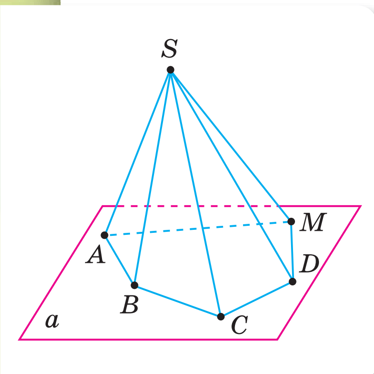
Кожна грань прямої призми (піраміди) лежить у певній площині (мал. 23). На малюнку 23 ви бачите, що точки A, B, C і D лежать у площині α, а точки X, Y і Z не належать їй.

Різні грані прямої призми (піраміди) лежать у різних площинах (мал. 24). Будь-які дві *сусідні грані* мають спільний відрізок — *ребро*. Воно лежить на прямій перетину двох площин, що містять ці грані. На малюнку 24 ви бачите, що точки ребра AD належать і площині α, і площині β. Розрізняють *бічні ребра* і *ребра основ* (*основи*) прямої призми (піраміди). Дайте означення цим поняттям самостійно.

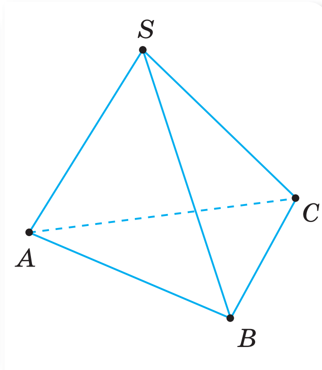
У кожній *вершині* прямої призми сходяться попарно три сусідні її грані (мал. 25 і 26). Наприклад, вершина A є точкою перетину площин α, β і γ (мал. 25), а вершина D — площин α, β і δ (мал. 26). У прямої призми кожна вершина є вершиною однієї з її основ (верхньої або нижньої), бо в ній сходяться дві сусідні бічні грані й відповідна основа.

У піраміди одна з вершин є особливою — в ній сходяться всі її бічні грані. Вона має спеціальну назву — *вершина піраміди*. На малюнку 27 — це точка S. Вершина піраміди може бути точкою перетину більше ніж трьох площин, що містять грані піраміди. У вершинах основи піраміди сходяться по три грані — дві сусідні бічні грані й основа.

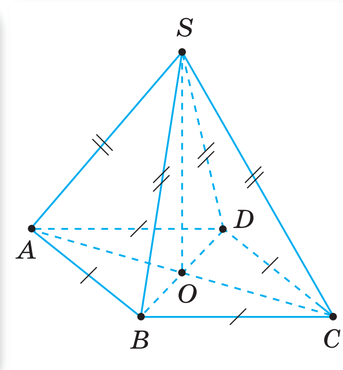
Чи існує піраміда, у кожній вершині якої сходяться три грані? Так. Це



Мал. 27



Мал. 28



Мал. 29

Пряма призма називається *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник і її бічні ребра рівні.

***Висотою піраміди* називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи.**

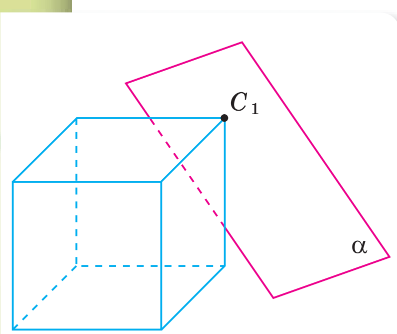
У правильної піраміди основа висоти збігається із центром її основи. На малюнку 29 відрізок SO — висота правильної чотирикутної піраміди $SABCD$.

2. ПЕРЕРІЗИ МНОГОГРАННИКА

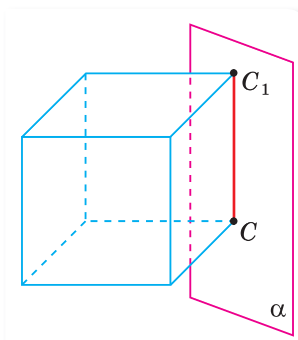
Якщо деяка площина α не містить грань многогранника, то можливі такі випадки її розміщення відносно многогранника:

1) площина α не має спільних точок з многогранником;

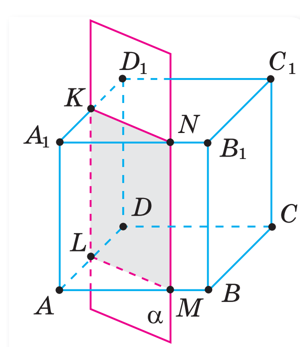
2) площина α має одну спільну точку з многогранником — його вершину (мал. 30);



Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32

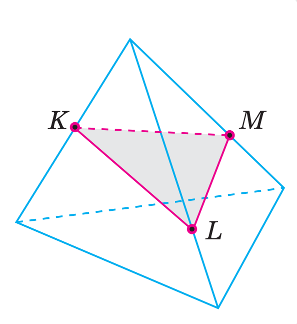
3) площина α містить лише одне ребро многогранника (мал. 31);
4) площина α перетинає многогранник (мал. 32).

Площина, яка перетинає многогранник, називається *січною площиною*.

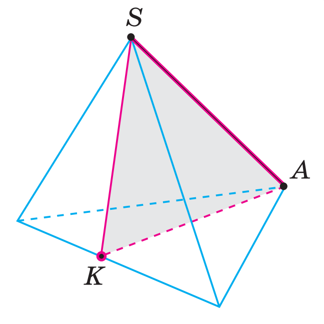
У результаті перетину многогранника січною площиною утворюється *переріз многогранника*. Це плоский многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані многогранника. Тому сторони перерізу лежать у гранях многогранника, а вершини — на ребрах многогранника. На малюнку 32 ви бачите чотирикутник $KLMN$, що є перерізом куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ січною площиною α.

Оскільки дві площини не можуть перетинатися більше ніж по одній прямій, то в грані многогранника не може бути більше одного відрізка перетину із січною площиною.

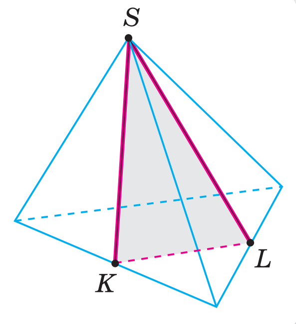
Як і будь-яку площину, січну площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (мал. 33), або прямою і точкою, що не належить їй (мал. 34), або двома прямими, що перетинаються (мал. 35).



Мал. 33



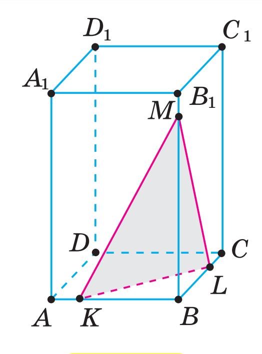
Мал. 34



Мал. 35

Задача 1. На ребрах AB, BC і BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K, L і M (мал. 36). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через дані точки.

Розв'язання. За умовою, точки K і M — спільні точки площини грані ABB_1A_1 і січної площини. Тому ці площини перетинаються по прямій KM, а відрізок KM є відрізком перетину прямокутника ABB_1A_1 із січною площиною. Міркуючи аналогічно, переконуємося, що січна площина перетинає грані $ABCD$ і BCC_1B_1 паралелепіпеда по відрізках KL і ML. Проводимо відрізки KM, KL і ML. Трикутник KLM — шуканий переріз.



Мал. 36

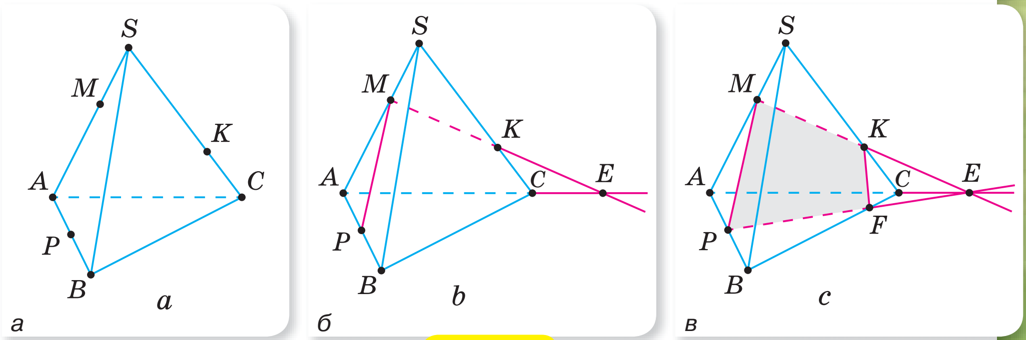
Щоб побудувати переріз многогранника січною площиною, треба побудувати відрізки перетину цієї площини з гранями многогранника й отримати плоский многокутник.

З а д а ч а 2. На ребрах AB, AS і CS піраміди $SABC$ дано точки P, M і K (мал. 37, *а*). Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через дані точки.

Р о з в' я з а н н я. 1. Проводимо відрізки PM і MK. Знаходимо точку, в якій січна площина перетинає ребро BC.

2. Прямі MK і AC перетинаються в деякій точці E, оскільки лежать у площині SAC і не паралельні (мал. 37, *б*). Точки P і E належать площинам PMK і ABC. Знаходимо точку F перетину прямих PE і BC (мал. 37, *в*).

3. Сполучаємо точку F відрізками з точками P і K. Чотирикутник $PMKF$ — шуканий переріз (мал. 37, *в*).



Мал. 37

Дізнайтеся більше

1. У будь-якого опуклого многогранника кількість його вершин (**В**), кількість граней (**Г**) і кількість ребер (**Р**) пов'язані такою залежністю:

В + **Г** – **Р** = 2.

Цю залежність уперше встановив (близько 1620 р.) видатний французький математик Р. Декарт (1596 –1650), а пізніше (у 1752 р.) заново відкрив і довів німецький математик Л. Ейлер (1707 – 1783). Відповідна теорема носить ім'я Ейлера. Іноді її називають теоремою Декарта — Ейлера про многогранники. Число **В** + **Г** – **Р** називають *ейлеровою характеристикою* многогранника. Ейлерові характеристики широко застосовуються в теорії многогранних поверхонь.

2. Термін «призма» походить від грецького слова πρισμα, що означає «розпилений». Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів παραλλοξ — паралельний та επιπεδον — площина. Термін «куб» (χυβοξ) теж античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, але після обточування — на шість граней. Слово «піраміда» вважають чи не єдиним терміном, який дійшов до нас від стародавніх єгиптян. Воно означає «пам'ятник», тобто обеліск, який поставлено славетній людині — фараону.

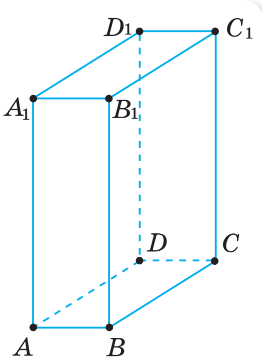
Пригадайте головне

1. Наведіть приклади просторових фігур.
2. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
3. Що є основами прямої призми? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
4. Що є основою піраміди? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
5. Чому призму називають трикутною, чотирикутною, n-кутною? А піраміду?
6. Яка пряма призма називається правильною? А піраміда?
7. Поясніть, що таке січна площина для многогранника. Як її можна задати?
8. Що є перерізом многогранника?
9. Поясніть, що означає — побудувати переріз многогранника.

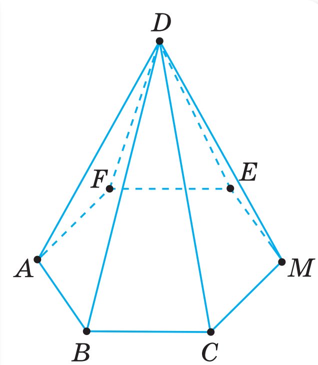
Розв'яжіть задачі

1'. За малюнками 38–40 з'ясуйте: 1) як називається даний многогранник; 2) скільки в нього основ і бічних граней; 3) який многокутник лежить у його основі; 4) які многокутники є його бічними гранями.

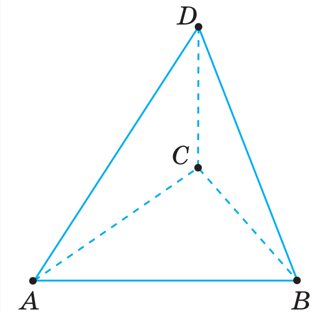
2'. Назвіть вершини й ребра многогранника (мал. 38–40). Які його грані:
1) сходяться у вершині: а) A; б) B; в) C;
2) мають спільне ребро: а) AB; б) CD; в) BD?



Мал. 38



Мал. 39

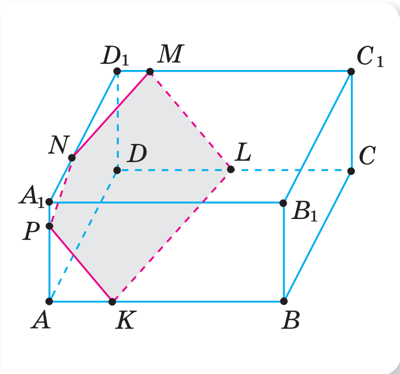


Мал. 40

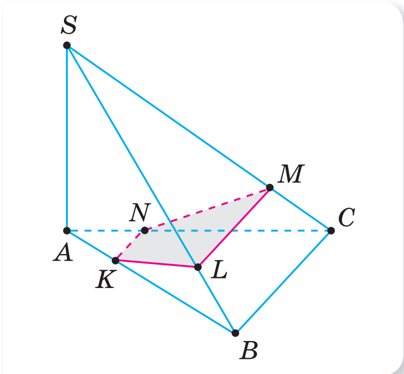
3'. За малюнками 41–42 з'ясуйте: 1) яка площина перетинає даний многогранник; 2) по яких відрізках січна площина перетинає його грані; 3) який многокутник утворився в перерізі.

4°. Дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через: 1) три вершини призми; 2) ребро й вершину призми; 3) два ребра призми, що мають спільну точку.

5°. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через: 1) три вершини піраміди; 2) ребро й вершину піраміди; 3) два ребра піраміди, що перетинаються.



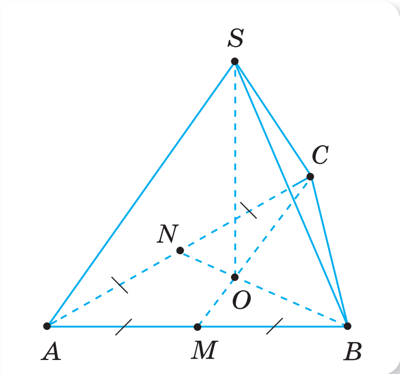
Мал. 41



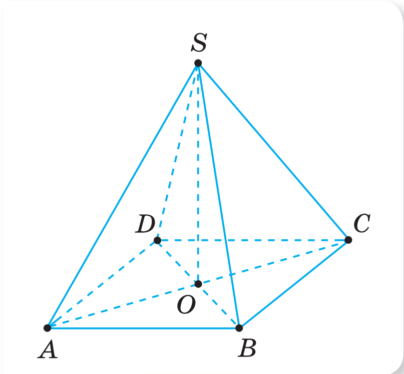
Мал. 42

6°. Чи є правильною пряма призма, якщо в її основі лежить:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?
Відповідь поясніть.

7°. Чи можна вважати правильною піраміду, в якої:
1) основа — рівнобедрений трикутник, а бічні ребра однакової довжини;
2) основа — правильний трикутник;
3) основа — правильний трикутник, а бічні ребра не однакової довжини;
4) основа — рівносторонній трикутник, а бічні ребра дорівнюють стороні основи?
Відповідь поясніть.



Мал. 43



Мал. 44

8°. На малюнках 43—44 зображено правильну піраміду, в якій проведено висоту SO. Поясніть, як розміщується основа висоти піраміди.

9°. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину через: а) вершини A, C,

D_1; б) вершини B_1, D_1, C; в) ребра BC і A_1D_1; г) ребра AA_1 і CC_1. Який многокутник дістали в перерізі?

10°. Накресліть піраміду: 1) трикутну; 2) чотирикутну; 3) шестикутну. Позначте середини її бічних ребер і через них проведіть січну площину. Який многокутник дістали в перерізі?

11. **Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати: 1) пряма призма; 2) піраміда?**

12. Виведіть формулу для обчислення кількості вершин n-кутної: 1) призми; 2) піраміди.

13. Виведіть формулу для обчислення кількості ребер n-кутної: 1) призми; 2) піраміди.

14. Виведіть формулу для обчислення кількості граней n-кутної: 1) призми; 2) піраміди.

15. Скільки вершин п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ не лежить: 1) на ребрі DE; 2) на ребрі CC_1; 3) у площині грані BCD; 4) у площині грані DED_1?

16. Чи залежить кількість вершин (ребер, граней) у призми від того, що в її основі лежить правильний многокутник? А в піраміди?

17. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точку: 1) P на ребрі AA_1; 2) Q на ребрі AD. Площини яких граней куба перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба? Скільки таких прямих можна провести?

18. У піраміді $ZABCD$ задано точку: 1) M на ребрі ZA; 2) N на ребрі BC. Площини яких граней піраміди перетинає пряма, що лежить у площині грані піраміди і проходить через дану точку та одну з вершин піраміди? Скільки таких прямих можна провести?

19. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед; 2) куб. Через діагональ нижньої основи та вершину верхньої основи проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістати: а) трикутник; б) чотирикутник.

20. **Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через: 1) середини ребер SA, AB, AD; 2) середину ребра AB і медіану грані SBC; 3) медіани граней SAB і SBC. Чи завжди задача має розв'язок?**

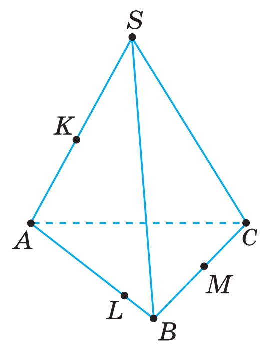
21*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

22*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

23*. На трьох бічних ребрах чотирикутної піраміди розміщено по три точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

24*. На ребрах SA, AB і BC піраміди $SABC$ дано точки K, L і M (мал. 45). Побудуйте переріз піраміди площиною KLM.

25*. На трьох бічних ребрах піраміди $SABCD$ позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 1 : 2. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини піраміди, а на двох інших — від вершини основи. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?



Мал. 45

26*. На трьох бічних ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 2 : 5. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини верхньої основи куба, а на двох інших — від вершини нижньої основи. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

Проявіть компетентність

27. З дерев'яного кубика треба виточити правильну піраміду: 1) чотирикутну; 2) трикутну. Поясніть, як це можна зробити.

28. Із шести олівців однакової довжини складіть чотири рівносторонні трикутники зі стороною, що дорівнює довжині олівця.

29. Вам потрібно знайти відстань мж найбільш віддаленими вершинами предмета, що має форму прямокутного паралелепіпеда, наприклад, цеглини. Запропонуйте спосіб вимірювання лінійкою діагоналі, не виконуючи жодних обчислень.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні фігури та основні відношення у просторі.
2. З яких частин складається система аксіом стереометрії?
3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
4. Як можна задати площину?
5. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
6. Яка призма називається правильною? А піраміда?
7. Яка площина називається січною площиною для многогранника?
8. Що таке переріз многогранника?
9. Поясніть, як побудувати переріз многогранника січною площиною.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі й знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 — 15 хв.

1° Основними фігурами в стереометрії є:

А. Точка і площина.
Б. Точка і пряма.
В. Точка, відрізок і площина.
Г. Точка, площина і пряма.

2° Площину можна задати:

А. Трьома точками, що лежать на одній прямій.
Б. Двома точками.
В. Прямою і точкою, що не належить їй.
Г. Прямою і точкою, що лежить на ній.

3° Яка фігура утворюється в перетині грані многогранника із січною площиною?

А. Пряма.
Б. Відрізок.
В. Промінь.
Г. Кут.

4 Яке з тверджень не є аксіомою стереометрії?

А. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.

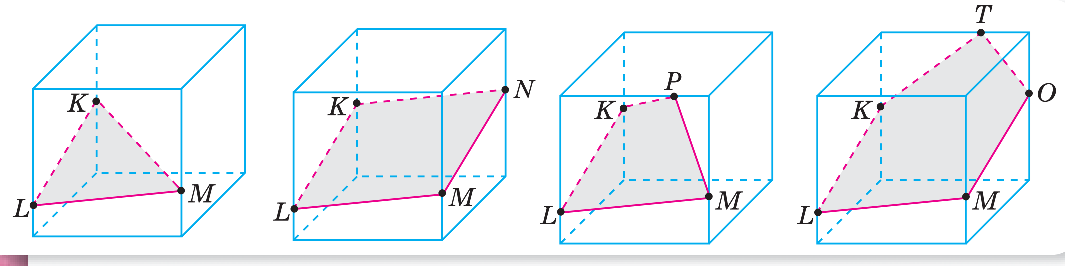
Б. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

В. Існують точки, що належать даній площині, і точки, що не лежать у ній.

Г. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

5* Треба побудувати переріз куба площиною KLM. Яка з побудов правильна?

А. **Б.** **В.** **Г.**



Розділ 2

Паралельність прямих і площин у просторі

У розділі дізнаєтесь:

- про взаємне розміщення двох прямих у просторі; прямої і площини та ознаку їх паралельності;
- як знайти відстань від точки до прямої та між двома паралельними прямими; кут між прямими, що перетинаються;
- про паралельні площини та їх ознаку і властивості;
- що таке паралельне проектування та як зображати просторові фігури на площині;
- як застосувати вивчені означення, ознаки і властивості на практиці та під час розв’язування задач

§ 2.1. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Ви знаєте, що в кожній площині дві прямі або мають одну спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільних точок, тобто паралельні.

Мал. 46

? Яке взаємне розміщення двох прямих у просторі? Подивіться на малюнок 46. Ви бачите, що пішохідний перехід (пряма a) перетинає дві паралельні смуги руху транспорту (прямі b і c), які проходять під естакадою (пряма d).

Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

- дві прямі перетинаються (прямі a і b);
- дві прямі паралельні (прямі b і c);
- дві прямі мимобіжні (прямі b і d).

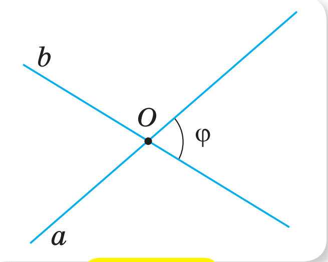
Розглянемо властивості прямих у кожному з випадків.

1. ДВІ ПРЯМІ МАЮТЬ ОДНУ СПІЛЬНУ ТОЧКУ

Якщо прямі a і b у просторі мають одну спільну точку, то вони *перетинаються* в цій точці (мал. 47).

Прямі, що перетинаються, позначатимемо так: $a \cap b$.

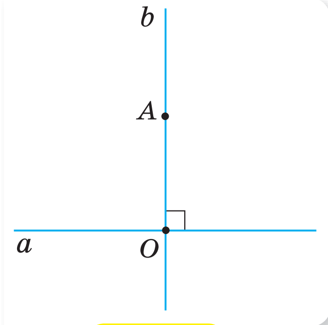
Кутом між прямими a і b вважають гострий кут, якщо прямі утворюють гострі й тупі кути (мал. 47). Якщо φ — кут між прямими a і b, то говорять, що дані прямі *перетинаються під кутом* φ. Якщо прямі a і b утворюють прямі кути (мал. 48), то кут між прямими дорівнює $90°$. Такі прямі називають *перпендикулярними*.



Мал. 47

Перпендикулярність двох прямих у просторі позначають, як у планіметрії: $a \perp b$.

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними. *Перпендикуляром* до даної прямої у просторі називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. На малюнку 48 відрізок AO є перпендикуляром, проведеним з точки A до прямої a, точка O — основа перпендикуляра. Перпендикуляр AO є найкоротшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками прямої a.



Мал. 48

Відстанню від точки до прямої **називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.**

На малюнку 48 відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра AO.

2. ДВІ ПРЯМІ НЕ МАЮТЬ СПІЛЬНИХ ТОЧОК

Якщо прямі a і b у просторі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

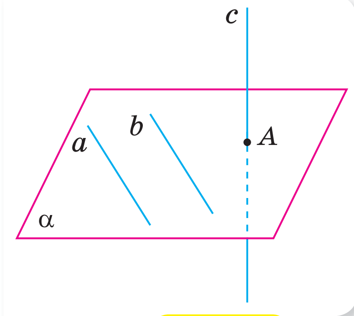
Дві прямі у просторі, що лежать в одній площині і не перетинаються, називаються *паралельними*.

Дві прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*.

На малюнку 49 прямі a і b паралельні, а прямі a і c та b і c — мимобіжні.

Коротко записують: $a \| b$, $a \div c$, $b \div c$. Знак «$\div$» заміняє слово «мимобіжні».

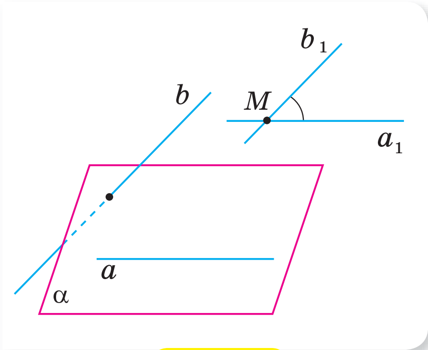
Чому в означенні мимобіжних прямих не вказано, що ці прямі не мають спільних точок? Бо відсутність спільних точок у двох прямих є наслідком того, що вони не лежать в одній площині.



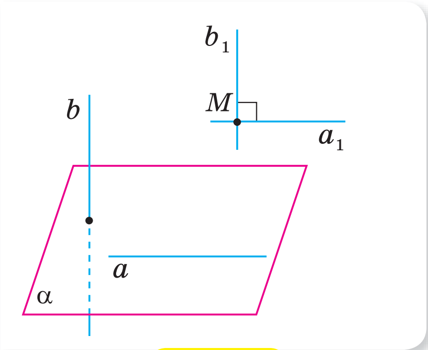
Мал. 49

Правильним є і таке означення. Дві прямі називають *мимобіжними*, якщо вони не мають спільних точок і не паралельні.

Вважають, що кут між паралельними прямими дорівнює 0°.



Мал. 50



Мал. 51

Кутом між мимобіжними прямими **називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.**

Наприклад, кут між мимобіжними прямими a і b на малюнку 50 — це кут між прямими a_1 і b_1, що перетинаються в точці M і паралельні відповідно прямими a і b. Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються. Твердження буде обґрунтовано пізніше.

Якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює 90°, то дані прямі вважають перпендикулярними (мал. 51). Отже, **у просторі перпендикулярні прямі можуть або перетинатися, або бути мимобіжними.**

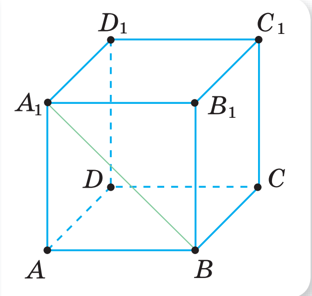
Взаємне розміщення двох прямих у просторі подано в таблиці 1.

Таблиця 1

<table>
<tr><th>Фігури</th><th colspan="4">Взаємне розміщення</th><th>Запис</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Дві прямі a і b</td><td rowspan="3">лежать в одній площині</td><td rowspan="2">мають одну спільну точку</td><td colspan="2">Перпендикулярні</td><td>$a \perp b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">не перпендикулярні</td><td>$a \cap b$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">не мають спільних точок</td><td colspan="2">Паралельні</td><td>$a \mid\mid b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">не лежать в одній площині</td><td rowspan="2">мимобіжні</td><td>перпендикулярні</td><td>$a \perp b$</td></tr>
<tr><td>не перпендикулярні</td><td>$a \cap b$</td></tr>
</table>

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 52). Знайдіть кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1.

Розв'язання. $CC_1 \mid\mid BB_1$, оскільки грань куба — квадрат. Тоді кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1 дорівнює куту між прямими BA_1 і BB_1, тобто 45°.



Мал. 52

Щоб знайти кут між мимобіжними прямими, можна на одній з них взяти довільну точку і через неї провести пряму, паралельну другій прямій.

ТЕОРЕМА

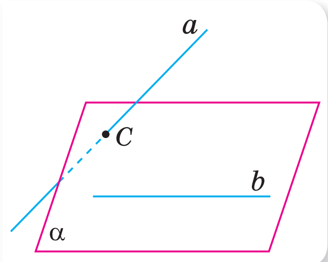
(ознака мимобіжних прямих).

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні.

Дано: $b \subset \alpha$, $a \cap \alpha = C$, $C \notin b$ (мал. 53)

Довести: прямі a і b — мимобіжні.

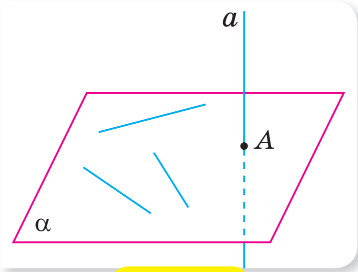
Доведення. Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними. Тоді вони або перетинаються, або паралельні. В обох випадках вони лежать у деякій одній площині β.



Мал. 53

Площина β містить пряму b і точку $C = a \cap \alpha$. Але через пряму b і точку C проходить також і площина α. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, площини α і β збігаються. Це означає, що пряма a повинна лежати у площині α. Але, за умовою теореми, пряма a перетинає площину α. Таким чином, ми прийшли до суперечності. Тому наше припущення неправильне. А це означає, що прямі a і b не лежать в одній площині, а є мимобіжними.

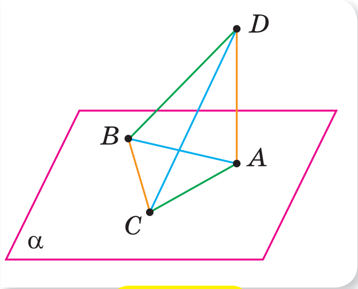
НАСЛІДОК 1. Якщо деяка пряма a перетинає площину α в точці A, то вона є мимобіжною з будь-якою прямою, що лежить у площині α і не проходить через точку A (мал. 54).



Мал. 54

Справді, якщо пряма a перетинає площину α в точці A, а довільна пряма b лежить у площині α і не проходить через точку A, то це означає, що пряма b не перетинає пряму a. Отже, за ознакою мимобіжних прямих, прямі a і b — мимобіжні.

НАСЛІДОК 2. Якщо чотири точки A, B, C і D не лежать в одній площині, то прямі AB і CD, AC і BD, AD і BC — попарно мимобіжні (мал. 55).



Мал. 55

Справді, якщо точки A, B, C і D не лежать в одній площині, тоді прямі AB і CD також не лежать в одній площині, а тому вони є мимобіжними за означенням. Розгляньте інші пари прямих самостійно.

Спосіб доведення від супротивного полягає в тому, що: 1) робимо припущення, протилежне (супротивне) тому, яке треба довести; 2) міркуваннями доходимо до висновку, що суперечить або умові твердження, яке доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі, або припущенню; 3) робимо висновок — наше припущення неправильне, а тому правильним є те, яке треба було довести.

Дізнайтеся більше

1. Головна праця «Начала» давньогрецького вченого Евкліда побачила світ бл. 300 р. до н. е. У ній підсумовано й приведено у струнку систему всі досягнення грецької математики, зокрема праці Гіппократа Хіосського, Євдокса Кнідського, Архіта Тарентського, Теєтета Афінського та інших вчених. «Начала» містять 13 книг. У книгах I–IV подано основи планіметрії. Книга V містить теорію пропорцій геометричних величин, книга VI — теорію подібності, книги VII–IX — теорію чисел і числових пропорцій, книга X — теорію ірраціональних чисел. Стереометрію викладено у книгах XI–XIII. Книгу XI присвячено основам стереометрії. У ній Евклід формулює 28 означень і доводить 39 тверджень, які стосуються щонайперше взаємного розміщення прямих і площин у просторі. Книгу XII присвячено круглим тілам, а книгу XIII — правильним многогранникам.

Історичне значення «Начал» Евкліда полягає в тому, що в них уперше зроблено спробу застосування *аксіоматичного методу* в побудові геометрії. Зараз цей метод є основним для створення й обґрунтування математичних теорій.

2. Символи «$\perp$», «$\|$», «$\dot{-}$» для позначення взаємного розміщення двох прямих називають іконічними. Вони наочно відображають суть понять, які позначають.

Пригадайте головне

1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Як у просторі визначають кут між прямими, що перетинаються?
3. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої.
4. Які прямі в просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
5. Дайте означення мимобіжним прямим. Як їх позначають?
6. Що таке кут між мимобіжними прямими?
7. Поясніть, які прямі в просторі вважаються перпендикулярними.
8. Якими величинами характеризуються мимобіжні прямі?
9. Сформулюйте означення відстані між паралельними прямими.
10. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

Розв'яжіть задачі

1'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих на довколишніх предметах.

2'. На малюнках 56–57 зображено пряму призму. Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з прямою: 1) AB; 2) BC; 3) AC. У якій точці ці прямі перетинають дану пряму?

3'. На малюнках 58–59 зображено трикутну піраміду. Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з прямою: 1) AB; 2) BC; 3) AC. У якій точці ці прямі перетинають дану пряму?

4'. Назвіть перпендикулярні прямі на малюнках 56–59.

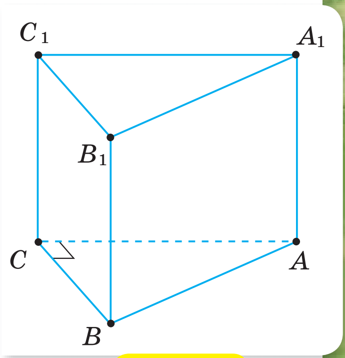
5'. Назвіть пряму й перпендикуляр до неї на малюнках 56–59.

6'. Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки A до прямої BC (мал. 56–59)?

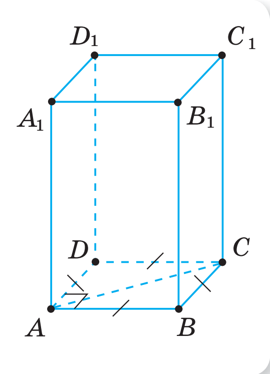
7'. На малюнках назвіть: 1) паралельні прямі (мал. 56–57); 2) мимобіжні прямі (мал. 58–59). Зробіть відповідний запис.

8°. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть:
1) прямі, що перетинаються і лежать у площині нижньої основи куба;
2) прямі, що перетинаються під прямим кутом і лежать в площині верхньої основи куба;
3) перпендикулярні прямі, що проходять через точку A_1; C;
4) пряму й перпендикуляр, який проведено до цієї прямої з точки B; D_1.

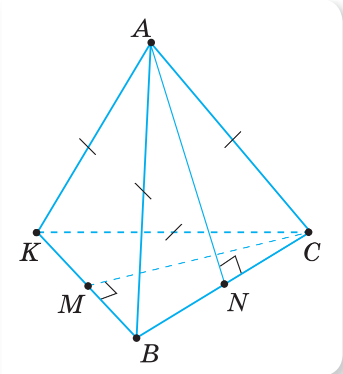
9°. Який кут між прямими:
1) CA і AK (мал. 58);
2) CA і AM, якщо $\Delta\ ABC$ — правильний (мал. 58);
3) KA і AB (мал. 59);
4) KC і KP, якщо $\Delta AKB = \Delta AKC$ (мал. 59)?



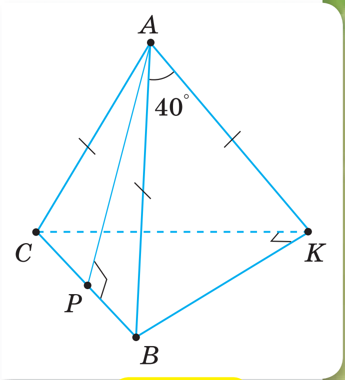
Мал. 56



Мал. 57

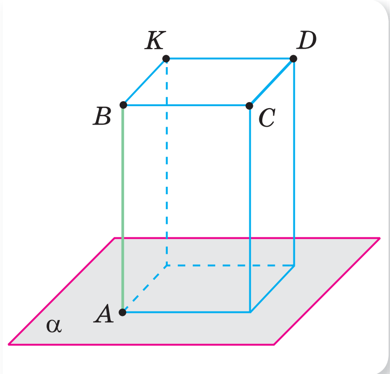


Мал. 58



Мал. 59

10°. Вершина верхньої основи прямокутного паралелепіпеда і ребро його нижньої основи лежать в одній бічній грані. Якою може бути відстань від даної вершини до даного ребра паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:
1) 3 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 2 см, 2 см;
3) 8 см, 8 см, 8 см?
Побудуйте відповідне зображення.



Мал. 60

11°. У прямокутного паралелепіпеда (мал. 60) ребра AB і CD лежать на мимобіжних прямих, а ребра CD і BK — на паралельних прямих. На малюнках 61–62 цей паралелепіпед певним чином повернуто. Скопіюйте малюнки 61–62 та позначте на них ребра CD і BK. На яких прямих лежать ребра AB і CD? А ребра CD і BK?

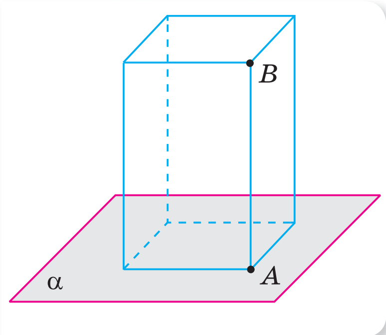
12°. Як можуть взаємно розміщуватися ребра основи й бічні ребра:
1) паралелепіпеда;
2) трикутної піраміди;
3) чотирикутної піраміди?

13°. Назвіть пари ребер призми, що лежать на мимобіжних прямих, якщо призма: 1) трикутна; 2) чотирикутна.

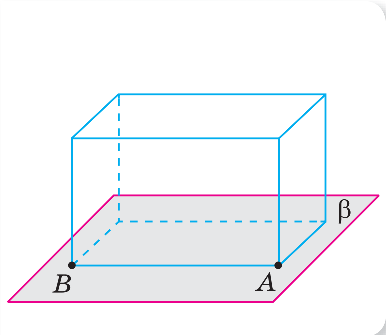
14°. Назвіть пари ребер піраміди, що лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда: 1) трикутна; 2) чотирикутна.

15°. AB і CD — мимобіжні прямі. Чи є паралельними прямі: 1) AC і BD; 2) AD і BC?

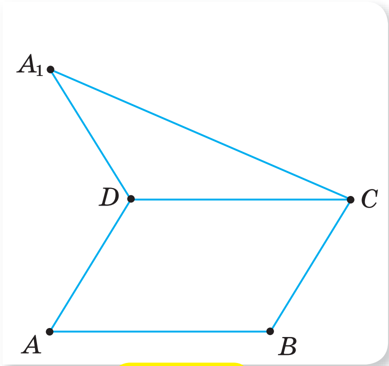
16°. Дано паралелограм і трикутник, що лежать у різних площинах (мал. 63–64). Чи є правильним твердження:
1) прямі AA_1 і BD перетинаються;
2) прямі A_1B і AD можуть бути паралельними;
3) прямі CA_1 і AD — мимобіжні?



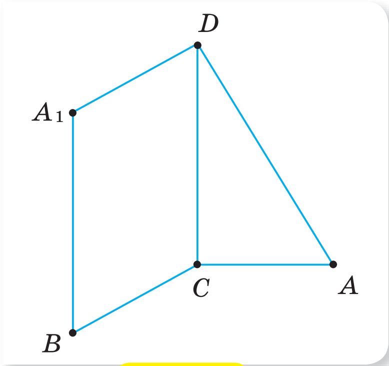
Мал. 61



Мал. 62



Мал. 63



Мал. 64

17°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Назвіть пари його ребер, що лежать на перпендикулярних прямих, які: 1) перетинаються; 2) є мимобіжними.

18°. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
1) Виділіть на ньому ребро BB_1 та назвіть усі ребра куба, які: а) паралельні даному ребру; б) перетинають дане ребро; в) мимобіжні з даним ребром.
2) Виділіть діагональ AD_1 грані ADD_1A_1 та назвіть діагоналі інших граней, які: а) паралельні діагоналі AD_1; б) перетинають діагональ AD_1; в) мимобіжні з діагоналлю AD_1.

19°. Яке взаємне розміщення прямих, що містять ребра BB_1 та A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Чи існують у площині грані AA_1B_1B прямі, що перетинають кожну з прямих BB_1 та A_1D_1? Якщо такі прямі існують, то скільки їх?

20°. **Доведіть, що пряма і проведений до неї перпендикуляр лежать в одній площині.**

21°. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не належить їй. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB, якщо:
1) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см.

22. Пряма a і точка A лежать у площині α. Скільки прямих можна провести через точку A, кожна з яких: 1) перетинає пряму a; 2) паралельна прямій a; 3) мимобіжна з прямою a? Розгляньте випадки, коли: $A \in a$; $A \notin a$.

23. Пряма a лежить у площині α, пряма b перетинає її, але не перетинає пряму a. Доведіть, що через прямі a і b не можна провести площину.

24. **Пряма a лежить у площині α, пряма b паралельна прямій a і має спільну точку N із площиною α. Доведіть, що пряма b також лежить в площині α.**

25. У просторі дано три прямі a, b і c. Дослідіть, яким може бути взаємне розміщення прямих a і b залежно від взаємного розміщення прямих: 1) a і c; 2) b і c.

26. У просторі дано чотири попарно паралельні прямі a, b, c і d, з яких жодні три не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через кожні дві з даних прямих? Накресліть їх.

27. Скільки пар ребер призми лежать на мимобіжних прямих, якщо призма: 1) трикутна; 2) чотирикутна?

28. Скільки пар ребер піраміди лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда: 1) трикутна; 2) чотирикутна?

29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими: 1) DA_1 і BC_1; 2) BA_1 і BC_1; 3) AD і CC_1.

30. У коробці з-під цукерок «Білочка» (має вигляд куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$) знайдіть кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1.

31. **Точки A, B, M і N не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AN і BM мимобіжні.**

32*. Доведіть, що якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

33*. Якщо дані прямі не проходять через одну точку й кожні дві з них перетинаються, то всі вони лежать в одній площині. Доведіть.

34*. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін просторового чотирикутника, перетинаються і в точці перетину діляться навпіл.

35*. Доведіть, що вершини чотирикутника лежать в одній площині, якщо в нього перетинаються або діагоналі, або продовження двох несуміжних сторін.

36*. Скільки пар мимобіжних прямих визначають пари з: 1) чотирьох точок; 2) п'яти точок; 3) n точок?

37*. Знайдіть кут між мимобіжними ребрами правильної трикутної призми, в якої бічне ребро вдвічі довше за ребро основи.

Проявіть компетентність

38. Усі ми знаємо, що запорука гарного дня — міцний сон. Щоб сон був справді хорошим, потрібно, щоб ліжко (із чотирма ніжками) стояло на рівній підлозі стійко. Як за допомогою двох ниток перевірити, що ліжко розміщено стійко?

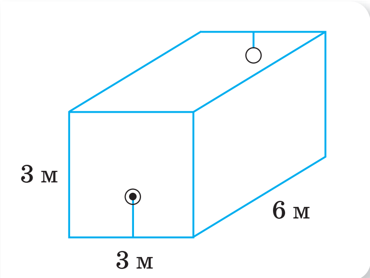
39. На подвір'ї (площина α) розміщено колодязь (точка A), прокладено доріжку (пряма a) і встановлено стовп із ліхтарем (пряма b). У площині α проведіть пряму, яка: 1) перетинає прямі a і b; 2) перетинає пряму b і паралельна прямій a; 3) перетинає прямі a і b та проходить через точку A. Поясніть розміщення кожної прямої на описаній місцевості.

40. У саду (площина β), де росте кущ півоній (точка B), прокладено доріжку до ставка (пряма b) і росте береза (пряма d). У площині β проведіть пряму, яка: 1) перетинає прямі b і d; 2) перетинає пряму d і паралельна прямій b; 3) перетинає прямі b і d та проходить через точку *B*. Поясніть розміщення кожної прямої на описаній місцевості.

41. Як визначити кут між мимобіжними прямими у класній кімнаті?

42. Діти, йдучи до школи, побачили на небі три літаки (зелений, жовтий, синій), які летіли, залишаючи після себе сліди у вигляді рівних ліній (вважатимемо їх прямими). Дослідіть, яким може бути взаємне розміщення слідів від зеленого й жовтого літаків залежно від взаємного розміщення слідів від жовтого й синього літаків.

43. Необхідно з'єднати проводкою вимикач і лампочку в кімнаті завдовжки 6 м, завширшки 3 м і заввишки 3 м. Вимикач розміщено посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а лампочку — посередині протилежної стіни на відстані 1 м від стелі (мал. 65).
1) Як треба провести проводку, щоб її довжина була найкоротшою?
2) Скільки гривень коштуватиме установка проводки, якщо ціна 1 м електричного кабелю — 9 грн 70 к., а за роботу майстру треба заплатити 25 грн за кожний прокладений метр кабелю?
3) Якої потужності потрібна лампочка для даної кімнати? Необхідні дані знайдіть в Інтернеті.



Мал. 65

§ 2.2. ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

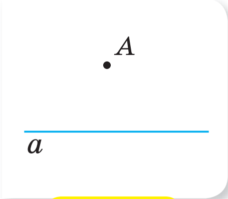
1. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

З курсу планіметрії ви знаєте, що через точку, яка не лежить на прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій. Це твердження було прийнято як аксіому в планіметрії. Воно справджується в кожній площині простору. Однак у просторі це твердження потребує доведення.

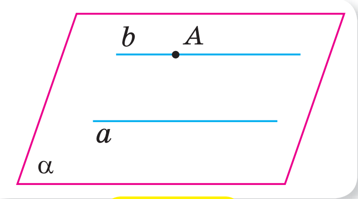
ТЕОРЕМА **(основна властивість паралельних прямих у просторі).**

Через точку, яка не лежить на даній прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну.

Дано: пряма a, точка A, $A \notin a$ (мал. 66).
Довести: існує пряма $b \parallel a$ і тільки одна.
Доведення. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, через пряму a і точку A можна провести площину α і до того ж тільки одну.
У площині α, за аксіомою паралельних прямих, через точку A можна провести пряму b, паралельну прямій a, і тільки одну (мал. 67). Отже, у просторі через точку A можна провести тільки одну пряму $b \parallel a$.
З теореми про основну властивість паралельних прямих у просторі випливає, що **з двох прямих, які перетинаються, тільки одна може бути паралельною деякій третій прямій.**



Мал. 66



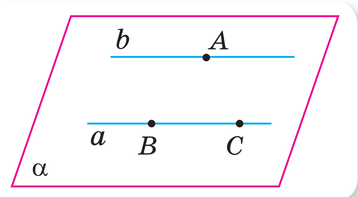
Мал. 67

ТЕОРЕМА **(про існування та єдиність площини, що проходить через дві паралельні прямі).**

Через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну.

Дано: прямі a і b, $a \| b$.
Довести: 1) існує площина α, така що $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$;
2) площина α — єдина.

Доведення. 1. З означення паралельних прямих випливає, що через прямі a і b можна провести площину. Позначимо її α (мал. 68). Отже, існування площини α доведено.



Мал. 68

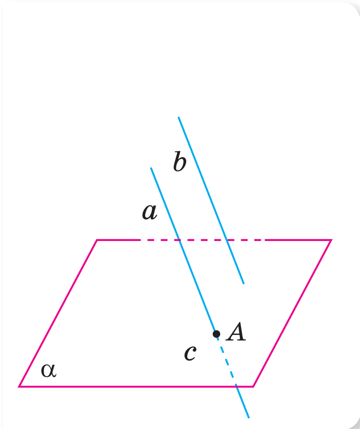
2. Доведемо, що площина α — єдина.
Припустимо супротивне. Нехай існує інша площина, яка відмінна від α, що містить кожну з прямих a і b. Позначимо цю площину β.
Оберемо на прямій a точки B і C, а на прямій b — точку A. Оскільки прямі a і b паралельні, то точки A, B і C не лежать на одній прямій.
Кожна з площин α і β містить обидві прямі a і b, а значить, кожна з них проходить через точки A, B і C. Але, за аксіомою стереометрії, через три точки можна провести лише одну площину. Тому площини α і β збігаються. Отже, припущення було неправильним, а правильним є те, що площина α — єдина.

У просторі площину можна задати:
— трьома точками;
— прямою і точкою, що не лежить на ній;
— двома прямими, що перетинаються;
— двома паралельними прямими.

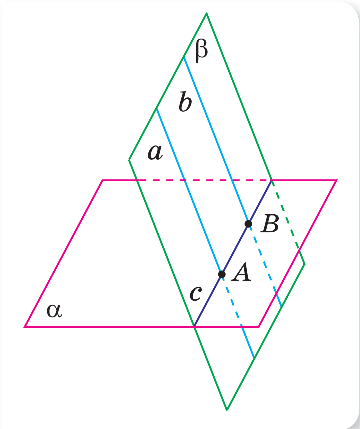
ТЕОРЕМА **(властивість паралельних прямих у просторі).**

Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину, то й друга пряма перетинає цю площину.

Дано: прямі a і b, $a \| b$, $a \cap \alpha = A$ (мал. 69).
Довести: пряма b перетинає площину α.
Доведення. Нехай через паралельні прямі a і b проходить площина β (мал. 70). Площини α і β мають спільну точку $A = a \cap \alpha$, тому вони перетинаються по прямій, що проходить через точку A. Позначимо цю пряму c.
З планіметрії відомо, що якщо одна з двох паралельних прямих перети-



Мал. 69



Мал. 70

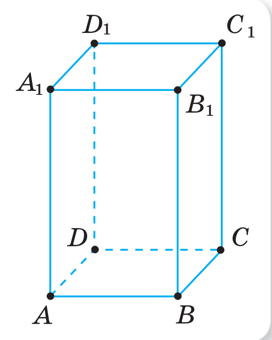
нає третю пряму, то і друга з двох паралельних прямих перетинає третю пряму.

У площині β лежать три прямі: $a \,||\, b$ і c. Причому пряма a перетинається з прямою c. Це означає, що прямі b і c також перетинаються в деякій точці B. А оскільки пряма c лежить у площині α, то точка B належить площині α. Звідси випливає, що пряма b перетинає площину α в точці B.

У просторі справджуються всі властивості двох паралельних прямих, які ви вивчали в планіметрії.

2. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

На малюнку 71 ви бачите прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Його бічні грані — прямокутники. У кожного з них протилежні сторони попарно паралельні. Тому прямі, що містять протилежні ребра кожної бічної грані паралелепіпеда, попарно паралельні. Наприклад, прямі AA_1 і BB_1, AB і A_1B_1 — паралельні.



Мал. 71

? Чи правильно, що $AA_1 \,||\, CC_1$ на малюнку 71? Так. Однак у просторі цей факт потребує доведення, оскільки прямі AA_1, BB_1 і CC_1 не лежать в одній площині.

ТЕОРЕМА

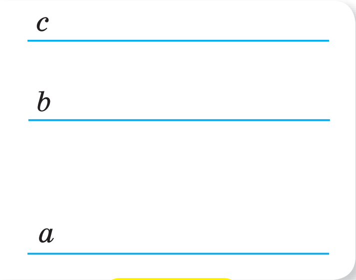
(ознака паралельності прямих).

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

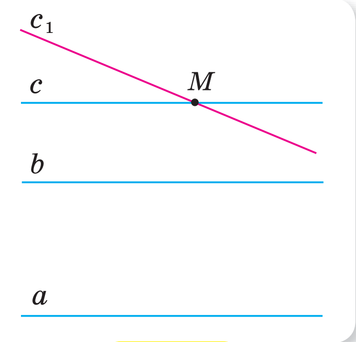
Дано: прямі a, b і c, $a \,||\, b$ і $a \,||\, c$.
Довести: $b \,||\, c$.
Доведення. Розглянемо два випадки: 1) дані прямі лежать в одній площині; 2) дані прямі не лежать в одній площині.

1) Нехай прямі a, b і c лежать в одній площині, $a \parallel b$ і $a \parallel c$ (мал. 72). Доведемо, що $b \parallel c$. Позначимо довільну точку M на прямій c. Припустимо, що пряма c не паралельна прямій b. Тоді, за аксіомою паралельних прямих, через точку M можна провести пряму c_1, паралельну прямій b (мал. 73). Дістали, що через точку M проходить дві прямі — c і c_1, паралельні прямій a, що неможливо. Отже, наше припущення було неправильним, а правильним є те, що $b \parallel c$.

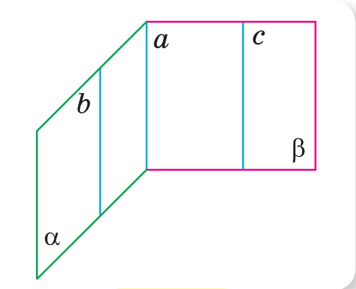
2) Нехай прямі a, b і c не лежать в одній площині, $a \parallel b$ і $a \parallel c$. Доведемо, що $b \parallel c$. Проведемо через паралельні прямі a і b площину α, а через паралельні прямі a і c — площину β (мал. 74). Через довільну точку M прямої c і пряму b проведемо площину γ. За аксіомою 4 стереометрії, площина γ перетинає площину β по прямій. Припустимо, що це деяка пряма c_1, відмінна від прямої c (мал. 75). Припустимо далі, що пряма c_1 перетинає площину α. Тоді точка їх перетину має належати і прямій a, бо прямі a і c_1 лежать у площині β, і прямій b, бо прямі b і c_1 лежать у площині γ. Але, за умовою, $a \parallel b$. Дістали суперечність. Отже, пряма c_1 не перетинає площину α, а значить, не може перетинати і пряму a, тобто $c_1 \parallel a$. Але тоді у площині β через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a: $c \parallel a$ за умовою і $c_1 \parallel a$ за доведеним. Дістали суперечність із аксіомою паралельних прямих. Отже, пряма c_1 збігається з прямою c. Звідси випливає, що пряма c лежить у площині γ і не перетинає площину α. Дістали, що прямі b і c лежать в одній площині γ і не перетинаються. Отже, $b \parallel c$.



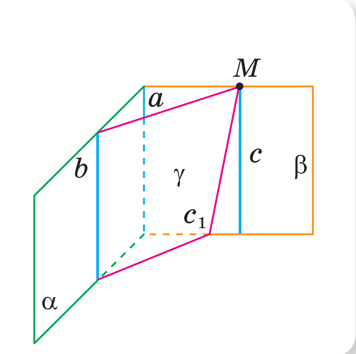
Мал. 72



Мал. 73



Мал. 74



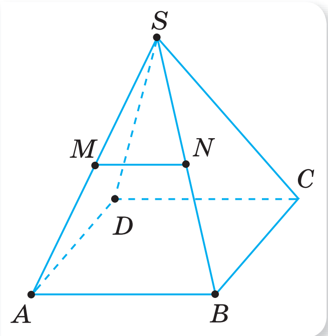
Мал. 75

У § 2.5 ви дізнаєтесь про інший можливий спосіб доведення ознаки паралельності прямих.

З теореми про ознаку паралельності прямих випливає, що **з двох мимобіжних прямих тільки одна може бути паралельною деякій даній прямій.**

Якщо $a \,||\, b$, $b \,||\, c$, то $a \,||\, c$, тобто відношення паралельності прямих у просторі має *властивість транзитивності*.

Ознака паралельності прямих дозволяє довести, що всі бічні ребра паралелепіпеда на малюнку 71 лежать на паралельних прямих. Доведіть це самостійно.

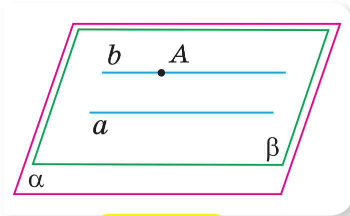


Мал. 76

З а д а ч а 1. MN — середня лінія бічної грані SAB правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ (мал. 76). Доведіть, що $MN \,||\, CD$.
Р о з в' я з а н н я. Бічними гранями піраміди є трикутники. MN — середня лінія в $\Delta\, SAB$, тому $MN \,||\, AB$. $AB \,||\, CD$, оскільки основа даної піраміди — квадрат $ABCD$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $MN \,||\, CD$.

Щоб встановити паралельність двох прямих, покажіть, що:
або існує пряма, якій паралельна кожна з даних прямих,
або відрізки даних прямих є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою й середньою лінією трикутника тощо).

З а д а ч а 2. Пряма a лежить у площині α. Пряма b паралельна прямій a і має спільну точку M із площиною α. Доведіть, що пряма b також лежить у площині α (мал. 77).



Мал. 77

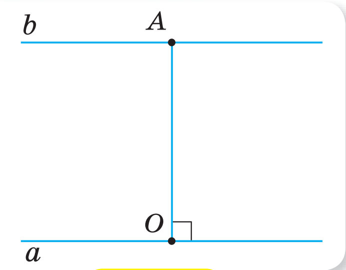
Р о з в' я з а н н я. Спосіб 1. Оскільки прямі a і b паралельні, то через них можна провести площину. Позначимо її β. Пряма b проходить через точку M, тому площина β проходить через пряму a і точку M. Але через точку M і пряму a проходить і площина α. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, площини α і β збігаються. Це означає, що $b \subset \alpha$.
Спосіб 2. Припустимо, що пряма b не лежить у площині α, а має з нею лише одну спільну точку M, тобто пряма b перетинає площину α в точці M. Оскільки прямі a і b паралельні, то вони не перетинаються. Тому точка M перетину прямої b з площиною α не належить прямій a, яка своєю чергою лежить у площині α. Тоді, за ознакою мимобіжних прямих, прямі a і b мають бути мимобіжними. А це суперечить умові задачі, за якою $a \,||\, b$. Звідси випливає, що припущення про те, що пряма b не лежить у площині α, є неправильним. Це означає, що $b \subset \alpha$.

3. ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРІ

Як визначають відстань між паралельними прямими в просторі? Так само, як і на площині, оскільки дві паралельні прямі задають єдину площину.

Відстанню між паралельними прямими **називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.**

На малюнку 78 відстань між паралельними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AO.



Мал. 78

Щоб знайти відстань між паралельними прямими, треба:
1) обрати довільну точку на одній з даних паралельних прямих;
2) провести з обраної точки перпендикуляр до другої з даних паралельних прямих;
3) визначити довжину цього перпендикуляра.

Дізнайтеся більше

Вам доводилося зустрічати поняття «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо». За таблицею 2 розгляньте пари тверджень A і B та з'ясуйте зміст цих понять.

Таблиця 2

Твердження *A*	Твердження *B*	Зв'язок між твердженнями	Вид умови
Одна з двох паралельних прямих перетинає дану площину	Інша з двох паралельних прямих перетинає дану площину	З A випливає B ($A \Rightarrow B$)	A — достатня умова для B
			B — необхідна умова для A
Кожна з двох прямих паралельна третій прямій	Дві прямі паралельні між собою	З A випливає B і з B випливає A ($A \Leftrightarrow B$)	A — необхідна і достатня умова для B і навпаки

Твердження «*A* достатнє для *B*» і «*A* необхідне для *B*» є взаємооберненими. Якщо вони обидва справджуються, то їх можна об'єднати так: «*A* необхідне і достатнє для *B*».

Тоді твердження з другого рядка таблиці 3 можна сформулювати так:

Для того щоб дві прямі були паралельними, необхідно і достатньо, щоб кожна з них була паралельною третій прямій.

Пригадайте головне

1. Як формулюється аксіома паралельних прямих?
2. Сформулюйте й доведіть основну властивість паралельних прямих у просторі.
3. Які властивості паралельних прямих?
4. Як формулюється ознака паралельності прямих?
5. Поясніть, як можна встановити паралельність двох прямих.
6. Що називається відстанню між паралельними прямими?
7. Як знайти відстань між паралельними прямими?

Розв'яжіть задачі

1'. Проведіть пряму a і позначте точку A, що не лежить на ній. Проведіть пряму AB паралельно прямій a. Скільки таких прямих можна провести: 1) на площині; 2) у просторі?

2'. За допомогою навколишніх предметів проілюструйте основну властивість паралельних прямих: 1) на площині; 2) у просторі.

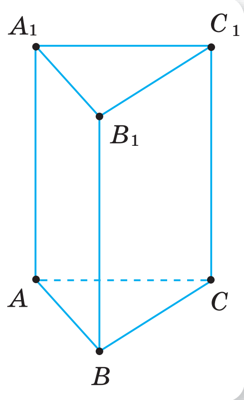
3'. На малюнках 79–81 назвіть: 1) пари паралельних прямих; 2) площину, що проходить через певну пару паралельних прямих.

4'. Скільки площин можна провести через дві паралельні прямі? Наведіть приклад з довкілля.

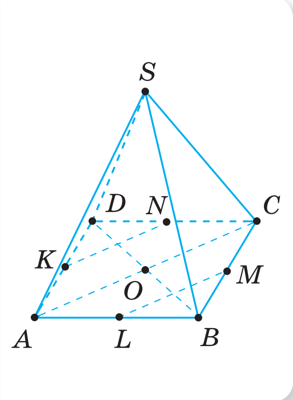
5'. За малюнком 81 назвіть ребро паралелепіпеда, яке паралельне заданому ребру й не лежить з ним в одній грані:
1) AA_1; 2) BB_1; 3) AB; 4) BC.

6'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності прямих.

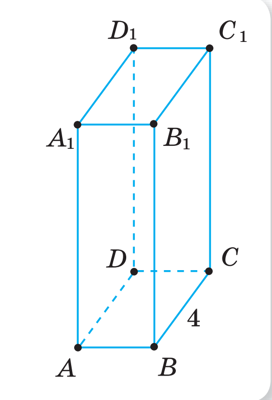
7°. Скільки ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через дану його вершину паралельно заданому ребру:
1) A і B_1C_1; 2) D і BB_1; 3) C_1 і AA_1? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 79



Мал. 80



Мал. 81

8°. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть діагональ у його грані, що проходить через дану вершину паралельно вказаній прямій: 1) A і BC_1; 2) D_1 і BC_1; 3) B і AD_1.

9°. Відрізок AB має з площиною α спільну точку A. Через точку B і середину C відрізка AB проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках B_1 і C_1. Чи лежать в одній площині прямі BB_1 і CC_1? Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:
1) $BB_1 = 12$ см; 2) $BB_1 = 9$ см; 3) $BB_1 = 32$ см.

10°. Відрізок AB не перетинає площину α. Через кінці відрізка AB і його середину C проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Чи лежать в одній площині прямі AA_1, BB_1 і CC_1? Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:
1) $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 12$ см;
2) $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 9$ см;
3) $AA_1 = 18$ см, $BB_1 = 32$ см.

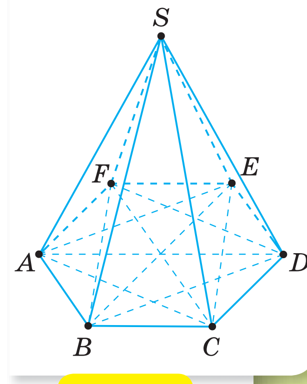
11°. Сформулюйте властивості паралельних прямих, які ви вивчали у планіметрії.

12°. З планіметрії відомо, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й другу. Чи є правильним це твердження у стереометрії?

13°. У кубі проведіть січну площину, яка:
1) проходить через ребро нижньої основи й перетинає верхню основу паралельно даному ребру;
2) проходить через ребро верхньої основи й перетинає нижню основу паралельно даному ребру;
3) проходить через бічне ребро і перетинає бічну грань паралельно даному ребру.
Яку фігуру дістали в перерізі? Відповідь поясніть.

14°. Перерізом прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник зі сторонами: 1) AB і AD_1; 2) B_1C_1 і C_1D; 3) BD і BB_1. Яким прямим паралельні сторони перерізу?

15°. Дано правильну шестикутну піраміду $SABCDEF$ (мал. 82). Яким сторонам або діагоналям основи паралельна пряма, що проходить через середину ребра SA й середину ребра: 1) SB; 2) SC; 3) SD? Відповідь поясніть.



Мал. 82

16°. Дві паралельні прямі a і b відповідно паралельні прямим c і d. Яке взаємне розміщення прямих: 1) a і c; 2) a і d; 3) b і c; 4) b і d?

17°. Дано чотири попарно паралельні прямі a, b, c і d, жодні три з яких не лежать в одній площині. Зобразіть усі площини, що проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки таких площин можна провести?

18°. Знайдіть відстані між паралельними ребрами прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:
1) 4 см, 6 см, 9 см;
2) 5 см, 5 см, 5 см;
3) 5 см, 12 см, 12 см.

19°. На прямих AD і BC лежать основи трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань між даними прямими, якщо:
1) $AB = CD = 17$, $AD = 8$, $BC - AD = 16$;
2) $AB = 14$, $AD = 8$, $CD = 15$.

20°. Кінець B відрізка AB лежить у площині α, точка C належить відрізку AB. Через точки A і C проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:
1) $BC = 12$, $AB : AA_1 = 3 : 5$;
2) $AA_1 = 15$, $AC : CB = 2 : 3$;
3) $AA_1 = 21$, $AC : AB = 2 : 7$.

21. **Усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині. Доведіть.**

22. Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежать в одній площині.

23. Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c, яка: 1) паралельна прямим a і b; 2) проходить через дану точку й перетинає прямі a і b?

24. Чи існують дві паралельні прямі, кожна з яких перетинає дані мимобіжні прямі?

25. **Через прямі a і b проведено площини, які перетинаються по прямій c. Якщо пряма c не перетинає прямі a і b, то прямі a і b — паралельні. Доведіть.**

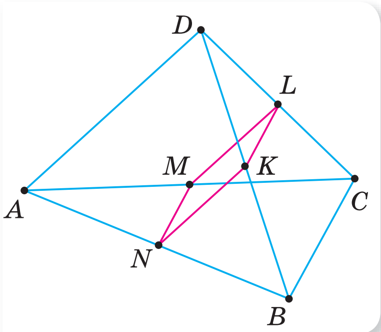
26. Доведіть, що перерізом прямої призми площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є многокутник, що дорівнює многокутнику основи.

27. Січна площина проходить через середини бічних ребер правильної n-кутної піраміди зі стороною основи a. Який многокутник дістали в перерізі? Знайдіть його периметр і площу, якщо: 1) $n = 3$, $a = 4$ см; 2) $n = 4$, $a = 6$ см.

28. **Доведіть, що перерізом довільної піраміди площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є многокутник, подібний до многокутника основи з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.**

29. Точка M не лежить у площині трикутника ABC. Точки K, P, E і F — середини відрізків MA, AB, MC, BC. Як розміщені прямі: 1) KP і EF; 2) KE і PF? Відповідь обґрунтуйте.

30. Трикутник ADE і трапеція $ABCD$ (AD — основа) не лежать в одній площині, точка M — середина сторони AE, точка P — середина сторони DE. Доведіть, що $MP \parallel BC$.



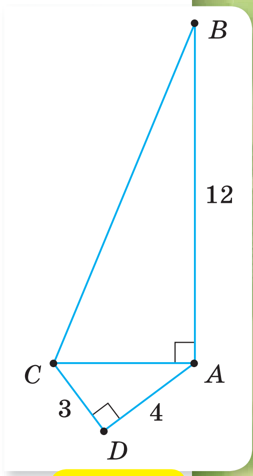
Мал. 83

31. Точки K, L, M і N — середини відрізків BD, CD, AC і AB відповідно (мал. 83), $AD = 12$ см, $BC = 14$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$.

32. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Чотирикутник $ABCD$ з вершинами в даних точках називають *просторовим*. Доведіть, що середини його сторін лежать в одній площині. Вершинами якого чотирикутника є ці точки?

33. Чотирикутник $ABCD$ — просторовий чотирикутник. Доведіть, що прямі, як сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC перетинаються в одній точці.

34. Точки A, B, C і D не лежать в одній площин, точки K, L, O, P — середини відрізків AB, BD, DC і AC відповідно. Доведіть, що відрізки KO і LP перетинаються й точкою перетину діляться навпіл.



Мал. 84

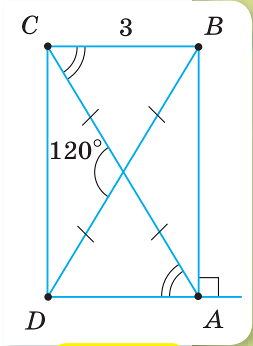
35. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних паралельних прямих, належать одній площині.

36*. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних мимобіжних прямих, належать одній площині.

37*. Доведіть, що діагоналі протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, які проведено з кінців одного ребра, паралельні.

38*. Існує площина, яка перетинає бічні ребра чотирикутної піраміди так, що в перерізі утворюється паралелограм. Доведіть.

39*. В основі піраміди лежить многокутник, зображений на малюнках 84–85. Січна площина ділить кожне бічне ребро піраміди у відношенні 2 : 1, рахуючи від її вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.



Мал. 85

40*. На сторонах просторового чотирикутника $ABCD$ взято точки A_1, B_1, C_1 і D_1 так, що

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{BC_1}{B_1B}.$$

Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм.

41*. Доведіть, що куб можна перетнути січною площиною так, щоб у перерізі утворився правильний шестикутник.

42*. Знайдіть відстань між паралельними ребрами правильної шестикутної піраміди, в якої ребро основи дорівнює бічному ребру завдовжки 5 см.

Проявіть компетентність

43. Щоб провести пряму лінію на землі, використовують два кілочки й мотузку. Поясніть, як це роблять. На якій властивості паралельних прямих ґрунтується така побудова?

44. Щоб поклеїти шпалери в кімнаті, потрібно спочатку поділити їх на шматки прямокутної форми. Для того щоб рівно поклеїти їх на стіни, один з його горизонтальних країв вирівнюють відносно стику однієї із стін і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?

45. Майстриня прикрашає сорочку вишиваними смужками, розміщуючи їх на лівій і правій полах сорочки паралельно лінії ґудзиків (мал. 86). Чому в готовому виробі смужки виглядають паралельними?

46. На певній ділянці автостради її смуги розділені суцільною лінією (її не можна перетинати). Чи можуть на цій ділянці зіткнутися автомобілі законослухняних водіїв, що рухаються назустріч один одному? Відповідь поясніть.

47. Бігові доріжки на стадіоні розмічені паралельними лініями на ділянки (їх не можна перетинати), які відокремлюють бігунів один від одного. Правилами змагань не передбачено, щоб бігуни змінювали доріжки. Чи можуть бігуни, не порушуючи правил, зіткнутися на одній із цих ділянок? Відповідь поясніть.


Мал. 86

48. Щоб естетично розмістити на стіні картину прямокутної форми, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику цієї стіни і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?

49. Щоб поставити в класі шафу, яка має форму паралелепіпеда, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику стіни й підлоги. Поясніть чому.

§ 2.3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Подивіться на малюнок 87. Ви бачите, що на стіні будинку (площина α) проходить труба газопостачання (пряма a), до вікна другого поверху приставлено драбину (пряма b), а поруч із будинком росте дерево (пряма c). Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення прямої і площини:

— пряма *лежить у* площині (пряма a), вона має з площиною безліч спільних точок (мал. 88);

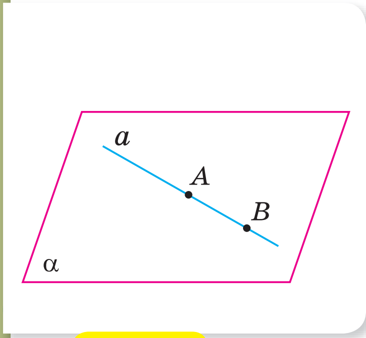
— пряма *перетинає* площину (пряма b), вона має з площиною єдину спільну точку (мал. 89);

Мал. 87

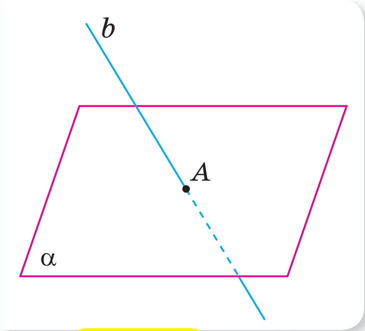
— пряма *не перетинає* площину (пряма c), вона не має з площиною спільних точок (мал. 90).

Для трьох випадків взаємного розміщення прямої і площини вживатимемо відповідні позначення: $a \subset \alpha$, $a \cap \alpha$, $a \parallel \alpha$.

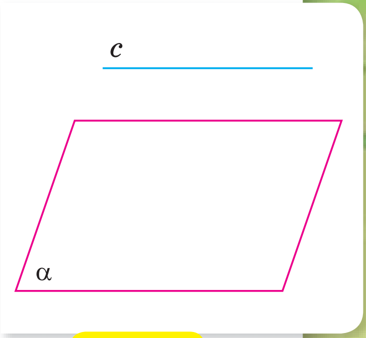
У цьому параграфі розглянемо третій випадок. З другим випадком ви докладно ознайомитесь у наступному розділі підручника. А над першим випадком поміркуйте самостійно.



Мал. 88



Мал. 89



Мал. 90

1. ОЗНАЧЕННЯ Й ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма і площина, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

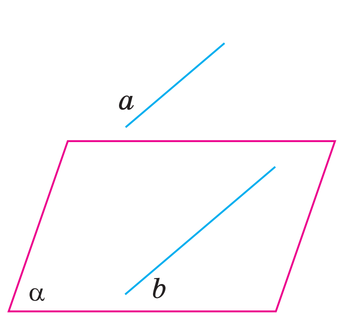
Як встановити, що пряма паралельна площині? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема

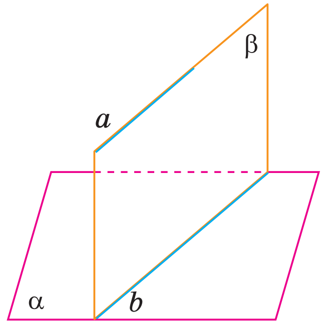
(ознака паралельності прямої і площини).

Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

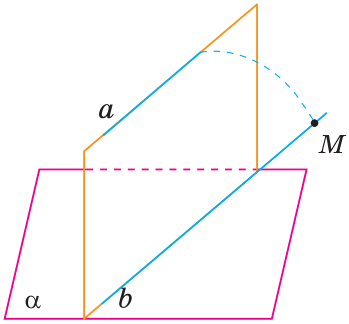
Дано: площина α,
пряма $a \not\subset \alpha$,
пряма $b \subset \alpha$,
$a \parallel b$ (мал. 91).
Довести: $a \parallel \alpha$.
Доведення. Проведемо площину β через паралельні прямі a і b (мал. 92). Площини α і β перетинаються по прямій b. Припустимо, що пряма a не паралельна площині α, а перетинає цю площину в деякій точці M (мал. 93). Ця точка лежить у даній площині α і площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Тоді точка M лежить на прямій b перетину площин α і β. Отже, прямі a і b перетинаються. А це неможливо, бо $a \parallel b$ за умовою. Отже, наше припущення неправильне, а правильним є те, що пряма a не перетинає площину α, тобто $a \parallel \alpha$.



Мал. 91



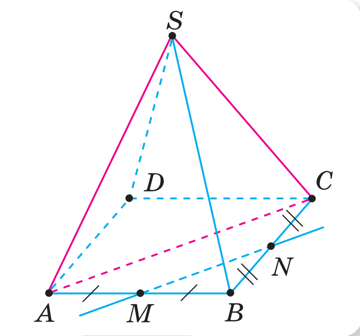
Мал. 92



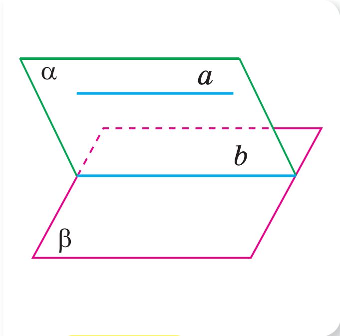
Мал. 93

Задача 1. У піраміді $SABCD$ через ребра SA і SC проведено площину (мал. 94). Чи паралельна вона прямій MN, що проходить через середини ребер AB і BC?

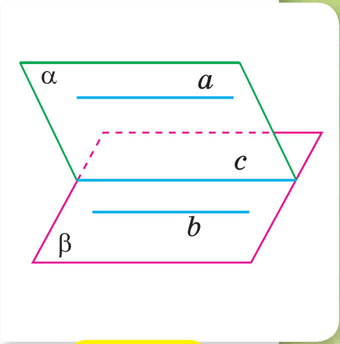
Розв'язання. Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC, який не лежить у площині SAC. Оскільки $MN \parallel AC$, а AC лежить у площині SAC, то пряма MN паралельна площині SAC.



Мал. 94



Мал. 95



Мал. 96

Щоб встановити паралельність прямої і площини, покажіть, що:
або в площині існує пряма, якій паралельна дана пряма;
або відрізки даної прямої і прямої, що лежить у даній площині, є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою і середньою лінією трикутника тощо), який не лежить у даній площині.

2. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Теорема

(властивість 1 паралельності прямих і площин).

Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину цих площин паралельна даній прямій.

Дано: площина α, площина β, пряма $a \subset \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (мал. 95).
Довести: $b \parallel a$.
Доведення. Оскільки $a \subset \alpha$ і $\alpha \cap \beta = b$, то обидві прямі a і b лежать у площині α. Через те що пряма a, за умовою, паралельна площині β, у якій лежить пряма b, то пряма a не має спільних точок із прямою b. Отже, прямі a і b лежать в одній площині й не мають спільних точок, тобто вони паралельні за означенням.
Із цієї теореми випливає: **якщо пряма a паралельна площині β, то в цій площині можна провести безліч прямих, паралельних прямій a.**

Теорема

(властивість 2 паралельності прямих і площин).

Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину і ці площини перетинаються, то пряма їх перетину паралельна кожній з даних прямих.

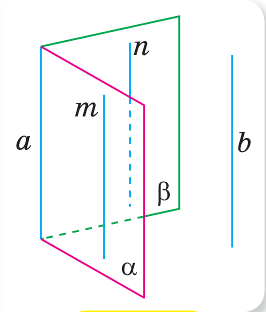
Дано: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (мал. 96).
Довести: $c \parallel a$ і $c \parallel b$.
Доведення. За умовою теореми, пряма a паралельна прямій b, що лежить у площині β, а тому, за ознакою паралельності прямої і площини, пряма a паралельна і самій площині β. Крім того, площина α проходить через пряму a і перетинає площину β по прямій c. За властивістю 1 паралельності прямих і площин, прямі a і c паралельні. Тоді, за властивістю транзитивності паралельності прямих, пряма b паралельна прямій c.

Теорема

(властивість 3 паралельності прямих і площин).

Якщо пряма паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, то вона паралельна і лінії їх перетину.

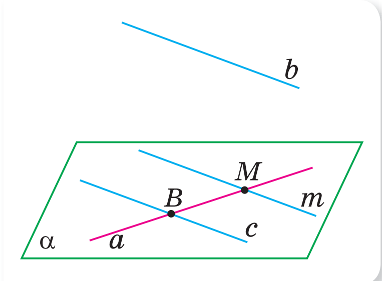
Дано: $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 97).
Довести: $b \parallel a$.
Доведення. За наслідком з властивості 1 паралельності прямих і площин, у площинах α і β існують відповідно прямі m і n, які паралельні прямій b, а тому паралельні й між собою. Тоді, за властивістю 2 паралельності прямих і площин, прямі m і n паралельні прямій a перетину площин α і β. За властивістю транзитивності паралельності прямих, пряма b паралельна прямій a.



Мал. 97

З а д а ч а 2. Прямі a і b — мимобіжні. Через кожну точку прямої a проведено пряму, паралельну прямій b. Доведіть, що всі такі прямі лежать в одній площині. Як розміщена ця площина відносно прямої b?

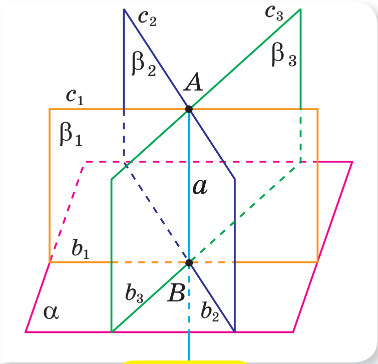
Р о з в' я з а н н я. Позначимо на прямій a довільну точку B і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b. Через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α (мал. 98). Ця площина, за ознакою паралельності прямої і площини, паралельна прямій b.



Мал. 98

Нехай M — довільна точка прямої a, m — пряма, що проходить через точку M паралельно прямій b. Тоді пряма m паралельна прямій c (за ознакою паралельності прямих) і лежить у площині α. Оскільки точка M була обрана довільно на прямій a, то можна зробити висновок: **усі прямі простору, які паралельні прямій b і перетинають пряму a, лежать у площині, що проходить через пряму a і паралельна прямій b.**
Єдиність площини α доведіть самостійно.

У вас могло виникнути запитання: *Чи є правильним твердження «Через точку, що не лежить у площині, можна провести єдину пряму, паралельну даній площині»?* Поміркуємо.



Мал. 99

Через точку A, що не лежить у площині α, проведемо пряму a, що перетинає дану площину в деякій точці B (мал. 99). За наслідком 3 з аксіом стереометрії, через пряму a в просторі можна провести безліч площин. Позначимо їх β_1, β_2, β_3,... За аксіомою 4 стереометрії, кожна із цих площин перетинатиме площину α по деякій прямій, нехай b_1, b_2, b_3,... За аксіомою паралельних прямих, у площині β_1 через точку A можна провести єдину пряму, нехай c_1, паралельну прямій b_1. Аналогічно і в інших площинах можна провести $c_2 \| b_2$, $c_3 \| b_3$.... Отже, **у просторі через точку A можна провести безліч прямих, паралельних площині** α.

Взаємне розміщення прямої і площини подано в таблиці 3.

Таблиця 3

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Пряма a і площина α	мають безліч спільних точок	пряма лежить у площині	$a \subset \alpha$
	мають одну спільну точку	пряма перетинає площину	$a \cap \alpha$
	не мають спільних точок	пряма паралельна площині	$a \| \alpha$

Дізнайтеся більше

1. До особливого класу теорем відносять так звані «*теореми існування та єдиності*». Наприклад, основна властивість паралельних прямих у просторі: Через точку, яка не лежить на прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій (*існування*) і тільки одну (*єдиність*).

У «Началах» Евкліда (ІІІ ст. до н. е.) теореми існування та єдиності відіграють ключову роль. Стародавні грецькі математики не допускали існування фігури незалежно від побудови. За Евклідом, геометрична фігура існує лише з моменту її побудови. Тому доведення існування часто містять правила побудови відповідних фігур чи їх комбінацій. Для доведення єдиності застосовується метод від супротивного.


Пам’ятник Евкліду в Оксфорді

2. Метод доведення від супротивного ґрунтується на *законі виключеного третього*: з двох тверджень «*T*» і «не *T*» одне є істинним, а друге — хибним, третього не дано. Цей закон сформулював давньогрецький вчений Аристотель (384–322 до н. е.) у своїй праці «Метафізика».

Пригадайте головне

1. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і площини. Як їх позначають?
2. Дайте означення паралельних прямої і площини.
3. Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Сформулюйте й доведіть властивість 1 паралельності прямої і площини.
5. Сформулюйте й доведіть властивість 2 паралельності прямої і площини.
6. Сформулюйте й доведіть властивість 3 паралельності прямої і площини.
7. Як можна встановити паралельність прямої і площини?
8. Скільки прямих, паралельних деякій площині, можна провести у просторі через дану точку?

Розв'яжіть задачі

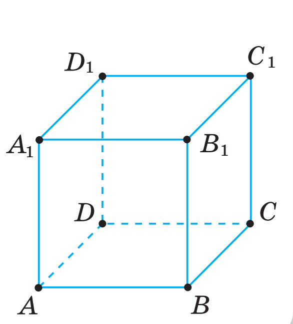
1'. Наведіть приклади взаємного розміщення прямої і площини на предметах класної обстановки.

2'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 100). Яке взаємне розміщення: 1) прямої A_1C_1 і площини ABC; 2) прямої BC_1 і площини $D_1A_1B_1$; 3) прямої AD_1 і площини BCC_1?

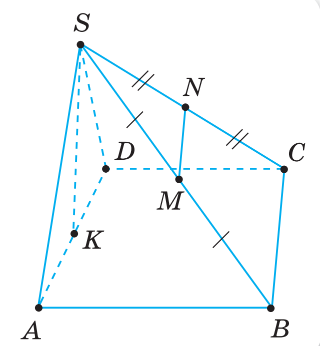
3'. На малюнках 101–102 назвіть: 1) прямі, що лежать у площині ABC; 2) прямі, що перетинають площину ABC; 3) прямі, паралельні площині ABC. Зробіть відповідні записи.

4°. **Чому пряма не може перетинати площину більше ніж в одній точці? Відповідь обґрунтуйте.**

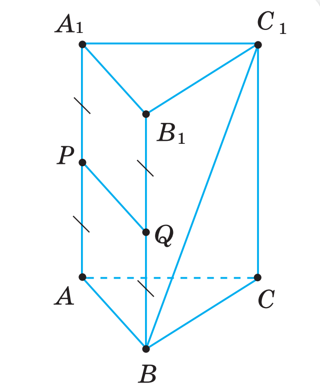
5°. Пряма a паралельна площині α. Чи існують у даній площині прямі, не паралельні прямій a? Проведіть одну з них.



Мал. 100



Мал. 101



Мал. 102

6°. Чи правильно, що пряма, паралельна площині, є паралельною будь-якій прямій, що лежить у даній площині?

7°. Чи може пряма a перетинати площину α, коли паралельні їй прямі лежать у цій площині?

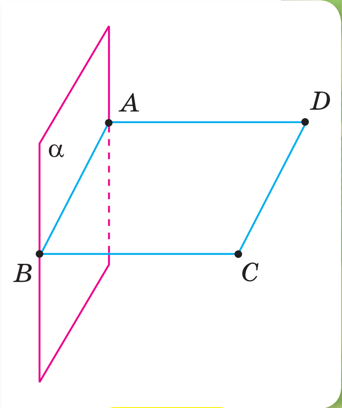
8°. **Чи правильно, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то і друга пряма паралельна цій площині?**

9°. Пряма a паралельна площині α і лежить у площині β. Площини α і β перетинаються по прямій b. Як розміщені прямі a і b?

10°. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть пряму KP, яка:
1) лежить у площині грані BCC_1B_1, проходить через середину ребра BB_1 і паралельна площині $A_1B_1C_1$;
2) лежить у площині грані $ABCD$, проходить через середину ребра CD і паралельна площині AA_1D_1;
3) лежить у площині грані ABB_1A_1, проходить через середину ребра A_1B_1 і паралельна площині AA_1D_1.

11°. Пряма a паралельна площині α. Пряма b перетинає пряму a. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b?

12°. Пряма a паралельна площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b, якщо пряма b лежить у площині α?

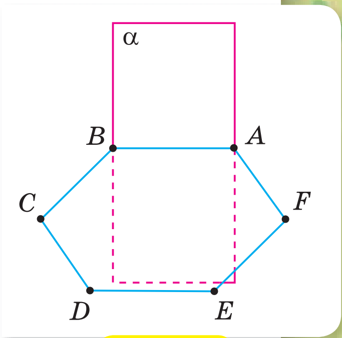


Мал. 103

13°. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник. У її бічній грані через середину бічного ребра проведено пряму EF паралельно площині основи. Якою може бути довжина відрізка EF, якщо сторони основи піраміди дорівнюють: 1) 4 см і 6 см; 2) 3 см і 7 см; 3) 2 см і 5 см?

14°. $ABCD$ — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій: 1) AB (мал. 103); 2) BC; 3) CD.
Яке розміщення інших сторін паралелограма відносно площини α?

15°. $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Площина α перетинає площину шестикутника по прямій: 1) AB (мал. 104); 2) CD; 3) EF.
Яке розміщення інших сторін і діагоналей шестикутника відносно площини α?



Мал. 104

16°. Трикутник ABC не лежить в одній площині з другим трикутником, але має з ним спільну сторону: 1) AB; 2) BC; 3) AC. Доведіть, що одна із середніх ліній ΔABC паралельна площині другого трикутника.

17°. Площина α паралельна стороні AB трикутника ABC і перетинає сторони AC і BC в точках K і N. Доведіть, що $KN || AB$. Знайдіть довжину сторони AB, якщо:
1) $KN = 9$ см, $AC = 24$ см, $KC = 12$ см;
2) $KN = 8$ см, $AC = 18$ см, $KC = 9$ см;
3) $KN = 11$ см, $AC = 16$ см, $KC = 8$ см.

18. **Дві прямі паралельні одній площині. Чи паралельні вони між собою?**

19. **Паралельні прямі a і b не лежать у площині α. Якщо $a || \alpha$, то і $b || \alpha$. Доведіть.**

20. Чи є правильним твердження: якщо пряма паралельна площині, то вона не перетинає жодної прямої: 1) що лежить у цій площині; 2) паралельної цій площині? Відповідь поясніть.

21. Пряма a паралельна площині α. Чи правильно, що будь-яка пряма, яка проходить через деяку точку площини α паралельно прямій a, лежить у площині α?

22. Пряма n паралельна площині α. Чи паралельна ця пряма будь-якій прямій, що лежить у площині α? Відповідь поясніть.

23. Площина α перетинає дві сторони трикутника і ділить їх у відношенні $m : n$. Як розміщується дана площина відносно третьої сторони трикутника, якщо: 1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 2$, $n = 3$? Скільки випадків треба розглянути?

24. Прямі a і b перетинаються. Точка A не лежить на даних прямих. Чи можна через точку A провести площину, паралельну кожній з даних прямих?

25. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину через ребра AA_1 і CC_1. Чи паралельна вона прямій, що проходить через середини ребер: 1) AB і BC; 2) A_1D_1 і CD? Відповідь обґрунтуйте.

26. Основа піраміди з вершиною S — правильний шестикутник $ABCDEF$. Чи можна в грані SAB провести відрізок, паралельний площині: 1) ABC; 2) SCD; 3) SCE; 4) SAF?

27. Точки A і B лежать у сусідніх бічних гранях призми. Як у площинах цих граней провести паралельні прямі, що проходять відповідно через точку A і точку B?

28. Чи може площина, яка проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати третю його сторону?

29. Дано: 1) квадрат; 2) правильний шестикутник. Площину α проведено паралельно одній зі сторін даного многокутника. Дослідіть, як може розміщуватися площина α відносно інших сторін даного многокутника.

30*. Доведіть, що існує безліч площин, які перетинають дану пряму.

31*. **Якщо площина і пряма, що не лежить у цій площині, паралельні деякій прямій, то вони паралельні.** Доведіть.

32*. Чи можна побудувати площину, яка проходить через дану пряму паралельно: 1) другій даній прямій; 2) двом іншим даним прямим?

33*. Дано довільну піраміду. Доведіть, що прямі, які проходять через середини двох бічних ребер піраміди, паралельні її основі.

34*. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник. Чи паралельна площина ACC_1 прямій, що проходить через: 1) вершину F і середину ребра DD_1; 2) вершину D і середину ребра E_1F_1?

35*. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму AB і паралельні прямій CD, яка є мимобіжною з AB, лежать в одній площині.

36*. Доведіть, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

37*. Доведіть, що площина, яка паралельна двом мимобіжним сторонам просторового чотирикутника, ділить дві інші його сторони на пропорційні відрізки.

38*. Побудуйте лінію перетину площин двох трикутників, у яких одна вершина спільна, а протилежні їй сторони — паралельні.

Проявіть компетентність

39. Яке взаємне розміщення моста через річку (пряма a), напряму її течії (пряма b) і площини водної поверхні (площина α) (мал. 105)?

40. У місті Братислава міст через Дунай має два рівні. Верхнім рівнем мосту (пряма a) їздять автомобілі й автобуси, а на нижньому рівні є пішохідні доріжки (пряма b) (мал. 106). Площину, у якій проходить Дунай, позначимо α.

1) Чи можуть перетнутися пішоходи з автобусами, коли рухаються на мосту одночасно?
2) Як розміщені пряма a і площина α?
3) Як розміщені пряма b і площина α?

41. Розмічаючи верхній край панелі на стіні, його вирівнюють відносно плінтуса. Чи паралельні край панелі й площина підлоги? Відповідь поясніть.

42. Будівельнику потрібно терміново купити стельовий плінтус для кімнати, попередньо визначивши його метраж. Стеля в будинку досить висока, а драбини немає. Що робити будівельнику? Відповідь поясніть.

Мал. 105

Мал. 106

§ 2.4. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Подивіться на малюнок 107. Ви бачите журнальний столик, до бічного стояка якого (площина α) кріпиться поличка (площина β) і стільниця (площина γ). Цей приклад ілюструє можливі випадки взаємного розміщення двох площин:

- дві площини *перетинаються* (площини α і β);
- дві площини *паралельні* (площини β і γ).

Розглянемо властивості площин у кожному з випадків.

Мал. 107

1. ПЛОЩИНИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

За аксіомою 4 стереометрії, якщо дві площини мають спільну точку, то вони *перетинаються* по прямій (мал. 108). Кожна точка цієї прямої належить обом площинам.

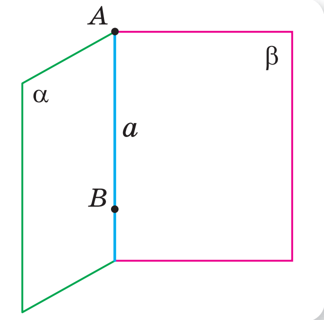
Площини α і β, що перетинаються, позначаємо: α ∩ β.

Властивості площин, що перетинаються, можна побачити у властивостях паралельності прямих і площин, які були доведені в попередньому параграфі. Сформулюємо їх.

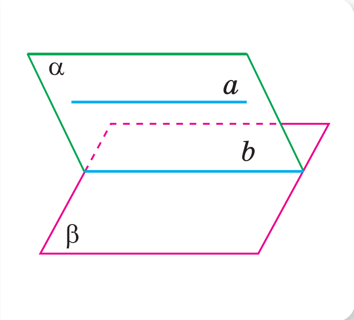
Властивості площин, що перетинаються.

1. Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну другій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій (мал. 109).

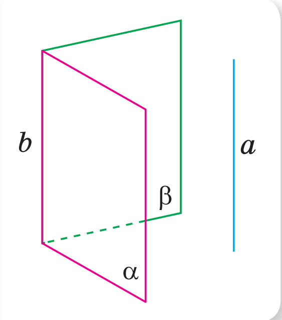
2. Якщо кожній з двох площин, що перетинаються, паралельна деяка пряма, то вона паралельна прямій перетину даних площин (мал. 110).



Мал. 108

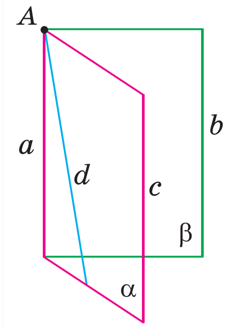


Мал. 109



Мал. 110

Наведені властивості площин, що перетинаються, можна вважати ознаками паралельності двох прямих у просторі.



Мал. 111

З а д а ч а. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Доведіть, спираючись на властивості площин, які перетинаються.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (мал. 111). Доведемо, що $a \parallel b$.

Через прямі a і c проведемо площину α. Оскільки $b \parallel c$, то $b \parallel \alpha$ (за ознакою паралельності прямої і площини). Через пряму b і довільну точку A прямої a проведемо площину β. Оскільки $c \parallel b$, то $c \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини). Отже, за властивістю площин, що перетинаються, площини α і β мають перетинатися по прямій, яка паралельна прямій c і проходить через точку A. Позначимо її d. Дістали, що в площині α через точку A проходять дві прямі — a і d, паралельні прямій c, що неможливо. Отже, прямі a і d збігаються, а значить, $a \parallel b$.

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ

Дві площини, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

Паралельність площини α і β позначаємо: $\alpha \parallel \beta$.

Як встановити, що дві площини паралельні? Відповідь дають ознаки паралельності площин.

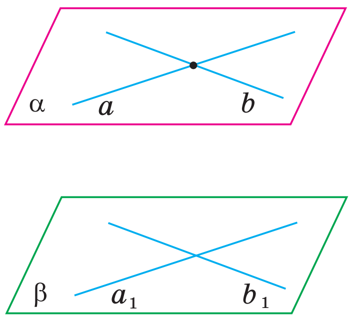
ТЕОРЕМА

(ознака 1 паралельності площин).

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

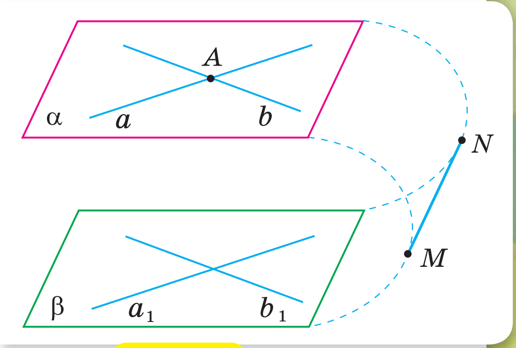
Дано: площини α, β, прямі a, b, a_1, b_1, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (мал. 112).

Довести: $\alpha \parallel \beta$.



Мал. 112

Доведення. Оскільки прямі a і b відповідно паралельні прямим a_1 і b_1, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини). Припустимо, що площини α і β не паралельні, а перетинаються по деякій прямій MN (мал. 113). Площина α проходить через пряму a, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN. Тоді, за властивістю площин, що перетинаються, $MN \parallel a$. Так само, площина α проходить через пряму b, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN. Тоді $MN \parallel b$. Одержали, що у площині α через точку A проходить дві прямі a і b, паралельні прямій MN. А це суперечить основній властивості паралельних прямих. Отже, площини α і β не перетинаються, тобто $\alpha \parallel \beta$.

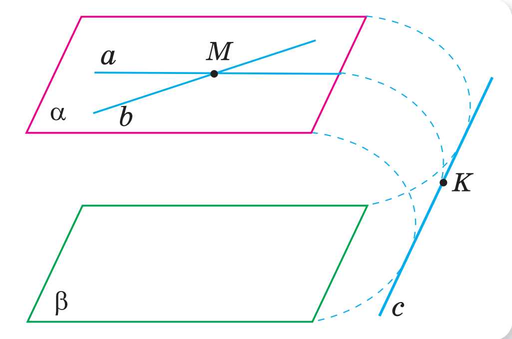


Мал. 113

ТЕОРЕМА

(ознака 2 паралельності площин).

Якщо кожна з двох прямих, що перетинаються, однієї площини паралельні іншій площині, то ці площини паралельні.



Мал. 114

Дано: площини α, β, прямі a, b, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = M$; $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ (мал. 114).

Довести: $\alpha \parallel \beta$.

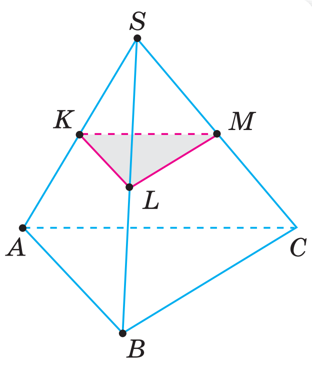
Доведення. Застосуємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що площини α і β не паралельні. Тоді вони перетинаються по деякій прямій c. У площині α лежать пряма c і дані прямі a і b, що перетинаються. Оскільки з двох прямих, що перетинаються, не більше ніж одна може бути паралельною даній прямій, то пряма c перетинає принаймні одну з прямих a і b.

1. Нехай пряма c перетинає пряму a в точці K: $a \cap c = K$. Тоді одержимо, що пряма c, а тому й точка K, лежать у площині β. Значить, пряма a перетинає площину β. Це суперечить умові теореми, тому $\alpha \parallel \beta$. Аналогічний висновок одержимо, припустивши, що пряма c перетинає пряму b.

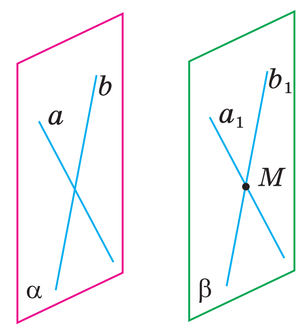
2. Нехай пряма c перетинає обидві прямі a і b: $a \cap c = K$, $a \cap b = N$. Тоді одержимо, що пряма c, а тому й точки K і N, лежать у площині β. Значить, прямі a і b перетинають площину β. Це суперечить умові теореми, тому $\alpha \parallel \beta$.

Задача 2. Через середини бічних ребер піраміди $SABC$ проведено площину KLM (мал. 115). Доведіть, що ця площина паралельна площині основи піраміди.

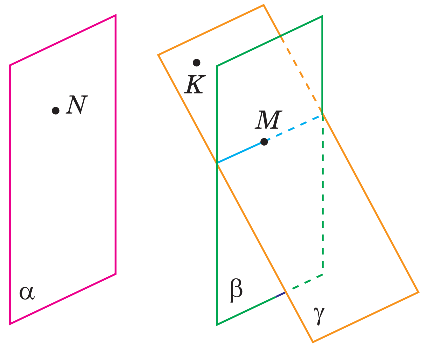
Розв'язання. Відрізки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC. Звідси $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. За ознакою паралельності площин, площина KLM паралельна площині ABC.



Мал. 115



Мал. 116



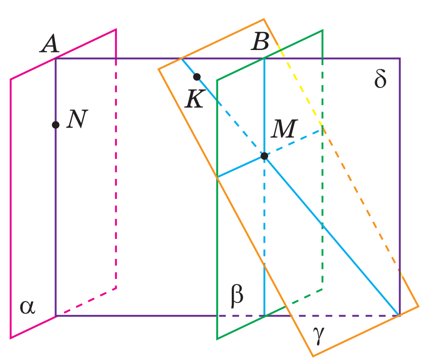
Мал. 117

ТЕОРЕМА

(основна властивість паралельних площин).

Через точку, яка не лежить у площині, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну.

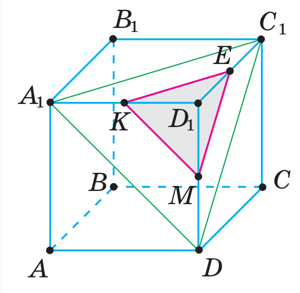
Дано: площина α, точка M, $M \notin \alpha$.
Довести: 1) існує β, така що $M \in \beta$ і $\beta \,||\, \alpha$; 2) β — єдина.
Доведення. Нехай α — дана площина, а M — точка, що не лежить у ній.
1. Проведемо в площині α дві прямі a і b, що перетинаються. За основною властивістю паралельних прямих, через точку M можна провести прямі a_1 і b_1, паралельні прямим a і b. За наслідком 2 з аксіом стереометрії, через прямі a_1 і b_1 можна провести площину β (мал. 116). За ознакою паралельності площин, $\beta \,||\, \alpha$. Отже, через точку M можна провести площину β, паралельну площині α, тобто площина β існує.
2. Припустимо, що через точку M можна провести другу площину γ, паралельну площині α (мал. 117). У площині γ візьмемо довільну точку K, що не лежить у площині β, а в площині α — точку N. Через точки M, K і N проведемо площину δ (мал. 118). Вона перетне площину α по прямій NA, площину β — по прямій MB, а площину γ — по прямій MK. Прямі MB і MK не можуть перетинати пряму NA, бо вони не перетинають площину α, оскільки лежать у площинах β і γ, які, за припущенням, обидві паралельні площині α. Одержали, що у площині β через точку M проходять дві прямі — MB і MK, паралельні прямій NA, а це неможливо. Отже, площина β — єдина.



Мал. 118

З а д а ч а 3. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через точку K — середину ребра AD_1 проведіть переріз, паралельний площині A_1C_1D.

Р о з в' я з а н н я. Площина перерізу перетинає площину AA_1D_1 по прямій KM, паралельній прямій A_1D (поясніть чому), а площину DCC_1 — по прямій ME, паралельній прямій C_1D (поясніть чому). Трикутник KME — шуканий переріз (мал. 119).



Мал. 119

Взаємне розміщення двох площин наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві площини α і β	мають спільні точки	перетинаються	$\alpha \cap \beta$
	не мають спільних точок	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

Дізнайтеся більше

Термін «класифікація» походить від латинських слів χλασσισ — розряд і φαχιο — роблю. Суттєва ознака, що дає підстави здійснити класифікацію, називається *основою класифікації*.

Наукова класифікація відіграє важливу роль у теоретичній та практичній діяльності людини. Вона полегшує процес дослідження, надає можливість виявити й приховані закономірності. Показовим є приклад розробки класифікації хімічних елементів. Працюючи над книгою «Основи хімії», видатний вчений Д. І. Менделєєв (1834–1907) відкрив у 1869 році періодичний закон хімічних елементів. Це дозволило вченому не лише систематизувати й уточнити дані про відомі на той час хімічні елементи, а й передбачити існування ще трьох елементів. У таблиці, що зараз носить ім'я Д. І. Менделєєва, вони містяться за номерами 21, 31 і 32. Галій (№ 31) відкрив у 1875 р. французький хімік П.-Е. Лекон де Буарбон, скандій (№ 21) — у 1879 р. шведський хімік Л. Нільсон, германій (№ 32) — у 1886 р. німецький хімік К. Вінклер.

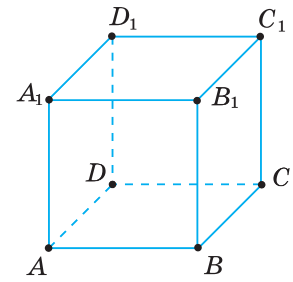
Пригадайте головне

1. Як можуть взаємно розміщуватися дві площини?
2. Сформулюйте й доведіть властивість площин, що перетинаються.
3. Який наслідок випливає з властивості площин, що перетинаються?
4. Дайте означення паралельним площинам. Як їх позначають?
5. Сформулюйте й доведіть ознаку 1 паралельності площин.
6. Сформулюйте й доведіть ознаку 2 паралельності площин.
7. Сформулюйте й доведіть основну властивість паралельних площин.

Розв'яжіть задачі

1'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох площин на предметах довкілля.

2'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 120). По якій прямій перетинаються площини:
1) ABB_1 і ABC; 2) A_1D_1D і ABB_1;
3) BCC_1 і CDD_1?
Яким прямим у даних площинах паралельна лінія їх перетину?



Мал. 120

3'. Які площини паралельні на малюнку 120? Назвіть пару прямих, що перетинаються й лежать в одній з даних площин, та відповідну пару паралельних їм прямих у другій площині.

4'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності площин.

5°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. У площині α проведіть пряму a. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β?

6°. Чи можуть перетинатися дві площини, які паралельні тій самій прямій?

7°. $ABCD$ — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій: 1) AB; 2) BC; 3) CD. Доведіть, що пряма перетину двох даних площин паралельна протилежній стороні паралелограма.

8°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть площину, паралельну грані: 1) $ABCD$; 2) AA_1B_1B; 3) CDD_1C_1.

9°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин: 1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ABB_1 і DCC_1; 3) B_1C_1C і D_1DA.

10°. Якщо пряма, що лежить в одній з даних площин, паралельна прямій, що лежить в другій площині, то дані площини паралельні. Чи є правильним таке твердження?

11°. Якщо дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні двом прямим, які лежать в другій площині, то дані площини паралельні. Чи є правильним таке твердження?

12°. Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі?

13°. Прямі a і b — мимобіжні. Точка A лежить на прямій a, а точка B — на прямій b. На прямій AB взято точку C. Через цю точку проведено дві площини: α, в якій лежить пряма a, і β, в якій лежить пряма b. Як взаємно розміщуються площини α і β?

14°. Дві сторони паралелограма паралельні даній площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

15°. Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через: 1) точку, що не лежить у даній площині; 2) пряму, що паралельна даній площині?

16. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

17. Площина β перетинає деяку пряму, паралельну площині α. Доведіть, що площини α і β перетинаються.

18. α і β — паралельні площини. Точка A лежить у площині α. Доведіть, що будь-яка пряма, що проходить через точку A паралельно площині β, лежить у площині α.

19. **Якщо площина α паралельна площині β, а площина β паралельна площині γ, то площина α паралельна площині γ.** Доведіть.

20. Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

21. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи паралельні площини α і β?

22. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин:
1) ACB_1 і A_1C_1D; 2) B_1D_1C і BDA_1.

23. **Дано дві мимобіжні прямі. Доведіть, що існує тільки одна пара площин, кожна з яких проходить через одну з даних прямих.**

24. Як провести паралельні площини через дві дані мимобіжні прямі?

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник. Чи паралельні між собою площини, які проходять через точки:
1) A, A_1, C_1 і D, D_1, F_1;
2) A, A_1, B і C, C_1, F;
3) A, B_1, C і D, E_1, F;
4) A, A_1, D і C, C_1 та середину ребра AB?

26. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Середини відрізків AB, BC, AC, AD, CD і BD позначено відповідно K, L, M, N, E і F. Чи паралельні площини:
1) BCD і KMN;
2) ABD і LME;
3) ACD і KLF?
Відповідь обґрунтуйте.

27*. Дано дві площини, які перетинаються. Чи можна провести площину, яка перетинає дві дані площини по паралельних прямих? Скільки таких площин можна провести через дану:
1) точку; 2) пряму, яка паралельна даним площинам; 3) пряму, яка паралельна одній з даних площин; 4) пряму, яка перетинає дані площини; 5) пряму, яка лежить в одній з даних площин?

28*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудуйте лінії перетину площин: 1) AB_1D_1 і A_1BD; 2) A_1BC і B_1BD; 3) A_1D_1C і AB_1D.

29*. Спільна вершина двох трикутників не лежить у даній площині, а протилежні цій вершині сторони трикутників лежать у даній площині. Побудуйте лінію перетину площин даних трикутників. Скільки випадків треба розглянути?

30*. Через пряму a, що лежить в одній з паралельних площин, проведено площини, які перетинають другу площину по прямих a_1, a_2, a_3,.... Як взаємно розміщуються дані прямі? Відповідь обґрунтуйте.

31*. Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві паралельні прямі у просторі?

32*. **Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.**

33*. Кожна пряма, яка проходить через задану точку площини паралельно деякій прямій, що паралельна даній площині, лежить у даній площині. Доведіть.

34*. Чи можуть бути паралельними:
1) дві бічні грані призми; 2) три бічні грані призми? Відповідь обґрунтуйте.

35*. Основа прямої призми — правильний п'ятикутник. Доведіть, що площина, яка проходить через бічне ребро й діагональ основи призми, паралельна площині однієї з її бічних граней.

36*. Дослідіть, як можуть взаємно розміщуватися три площини, якщо: 1) дві з них паралельні; 2) вони попарно перетинаються.

Проявіть компетентність

37. Скільки пар паралельних площин та площин, що перетинаються, налічує гральний кубик?

38. Які випадки взаємного розміщення двох площин можна проілюструвати за допомогою зошита?

39. Яке взаємне розміщення книг на повністю заповненій полиці, якщо книги щільно прилягають одна до одної? А якщо зняти декілька книг з полиці?

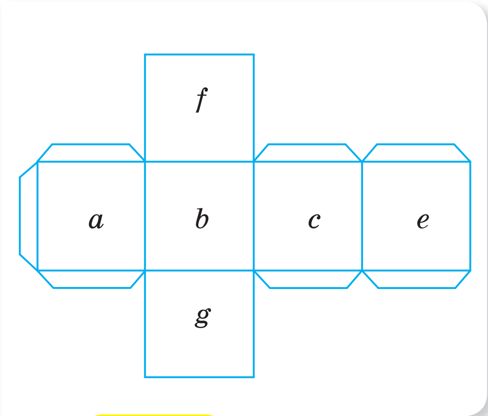
40. Чи можна перевірити паралельність підлоги і стелі кімнати за допомогою: 1) двох прямих у цих площинах; 2) трьох прямих у цих площинах; 3) чотирьох прямих у цих площинах. Якщо так, то як саме? Запропонуйте власний спосіб перевірки.

41. Чи можна довести паралельність сторін скляного ящика за допомогою чотирьох стрічок? А трьох стрічок? Користуючись яким фактом?

42. Як напрямлені сили, що діють на важелі?

43. На малюнку 121 зображено Пізанську вежу. Чи паралельні між собою площини поверхів вежі? Чи паралельні вони з площиною землі? Як це можна довести?

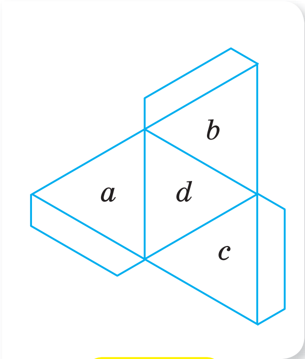
Мал. 121



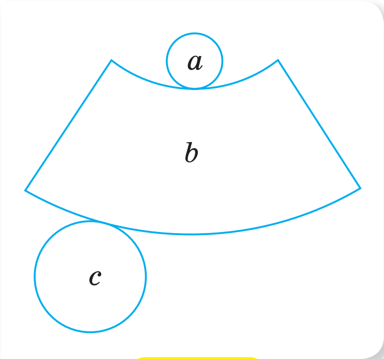
Мал. 122

44. На малюнках 122 – 124 зображено розгортки деяких геометричних фігур.

1. Які фігури ви бачите на малюнках?
2. Які з плоских фігур, позначених маленькими літерами на розгортці, при склейці розгорток будуть лежати в паралельних площинах? А в площинах, що перетинаються?
3. Назвіть предмети чи споруди, що відповідають цим розгорткам.



Мал. 123



Мал. 124

§ 2.5. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

1. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ І СІЧНА ПЛОЩИНА

Важливі властивості паралельних площин пов'язані з площиною, що їх перетинає. Цю площину називають *січною площиною*.

ТЕОРЕМА

(про паралельні площини і січну площину).

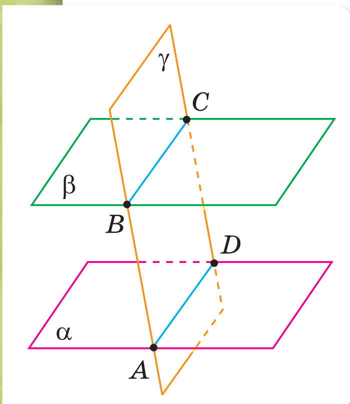
Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину паралельні.

Дано: площини $\alpha \,||\, \beta$,
γ — січна площина,
AD — пряма перетину площин α і γ,
BC — пряма перетину площин β і γ (мал. 125).
Довести: $AD \,||\, BC$.
Доведення. За умовою, прямі AD і BC лежать у січній площині γ. Вони не можуть перетинатися, бо інакше перетиналися б площини α і β, а це суперечить умові. Отже, $AD \,||\, BC$.

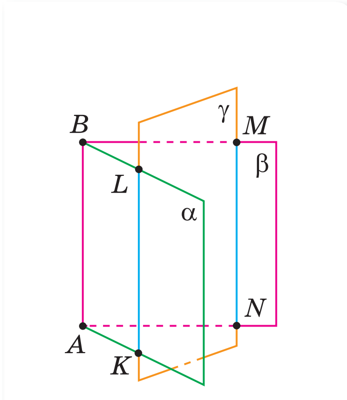
Чи правильне твердження, обернене до теореми про паралельні площини і січну площину? Ні. З того, що прямі перетину двох даних площини третьою паралельні, не випливає, що дані площини паралельні (мал. 126).

Задача 1. Доведіть, що січна площина перетинає основи прямої трикутної призми по паралельних прямих.

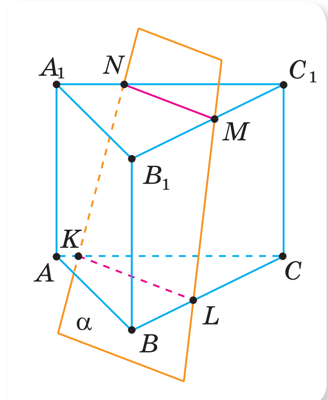
Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма з основами ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 127), січна площина α перетинає її основи по прямих KL і MN. Доведемо, що $KL \,||\, MN$.
Оскільки бічними гранями прямої призми є прямокутники, то $AB \,||\, A_1B_1$ і $BC \,||\, B_1C_1$. Тоді, за ознакою паралельності площин, площини основ призми ABC і $A_1B_1C_1$ — паралельні. За теоремою про паралельні площини і січну площину, прямі перетину KL і MN площин основ призми січною площиною α — паралельні.



Мал. 125



Мал. 126



Мал. 127

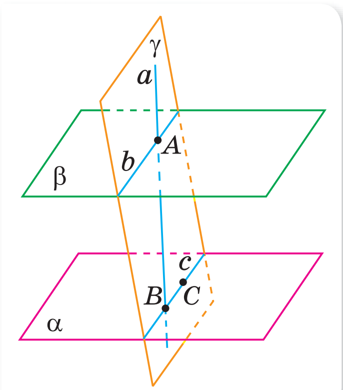
1. У прямої призми основи паралельні.
2. У прямокутного паралелепіпеда протилежні грані попарно паралельні.
3. Січна площина перетинає паралельні грані многогранника по паралельних прямих.

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ І ПРЯМА, ЩО ЇХ ПЕРЕТИНАЄ

ТЕОРЕМА **(про паралельні площини і пряму, що їх перетинає).**

Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу.

Дано: площини $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \beta = A$ (мал. 128).
Довести: $a \cap \alpha$.
Доведення. Оберемо в площині α довільну точку C. Через цю точку і пряму a проведемо площину γ. Оскільки площина γ має з площинами α і β спільні точки A і C відповідно, то вона перетинає ці площини по деяким прямим b і c, які проходять відповідно через точки A і C. За теоремою про паралельні площини і січну площину, прямі b і c паралельні. Тоді в площині γ пряма a перетинає (у точці A) пряму b, паралельну прямій c. Значить, пряма a перетинає і пряму c в деякій точці B. Оскільки пряма c лежить в площині β, то точка B є точкою перетину прямої a і площини β.



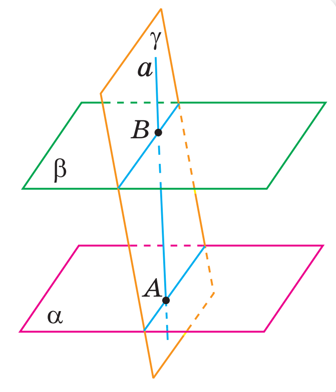
Мал. 128

3. ПЛОЩИНА, ЩО ПЕРЕТИНАЄ ОДНУ З ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

ТЕОРЕМА **(про площину, що перетинає одну з двох паралельних площин).**

Якщо площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу площину.

Дано: площини α, β, γ, $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma$ (мал. 129).
Довести: $\beta \cap \gamma$.
Доведення. Проведемо в площині γ пряму a, що перетинає площину α в деякій точці B. Тоді, за теоремою про паралельні площини і пряму, що їх перетинає, пряма a перетинає і площину β в деякій точці A. Тому, площини β і γ мають спільну точку A, тобто вони перетинаються.



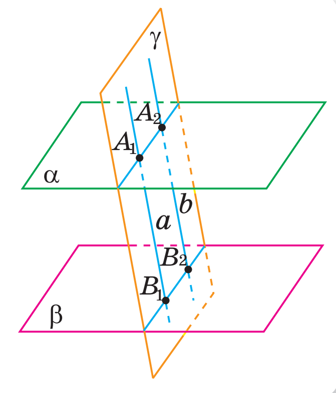
Мал. 129

4. ВІДРІЗКИ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ

ТЕОРЕМА (про рівність відрізків паралельних прямих).

Відрізки паралельних прямих, що містяться між паралельними площинами, рівні.

Дано: площини α, β, прямі a, b,
$\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$,
$a \cap \alpha = A_1$, $a \cap \beta = B_1$;
$b \cap \alpha = A_2$, $b \cap \beta = B_2$ (мал. 130).
Довести: $A_1B_1 = A_2B_2$.
Доведення. Проведемо через паралельні прямі a і b площину γ. Вона перетинає паралельні площини α і β по паралельним прямим A_1A_2 і B_1B_2 (за теоремою про паралельні площини і січну площину). Оскільки $a \parallel b$, то чотирикутник $A_1A_2B_2B_1$ — паралелограм. Тому $A_1B_1 = A_2B_2$ (як протилежні сторони паралелограма).



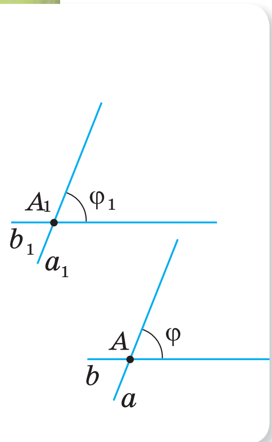
Мал. 130

5. КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

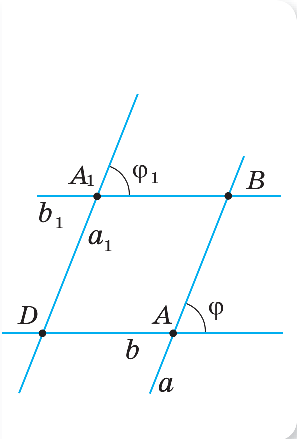
ТЕОРЕМА **(про рівність кутів між прямими, що перетинаються).**

Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

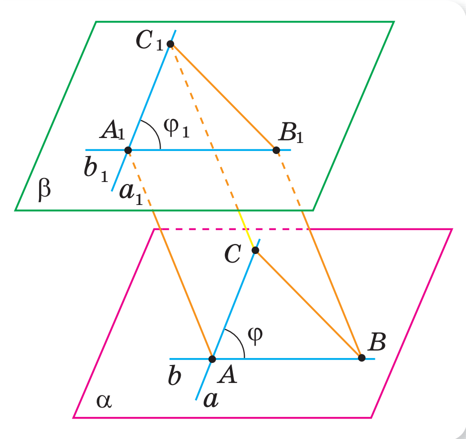
Дано: прямі a, b,
$a \cap b = A$,
$a_1 \cap b_1 = A_1$,
$a \,||\, a_1$, $b \,||\, b_1$,
φ — кут між прямими a і b,
φ_1 — кут між прямими a_1 і b_1 (мал. 131).
Довести: $\varphi = \varphi_1$.
Доведення. Якщо прямі a, b, a_1 і b_1 лежать в одній площині, тоді пряма a перетинається з прямою b_1, а пряма b — з прямою a_1 (мал. 132). Позначимо точки їх перетину B і D. Чотирикутник ABA_1D — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони попарно паралельні. Тому $\varphi = \varphi_1$.
Нехай прямі a, b, a_1 і b_1 не лежать в одній площині (мал. 133). Через прямі a і b проведемо площину α, а через прямі a_1 і b_1 — площину β. За ознакою паралельності площин, $\alpha \,||\, \beta$. Відкладемо на даних прямих рівні відрізки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і проведемо прямі AA_1, BB_1, CC_1, BC і B_1C_1.
Чотирикутник ABB_1A_1 — паралелограм, оскільки протилежні сторони AB і A_1B_1 рівні й паралельні. Тому відрізки AA_1 і BB_1 також рівні й паралельні. Аналогічно, рівні й паралельні відрізки AA_1 і CC_1. Звідси $BB_1 = CC_1$, $BB_1 \,||\, CC_1$ і чотирикутник BB_1C_1C — паралелограм. Тому $BC = B_1C_1$ і $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ за трьома сторонами, звідки $\angle\, BAC = \angle\, B_1A_1C_1$. Оскільки $\angle\, BAC = \varphi$ і $\angle\, B_1A_1C_1 = \varphi_1$, то $\varphi = \varphi_1$.



Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

НАСЛІДОК 1 (властивість перпендикулярних прямих). Дві прямі, що паралельні перпендикулярними прямим, перпендикулярні.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми, якщо $\varphi = 90°$.

НАСЛІДОК 2. Кут між мимобіжними прямими не залежить від вибору точки, через яку проходять прямі, що перетинаються і відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми.

НАСЛІДОК 3 (властивість кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами). Два кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами рівні (мал. 134).

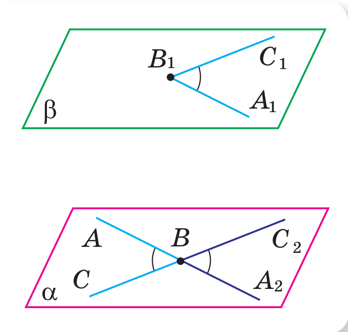
Справді, сторони кожного з даних кутів є променями відповідної пари прямих, що перетинаються у вершині цього кута. За теоремою про рівність кутів між прямими, що перетинаються, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Задача 2. KL і LM — середні лінії бічних граней SAB і SBC правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ (мал. 135). Яка градусна міра кута KLM?

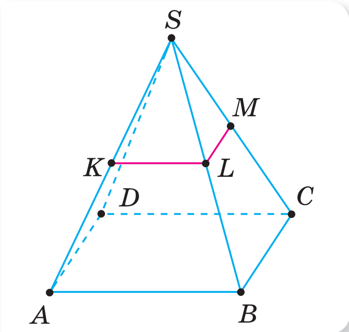
Розв'язання. Оскільки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC, то $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. Кути KLM і ABC мають однаково напрямлені сторони, бо лежать у відповідних площинах по один бік від прямої SB. Тому, за властивістю кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами, $\angle KLM = \angle ABC$. За умовою, дана піраміда — правильна, тому $\angle ABC = 90°$. Отже, $\angle KLM = 90°$.

Задача 3. Побудуйте переріз п'ятикутної піраміди $PABCDE$ площиною α, яка проходить через внутрішню точку основи $ABCDE$ паралельно грані PAB. (мал. 136).

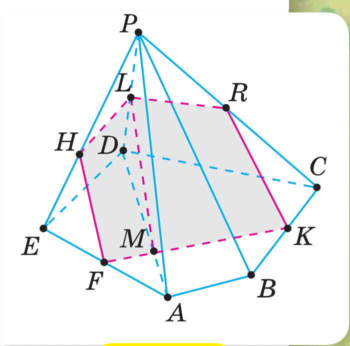
Розв'язання. Оскільки прямі, по яким дві паралельні площини, що перетинає третя площина, паралельні, а площина α паралельна грані PAB, то: а) пряма перетину площини α з гранню ABC (площиною основи піраміди) повинна бути паралельною AB; б) пряма перетину площини α з гранню PAE — паралельна AP; в) пряма перетину площини α з площиною грані PBC — паралельна PB; г) пряма перетину площини α з площиною грані PAD — паралельна PA, тому проводимо: 1) через точку M пряму $KF \parallel AB$, $K \in BC$, $F \in AE$; 2) пряму $FH \parallel PA$, $H \in PE$; 3) пряму $KR \parallel PB$, $R \in PC$; 4) пряму $ML \parallel AP$, $L \in PD$. П'ятикутник $HLRKF$ — шуканий переріз. Доведення проведіть самостійно.



Мал. 134



Мал. 135



Мал. 136

Дізнайтеся більше

Математики у своїх міркуваннях часто застосовують аналогію. У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за якими-небудь властивостями, ознаками, відношеннями, причому самі ці предмети, взагалі, різні. Багато питань стереометрії вивчається за аналогією до питань планіметрії.

Аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі.

У таблиці 5 наведено деякі властивості взаємного розміщення точок і прямих на площині та властивості прямих і площин у просторі, які сформульовано за аналогією.

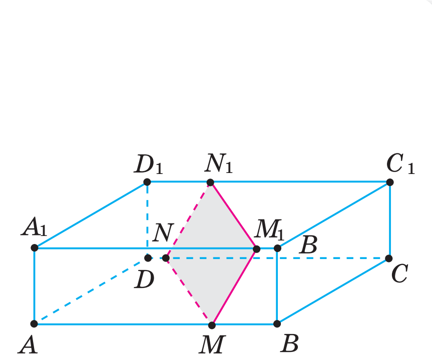
Таблиця 5

На площині	У просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються в цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

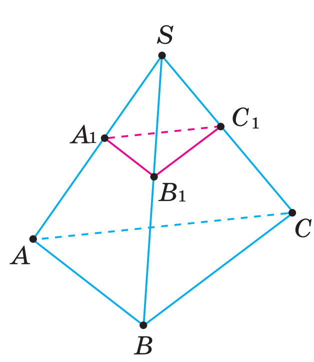
За аналогією іноді можна одержати хибне твердження. Наприклад, якщо у третьому з наведених тверджень для простору замість вимоги «не перетинає площину» вказати вимогу «не лежить у площині», то одержимо хибне твердження. Справді, пряма, що не лежить у площині, може перетинати цю площину, а через таку пряму провести площину, паралельну даній площині, неможливо. Тому твердження, отримане за аналогією, потребує доведення.

Пригадайте головне

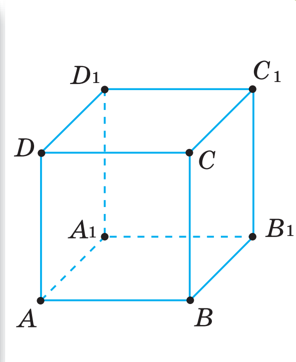
1. Поясніть, що таке січна площина для двох даних паралельних прямих.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про паралельні площини і січну площину.
3. Сформулюйте й доведіть теорему про паралельні площини і пряму, що їх перетинає.
4. Сформулюйте й доведіть теорему про площину, що перетинає одну з двох паралельних площин.
5. Як формулюється теорема про рівність кутів між прямими, що перетинаються? Доведіть її.
6. Яка властивість перпендикулярних прямих у просторі?
7. Поясніть, від чого не залежить кут між мимобіжними прямими.
8. Яку властивість мають кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами?



Мал. 137



Мал. 138



Мал. 139

Розв'яжіть задачі

1'. На малюнках 137–139 назвіть січну площину та прямі її перетину з паралельними площинами ABC і $A_1B_1C_1$. Яке взаємне розміщення прямих перетину? Скільки січних площин для даних паралельних площин зображено на малюнку?

2'. Наведіть приклади паралельних площин і січної площини на предметах класної обстановки.

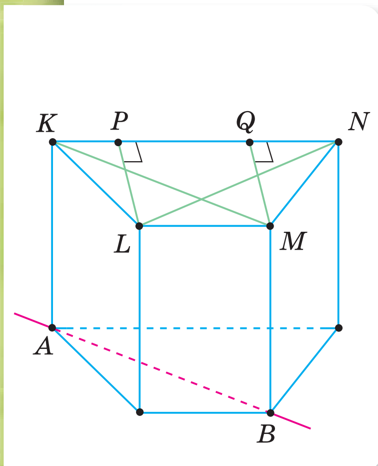
3'. За малюнками 137–139 з'ясуйте, чи виконується рівність: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, якщо площини ABC і $A_1B_1C_1$ — паралельні. Відповідь поясніть.

4'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють властивість: 1) перпендикулярних прямих; 2) кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

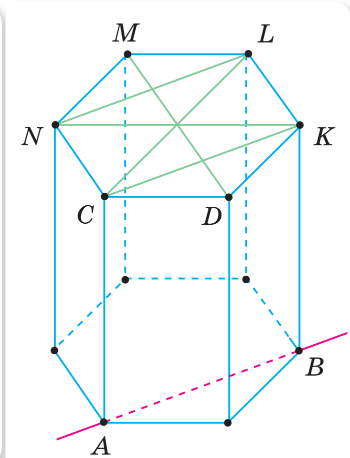
5°. Січна площина перетинає нижню основи призми по прямій AB (мал. 140–142). По якій із прямих, позначених на малюнку, січна площина не може перетинати верхню основу даної призми? Відповідь поясніть.

6°. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину, яка перетинає вказані паралельні площини: 1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ADD_1 і BCC_1; 3) ABB_1 і C_1CD. Чи перетинає побудована січна площина іншу пару паралельних площин? Назвіть прямі перетину січної площини з паралельними площинами. Яке їх взаємне розміщення? Зробіть відповідний запис.

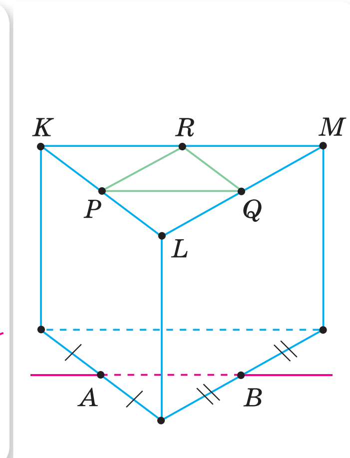
7°. Накресліть пряму чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основі якої лежить трапеція з основами AB і CD. Які грані призми паралельні, а які — непаралельні? Проведіть січну площину, яка: 1) проходить через ребра AB і C_1D_1; 2) перетинає основи призми й не проходить через їх ребра; 3) проходить через середини бічних ребер. Назвіть пари паралельних відрізків, що лежать у січній площині та у відповідних гранях призми.



Мал. 140



Мал. 141



Мал. 142

8°. Паралельні площини α і β відтинають на сторонах BA і BC кута ABC відрізки: $BM = MM_1$ і $BN = NN_1$. Заповніть таблицю 6.

Таблиця 6

BM	5			10		13
BM_1		7	12		3	
BN	12		5			21
BN_1		7		18	5	
MN	13		9	17		20
M_1N_1		10			4	

9°. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед: 2) куб. На ребрі AB позначте точку K і через неї проведіть січну площину паралельно грані AA_1D_1D. Який чотирикутник утворився в перерізі? Відповідь поясніть.

10°. Накресліть правильну призму: 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) $ABCA_1B_1C_1$. Позначте точку A_2 на ребрі AA_1 призми і через цю точку проведіть січну площину паралельно нижній основі призми. Який многокутник утворився в перерізі? Позначте його вершини A_2, B_2.... Назвіть кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами. Яка їх градусна міра?

11°. Накресліть трикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник: 1) з кутом при вершині 110°; 2) з кутом при основі 50°; 3) з кутом при вершині 30°. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

12°. Накресліть чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з кутом: 1) 100°; 2) 40°; 3) 60°. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

13. Дві сторони паралелограма паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

14. Бічна сторона й діагональ трапеції паралельні площині α. Чи паралельні площина α і площина трапеції?

15. **Дві сторони трикутника паралельні площині α. Доведіть, що і третя сторона трикутника паралельна площині α.**

16. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною, яка паралельна даній грані й проходить через середину заданого ребра:
1) SAB, SC; 2) SBC, SA. Поясніть побудову.

17. У кубі з ребром a проведіть площину через: 1) середини двох суміжних сторін верхньої основи й центр нижньої; 2) середини двох суміжних сторін бічної грані й центр протилежної бічної грані. Знайдіть периметр і площу перерізу.

18. **Чи може пряма, яка перетинає одну з двох паралельних площин, не перетинати другу? Відповідь обґрунтуйте.**

19. Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих? Відповідь обґрунтуйте.

20. **Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї з них проведено паралельні прямі, що перетинають другу площину відповідно в точках D і C. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.**

21. Паралельні площини α і β перетинають сторону AB кута BAC в точках M і M_1, а сторону AC — відповідно в точках N і N_1. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо: 1) $AM = 12$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см; 2) $AM = 24$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см.

22. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, які не лежать в одній площині, мають спільну середину. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні. Чому дорівнюють кути $\Delta A_1B_1C_1$, якщо: 1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$; 2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$?

23. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, точки M, N і P — середини відрізків DA, DB, DC. Доведіть, що площини ABC і MNP паралельні. Чому дорівнюють кути ΔABC, якщо: 1) $\angle M = 120°$, $\angle N = 25°$, $\angle P = 35°$; 2) $\angle M = 40°$, $\angle N = 40°$, $\angle P = 80°$?

24*. Доведіть, що три прямі, які перетинають кілька паралельних площин, визначають на кожній з них вершини трикутників, що є:
1) рівними, якщо дані прямі паралельні; 2) подібними, якщо дані прямі перетинаються в одній точці.

25*. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці кожного з яких лежать у двох даних паралельних площинах, належать одній площині.

26*. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник. Чи паралельна пряма AD_1 площині BCC_1? Відповідь обґрунтуйте.

27*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площини: 1) A_1BD і B_1CD_1; 2) AB_1D_1 і BDC_1. Доведіть, що дані площини ділять відрізок AC_1 (для другого випадку A_1C) на три рівні частини.

28*. Дано дві паралельні площини й точку O, що не належить їм. З точки O проведено три прямі, які перетинають дані площини відповідно в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1. $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $B_1C_1 = d$. Знайдіть: 1) A_1B_1; 2) площу $\Delta A_1B_1C_1$.

29*. Два рівні рівносторонні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні й однаково напрямлені. BE і CD — висоти ΔABC, C_1D_1 — висота $\Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть кути між прямими: 1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1; 3) CD і A_1B_1; 4) AC і C_1D_1; 5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

30*. Два рівні рівносторонні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні, але протилежно напрямлені. BE і CD — висоти ΔABC, C_1D_1 — висота D $A_1B_1C_1$. Знайдіть кути між прямими: 1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1; 3) CD і A_1B_1; 4) AC і C_1D_1; 5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

Проявіть компетентність

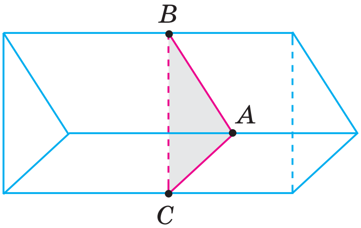
31. Чому можна одночасно висунути усі шухляди тумбочки?

32. Поясніть, як розмітити на стінках шафи місця для кріплення поличок.

33. Як перевірити за допомогою косинця, чи правильно навісили двері (мал. 143). На якій властивості ґрунтується така перевірка?

Мал. 143

34. Канал із трикутним перерізом і глибиною 2,8 м перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника. Щоб визначити гідростатичний тиск на перегородку, треба знати її площу. Обчисліть площу трикутного щита ABC, якщо його розміщено вертикально (мал. 144).



Мал. 144

35. Якщо драбина розташована перпендикулярно до підлоги, то чи можна стверджувати, що вона розташована перпердикулядно і до стелі? Якщо так, то за якою теоремою? Якщо ні, то чому?

36. Скільки пар паралельних прямих нараховує гральний кубик? Як довести паралельність цих прямих?

37. Як перевірити: 1) чи правильно змайстровано тумбочку з трьома шухлядами (мал. 145); 2) паралельність кришки тумбочки з площиною підлоги; 3) паралельність днищ шухляд?

Мал. 145

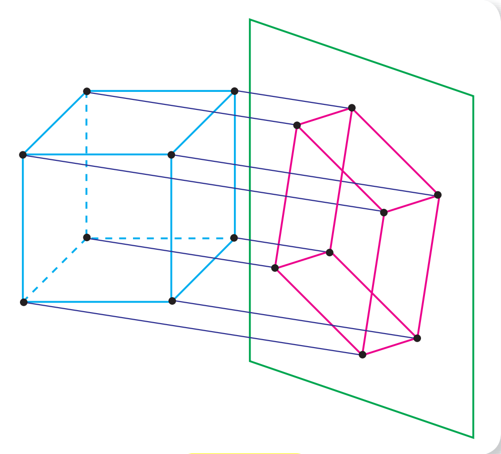
§ 2.6. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Ви вже знаєте, що для вивчення властивостей просторових фігур користуються макетами цих фігур або їх зображеннями на площині. На малюнку 146 ви бачите каркасний макет куба, який розміщено перед екраном (стіною, аркушем паперу), освітленим сонцем. Макет куба дає на екрані тінь, яка є зображенням куба на площині. Якщо промені сонця вважати паралельними прямими, то можна сказати, що зображення куба одержали за допомогою *паралельного проектування*.

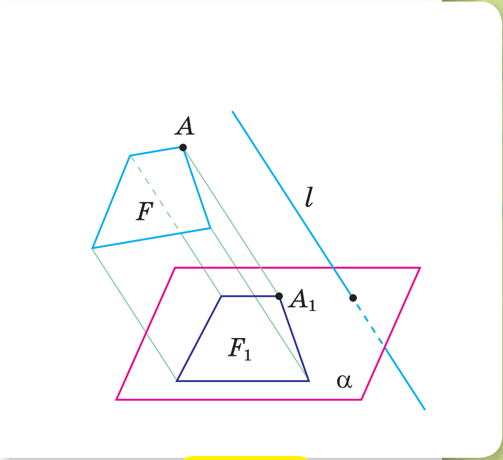
1. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Подивіться на малюнок 147. Пряма l перетинає площину α. Через точку A фігури F проведено пряму, яка паралельна прямій l і перетинає площину α в точці A_1. Ця точка є *зображенням* точки A в площині α. Побудувавши в такий спосіб зображення кожної точки фігури F, дістали фігуру F_1 — зображення фігури F у площині α. Фігура, яку проектували, називається *оригіналом*. Зображення фігури, яке дістали, називається *паралельною проекцією* цієї фігури. Пряма l задає *напрям проектування*. Прямі, паралельні прямій l, називаються *проектувальними прямими*, а площина α — *площиною проекцій*.

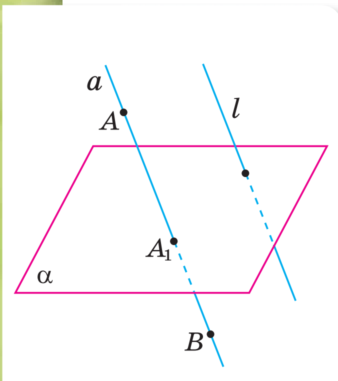
? Що є проекцією прямої, яка паралельна напряму проектування? Точка, бо кожна точка даної прямої проектується в ту саму точку площини проекцій (мал. 148).



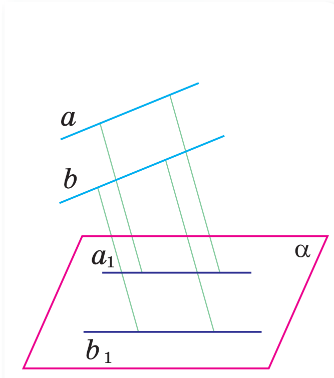
Мал. 146



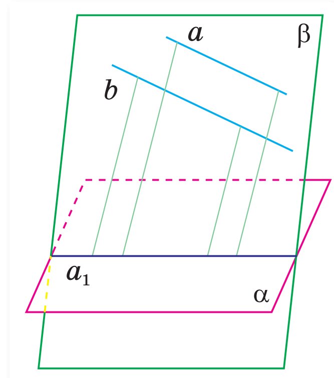
Мал. 147



Мал. 148



Мал. 149



Мал. 150

У паралельному проектуванні прямі й відрізки, що проектуються, вважають не паралельними напряму проектування, якщо про це спеціально не зазначено.

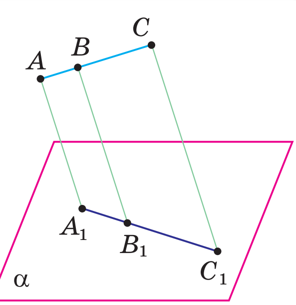
Основні властивості паралельного проектування.

1. Паралельною проекцією точки є точка.

2. Паралельною проекцією прямої є пряма.

3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 149) **або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напряму проектування** (мал. 150).

4. Якщо відрізки лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків (мал. 151).



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 151

З наведених властивостей випливає, що під час паралельного проектування деякі властивості фігур зберігаються, а деякі — ні (табл. 7).

Таблиця 7

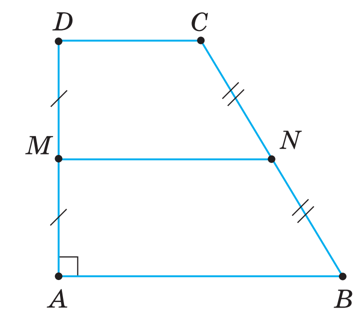
Властивості фігур, що зберігаються під час паралельного проектування	Властивості фігур, що не зберігаються під час паралельного проектування
1) **належність фігури своєму класу фігур** (точку зображають точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо); 2) **належність точок прямій;** 3) **порядок розміщення точок на прямій** (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції); 4) **паралельність прямих;** 5) **рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій**	1) **довжина відрізка;** 2) **міра кута** (зокрема, прямий кут зображають довільним кутом); 3) **перпендикулярність прямих;** 4) **рівність (пропорційність) кутів;** 5) **рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються**

Властивості фігури, що зберігаються при паралельному проектуванні, називають ***афінними властивостями*** цієї фігури. Наприклад, властивість прямих бути паралельними — афінна властивість цих прямих.

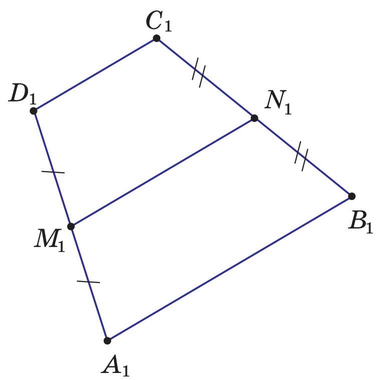
2. ПОБУДОВА ЗОБРАЖЕНЬ ПРИ ПАРАЛЕЛЬНОМУ ПРОЕКТУВАННІ

Задача 1. Побудуйте паралельну проекцію прямокутної трапеції $ABCD$, у якої $AD \perp AB$, $AB : DC = 2 : 1$, MN — середня лінія.

Розв'язання. Спочатку побудуємо оригінал даної трапеції (мал. 152). Спираючись на нього, з'ясуємо властивості шуканої проекції. Трапеція є чотирикутником, тому її проекція також є чотирикутником. Позначимо його $A_1B_1C_1D_1$. У даній трапеції: основи AB і DC паралельні, тому їх проекції A_1B_1 і D_1C_1 теж паралельні; бічні сторони AD і BC не паралельні, тому їх проекції A_1D_1 і B_1C_1 теж не паралельні. Отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — трапеція. За умовою, $AB : DC = 2 : 1$, тому $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$, бо зберігається відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. За умовою, $AD \perp AB$. Оскільки перпендикулярність прямих не зберігається під час паралельного проектування, то у проекції $\angle D_1A_1B_1$ не обов'язково прямий. Отже, дана прямокутна трапеція може зображуватися не прямокутною трапецією (мал. 153). Точки M і N є серединами бічних сторін AD і BC відповідно. Оскільки зберігається належність точок прямій та їх порядок на прямій, а також рівність відрізків, що лежать на одній прямій, то проекції M_1 і N_1 даних точок є серединами бічних сторін A_1D_1 і B_1C_1 проекції $A_1B_1C_1D_1$. Отже, середня лінія трапеції зображується середньою лінією її проекції. Трапеція $A_1B_1C_1D_1$ — шукана.



Мал. 152



Мал. 153

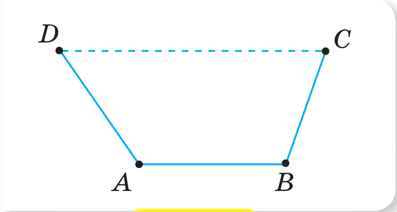
Щоб побудувати паралельну проекцію планіметричної фігури, спочатку побудуйте її оригінал. Потім, спираючись на оригінал, виділіть властивості фігури:
— які зберігаються під час паралельного проектування (на них треба спиратися, будуючи проекцію);
— які не зберігаються під час паралельного проектування (їх не можна використовувати, будуючи проекцію).

Як побудувати паралельну проекцію многогранника? Для цього треба з'ясувати, як зображуватимуться всі його грані, та послідовно виконати побудову проекції кожної з них. Розглянемо приклади.

Задача 2. Побудуйте зображення прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основою якої є рівнобічна трапеція.

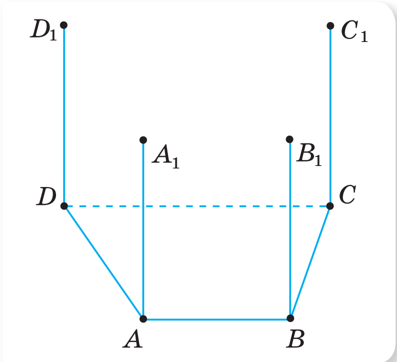
Розв'язання. Побудову призми виконуємо в три етапи: 1) будуємо зображення однієї з основ; 2) проводимо бічні ребра; 3) будуємо зображення другої основи.

1. В основі даної призми лежить рівнобічна трапеція. Її паралельні сторони проектуються в паралельні відрізки, а не паралельні — у не паралельні й не обов'язково рівні відрізки. Тому проекцією основи даної призми є довільна трапеція $ABCD$ (мал. 154).



Мал. 154

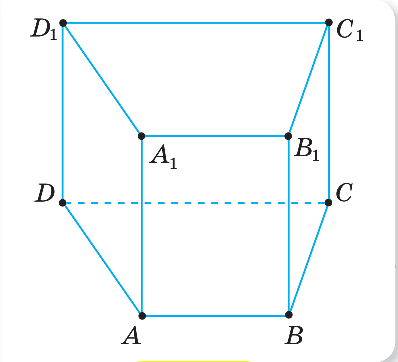
2. Бічними гранями прямої призми є прямокутники, отже, їх проекціями є паралелограми. Тому проекції бічних ребер є рівними паралельними відрізками. Проводимо їх паралельно вертикальному краю аркуша (мал. 155).



Мал. 155

3. Сполучивши кінці паралельних відрізків, дістанемо зображення другої основи даної призми. При цьому враховується те, що основи призми — рівні многокутники, які лежать у паралельних площинах. Отже, їх проекції є рівними многокутниками з відповідно паралельними сторонами (мал. 156).

Пряма призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — шукана.



Мал. 156

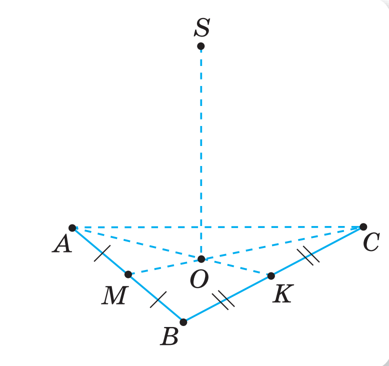
На зображенні многогранника видимі лінії проводимо суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

Задача 3. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди $SABC$.

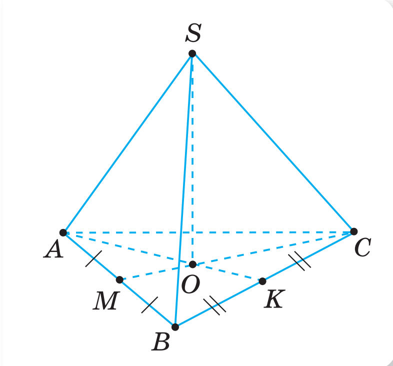
Розв'язання. Побудову піраміди виконуємо в три етапи: 1) будуємо зображення основи; 2) з'ясовуємо, де має розміщуватися вершина піраміди; 3) проводимо бічні ребра.

1. В основі даної піраміди лежить правильний трикутник. Його проекцією є довільний трикутник ABC (мал. 157), оскільки рівність сторін правильного трикутника та рівність його кутів не зберігаються під час проектування.

2. Вершина правильної піраміди лежить на прямій, що містить висоту піраміди. Висота даної піраміди проходить через точку перетину медіан її основи. Через цю точку проводимо пряму паралельно вертикальному краю аркуша. На цій прямій позначаємо довільну точку S. Дістали зобра-



Мал. 157



Мал. 158

ження вершини піраміди (мал. 157).

3. Сполучивши вершину піраміди з вершинами її основи, дістанемо зображення бічних ребер піраміди. При цьому враховується те, що: бічними гранями правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники; на зображенні рівність бічних сторін цих трикутників не зберігається, тому проекції бічних ребер піраміди — це відрізки довільної довжини, що з'єднують вершину піраміди з вершинами її основи (мал. 158).

Піраміда $SABC$ — шукана.

1. Розміщення висоти піраміди залежить від властивостей піраміди.
2. Якщо піраміда правильна, то її висота проходить через центр многокутника основи.
3. Висоту піраміди проводять паралельно вертикальному краю аркуша.
4. Розміщення вершини піраміди визначають після побудови її висоти.

3. ПРОСТЕ ВІДНОШЕННЯ ТРЬОХ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ

Число l **називається *простим відношенням* трьох точок A, B і M, що лежать на одній прямій, якщо воно дорівнює відношенню довжин відрізків AM і MB.**

Позначають: $(AB; M)$.

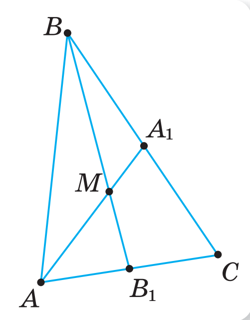
Отже, за означенням:

$(AB; M) = l = AM : MB$.

Точки простого відношення обов'язково мають бути упорядкованими. Наприклад, якщо AA_1 — медіана трикутника ABC, M — точка перетину медіан трикутника, то $(AA_1; M) = AM : MA_1 = 2 : 1$, але $(A_1A; M) = A_1M : MA = 1 : 2$ (мал. 159).

Отже, якщо $AM \neq MA_1$, то $(AA_1; M) \neq (A_1A; M)$.

Враховуючи, що при паралельному проектуванні зберігається рівність (пропорційність) відрізків,



Мал. 159

що лежать на паралельних прямих або на одній прямій, можна зробити висновок: **просте відношення трьох точок, що лежать на одній прямій, при паралельному проектуванні зберігається.**

Дізнайтеся більше

го проектування ґрунтується на такій властивості паралельних прямих: **Якщо одна з паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.**

2. Значний внесок у розвиток теорії зображень просторових фігур на площині зробив російський геометр **М. Ф. Четверухін** (1891–1974). Він обґрунтував можливість побудови наочного зображення просторових фігур більш простими способами, ніж це робиться в *аксонометрії* — науковій теорії про способи зображень геометричних фігур. Завдяки досягненням вченого елементи теорії зображень стали доступними для вивчення у шкільному курсі геометрії.

Пригадайте головне

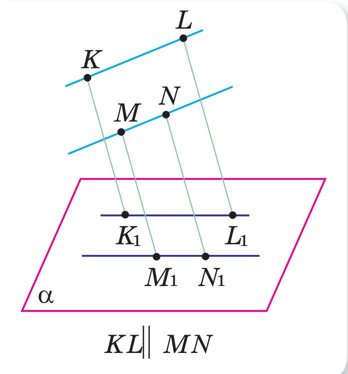
1. Що таке паралельне проектування; площина проекцій; проектувальні прямі?
2. Назвіть властивості паралельного проектування.
3. Які властивості фігур зберігаються під час паралельного проектування?
4. Назвіть властивості фігур, які не зберігаються під час паралельного проектування.
5. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника; паралелограма; прямокутника; трапеції?
6. Поясніть, як побудувати зображення прямої призми; піраміди.

Розв'яжіть задачі

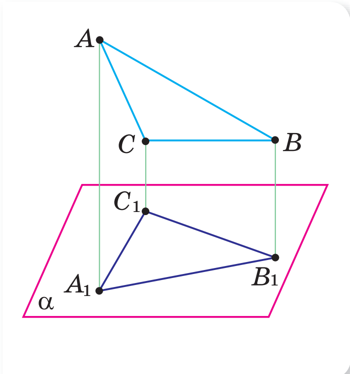
1'. На малюнках 160–162 зображено фігуру-оригінал та її паралельну проекцію в площині α. Назвіть:
1) фігуру, яку проектували;
2) проектувальні прямі;
3) паралельну проекцію даної фігури.

2'. Чи може чотирикутник бути проекцією трикутника?

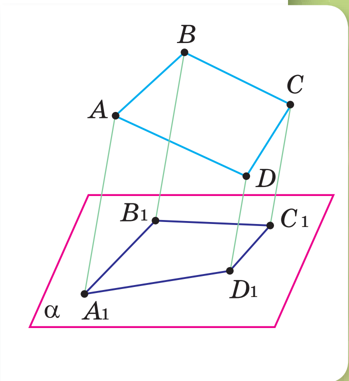
3'. Чи може трикутник бути проекцією чотирикутника?



Мал. 160



Мал. 161



Мал. 162

4'. Відрізки AB і BC лежать на одній прямій. Точка B лежить між точками A і C. Як відносяться проекції даних відрізків, якщо:
1) $AB : BC = 3 : 4$; 2) $AB : BC = 7 : 1$; 3) $AB : BC = 4 : 9$?

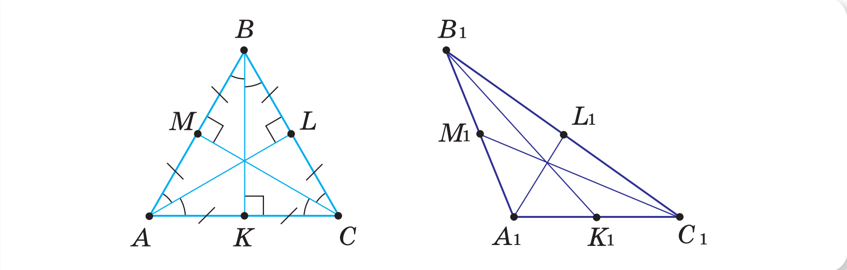
5'. На промені AO відкладіть відрізки:
1) $AB = 2$ см і $BC = 3$ см;
2) $AB = 2$ см і $BC = 1$ см;
2) $AB = 3$ см і $BC = 1{,}5$ см.
Чому дорівнює відношення їх проекцій?

6'. Відрізки AB і CD лежать на паралельних прямих. Як відносяться їх проекції, якщо:
1) $AB : CD = 3 : 4$; 2) $AB : CD = 7 : 1$; 3) $AB : CD = 4 : 9$?

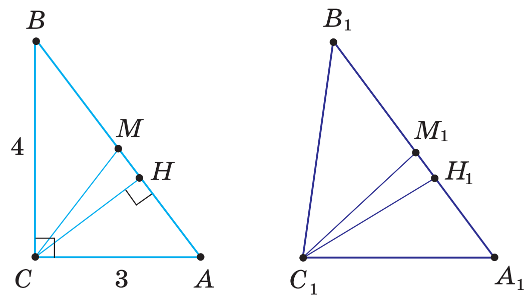
7'. Точка B лежить між точками A і C. 1) Чи може проекція точки C лежати між проекціями точок A і B? 2) Чи може проекція точки A лежати між проекціями точок B і C? 3) Проекція якої точки лежить між проекціями двох інших?

8. На малюнках 163, 164 зображено трикутник ABC та його паралельну проекцію $A_1B_1C_1$. Назвіть властивості ΔABC, які під час проектування: 1) збереглися; 2) не збереглися.

У прямокутному трикутнику основа висоти до гіпотенузи ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться, як квадрати катетів (див. мал. 164).



Мал. 163



Мал. 164

9°. Чи може паралельною проекцією паралелограма бути:
1) квадрат: 2) ромб; 3) трапеція?

10°. Чи може паралельною проекцією квадрата бути:
1) квадрат: 2) ромб; 3) трапеція?

11°. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, в якому з’єднано відрізками: 1) середину більшої сторони з вершинами протилежної сторони; 2) середини протилежних сторін; 3) середини суміжних сторін.

12°. Чи можна при паралельному проектуванні трапеції дістати: 1) трикутник; 2) ромб; 3) трапецію? Відповідь поясніть.

13°. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції $ABCD$, в якій проведено середню лінію, паралельну основі: 1) AB; 2) BC; 3) CD.

14°. Побудуйте проекцію трапеції $ABCD$, в якій відрізок KP сполучає середини її діагоналей і паралельний основі: 1) AB; 2) BC; 3) CD.

15°. **Побудуйте проекцію правильного: 1) трикутника; 2) чотирикутника; 3) шестикутника. Як побудувати проекцію центра даного многокутника?**

16°. Побудуйте зображення правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

17°. Побудуйте зображення правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

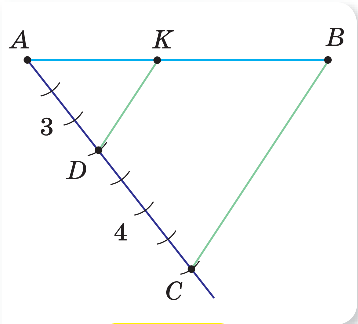
18°. Точки A, B і C лежать на прямій і проектуються на площину α в точки A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть A_1B_1, якщо $AB = 7$, $AC = 3$, $B_1C_1 = 5$.

19. Під час паралельного проектування деякої фігури дістали відрізок. Якою могла бути фігура-оригінал? Скільки випадків треба розглянути?

20. **Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.**

21. Побудуйте проекцію відрізка AB, який точка K ділить у відношенні:
1) 1 : 3; 2) 3 : 5; 3) 3 : 1,5; 4) 2 : 0,5.

Щоб поділити відрізок AB у відношенні $m : n$ (мал. 165): 1) проведіть допоміжний промінь з початком у точці A; 2) від точки A відкладіть на цьому промені m рівних відрізків і позначте точку D; 3) від точки D відкладіть на цьому ж промені n рівних відрізків і позначте точку C — кінець останнього відрізка; 4) проведіть пряму CB; 5) через точку D проведіть пряму, паралельну CB — вона перетинає відрізок AB у шуканій точці K.



Мал. 165

22. Побудуйте проекцію прямокутного ΔABC, в якому проведено висоту CH до гіпотенузи, а катети дорівнюють: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см.

23. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, бічна сторона — b, а висота, проведена до основи, — c. З основи даної висоти трикутника проведено перпендикуляр до його бічної сторони. Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо: 1) $a = 10$, $b = 13$, $c = 12$; 2) $a = 14$, $b = 25$, $c = 24$.

24. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b, в якому позначено центр вписаного кола й центр описаного кола, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$.

25. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, в якому проведено перпендикуляр з його вершини до діагоналі, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см; 2) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см.

26. Побудуйте проекцію ромба з гострим кутом 60°, в якому проведено висоту з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.

27. Діагоналі ромба зі стороною a дорівнюють d_1 і d_2. Висота ромба проходить через точку перетину діагоналей. Побудуйте проекцію ромба, якщо: 1) $a = 25$ см, $d_1 = 30$ см, $d_2 = 40$ см; 2) $a = 169$ см, $d_1 = 130$ см, $d_2 = 312$ см.

28. Побудуйте проекцію трапеції $ABCD$, у якої бісектриси тупих кутів перетинаються на більшій основі й одна з них паралельна стороні: 1) AB; 2) BC; 3) CD.

29. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції, в якій проведено висоту з вершини тупого кута, а основи дорівнюють: 1) 12 см і 24 см; 2) 8 см і 14 см.

30. Побудуйте зображення прямої призми, в основі якої лежить прямокутний ΔABC з катетами: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через вершину C_1 призми й висоту CH до гіпотенузи основи.

31. Побудуйте зображення прямої призми, в основі якої лежить ромб з гострим кутом.

32. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить паралельно її бічному ребру й перетинає основу по висоті ромба, яку проведено з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.

33. Побудуйте зображення піраміди, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди, вершину її основи та центр кола, вписаного в основу.

34. Побудуйте зображення піраміди, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами: 1) $AB = 12$ см, $CD = 24$ см; 2) $AC = 8$ см, $BD = 14$ см. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди і висоту основи, проведеної з вершини її тупого кута.

35*. У трикутнику ABC проведено бісектрису кута B і відомо, що $AB : BC = m : n$. Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо: 1) $m = 2$, $n = 3$; 2) $m = 5$, $n = 4$.

36*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c, в якому позначено центр вписаного кола й центр описаного кола, якщо: 1) $a : b : c = 3 : 4 : 5$; 2) $a : b : c = 8 : 15 : 17$.

37*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника, на сторонах якого побудовано квадрати, якщо трикутник: 1) є рівнобедреним; 2) має кут $30°$.

38*. Побудуйте проекцію тупокутного трикутника з кутом: 1) $120°$; 2) $150°$. У яку точку проектується центр вписаного кола? А центр описаного кола?

39*. Квадрат $ABCD$ добудовано до рівнобічної трапеції так, що сторона CD квадрата стала однією з основ трапеції, а сторона BC — висотою трапеції. Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

40*. Правильний трикутник добудовано до прямокутної трапеції з гострим кутом $30°$, висотою, яка дорівнює висоті даного трикутника, та меншою основою, що дорівнює стороні даного трикутника. Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

41*. Побудуйте зображення правильної трикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну шестикутну призму.

42*. Побудуйте зображення правильної шестикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну призму.

43*. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи: 1) $AB = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AB = 24$ см, $BC = 1$ см. Побудуйте січну площину, яка проходить через перпендикуляр, проведений з вершини нижньої основи до її діагоналі, та центр верхньої основи. Через центр нижньої основи проведіть другу січну площину, яка паралельна першій. По якій прямій друга січна площина перетинає верхню основу?

44*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кут: 1) 120°; 2) 150°. Висота піраміди проходить через центр даного кола.

45*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кути: 1) 30° і 60°; 2) 40° і 50°. Висота піраміди проходить через центр даного кола.

46*. Побудуйте зображення куба. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну: 1) призму з найбільшою площею основи; 2) піраміду з найбільшою висотою.

47*. Побудуйте зображення правильної чотирикутної піраміди. Проведіть січні площини так, щоб дістати: 1) прямокутний паралелепіпед з найбільшою площею основи; 2) куб з найбільшим ребром.

Проявіть компетентність

48. Яким многокутником може бути тінь споруди на площині подвір'я, якщо споруда має форму:
1) прямокутного паралелепіпеда;
2) куба;
3) правильної чотирикутної піраміди?

49. Якої форми може бути предмет, якщо його тінь має форму:
1) рівностороннього трикутника;
2) прямокутного трикутника;
3) різностороннього трикутника;
4) прямокутника;
5) ромба;
6) рівносторонньої трапеції;
7) прямокутної трипеції?

50. Чи можна визначити кут нахилу даху, якщо його тінь утворює кут 45°. Чому?

51. Чи можна знайти площу дерев'яної дощечки, якщо відомо, що її паралельна проекція має вигляд квадрата зі стороною 10 см? Чому?

52. Драбину можна умовно поділити на декілька прямокутників. Чи володітиме тією ж характеристикою її тінь (мал. 166)? Які многокутники вона утворює? Чи може драбина спроектуватись у прямокутник? А в пряму? За яких умов це можливо?


Мал. 166

53. Назвіть по одному чи по декілька предметів, розміщених у класній кімнаті, паралельними проекціями яких є:
а) паралелограм;
б) трикутник;
в) еліпс.

§ 2.7. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ

Ви знаєте, що січну площину можна задати деякими трьома точками. Вони можуть розміщуватися не лише на ребрах многогранника, а й на його гранях. Тоді постає задача побудови точок січної площини на ребрах даного многогранника. Вони й будуть вершинами шуканого перерізу. Для побудови перерізів многогранників у складніших випадках використовують *метод слідів*. Його суть розкривають такі задачі.

Задача. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три довільні точки, що лежать на різних гранях цієї призми.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана чотирикутна призма, α — січна площина. Позначимо довільну точку K на грані ABB_1A_1, точку M на грані CDD_1C_1 і точку L на грані ADD_1A_1 (мал. 174).

1. З точок K, L до площини основи $ABCD$ проведемо перпендикуляри KK_1, LL_1. Проведемо прямі KL і K_1L_1. Точка їх перетину належить *сліду січної площини* α, позначимо її X_1 (мал. 175).

2. З точки M до площини основи $ABCD$ проведемо перпендикуляр MM_1. Проведемо прямі LM і L_1M_1. Точка їх перетину належить *сліду січної площини* α, позначимо її X_2. Через точки X_1 і X_2 проведемо пряму l. (мал. 176).

3. Продовжимо ребро AD основи $ABCD$ призми до перетину з прямою l — отримаємо точку X_3. Вона також належить сліду січної площини α (мал. 177).

4. Точки L і X_3 лежать у площині грані ADD_1A_1. Проведемо через ці точки пряму, у перетині з ребром DD_1 отримаємо точку P, а в перетині з ребром AA_1 отримаємо точку Q. Точки P і Q належать січній площині α (мал. 178).

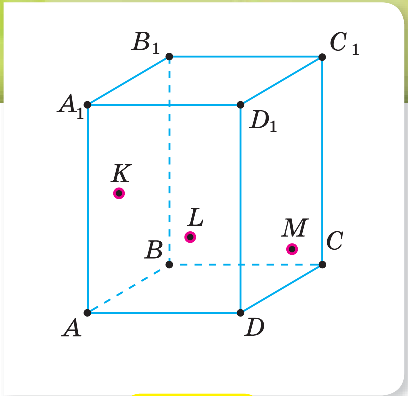
5. Через точки Q і K у площині грані ABB_1A_1 проведемо пряму, у перетині з ребром BB_1 отримаємо точку N. Точка N також належить січній площині α (мал. 179).

6. Через точки P і M у площині грані CDD_1C_1 проведемо пряму, у перетині із ребром CC_1 отримаємо точку O. Точка O також належить січній площині α (мал. 180).

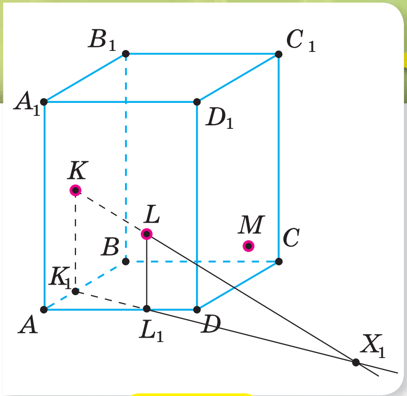
7. Сполучимо точки N і O. Чотирикутник $PQNO$ — шуканий переріз (мал. 181).

1. Щоб побудувати пряму перетину площин, знайдіть дві точки цієї прямої і проведіть через них пряму.

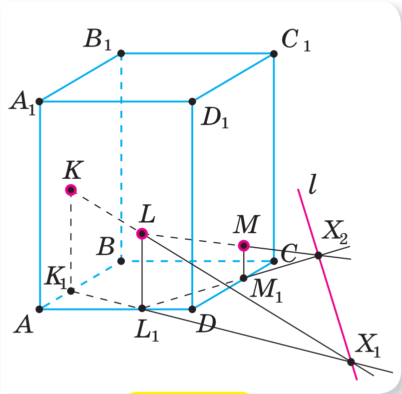
2. Щоб побудувати точку перетину прямої з площиною, знайдіть у площині пряму, яка перетинає дану пряму. Точка їх перетину і буде шуканою.



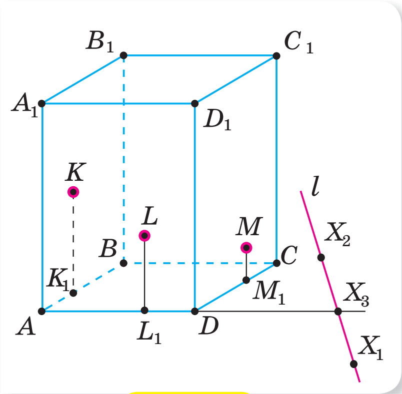
Мал. 174



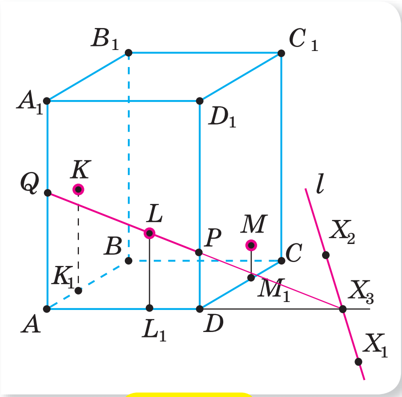
Мал. 175



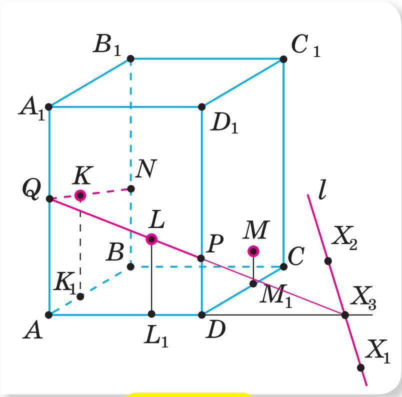
Мал. 176



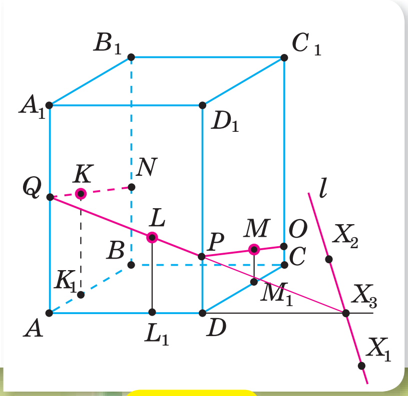
Мал. 177



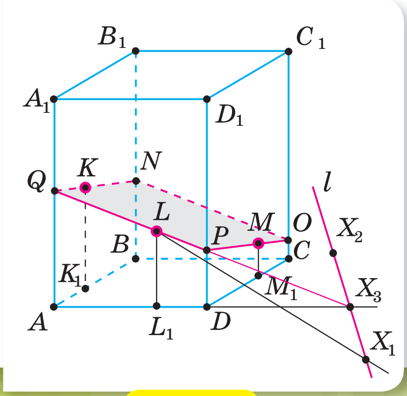
Мал. 178



Мал. 179



Мал. 180

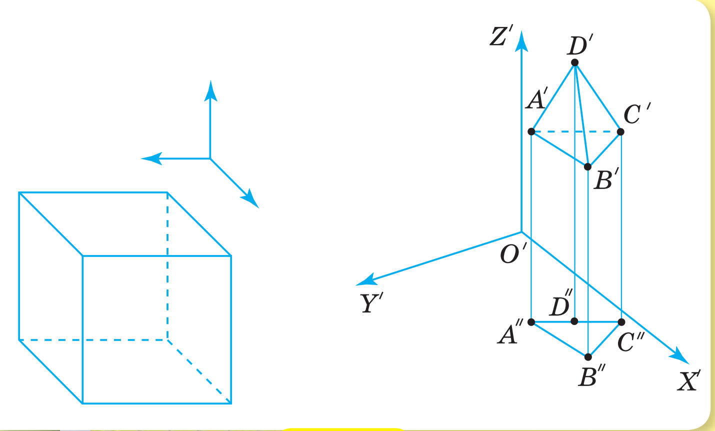


Мал. 181

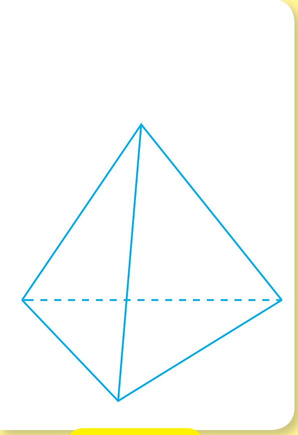
Дізнайтеся більше

1. У 1853 році відомий німецький математик Карл Польке (1810–1876) вперше сформулював і довів одну з основних теорем *аксонометрії* — наукової теорії про способи зображення геометричних фігур за допомогою паралельних проекцій з використанням системи координат із певним масштабом (мал. 182). Роком пізніше цю теорему узагальнив і довів більш простим способом інший німецький геометр Герман Амандус Шварц (1843–1821). Узагальнена теорема аксонометрії одержала назву «теорема Польке — Шварца». Її суть полягає в тому, що будь-який невироджений чотирикутник з його діагоналями можна розглядати як паралельну проекцію деякої трикутної піраміди (мал. 183). Ця теорема широко застосовується на практиці, в інженерії, архітектурі.

2. У вас могло виникнути запитання: *Як побудувати переріз многогранника, якщо площина перерізу і площина основи многогранника паралельні або майже паралельні?* Для побудови такого перерізу використовують *метод допоміжних площин.* Він більш громіздкий за побудовами, аніж метод слідів. Однак у випадках, які згадано в запитанні, та інших складніших випадках використання цього методу не уникнути. Розглянемо задачу.



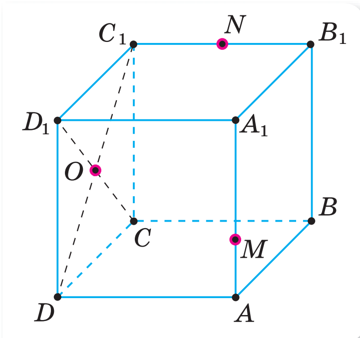
Мал. 182


Мал. 183

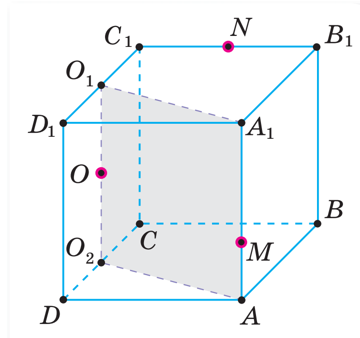
З а д а ч а. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, O такі, що $AM : MA_1 = 1 : 2$, точка N — середина ребра B_1C_1, точка O — точка перетину діагоналей грані DD_1C_1C.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб і α — шукана площина перерізу. Позначимо на ребрі AA_1 точку M, точку N — середину ребра B_1C_1, точку O — точку перетину діагоналей грані DD_1C_1C (мал. 184).

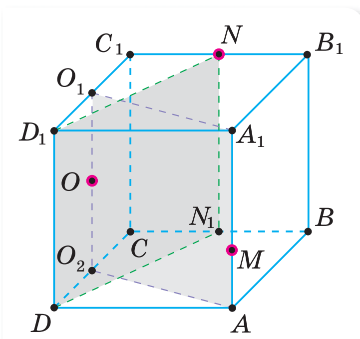
1. Через точку O і ребро AA_1, що містить точку M, проведемо першу допоміжну площину $AA_1O_1O_2$ (мал. 185).



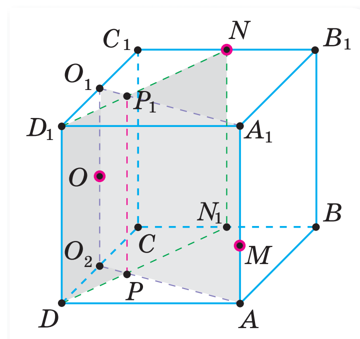
Мал. 184



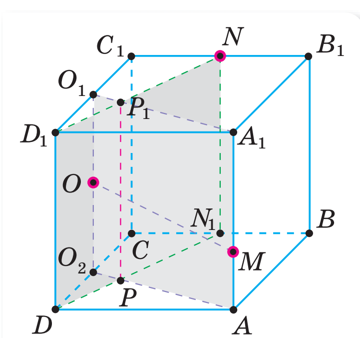
Мал. 185



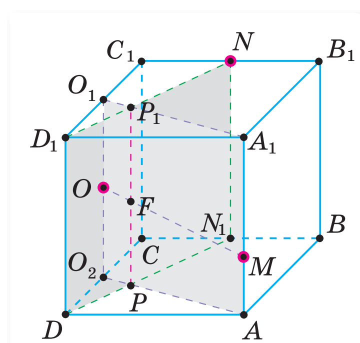
Мал. 186



Мал. 187



Мал. 188



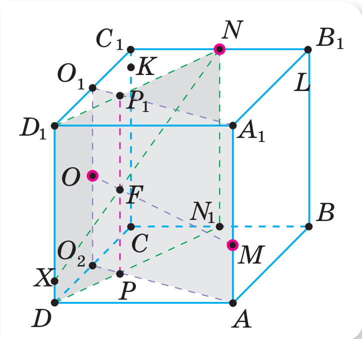
Мал. 189

2. Через точку N і ребро DD_1 проведемо другу допоміжну площину DD_1NN_1 (мал. 186).

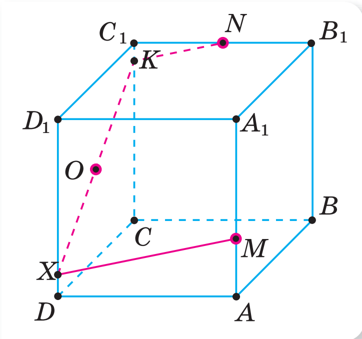
3. Дві допоміжні площини перетинаються по прямій PP_1 (мал. 187). Ця пряма лежить в обох допоміжних площинах.

4. У першій допоміжній площині $AA_1O_1O_2$ лежать дві точки шуканого перерізу — M і O, тому пряма MO лежить у січній площині α. Побудуємо пряму MO (мал. 188).

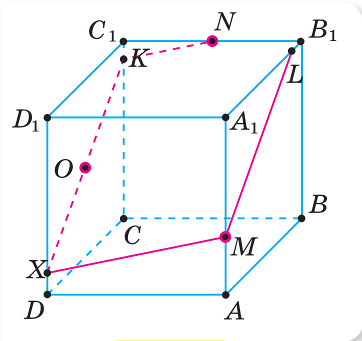
5. Дістали, що у площині $AA_1O_1O_2$ лежить як пряма MO, так і пряма PP_1. Вони перетинаються. Позначимо точку їх перетину F (мал. 189). Ця точка лежить в обох допоміжних площинах і в січній площині α.



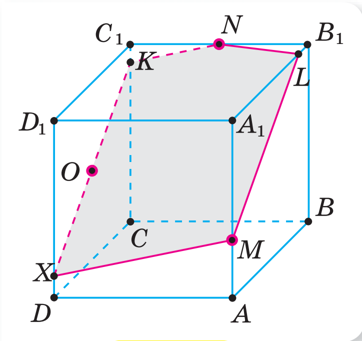
Мал. 190



Мал. 191



Мал. 192



Мал. 193

6. Дві точки N і F другої допоміжної площини лежать у січній площині α. Тому і пряма NF лежить у січній площині α. Побудувавши цю пряму, дістанемо точку X її перетину з ребром DD_1 (мал. 190).

7. У гранях AA_1D_1D, DD_1C_1C і $A_1B_1C_1D_1$ побудуємо сторони перерізу відповідно XM, XK і KN (мал. 191).

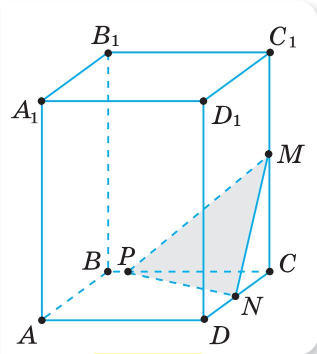
8. Оскільки протилежні грані куба паралельні, то січна площина α перетинає їх по паралельних прямих. Тому в грані ABB_1A_1 через точку M проведемо пряму, паралельну прямій XK. Вона перетинає ребро A_1B_1 у точці L (мал. 192).

9. Сполучивши точки L і N, одержимо многокутник $MXKNL$ — шуканий переріз (мал. 193).

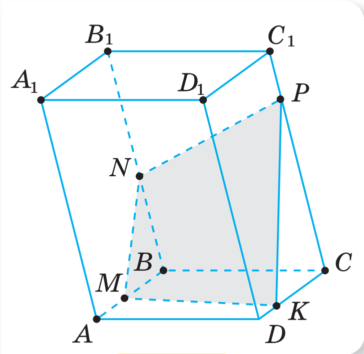
Пригадайте головне

1. Що таке січна площина многогранника? Як її можна задати?
2. Що є перерізом многогранника?
3. Як побудувати переріз многогранника методом слідів?

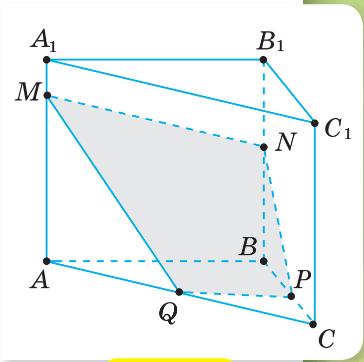
Розв'яжіть задачі



Мал. 194



Мал. 195

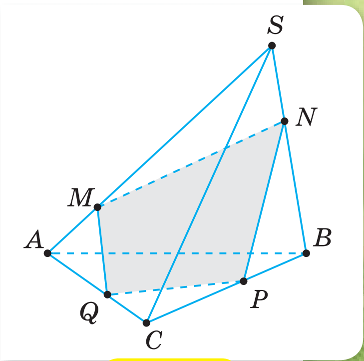


Мал. 196

54'. На малюнку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 194), MNP — його січна площина. Назвіть слід січної площини в площині грані:
1) ABB_1A_1; 2) CC_1D_1D; 3) $ABCD$.

55'. На малюнку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма (мал. 195), $MNPK$ — її січна площина. Назвіть слід січної площини в площині грані:
1) ABB_1A_1; 2) CC_1D_1D; 3) $ABCD$.

56'. На малюнку $ABCA_1B_1C_1$ — призма (мал. 196), $MNPQ$ — її січна площина. Назвіть площини, яким належать точки:
1) M; 2) N; 3) P; 4) Q.



Мал. 197

57'. На малюнку $SABC$ — піраміда (мал. 197), $MNPQ$ — її січна площина. Назвіть площини, яким належать точки:
1) M; 2) N; 3) P; 4) Q.

58°. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через його вершини A, B_1, C.

59°. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через середини ребер, що виходять з однієї вершини.

60°. Точка M — середина ребра SC піраміди $SABC$. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки A, B, M.

61°. Точки M і K — середини ребер SC і AC піраміди $SABC$. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки B, M, K.

62°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Побудуйте пряму перетину площин, що проходить через точки A, C, D і A, C, B_1.

63°. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через діагональ нижньої основи куба й середину однієї зі сторін верхньої основи.

64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Побудуйте його переріз площиною, яка проходить через середини ребер на трьох ребрах DD_1, C_1B_1, AB.

65. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна трикутна призма. Побудуйте її переріз площиною, яка проходить через точки M і K — середини відповідно ребер BB_1 і CC_1 та точку L на ребрі AA_1, що ділить його у відношенні 1 : 4. Знайдіть площу перерізу призми площиною MKL, якщо сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро — 10 см.

66. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма. Побудуйте її переріз площиною, яка проходить через точки A, B і точку M на ребрі CC_1.

67. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через діагональ основи піраміди, паралельно бічному ребру.

68. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною, яка проходить через ребро SB і точку K, яка лежить на ребрі AC.

69. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через дві точки, що лежать на бічних ребрах піраміди, і точку, яка належить основі піраміди.

70*. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною BKL, де точка K — середина ребра AA_1, а точка L — середина ребра CC_1. Доведіть, що отриманий переріз — паралелограм.

71*. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через діагональ AC основи паралельно діагоналі BD_1. Доведіть, що якщо основа паралелепіпеда — ромб і кути ABB_1 і CBB_1 — прямі, то отриманий переріз — рівнобедрений трикутник.

72*. Побудуйте перерізи правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ двома паралельними площинами. Одна із цих площин проходить через середини ребер AB і AA_1 та середину відрізка OO_1, який сполучає точки перетину діагоналей основ призми. Друга січна площина ділить відрізок OO_1 у відношенні 1 : 3. Знайдіть відношення площ цих перерізів.

73*. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — призма. Побудуйте її переріз площиною, яка проходить через середини сторін AB, BC і вершину D.

Проявіть компетентність

74. На предметах довкілля наведіть приклади, що ілюструють многогранник з деяким його перерізом.

75. Наведіть приклад побутової ситуації, коли постає задача побудови перерізу многогранника.

76. У шафі треба розмістити поличку. Які вимірювання треба зробити, щоб поличка розміщалася строго горизонтально?

77. Цеглину треба розділити навпіл. Як проходитиме січна площина?

78. Дві прямокутні дощечки треба з'єднати під прямим кутом. Як розмітити перерізи дощечок?

79. На розгортці куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано три точки, через які проходить січна площина в кубі. Одна із цих точок лежить на ребрі AA_1 куба й ділить його на відрізки у відношенні 1 : 3, друга — на ребрі BB_1 і ділить його на відрізки 3 : 1, а третя — на середині ребра CD основи. Як на розгортці розміщуватимуться сліди січної площини?

80. На розгортці правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ задано три точки, через які проходить січна площина в призмі. Одна із цих точок лежить на ребрі BB_1 і ділить його на відрізки у відношенні 1 : 2, друга — на середині ребра CC_1, а третя — у центрі основи ABC. Як на розгортці розміщуватимуться сліди січної площини?

Контрольні запитання

1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Сформулюйте й доведіть властивості кутів між прямими, що перетинаються.
3. Які прямі в просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
4. Як формулюється аксіома паралельних прямих?
5. Сформулюйте й доведіть властивості паралельних прямих у просторі.
6. Дайте означення мимобіжним прямим. Як їх позначають?
7. Що таке кут між мимобіжними прямими?
8. Сформулюйте й доведіть ознаку мимобіжних прямих.
9. Поясніть, які прямі в просторі вважають перпендикулярними. Яка їх властивість?
10. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої; між паралельними прямими.
11. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і площини. Як їх позначають?
12. Дайте означення паралельних прямої і площини.
13. Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямої і площини; властивості паралельних прямої і площини.
14. Як можуть взаємно розміщуватися дві площини?
15. Сформулюйте й доведіть властивості площин, що перетинаються.
16. Дайте означення паралельним площинам. Як їх позначають?
17. Сформулюйте й доведіть ознаки паралельності площин; властивості паралельних площин.
18. Що таке паралельне проектування; напрям проектування; площина проекцій; проектувальні прямі?
19. Назвіть основні властивості паралельного проектування.
20. Поясніть, як побудувати зображення прямої призми; піраміди.
21. Що таке просте відношення трьох точок?

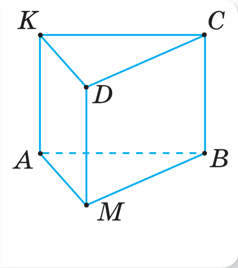
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі й знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 — 15 хв.

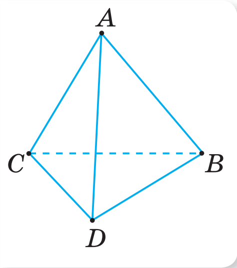
№ 1

1° На якому з малюнків прямі AB і CD не є мимобіжними?

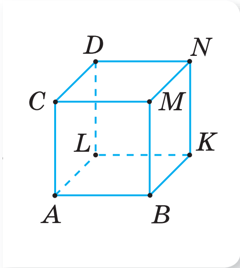
А.



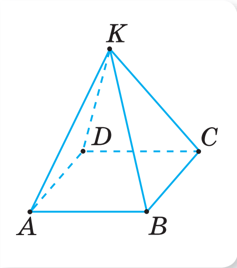
Б.



В.



Г.



2° Пряма a не лежить у площині квадрата $ABCD$ і паралельна його стороні AB. Яке твердження є правильним?

А. $a \,||\, CD$. **Б.** $a \times CD$. **В.** $a \,||\, AC$. **Г.** $a \,||\, BD$.

3° Дано: $\alpha \,||\, \beta$, $MN \in \alpha$, $M_1N_1 \in \beta$, $MM_1 \,||\, NN_1$, $MN = 10$ см. Яка довжина відрізка M_1N_1?

А. 5 см. **Б.** 10 см. **В.** 15 см. **Г.** 20 см.

4 Сторона AB трикутника ABC лежить у площині α, а вершина C не належить їй. На сторонах AC і BC трикутника позначено точки K і N так, що $AK : AC = 2 : 3$, $BN : NC = 2 : 1$. Яке взаємне розміщення прямої KN і площини α?

А. $KN \in \alpha$.
Б. $KN \times \alpha$.
В. $KN \,||\, \alpha$.
Г. Не можна визначити.

5* Площини α і β паралельні. Ромб $ABCD$ зі стороною 10 см лежить у площині α. Через його вершини проведено паралельні прямі, що перетинають площину β у точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть діагоналі чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо більша діагональ ромба $ABCD$ дорівнює 16 см.

А. 5 см і 10 см.
Б. 8 см і 10 см.
В. 10 см і 16 см.
Г. 12 см і 16 см.

№2

1° Точка C є серединою відрізка AB, а точка D — серединою відрізка AC. У якому порядку розміщені точки A, B, C і D на паралельній проекції відрізка AB?

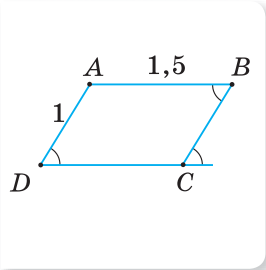
А. A, B, C, D.
Б. A, C, B, D.
В. A, D, C, B.
Г. A, C, D, B.

2° Паралельною проекцією трикутника ABC є різносторонній $\Delta\, A_1B_1C_1$. Що є проекцією медіани $\Delta\, ABC$, проведеної з вершини C?

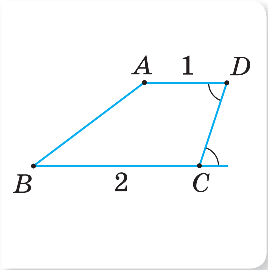
А. Медіана до сторони A_1B_1.
Б. Висота до сторони A_1B_1.
В. Бісектриса кута C_1.
Г. Медіана до сторони A_1C_1.

3° Треба побудувати паралельну проекцію трапеції $ABCD$, основа AD якої в півтора раза менша від другої основи. Яка з побудов правильна?

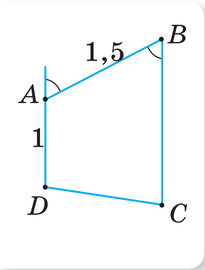
А.



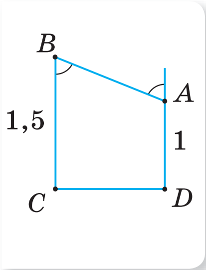
Б.



В.



Г.



4 Яких кутів не може бути у паралельної проекції паралелограма, вписаного в коло?

А. 80°, 90°, 90°, 100°.
Б. 90°, 90°, 90°, 90°.
В. 45°, 45°, 135°, 135°.
Г. 62°, 62°, 118°, 118°.

5* На зображенні правильної трикутної піраміди $SABC$ проведено січну площину, що проходить через основу висоти піраміди й бічне ребро SA. Яке ребро піраміди перетинає січна площина і в якому відношенні вона його ділить?

А. SB, 1 : 1.
Б. BC, 2 : 1.
В. AB, 1 : 2.
Г. BC, 1 : 1.

Розділ 3

Перпендикулярність прямих і площин

У розділі дізнаєтесь:

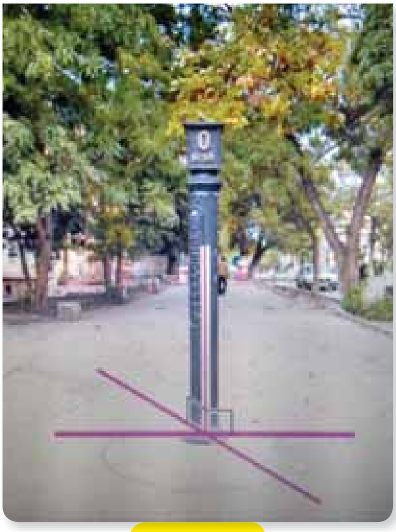
- про прямі, перпендикулярні до площин, перпендикулярні площини та їх властивості й ознаки;
- як розпізнавати й обґрунтовувати розміщення прямих і площин;
- про залежності між паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин;
- про відстані й кути у просторі та як їх обчислювати;
- що таке ортогональне проектування та як його використовувати для зображення просторових фігур;
- як застосовувати вивчені властивості й ознаки на практиці та під час розв’язування задач

§ 3.1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

1. ОЗНАЧЕННЯ ПРЯМОЇ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ДО ПЛОЩИНИ

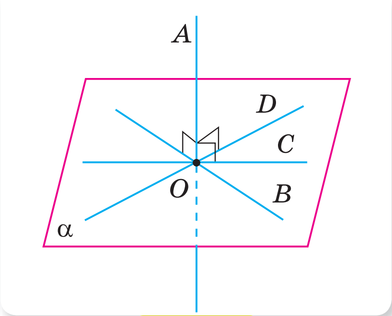
Ви знаєте, що коли пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину. Якщо пряма перетинає площину, то вона може бути перпендикулярною до цієї площини.

Подивіться на малюнок 198 Якщо через основу стовпа провісити прямі на поверхні землі, то кут між стовпом і кожною з цих прямих дорівнюватиме 90°. Тобто стовп перпендикулярний до будь-якої прямої, що проходить через його основу.



Мал. 198

На малюнку 199 пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD,... лежать у цій площині і проходять через точку перетину. Пряма AO перпендикулярна до кожної з цих прямих. Говорять, що пряма AO перпендикулярна до площини α.



Мал. 199

Записуємо: $AO \perp \alpha$ або $\alpha \perp AO$.

Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини, та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині та проходить через точку перетину.

2. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

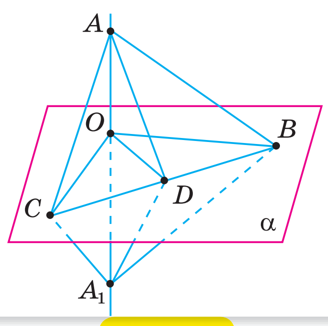
Для встановлення перпендикулярності прямої і площини за означенням треба перебрати безліч випадків взаємного розміщення даної прямої і прямих у площині, оскільки у площині лежить безліч прямих. Тому потрібна ознака, яка дозволить обмежити кількість таких випадків.

ТЕОРЕМА **(ознака перпендикулярності прямої і площини).**

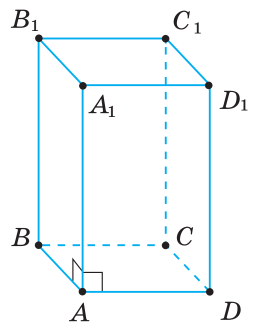
Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.

Дано: пряма AA_1 перетинає площину α в точці O (мал. 200); прямі OB і OC лежать у площині α, $AA_1 \perp OB$, $AA_1 \perp OC$.
Довести: $AA_1 \perp \alpha$.
Доведення. Доведемо, що пряма AA_1 перпендикулярна до будь-якої прямої OD, що лежить у площині α і проходить через точку перетину O (див. мал. 200). Відкладемо на прямій AA_1 у різні боки від точки O рівні відрізки OA і OA_1. Проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OD і OC у точках B, D і C. Ці точки сполучаємо з точками A і A_1 відрізками. Розглянемо три пари трикутників.
1. ΔABA_1 і ΔACA_1 рівнобедрені, оскільки відрізки OC і OB є висотами за умовою і медіанами за побудовою ($OA = OA_1$). Звідси $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$.
2. $\Delta ABC = \Delta A_1BC$ за трьома сторонами. У них $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$ за доведеним, BC — спільна сторона. З рівності трикутників випливає: $\angle ABD = \angle A_1BD$.
3. $\Delta ABD = \Delta A_1BD$ за двома сторонами (BD — спільна сторона, $AB = A_1B$) і кутом між ними ($\angle ABD = \angle A_1BD$). З рівності трикутників матимемо: $AD = A_1D$.
Отже, ΔAA_1D рівнобедрений. Тому його медіана OD є і висотою, тобто $AA_1 \perp OD$. За означенням, пряма AA_1 перпендикулярна до площини α.

? Чому ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 201) перпендикулярне до площини основи? Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD, то, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, воно перпендикулярне до площини основи $ABCD$.



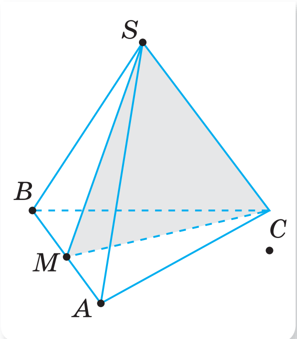
Мал. 200



Мал. 201

З а д а ч а 1. $SABC$ — правильна трикутна піраміда, точка M — середина ребра AB (мал. 202). Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини SMC.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки піраміда $SABC$ – правильна, то її основою є правильний трикутник, а бічні грані — рівнобедрені трикутники. Тоді медіани CM і SM трикутників ABC та ABS є їх висотами. Отже, пряма AB перетинає площину SMC і перпендикулярна до двох прямих CM і SM цієї площини, що проходять через точку M перетину. За ознакою перпендикулярності прямої та площини, пряма AB перпендикулярна до площини трикутника SMC.



Мал. 202

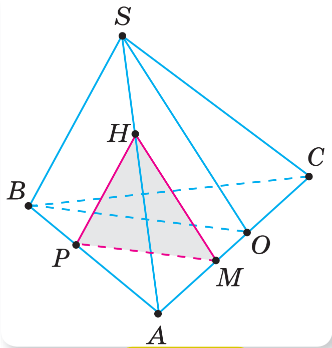
Щоб довести, що дана пряма перпендикулярна до площини:
а) виділіть на малюнку дві прямі, які лежать у площині і проходять через точку перетину;
б) доведіть, що дана пряма перпендикулярна до кожної з цих прямих.

З а д а ч а 2. Побудуйте переріз правильної піраміди $SABC$ площиною, яка проходить через точку M на ребрі AC і перпендикулярна до цього ребра.

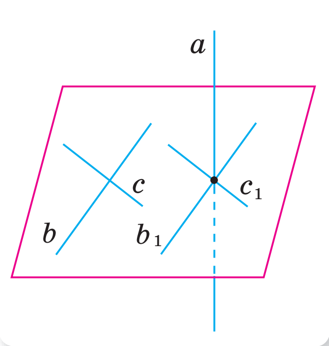
Р о з в' я з а н н я. Проведемо медіану BO ΔABC (мал. 203). Оскільки ΔABC рівносторонній, то $BO \perp AC$. Проведемо $MP \parallel BO$, тоді $MP \perp AC$. ΔSAC — рівнобедрений, тому його медіана SO є висотою. Проведемо $MH \parallel SO$, тоді $MH \perp AC$. Сполучимо точки P і H відрізком. ΔMHP — шуканий переріз. Справді, пряма AC перетинає площину MHP і перпендикулярна до двох прямих MH і MP цієї площини, що проходять через точку перетину. За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма AC перпендикулярна до площини MHP.

Чи можна узагальнити ознаку перпендикулярності прямої і площини? Так. Поміркуємо.

На малюнку 204 пряма a перпендикулярна до прямих b і c, які лежать у площині α і перетинаються, але не проходять через точку перетину пря-



Мал. 203



Мал. 204

мої і площини. Прямі a і b, a і c — мимобіжні. Проведемо через точку перетину прямої a з площиною α прямі $b_1 \| b$ і $c_1 \| c$. Тоді, за означенням кута між мимобіжними прямими, пряма a буде перпендикулярною до прямих b_1 і c_1, а отже, і до площини α. Тому ознаку перпендикулярності прямої і площини можна узагальнити і сформулювати так: **якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до площини.**

Справедливим є і таке твердження: **пряма, яка перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.**

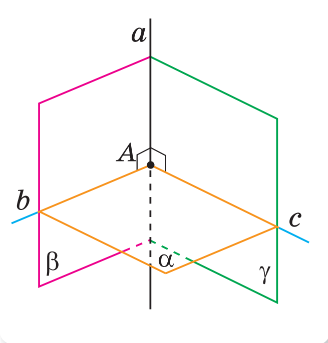
3. ПОБУДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Побудова площини, перпендикулярної до прямої, ґрунтується на наступній теоремі.

ТЕОРЕМА **(про існування та єдиність площини, перпендикулярної до прямої).**

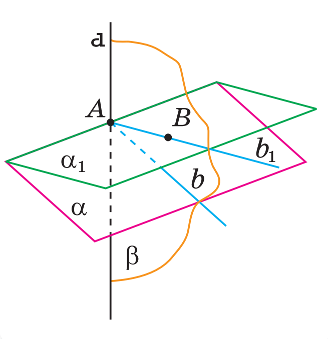
Через дану точку прямої можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї площину.

Дано: точка A і пряма a, $A \in a$ (мал. 205).
Довести: 1) існує площина α, така, що $A \in \alpha$ і $a \perp \alpha$; 2) площина α — єдина.
Доведення. 1. Доведемо, що площина α існує.
Проведемо через пряму a дві площини β і γ, а в кожній з цих площин через точку A проведемо відповідно прямі b і c, перпендикулярні до прямої a. Площина α, яка проходить через прямі b і c, перпендикулярна до прямої a за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Отже, існування площини доведено.



Мал. 205

2. Доведемо, що площина α — єдина.
Припустимо, що крім площини α існує інша площина α_1, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a (мал. 206). Нехай B точка площини α_1, яка не лежить у площині α. Проведемо через точку B і пряму a площину β. Вона перетне площину α і α_1 по різних прямих b і b_1, які є перпендикулярними до прямої a. А це суперечить умові, що на площині через дану точку прямої проходить тільки одна перпендикулярна до неї пряма. Отже, площина, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a — єдина.



Мал. 206

? Чому вважають, що доведення існування шуканої площини дає спосіб побудови цієї площини? Такий висновок ґрунтується на твердженні: якщо фігуру можна побудувати (тобто вказати спосіб її побудови), то вона існує.

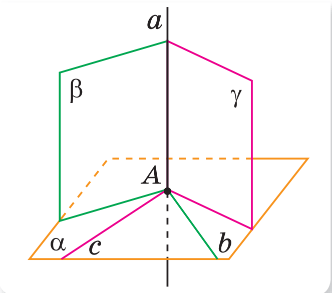
Щоб через дану точку прямої провести перпендикулярну до неї площину, треба:
1) через дану пряму провести дві різні площини;
2) на даній прямій обрати довільну точку;
3) через обрану точку в кожній із побудованих площин провести пряму, перпендикулярну до даної прямої;
4) через побудовані прямі провести площину.

Побудова прямої, перпендикулярної до площини, ґрунтується на наступній теоремі.

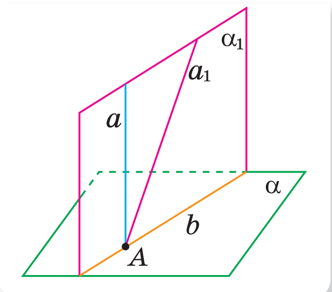
ТЕОРЕМА **(про існування та єдиність прямої, перпендикулярної до площини).**

Через дану точку площини можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї пряму.

Дано: точка A і площина α, $A \in \alpha$ (мал. 207).
Довести: 1) існує пряма a, така, що $a \perp \alpha$ і $A \in a$; 2) пряма a — єдина.
Доведення. 1. Доведемо, що пряма a існує.
Проведемо у площині α через точку A дві прямі b і c. Через точку A прямої b проведемо площину β перпендикулярну до прямої b. Аналогічно, через точку A прямої c проведемо площину γ перпендикулярну до прямої c. Площини β і γ перетнуться по прямій a. Маємо $a \perp b$, $a \perp c$, а значить, пряма a перпендикулярна до площини α.
2. Доведемо, що пряма a — єдина.
Припустимо, що крім прямої a існує інша пряма a_1, яка проходить через точку A і перпендикулярна до площини α (мал. 208). Проведемо через прямі a і a_1 площину α_1. Площина α_1 перетне площину α по деякій прямій b, причому $b \perp a$ і $b \perp a_1$. А це неможливо. Отже, припущення було неправильним, а правильним є те, що пряма a — єдина.



Мал. 207



Мал. 208

Щоб через дану точку площини провести перпендикулярну до неї пряму, треба:
а) у даній площині через задану точку провести дві прямі, що перетинаються;
б) через точку перетину цих прямих провести дві площини, кожна з яких перпендикулярна до однієї з побудованих прямих;
в) провести пряму перетину побудованих площин.

Ознака перпендикулярності прямої і площини застосовується на практиці. Щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до площини підлоги або стелі, перевіряють, чи є прямими кути між цією лінією і двома прямими, які лежать у площині підлоги або стелі і перетинають цю лінію.

Мал. 209

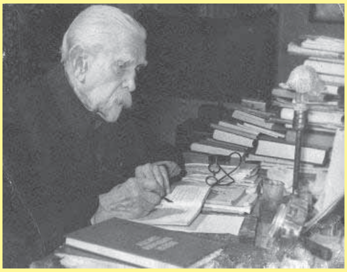
Дізнайтеся більше

1. Твердження про перпендикулярність прямої і площини можна зустріти в «Началах» Евкліда (бл. 365 – бл. 300 рр. до н.е.):

— Постулат 4: якщо до двох прямих, які перетинаються, через спільну їх точку під прямими кутами до цих прямих проведено пряму, то вона буде під прямими кутами і до площини, яка проходить через ці прямі;

— Постулат 13: з тієї самої точки до тієї самої площини не можна провести під прямими кутами дві прямі в той самий бік.

2. Знак «⊥» для позначення перпендикулярності увів французький математик й астроном П'єр Ерігон (1580–1643), автор шеститомного «Курсу математики» (1634–1637), який був надрукований французькою та латинською мовами.



3. Значний внесок у розвиток геометрії зробив відомий математик **Борис Якович Букреєв** (1859–1962), який народився в м. Льгові Курської області. У 1878 році Б. Я. Букреєв вступив на математичне відділення Київського університету, в якому плідно працював все своє життя і виховав не одне покоління науковців України. Пішов на заслужений відпочинок у віці 100 років. Наукові інтереси вченого пов'язані з дослідженнями в проективній та диференціальній геометрії, з теорією поверхонь і задачами на побудову в геометрії Лобачевського.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
перпендикуляр-ність	perpendicularity	rechtwinkligkeit	perpendicularité

Пригадайте головне

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. У чому суть узагальнення ознаки перпендикулярності прямої і площини? Сформулюйте її.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про існування та єдиність площини, перпендикулярної до прямої.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про існування та єдиність прямої, перпендикулярної до площини.

Розв'яжіть задачі

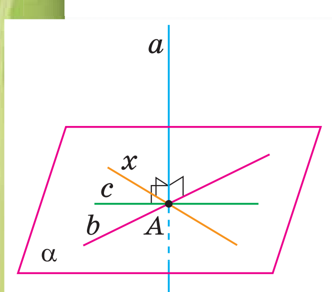
1'. Пряма a перетинає площину α в точці A і перпендикулярна до прямих b, c, x (мал. 210). Чи можна пряму a вважати перпендикулярною до площини α? Відповідь поясніть.

2'. Пряма a перпендикулярна до прямих b і c площини α (мал. 211). Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

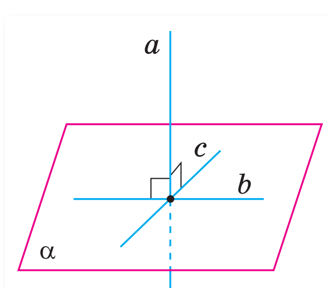
3'. Пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника (мал. 212). Чи можна стверджувати, що ця пряма перпендикулярна до площини трикутника?

4'. $a \perp \alpha$ (мал. 213). Чи перпендикулярна пряма a до прямої b, яка лежить у площині α?

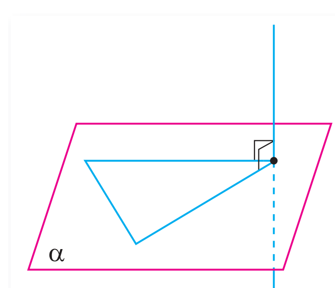
5'. Чи можна через задану точку прямої провести перпендикулярну до неї площину? Якщо так, то чи буде ця площина єдина. Відповідь поясніть.



Мал. 210



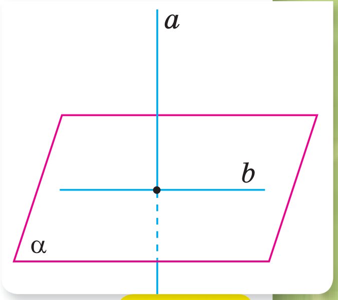
Мал. 211



Мал. 212

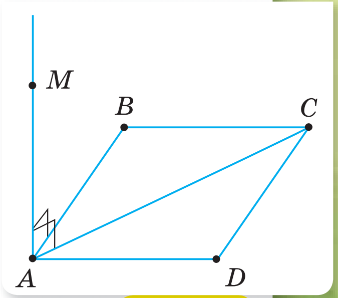
6'. Скільки можна провести прямих, перпендикулярних до площини через точку, задану на цій площині?

7°. Пряма a перетинає площину α і перпендикулярна до прямої b, яка лежить у цій площині (див. мал. 213). Чи може пряма a не бути перпендикулярною до площини α? Відповідь поясніть.



Мал. 213

8°. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до прямих AB і AC (мал. 214). Доведіть, що $AM \perp AD$.



Мал. 214

9°. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AK, перпендикулярну до прямих AB і AC. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до висоти, медіани і бісектриси трикутника ABC, проведених з вершини A.

10°. Пряма AK проходить через вершину A паралелограма $ABCD$ перпендикулярно до сторін AB, AD. Чи перпендикулярна пряма AK до діагоналі BD і висоти паралелограма BH?

11°. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AK, перпендикулярну до двох середніх ліній трикутника. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до всіх медіан трикутника ABC.

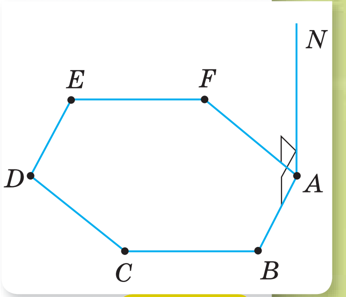
12°. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC. На стороні AC взято довільну точку K. Якого виду трикутник KBM? Відповідь поясніть.

13°. Через точку N, що лежить поза площиною шестикутника $ABCDEF$, проведено пряму AN, перпендикулярну до прямих AB і AF (мал. 215).
1) Доведіть, що: $AN \perp AC$; $AN \perp AD$; $AN \perp AE$;
2) знайдіть довжину відрізків AC, ND, NE, якщо $NA = 5$ см, $AB = 2$ см.

14°. Через вершину D шестикутника $ABCDEF$, проведено пряму DK, перпендикулярну до площини шестикутника. Доведіть, що:
1) $DK \perp AB$, $DK \perp FC$; 2) $DK \perp AC$, $DK \perp AF$.

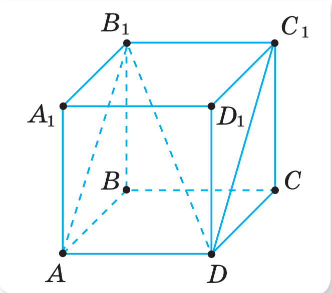
15°. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів? Відповідь поясніть.

16°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що:
1) пряма DD_1 перпендикулярна до площини грані $ABCD$;
2) пряма AD перпендикулярна до площини грані DD_1C_1C.



Мал. 215

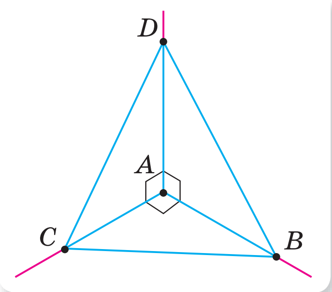
17°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 216). Доведіть, що:
1) трикутник AB_1D — прямокутний;
2) чотирикутник AB_1C_1D — прямокутник.



Мал. 216

18°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 216) з ребром a. Знайдіть:
1) периметр трикутника AB_1D;
2) площу чотирикутника AB_1C_1D.

19°. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (мал. 217). $BA = 12$ см, $BC = 15$ см, $BD = 13$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.



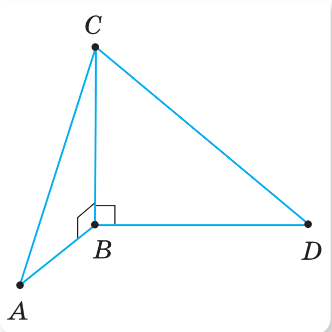
Мал. 217

20°. Прямі NB, NC і ND попарно перпендикулярні. $NB = 12$ см, $BC = 20$ см, $BD = 26$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.

21°. Пряма, яка перпендикулярна до площини прямокутного трикутника, проходить через вершину прямого кута. Доведіть, що ця пряма перпендикулярна до гіпотенузи трикутника.

22°. Пряма CD перпендикулярна до сторони BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

23°. Прямокутні трикутники ABC і BCD з прямим кутом B лежать у різних площинах і мають спільний катет BC (мал. 218). Які пряма і площина перпендикулярні між собою? Відповідь поясніть.



Мал. 218

24°. Поясніть, як через дану точку прямої можна побудувати перпендикулярну до неї площину.

25°. У правильній трикутній піраміді $MABC$, M — вершина, точка K — середина ребра основи AB. Побудуйте через дану точку K, площину перпендикулярну до прямої AB.

26°. Поясніть, як через дану точку площини можна побудувати перпендикулярну до неї пряму.

27°. O — точка перетину діагоналей основи $ABCD$ правильної чотирикутної піраміди $MABCD$,. Побудуйте пряму, яка проходить через точку O перпендикулярно до площини основи піраміди.

28°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Через точку K — середину ребра AB побудуйте:
1) площину, перпендикулярну до ребра AB;
2) пряму, перпендикулярну до площини $ABCD$.

29. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини ACM.

30. Пряма CK перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини, яка проходить через прямі BC і CK.

31. Чи правильно, що пряма, яка проходить через центр правильного трикутника і перпендикулярна до двох його сторін, перпендикулярна і до площини трикутника? Відповідь поясніть.

32. Відомо, що висота правильної трикутної піраміди перпендикулярна до площини основи піраміди. Чи вірно, що вона перпендикулярна до ребер основи піраміди. Відповідь поясніть.

33. Пряма AK перпендикулярна до сторін BC і CD правильного шестикутника $ABCDEF$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна:
1) до площини шестикутника;
2) до сторони EF і діагоналі EC шестикутника.

34. Через точку O перетину діагоналей ромба $ABCD$ проведено пряму OM, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що:
1) пряма BD перпендикулярна до площини AMC;
2) пряма AC перпендикулярна до площини BMD.

35. Точка S лежить поза площиною паралелограма $ABCD$ (мал. 220). Відомо, що $SA = SC$, $SB = SD$ і O — точка перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.

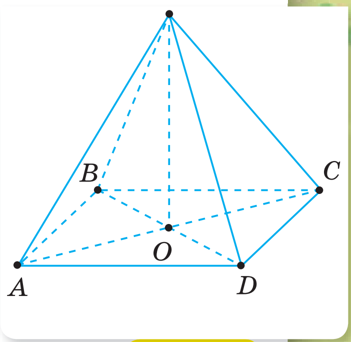
36. Усі ребра піраміди $SABC$ рівні, D — середина ребра AB. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини DSC.

37. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ основи AC перпендикулярна до площини перерізу BB_1D_1D.

38. Усі ребра піраміди $SABC$ рівні. Через довільну точку D на ребрі SA проведіть площину, перпендикулярну до:
1) AB;   2) BC.

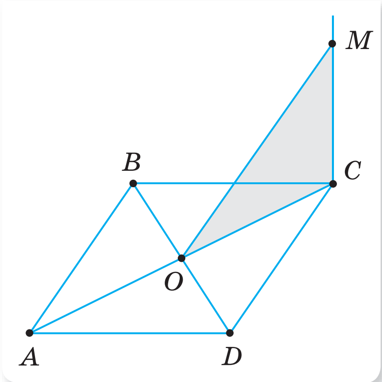
39. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через довільну точку K на ребрі CD проведіть площину, перпендикулярну до:
1) AC;   2) CD.

40. **Доведіть, що через точку, яка лежить поза площиною α, не може проходити дві прямі, перпендикулярні до площини α.**



Мал. 220

41*. O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, CM — пряма, перпендикулярна до його площини (мал. 221). Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини OMC.



Мал. 221

42*. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Знайдіть медіану CM трикутника ABC.

43*. **Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від даних точок A і B є площина, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину.**

44*. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки M до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a < c$, $b < c$). Знайдіть відрізок AM і сторони прямокутника.

45*. У трикутнику ABC кут C прямий, а кут A дорівнює 30°. Через точку C проведено пряму CM, перпендикулярну до площини трикутника. AC = 18 см, CM = 12 см. CK — висота трикутника ABC. Знайдіть довжину відрізка MK.

Проявіть компетентність

46. Вважаючи підлогу в кімнаті і двері з цієї кімнати в іншу за моделі площин, а косяк дверей за модель прямої, проілюструйте на цих моделях означення прямої, перпендикулярної до площини.

47. Як за допомогою виска можна перевірити вертикальність стовпа?

48. Перпендикулярність осі свердла до площини стола, на якому кріпиться деталь (мал. 222), слюсар перевірив за допомогою кутника. Як він це зробив?


Мал. 222

49. Чому, встановлюючи ялинку, використовують хрестовину (мал. 223)?

50. На будівництві, перевіряючи вертикальність стовпа, зазвичай виконують спостереження з двох пунктів, які не лежать на одній прямій зі стовпом. Поясніть, чому так діють.

51. Застарілі дерева з розлогою кроною на вулицях можуть бути небезпечними під час негоди. Екологічна служба міста проводить профілактичне чищення дерев, спилюючи зайву крону і залишаючи тільки

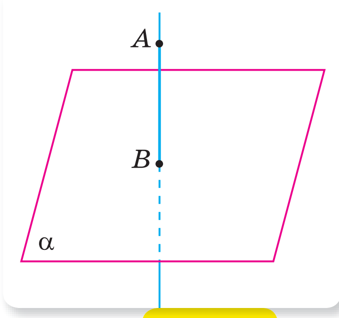
Мал. 223

вертикальні стовбури дерев. Залежно від виду дерева, спилюється від 3 до 5 м^3 гілок на одному дереві, які одразу переробляються на тирсу. Дерева із похилими стовбурами спилюються повністю, такі дерева становлять приблизно 5% від загальної кількості дерев, що обробляються. Складіть формулу для обчислення одноденного кошторису роботи однієї бригади, якщо за робочу зміну вона очищує і переробляє 10 дерев, при цьому задіяні дві бензопилки і один подрібнювач деревини. Для переробки 1 м^3 деревини одна бензопилка потребує m л бензину, а подрібнювач деревини — k л бензину.

§ 3.2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

1. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ

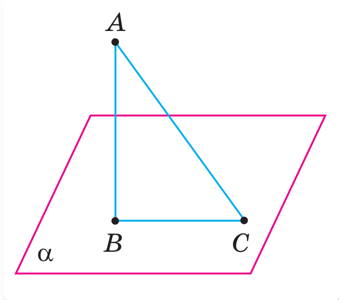
Нехай дано площину α і точку A, яка не лежить на ній. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до площини, яка перетинає площину в точці B (мал. 224). Говорять, що відрізок AB є *перпендикуляром*, проведеним з точки A до площини α, а кінець B цього відрізка, який лежить у площині, — *основою перпендикуляра*.



Мал. 224

***Перпендикуляром*, проведеним з даної точки до даної площини, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.**

Нехай AB — перпендикуляр до площини α, а C — відмінна від точки B точка цієї площини (мал. 225). Тоді відрізок AC називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α, а точку C — *основою похилої*. Відрізок BC, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, називають *проекцією похилої AC* на площину α.



Мал. 225

? Чи існують залежності між довжинами перпендикуляра і похилої, похилої та її проекції? Відповідь дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА

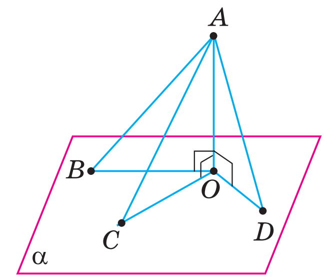
(властивості перпендикуляра і похилої).

Якщо з точки, взятої поза площиною, проведені до площини перпендикуляр і похилі, то:

1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;

2) проекції рівних похилих рівні і, навпаки, похилі, що мають рівні проекції, рівні;

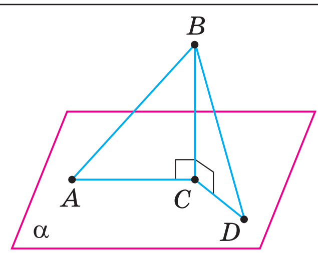
3) з двох похилих більша та, проекція якої більша.



Мал. 226

Дано: Точка A і площина α, $A \notin \alpha$ (мал. 226). AO — перпендикуляр, AB, AC, AD — похилі, OB, OC, OD — їх проекції.
Довести: 1) $AO < AB$, $AO < AC$, $AO < AD$;
2) якщо $AB = AC$, то $OB = OC$, і навпаки, якщо $OB = OC$, то $AB = AC$;
3) якщо $OB > OD$, то $AB > AD$.
Доведення. 1. З умови випливає, що ΔAOB — прямокутний, AO — катет, AC — гіпотенуза. Катет завжди менший від гіпотенузи, тому $AO < AB$. Аналогічно, у прямокутному ΔAOC одержуємо: $AO < AC$, а в прямокутному ΔAOD одержуємо: $AO < AD$.
2. Розглянемо трикутники ΔAOB і ΔAOC. У них AO — спільний катет. Якщо $AB = AC$, то трикутники є рівними за катетом і гіпотенузою, з чого випливає, що $OB = OC$. Якщо ж $OB = OC$, то трикутники є рівними за двома катетами, з чого випливає, що $AB = AC$.
3. З прямокутних трикутників ΔAOB і ΔAOD маємо:
$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}$ і $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2}$. Звідси, якщо $OB > OD$, то $AB > AD$.
Твердження теореми наведено в таблиці 8.

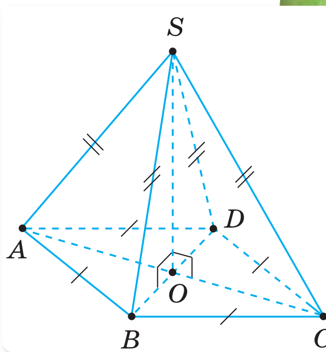
Таблиця 8

	$BC < AB$, $BC < BD$
	Якщо $\dfrac{AB = BD}{AC = CD}$, то $\dfrac{AC = CD}{AB = BD}$
	Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$

Розв'язування задач про похилу та її проекцію на площину зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, сторонами якого є похила, її проекція на площину і перпендикуляр до площини. Якщо такого трикутника немає на малюнку, то щоб його утворити, проведіть допоміжні відрізки.

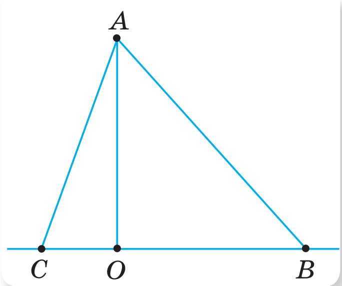
Теорема про властивості перпендикуляра і похилої застосовується на практиці. Наприклад, якщо встановлюють щоглу на радіостанції (мал. 228), то стяжки беруть рівної довжини. Нижні кінці їх закріплюють на однакових відстанях від основи щогли (рівномірно по колу). Це сприяє стійкості щогли. Математичну модель подано на мал. 229.


Мал. 228



Мал. 229

Задача 1. З точки до площини проведено дві похилі, завдовжки 20 см і 34 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини, якщо проекції похилих відносяться як 2 : 5.



Мал. 230

Розв'язання. 1. Нехай AO — перпендикуляр до CB, $AC = 20$ см, $AB = 34$ см і $CO : OB = 2 : 5$ (мал. 230). Введемо коефіцієнт пропорційності x, тоді $CO = 2x$ і $OB = 5x$.

2. З прямокутних трикутників AOC і AOB знаходимо AO^2.

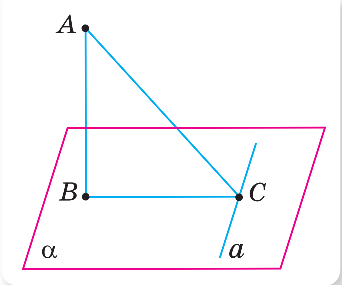
З ΔAOC: $AO^2 = AC^2 - CO^2 = 20^2 - (2x)^2 = 400 - 4x^2$, а з ΔAOB: $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 34^2 - (5x)^2 = 1156 - 25x^2$.

3. Складемо рівняння: $400 - 4x^2 = 1156 - 25x^2$. Звідки $21x^2 = 756$, $x^2 = 36$.

Отже, $AO = \sqrt{400-4x^2} = \sqrt{400-4\cdot 36} = \sqrt{256} = 16$ (см).

Якщо в задачі йдеться про дві похилі, проведені з однієї точки до площини, то розгляньте два прямокутних трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений з даної точки до площини.

2. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ



Мал. 231

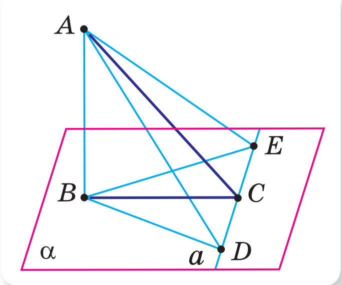
Нехай AB — перпендикуляр до площини α, AC — похила, BC — проекція похилої і a — пряма в площині α, проведена через основу C похилої (мал. 231). Має місце таке твердження.

ТЕОРЕМА (про три перпендикуляри).

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до самої похилої.

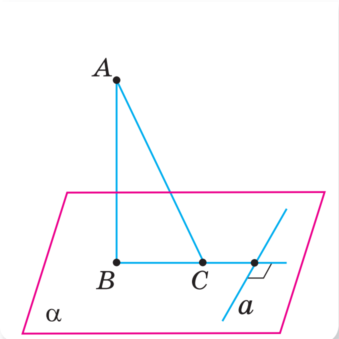
Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 231), AC — похила, BC — проекція похилої, $C \in a$, $a \perp BC$.

Довести: $a \perp AC$.

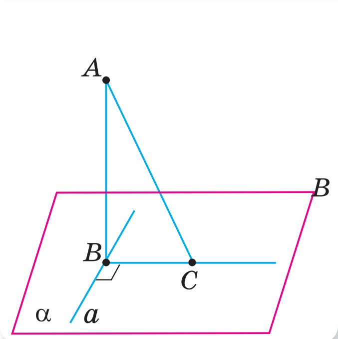


Мал. 232

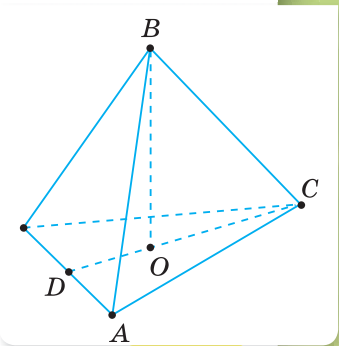
Доведення. Відкладемо на прямій a довільні, але рівні відрізки CD і CE і сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E (мал. 232). Тоді матимемо: $BD = BE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE. $AD = AE$ як похилі до площини α, що мають рівні проекції BD і BE. Внаслідок цього трикутник ADE — рівнобедрений, і тому його медіана AC перпендикулярна до основи DE.



Мал. 233



Мал. 234



Мал. 235

? Чому теорема має назву теореми про три перпендикуляри? У ній йдеться про зв'язок між такими трьома перпендикулярами: $AB \perp \alpha$, $a \perp BC$, $a \perp AC$.

Теорему про три перпендикуляри можна узагальнити, використавши означення кута між мимобіжними прямими. Вона буде справедливою і тоді, коли пряма a, що лежить у площині, не проходить через основу похилої AC (мал. 233, 234). Таке узагальнення розширює межі застосування теореми.

Наприклад, треба довести, що основа висоти SO трикутної піраміди лежить на висоті CD основи тоді і тільки тоді, коли бічне ребро SC перпендикулярне до сторони основи AB (мал. 235). Це твердження є лише іншим формулюванням теореми про три перпендикуляри: SO і SC — перпендикуляр і похила до площини основи, а AB — пряма, яка лежить у цій площині. Тому це твердження безпосередньо випливає з теореми про три перпендикуляри.

Узагальнена теорема про три перпендикуляри формулюється так: **якщо пряма, проведена на площині, перпендикулярна до проекції похилої, то вона перпендикулярна і до самої похилої.**

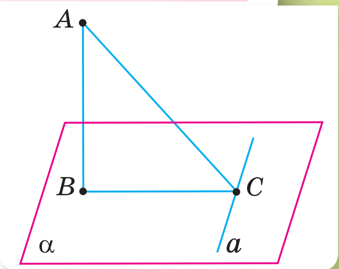
3. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА

Доведемо твердження, яке є оберненим до теореми про три перпендикуляри.

ТЕОРЕМА **(обернена до теореми про три перпендикуляри).**

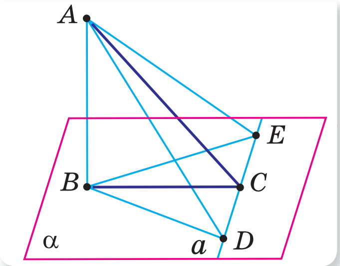
Якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 236), AC — похила, BC — проекція похилої, $C \in a$, $a \perp AC$.
Довести: $a \perp BC$.
Доведення. Зробимо ті ж побудови, що й при доведенні прямої теореми (мал. 237). А саме, відкладемо на прямій a довільні, але рівні відрізки CD і CE і сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E. Матимемо: $AD = AE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE. $BD = BE$ як проекції



Мал. 236

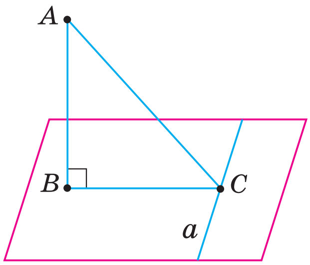
рівних похилих AD і AE. Через це трикутник BDE — рівнобедрений, а тому його медіана BC перпендикулярна до основи DE.



Мал. 237

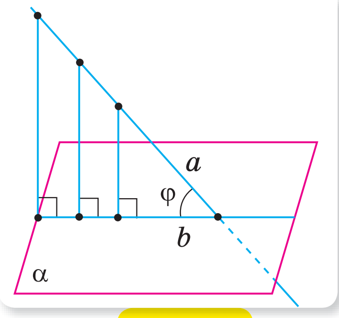
Коротко формулювання теореми про три перпендикуляри та оберненої до неї подано в таблиці 9.

Таблиця 9

	Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

4. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ

Нехай дано площину α і пряму a, яка її перетинає і не перпендикулярна до площини α (мал. 238). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a до площини α, лежать на прямій b. Ця пряма називається *проекцією прямої a* на площину α.



Мал. 238

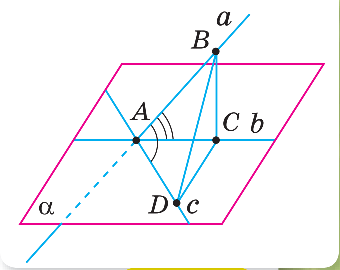
***Кутом між прямою і площиною* називається кут між цією прямою та її проекцією на дану площину.**

На малюнку 238 — це кут φ.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою і площиною — 0°.

Кут між прямою і площиною — це найменший з усіх кутів, які пряма утворює з прямими, проведеними у площині.

Нехай a — дана пряма, b — її проекція на площину, c — довільна пряма у площині α (мал. 239). З довільної точки B прямої a проведемо перпендикуляр BC до прямої b. Відкладемо на прямій c відрізок $AD = AC$ та сполучимо точки D і C. У трикутниках ABC і ABD сторона AB спільна, $AC = AD$, але $BD > BC$ (за теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри). Тоді і протилежний кут DAB у ΔABD більший за відповідний $\angle CAB$ у ΔABC.



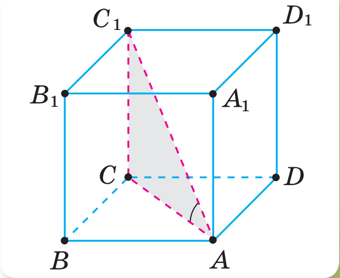
Мал. 239

Задача 2. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 240), $AB = 12$ см, $BC = 5$ см. Проекція діагоналі AC_1 на площину основи $ABCD$ — відрізок AC. Тому $\angle CAC_1 = 60°$. З прямокутних трикутників ABC і ACC_1 одержуємо:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)},$$

$$AC_1 = \frac{AC}{\cos 60°} = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26 \text{ (см)}.$$



Мал. 240

Розв'язування задачі, де дано кут між прямою і площиною, нерідко зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, гострий кут якого дорівнює даному, а сторонами є похила, її проекція і перпендикуляр.

Дізнайтеся більше

1. Уперше теорема про три перпендикуляри була доведена математиками Близького та Середнього Сходу. Її доведення знаходимо в «Трактаті про повний чотиристоронник» Насиреддина Туси. У Європі ця теорема була вперше сформульована Луї Бертраном (1731–1812) і доведена в «Елементах геометрії» А.-М. Лежандра (1794). У XX ст. доведення Лежандра було наведено в шкільному підручнику з геометрії А. П. Кисельова.

3. На практиці для вимірювання кутів використовують теодоліт, в артилерії — бусоль, у морській справі — секстант. Більш детально прочитати про ці прилади можна у Вікіпедії (*https://uk.wikipedia.org/wiki/Теодоліт*, *https://uk.wikipedia.org/wiki/Бусоль*, *https://uk.wikipedia.org/wiki/Секстант*).

Теодоліт

Бусоль

Секстант

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

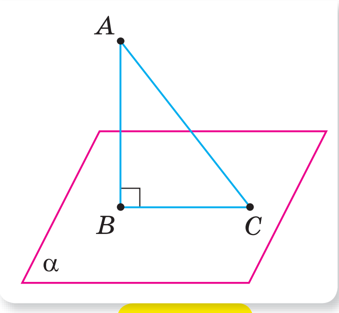
Українська	Англійська	Німецька	Французька
перпендикуляр	perpendicular	senkrecht	perpendiculaire
похила	sloping	schräg	en pente

Пригадайте головне

1. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до даної площини? А похила?
2. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
4. У чому суть узагальнення теореми про три перпендикуляри?
5. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до теореми про три перпендикуляри.
6. Дайте означення куту між прямою і площиною.

Розв'яжіть задачі

1'. Назвіть на малюнку 243:
1) перпендикуляр;
2) основу перпендикуляра;
3) похилу;
4) проекцію похилої.

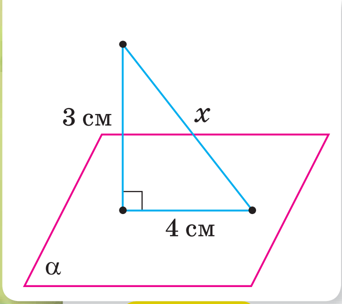


Мал. 243

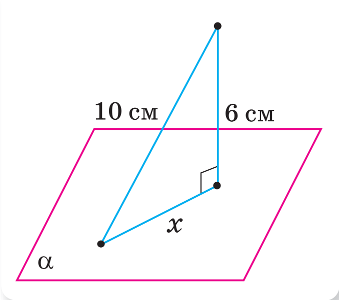
2'. За даними, наведеними на малюнках 244–246, знайдіть невідомий відрізок x.

3'. AD і DC — проекції похилих AB і BC.
1) $AD < DC$. Яке із співвідношень правильне? а) $AB = BC$; б) $AB > BC$; в) $AB < BC$;
2) $AB = BC$. Порівняйте довжини проекцій цих похилих.

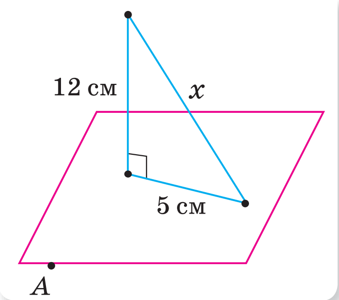
4'. Установіть відповідність між перпендикуляром AC, похилою AB, її проекцією CB та сторонами прямокутного трикутника ABC.



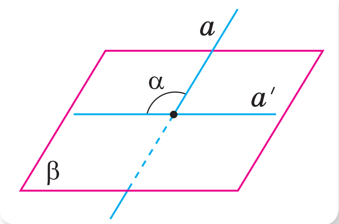
Мал. 244



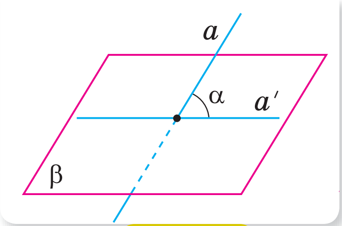
Мал. 245



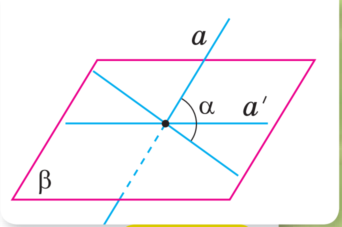
Мал. 246



Мал. 250



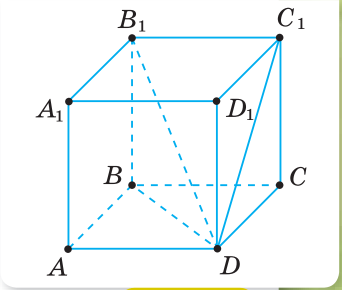
Мал. 251



Мал. 252

5'. На малюнках 250–252 пряма a' — проекція прямої a на площину β. На якому з малюнків кут α є кутом між прямою a і площиною β?

6'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 253). Назвіть кут між:
1) діагоналлю DC_1 грані DD_1C_1C і площиною основи $ABCD$;
2) діагоналлю B_1D куба і площиною основи $ABCD$;
3) діагоналлю B_1D і площиною грані DD_1C_1C.



Мал. 253

7°. Дано площину і точку, яка їй не належить. З даної точки проведіть дві похилі до площини. Позначте на малюнку перпендикуляр і проекції похилих.

8°. Проведіть з точки O до площини a перпендикуляр OM і похилу OK. Знайдіть:
1) довжину похилої OK, якщо $OM = 12$ см, $OK = 16$ см;
2) довжину перпендикуляра ОМ, якщо $MK = 12$ см, $OK = 15$ см;
3) довжину проекції МК похилої, якщо $OM = 9$ см, $OK = 15$ см.

9°. AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої. Заповніть таблицю 10.

Таблиця 10

AB	24 см	15 см	
BC	7 см		$24a$
AC		25 см	$26a$

10°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина похилої дорівнює a, а кут між похилою і перпендикуляром — α. Знайдіть довжини перпендикуляра і проекції похилої, якщо:
1) $a = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$.

11°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює a, а кут між похилою і перпендикуляром дорівнює α. Знайдіть довжину похилої і її проекцію на площину, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 14$ см, $\alpha = 30°$.

12°. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини? Якою фігурою є геометричне місце основ цих похилих?

13°. AK — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Порівняйте довжини похилих KC і KB. Відповідь поясніть.

14°. AF — перпендикуляр до площини трикутника ABC; AD — висота трикутника ABC (мал. 254). Доведіть, що $DF \perp BC$.

15°. DM — перпендикуляр до площини квадрата (мал. 255). Доведіть, що $OM \perp AC$.

16°. AM — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) (мал. 256). Доведіть, що ΔBMC — прямокутний.

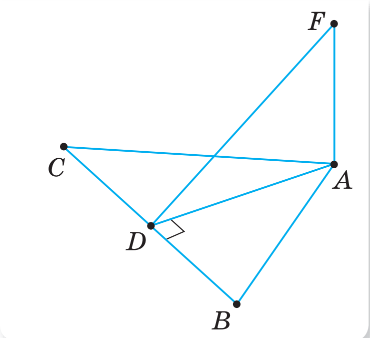
17°. З середини O гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OM. Проведіть перпендикуляри з точки M до катетів AC і BC. Поясніть побудову.

18°. У трикутнику ABC кут CAB дорівнює α, а кут ACB — β (мал. 257). AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть, що $DB \perp BC$, якщо:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$;
2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

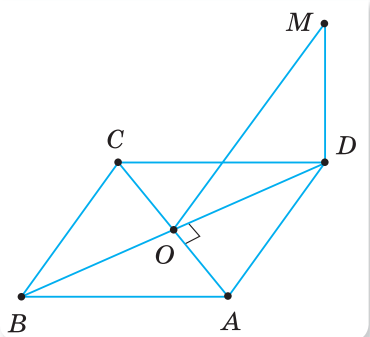
19°. AM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Доведіть, що похилі MB і MC утворюють рівні кути з площиною даного трикутника.

20°. Під яким кутом до площини потрібно провести похилу, щоб її проекція:
1) була удвічі коротшою від похилої;
2) дорівнювала перпендикуляру?

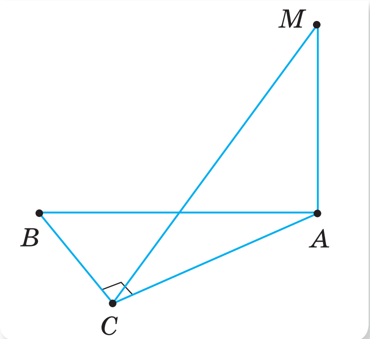
21°. Похила дорівнює a. Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°?



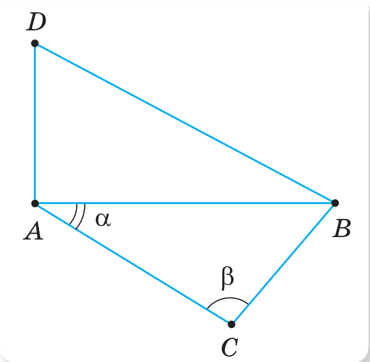
Мал. 254



Мал. 255

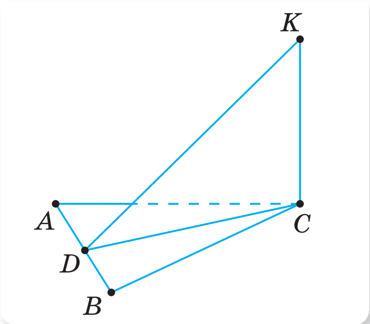


Мал. 256



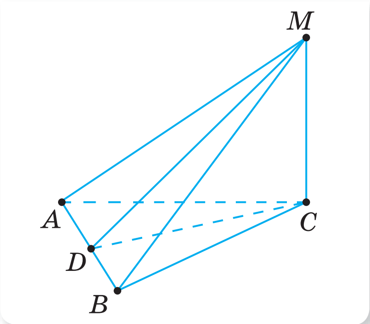
Мал. 257

22°. На малюнку 258 KC — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $KD \perp AB$. Доведіть, що CD — висота трикутника ABC.



Мал. 258

23°. На малюнку 259 MC — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $MC = 5$ см. MD — висота трикутника AMB, $MD = 13$ см. Знайдіть висоту трикутника ABC.



Мал. 259

24. Порівняйте похилі MA і MC за даними:
1) на малюнку 260;
2) на малюнку 261.

25. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть кут між перпендикуляром і похилою, якщо:
1) довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої;
2) довжина проекції похилої дорівнює половині довжини похилої;
3) довжина перпендикуляра дорівнює половині довжини похилої.

26. AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої, α — кут між перпендикуляром і похилою. Заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

AB			5 см	6 см	7 см	14 см
BC		4 см				14 см
AC	6 см	8 см		12 см		
α	30°		45°		60°	

27. З точки M до площини проведено рівні похилі MA, MB, MC, MD. Чи може чотирикутник $ABCD$ бути:
1) квадратом; 2) паралелограмом?
Відповідь поясніть.

28. З точки K до площини проведено рівні похилі KA, KB, KC, KD. Чи може чотирикутник $ABCD$ бути:
1) прямокутником; 2) ромбом?
Відповідь поясніть.

29. З точки M поза площиною α проведено до неї три рівні похилі MA, MB, MC і перпендикуляр MO. Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.

30. З точки до площини проведені перпендикуляр завдовжки 6 см і похила завдовжки 9 см. Знайдіть проекцію перпендикуляра на похилу.

31. З точки A до площини α проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як $2 : 5$. Знайдіть довжини проекцій похилих і перпендикуляра до площини.

32. З точки до площини проведено дві похилі, які відносяться, як $5 : 8$, а проекції похилих дорівнюють 7 см і 32 см. Знайдіть довжини похилих і перпендикуляра до площини.

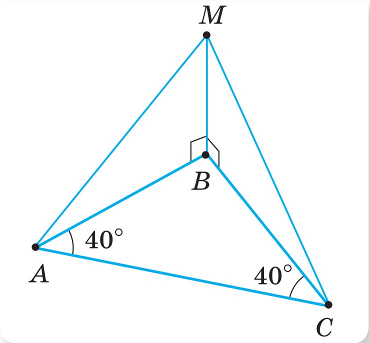
33. AM — перпендикуляр до площини трикутника ABC (мал. 262). Доведіть:
1) якщо $AB = AC$, $CD = BD$, то $MD \perp BC$;
2) якщо $BD = CD$, $MD \perp BC$, то $AB = AC$.

34. **Доведіть, що пряма, яка проходить через основу похилої перпендикулярно до неї, перпендикулярна до площини, яку утворюють похила та її проекція.**

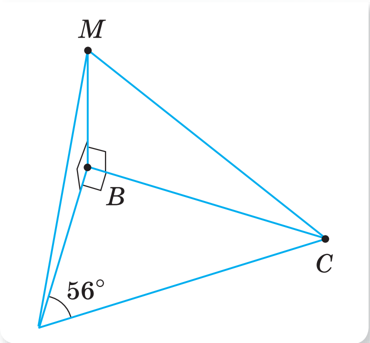
35. AM — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AM, якщо MB = 15 см, MC = 24 см і MD = 20 см.

36. Виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 1 см, 2 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника A_1BD.

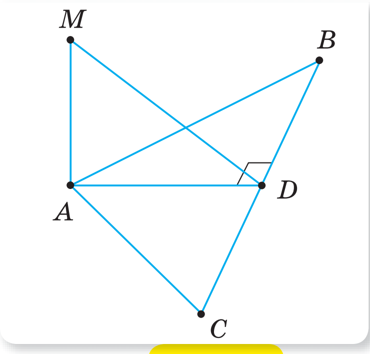
37. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зі стороною a.
1) знайдіть кут між діагоналлю B_1D і площиною ACC_1;
2) порівняйте кути, утворені діагоналлю B_1D з площинами його граней;
3) знайдіть кут між діагоналлю B_1D і площиною A_1C_1D.



Мал. 260



Мал. 261



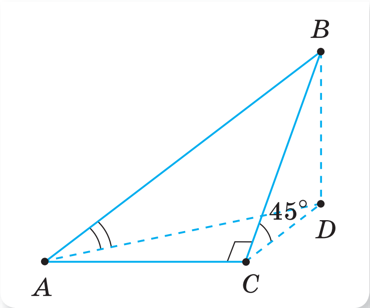
Мал. 262

38. З точки M до площини α проведено перпендикуляр $MA = a$. Похилі MB і MC утворюють з площиною α кути по 30°, а кут між їх проекціями AB і AC дорівнює 120°. Знайдіть висоту трикутника MBC.

39. Доведіть, що кут між похилою до даної площини та її проекцією є найменшим із кутів між похилою і прямими, проведеними у цій площині.

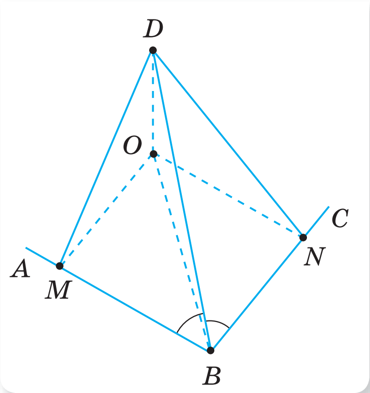
40*. З точки до площини проведено дві рівні похилі. Знайдіть кут між кожною похилою і її проекцією, якщо кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями — прямий.

41*. У рівнобедреному прямокутному трикутнику один катет лежить у площині α, а другий утворює з нею кут $45°$ (мал. 263). Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною.



Мал. 263

42*. Похила DB утворює рівні кути із сторонами кута ABC (мал. 264). Доведіть, що проекція цієї похилої лежить на бісектрисі кута ABC.



Мал. 264

Проявіть компетентність

43. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що нижні кінці тросів віддалені від щогли на 20 м, а верхні кінці закріплені на висоті 32 м. Які довжини тросів?

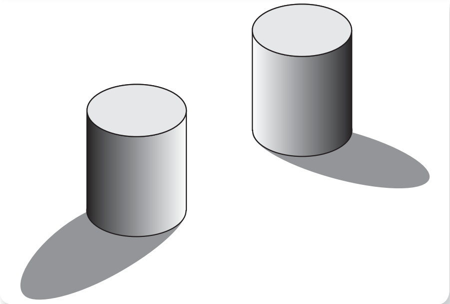
44. У підвалі, що має форму півциліндра (мал. 265), треба поставити два стояки, основи яких повинні бути однаково віддалені за підлогою від найближчої стінки і знаходитись на відстані 2 м один від одного. Визначте висоту стояків, якщо ширина підвалу становить 4,6 м.

45. На малюнку 266 зображено два вертикальні стовпчики, що стоять на горизонтальній площині, та їх тіні від джерела світла на цю площину. За цим даними визначте положення джерела світла та його проекцію на площину, що містить основи стовпчиків. Чи достатньо даних на малюнку для відповіді на запитання і чи всі ці дані були неохідними? Відповідь поясніть.

46. Чотирисхилий дах будинку, що має довжину 12,5 м і ширину 7,2 м, має схил в $40°$ (мал. 267).

1) Скільки квадратних метрів заліза піде на покриття, якщо витрати на згин і обрізки становлять 6% ?

Мал. 265



Мал. 266

Мал. 267

2) Який вид покрівельного заліза вигідно обрати, якщо покрівельні листи поділяються на два класи:
— 18–40 мікрон (275 г/м^2) — найдорожчий, але і самий довговічний вид оцинковки, який може прослужити до 30 років і прекрасно служить навіть в агресивних середовищах;
— 10–18 мікрон (180 г/м^2) — вартість значно нижче, але й термін служби для даху недостатньо великий (від 7 до 10 років)?
3) Яка вартість робіт з покриття даху, якщо робота кровельника коштує 75% від вартості матеріалів?

47. Лижниця піднімається канатною дорогою на вершину гори від її підніжжя. Швидкість становить 2,5 м/с, а на підйом витрачається 18 хв. Визначте висоту гори, вважаючи, що кут нахилу гори $\approx 22{,}5°$.

48. Скелелазіння — вид спорту, який полягає у вільному сходженні на вершину скелі — природної або штучної, наприклад на скеледромі (мал. 3.2.110). Як вид спорту скелелазіння може принести чимало користі. Але це дуже небезпечний вид спорту, тому дуже важливою є страховка. Дізнатися про те, як найбезпечніше закріпити страховку допоможуть знання з теми «Перпендикулярність у просторі». Виконайте такі завдання:
1) ознайомтеся із видами страховки (інформацію знайдіть в Інтернеті) і за допомогою GeoGebra побудуйте математичну модель верхньої страховки;
2) використовуючи властивості перпендикуляра і похилої, обґрунтуйте найоптимальнішу довжину страховки і найкраще початкове місце для страхувальника.

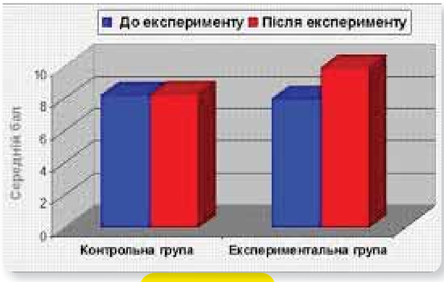
§ 3.3. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНІСТЮ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЮ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН

Паралельність прямих та площин у просторі і перпендикулярність прямої до площини перебувають у певній залежності. Саме наявність паралельності одних елементів веде за собою перпендикулярність інших і, навпаки, з перпендикулярності одних елементів можна зробити висновок про паралельність інших.

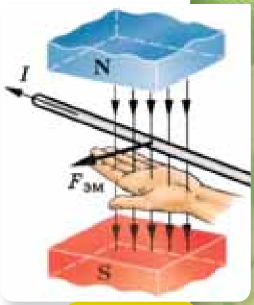
1. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОЩИНА

Подивіться на малюнки 268–270. Ви бачите, що мачти вітрильника паралельні між собою і перпендикулярні до площини палуби (мал. 268). Аналогічним є розташування стовпців діаграми (мал. 269) та ліній дії магнітного поля (мал. 270).

Мал. 268



Мал. 269



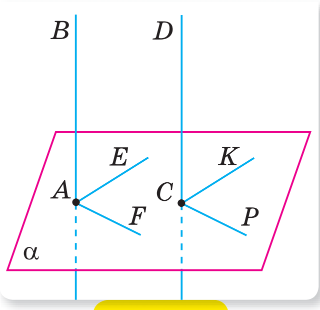
Мал. 270

Цей зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин у просторі виражається такою теоремою.

ТЕОРЕМА **(про паралельні прямі та перпендикулярну площину).**

Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

Дано: $AB \parallel CD$, $\alpha \perp AB$ (мал. 271).
Довести: $\alpha \perp CD$.
Доведення. Проведемо на площині α через точку A довільні прямі AE і AF, а через точку C прямі CK і CP, відповідно паралельні прямим AE і AF. Тоді $\angle BAE = \angle DCK$, $\angle BAF = \angle DCP$ як кути з паралельними і однаково напрямленими сторонами. Оскільки $AB \perp \alpha$, то кути BAE і BAF прямі. Тоді кути DCK і DCP також будуть прямими. Отже, $CD \perp \alpha$.



Мал. 271

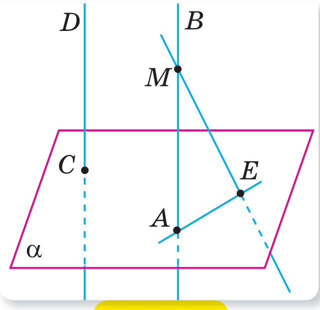
Відомо, що площина перпендикулярна до однієї з основ трапеції. Як розміщена ця площина відносно другої основи? Перпендикулярно до основи. Це випливає з теореми про паралельні прямі та перпендикулярну площину, оскільки основи трапеції паралельні.

ТЕОРЕМА

(про прямі, перепендикулярні до площини)

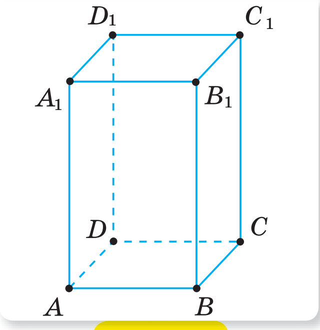
Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Дано: $\alpha \perp AB$, $\alpha \perp CD$.(мал. 272).
Довести: $AB \parallel CD$
Доведення. Припустимо, що прямі AB і CD не паралельні. Візьмемо на прямій AB яку-небудь точку M, що не лежить на площині α. Проведемо через точку M пряму ME, паралельну прямій CD. Оскільки $CD \perp \alpha$, а $ME \parallel CD$, то, за теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину, $ME \perp \alpha$. A і E — точки перетину прямих AM і ME з площиною α. Тоді пряма AE перпендикулярна до прямих AB і ME, які перетинаються. А це неможливо. Тому прямі CD і AB паралельні.



Мал. 272

З а д а ч а 1. Доведіть, якщо одне з бічних ребер призми перпендикулярне до площини основи, то і всі її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.
Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма, $ABCD$ — основа, AA_1 — бічне ребро перпендикулярне до площини основи $ABCD$ (мал. 273). Як відомо, бічні ребра призми паралельні між собою. Тоді, за теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину, одержуємо, що ребра BB_1, CC_1, DD_1 також перпендикулярні до основи.



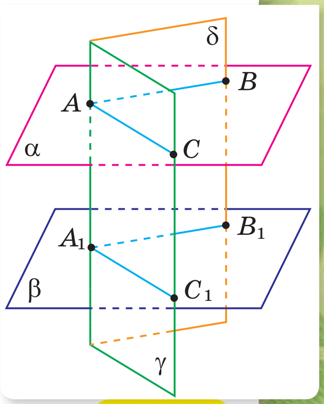
Мал. 273

1. Щоб установити перпендикулярність прямої і площини перевірте, чи буде ця площина перпендикулярною до прямої, яка паралельна даній прямій.
2. Щоб обґрунтувати паралельність двох прямих, спробуйте знайти площину, перпендикулярну до кожної з даних прямих.

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПРЯМА

ТЕОРЕМА **(про паралельні площини і перпендикулярну пряму).**

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.



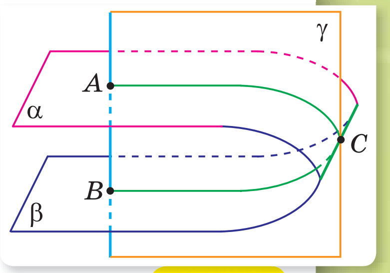
Мал. 274

Дано: $\alpha \parallel \beta$ (мал. 274), $AA_1 \perp \alpha$.
Довести: $AA_1 \perp \beta$.
Доведення. Проведемо через пряму AA_1 будь-які площини γ і δ. За теоремою про паралельні площини і січну площину, кожна з них перетне площини α і β по паралельним прямим: перша — по паралельним прямим AC і A_1C_1, друга — по паралельним прямим AB і A_1B_1. Оскільки за умовою пряма AA_1 перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна до прямих AB і AC. Отже, вона перпендикулярна і до паралельних їм прямих A_1B_1 і A_1C_1. Тому пряма AA_1 перпендикулярна і до площини β, на якій лежать прямі A_1B_1 і A_1C_1.

Чому висота піраміди перпендикулярна до перерізу, паралельного основі піраміди? Оскільки висота піраміди перпендикулярна до площини основи, то, за теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму, висота перпендикулярна до площини перерізу.

ТЕОРЕМА **(про площини, перпендикулярні до прямої)**

Дві площини, перпендикулярні до прямої, паралельні.



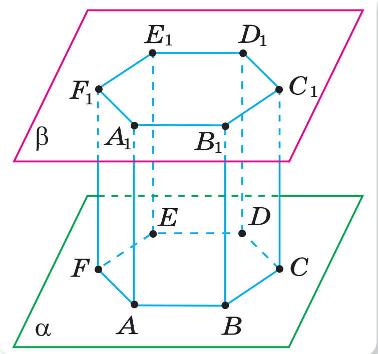
Мал. 275

Дано: $AB \perp \alpha$, $AB \perp \beta$ (мал. 275),
Довести: $\alpha \parallel \beta$.
Доведення. Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по деякій прямій. Візьмемо на цій прямій будь-яку точку C і проведемо площину γ через точку C і пряму AB. Площина γ перетне площини α і β відповідно по прямих AC і BC. Оскільки $AB \perp \alpha$, то $AB \perp AC$, і оскільки $AB \perp \beta$, то $AB \perp BC$. Таким чином,

у площині γ з точки C проведено два перпендикуляри AC і BC до прямої AB, що неможливо. Тому припущення, що площини α і β перетинаються, неправильне. Отже, $\alpha \parallel \beta$.

Задача 2. Доведіть, якщо бічне ребро призми перпендикулярне до нижньої основи, то воно перпендикулярне і до верхньої основи.

Розв'язання. Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — призма, AA_1 — бічне ребро перпендикулярне до нижньої основи $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (мал. 276). За властивістю призми основи $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ лежать в паралельних площинах, тому, за теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму, одержуємо, що ребро AA_1 перпендикулярне також і до площини верхньої основи $ABCDEF$.

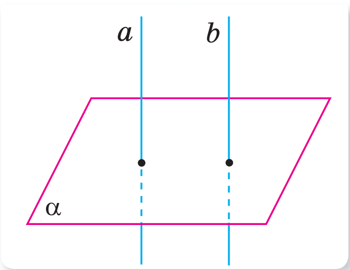
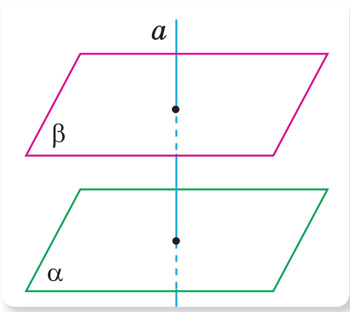


Мал. 276

1. Щоб установити перпендикулярність прямої і площини, обґрунтуйте, що ця пряма перпендикулярна до площини, паралельної даній.
2. Щоб обґрунтувати паралельність двох площин, знайдіть пряму, перпендикулярну до кожної з даних площин.

Твердження, які доведено в теоремах параграфа, наведено в таблиці 12.

Таблиця 12

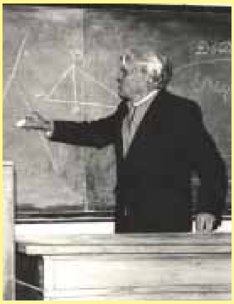
Якщо $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$
Якщо, $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$	Якщо $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$
	

Дізнайтеся більше

1. Теорема про паралельні прямі та перпендикулярну площину широко застосовується на практиці. Наприклад, у багатоповерхових будівлях на початку побудови створюють каркас, горизонтальні перекриття якого тримаються на вертикальних опорах. Кожна опора перпендикулярна до горизонтального покриття, а всі вони паралельні між собою.

Теорему про паралельність площин, перпендикулярних до однієї прямої, використовують, наприклад, майстри, які збирають меблі.

2. Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український педагог-математик, доктор педагогічних наук, професор Іван **Федорович Тесленко** (1908–1994), який народився в селі Домоткань на Дніпропетровщині. У своїх працях вчений запропонував систему аксіом елементарної геометрії, яка дала змогу поєднати абстрактність і наочність змісту, розкрив методи геометрії, особливості розв’язування планіметричних і стереометричних задач.



Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
Залежність між паралельністю і перпендикулярністю	Dependence between parallelism and perpendicularity	Abhängigkeit zwischen Parallelität und Rechtwinkligkeit	Dépendance entre parallélisme et perpendicularité

Пригадайте головне

1. Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
2. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
3. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.
4. Доведіть, що дві площини перпендикулярні до прямої, паралельні.

Розв'яжіть задачі

1'. Прямі a і b паралельні (мал. 279). Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи можна стверджувати, що пряма b перпендикулярна до площини α?

2'. Прямі a і b перпендикулярні до площини α (мал. 279). Яке взаємне розміщення прямих a і b?

3'. Площини α і β паралельні (мал. 280). Пряма a перпендикулярна до площини β. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α?

4'. Площини α і β перпендикулярні до прямої a (мал. 280). Поясніть, чому площини α і β паралельні.

5°. Дано: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (мал. 281). Поясніть, чому $b \perp c$.

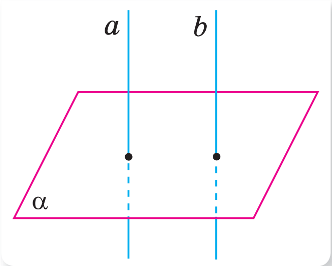
6°. Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$ і $b \perp d$ (мал. 282). Доведіть, що $a \perp \alpha$.

7°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ і $a \perp c$ (мал. 283). Доведіть, що $a \perp \beta$.

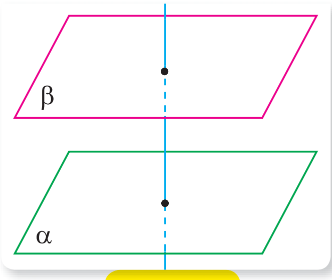
8°. Дано: $\alpha \parallel b$, $a \perp c$ і $a \perp d$ (мал. 284). Доведіть, що $a \perp b$.

9°. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через середини бічних ребер. Доведіть, що:
1) площина перерізу паралельна площині основи паралелепіпеда;
2) бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площини перерізу.

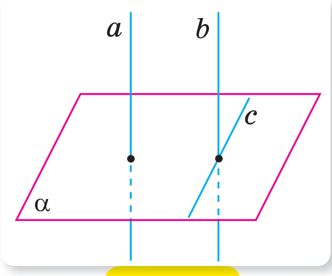
10°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте:
1) пряму, що проходить через центр верхньої основи перпендикулярно до нижньої основи;



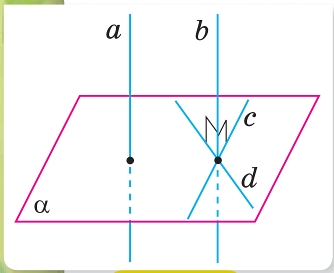
Мал. 279



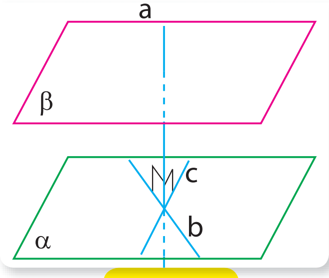
Мал. 280



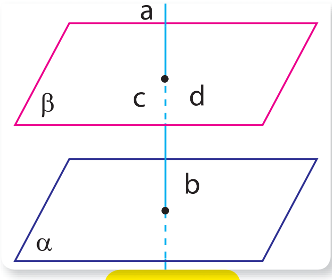
Мал. 281



Мал. 282



Мал. 283



Мал. 284

2) пряму, що проходить через центр грані AA_1B_1B перпендикулярно до площини BDD_1.

11°. Чи можуть бути перпендикулярними до площини дві сторони: 1) трикутника; 2) трапеції; 3) правильного шестикутника? Відповідь поясніть.

12°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чи перпендикулярна до площини основи $ABCD$ пряма, що проходить через:
1) середини ребер DC і D_1C_1;
2) центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$;
3) вершину B_1 і середину ребра AB?
Відповідь поясніть.

13°. Поясніть, як через дану точку A провести пряму, перпендикулярну до даної площини α.

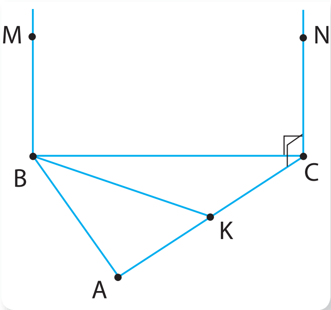
14°. Поясніть, як через дану точку A прямої a провести перпендикулярну до неї площину.

15°. Яке взаємне розташування двох прямих, якщо відомо, що тільки одна з них перпендикулярна до даної прямої? Відповідь поясніть.

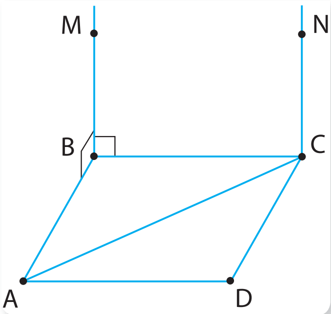
16. Дано: $CN \perp BC$, $CN \perp AC$, $CN \parallel BM$ (мал. 285). Доведіть, що:
1) $BM \perp BK$; 2) $BM \perp AB$.

17. Дано: $CN \parallel BM$, $BM \perp BC$, $BM \perp AB$ (мал. 286). Доведіть, що:
1) $CN \perp AC$; 2) $CN \perp CD$.

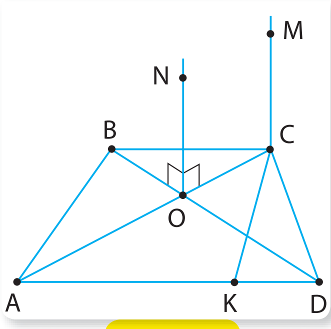
18. Дано: $OK \perp AC$, $OK \perp BD$, $OK \parallel CM$ (мал. 287). Доведіть, що:
1) $CM \perp BC$; 2) $CM \perp CK$.



Мал. 285



Мал. 286



Мал. 287

19. Через вершину A ромба і точку O перетину його діагоналей проведено паралельні прямі AM і ON, причому $AM \perp AB$ і $AM \perp AD$. Доведіть, що:
1) $ON \perp BD$; 2) $ON \perp AC$.

20. Відрізок AB паралельний площині α. Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, до перетину з площиною а в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$? Відповідь поясніть.

21. З точок A і B проведено до площини а перпендикуляри AD і BC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є прямокутником, якщо:
1) $AD = BC$; 2) прямі AB і DC паралельні.

22. Діагональ AC ромба $ABCD$ перпендикулярна до площини α. Яке взаємне розміщення діагоналі BD ромба і площини α? Відповідь поясніть.

23. Площина α і пряма b, яка не лежить у площині α, перпендикулярна до прямої a. Доведіть, що $b \parallel \alpha$.

24. Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через середини бічних ребер. Доведіть, що:
1) площина перерізу паралельна площині основи піраміди;
2) висота піраміди перпендикулярна до площини перерізу.

25. Дано пряму призму $ABCA_1B_1C_1$. З точки D, яка лежить на стороні трикутника $A_1B_1C_1$, проведено перпендикуляр до площини ABC. Доведіть, що він перетинає сторону трикутника ABC.

26. Побудуйте переріз прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точку на бічному ребрі BB_1 перпендикулярно до нього.

27. Якщо пряма не перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона не перпендикулярна і до другої площини. Доведіть

28. Через вершини A і C трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до її площини. Доведіть, що площини DAM і BCN паралельні.

29. Через вершини A і C ромба $ABCD$ проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до його площини. Доведіть паралельність площин: 1) MAB і NCD; 2) MAD і NCB.

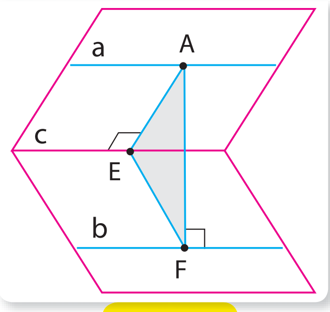
30. З точок A і B, які розміщені по один бік від площини, проведені перпендикуляри AD і BC до площини. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AD = 21$ см, $BC = 15$ см, $DC = 6$ см.

31*. Паралельні прямі a і b лежать у двох площинах, що перетинаються по прямій c (мал. 288). AE — перпендикуляр, проведений з довільної точки A прямої a до прямої c; AF — перпендикуляр, проведений з точки A до прямої b. Доведіть, що прямі a, b, c перпендикулярні до площини AEF.

32*. Прямі проходять через вершини шестикутника перпендикулярно до площини, яка
1) паралельна його більшій діагоналі;
2) перпендикулярна до його меншої діагоналі.
Доведіть, що ці прямі паралельні.

33*. Три паралельні прямі перетинають деяку площину. Одна з прямих перпендикулярна до цієї площини. Доведіть, що всі три прямі перпендикулярні до площини.

34*. Пряма перпендикулярна одночасно до трьох площин. Доведіть, що ці площини між собою паралельні.



Мал. 288

Проявіть компетентність

35. Як перевірити паралельність стелі й підлоги кімнати? Скільки кутів треба виміряти при цьому?

36. На шкільному спортивному майданчику встановлюють спортивні снаряди для естафети з перешкодами. Один із спортивних снарядів — різнорівнева колода, — складається з трьох ланок, які розташовано на чотирьох вертикальних опорах (мал. 289), ці опори знаходяться одна від одної на відстані 3,4 м. Опори під першою ланкою мають висоту 0,4 м, а під другою — 1,1 м, їх з'єднує третя — похила ланка. Яка довжини похилої ланки? Чому дорівнює довжина всієї колоди?

37. Від телеграфного стовпа до будівлі треба протягти два дроти. Один дріт завдовжки 11 м треба прокласти в траншеї під землею від основи стовпа до фундаменту будівлі, а інший дріт — протягти від вершини стовпа заввишки 8 м до даху будівлі заввишки 20 м. Скільки знадобиться дроту, якщо: 1) вважати, що дріт, протягнутий над поверхнею землі, не провисає; 2) на провисання дроту втрачається 5% його довжини?

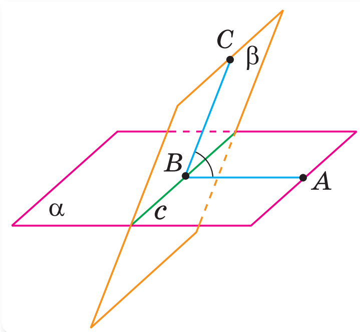
Мал. 289

§ 3.4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ. ДВОГРАННІ КУТИ

1. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ

Спочатку дамо означення кута між площинами. Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 290). Проведемо в цих площинах через довільну точку B прямої c прямі AB і BC, перпендикулярні до c. Тоді кут між площинами α і β дорівнюватиме куту між прямими AB і BC.

Записуємо: $\angle(\alpha\beta) = \angle ABC$.



Мал. 290

Чи залежить градусна міра кута ABC від вибору точки на прямій c? Не залежить, бо дістанемо два кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. А такі кути рівні.

Кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах зі спільної точки перпендикулярно до лінії їх перетину.

Кут між паралельними площинами вважається таким, що дорівнює 0°. Якщо кут між площинами дорівнює 90°, то говорять, що площини перпендикулярні.

Записуємо: $\alpha \perp \beta$.

Дві площини називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

2. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПЛОЩИН

ТЕОРЕМА

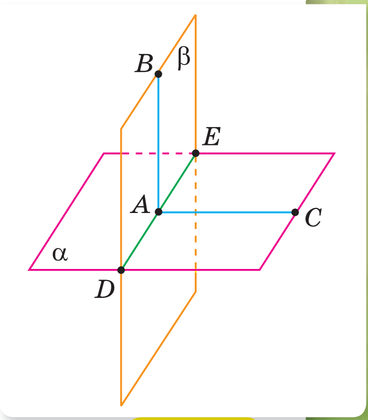
(ознака перпендикулярності площин).

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Дано: площини α і β (мал. 291), α проходить через AB, $AB \perp \alpha$.

Довести: $\beta \perp \alpha$.

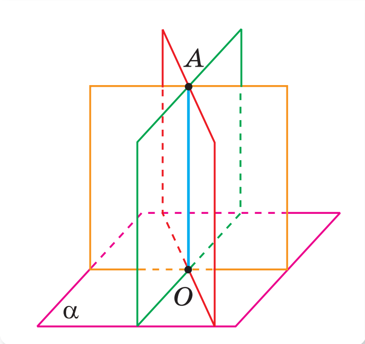
Доведення. Площини α і β мають спільну точку A. Тому вони перетинаються по прямій DE, яка проходить через цю точку. У площині α проведемо пряму AC, перпендикулярну до прямої DE. Оскільки $AB \perp \alpha$, а прямі AC і DE лежать у площині α, то $AB \perp AC$ і $AB \perp DE$. Крім того, $AC \perp DE$. Отже, $\angle (\alpha\beta) = \angle CAB = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$.



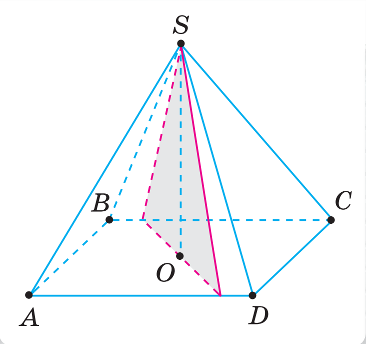
Мал. 291

Скільки площин, перпендикулярних до даної площини α, можна провести через точку A, яка не лежить у даній площині? Безліч. Проведемо пряму $AO \perp \alpha$ (мал. 292). За ознакою перпендикулярності площин, будь-яка площина, яка проходить через пряму AO, перпендикулярна до площини α.

За ознакою перпендикулярності площин, переріз піраміди площиною, яка проходить через висоту піраміди, перпендикулярний до її основи (мал. 293).



Мал. 292



Мал. 293


Мал. 294

Коли будують стіни, огорожі та інші споруди, то стовпи (палі) встановлюють вертикально (мал. 294) і цим забезпечують вертикальність стін чи огорож.

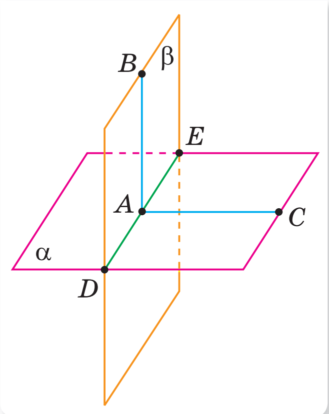
3. ВЛАСТИВІСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПЛОЩИН

ТЕОРЕМА

(властивість перпендикулярних площин).

Якщо дві площини перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

Дано: площини $\alpha \perp \beta$ (мал. 295), $AB \subset \beta$, $AB \perp DE$.
Довести: $AB \perp \alpha$.
Доведення. Проведемо у площині α пряму AC, перпендикулярну до DE — прямої перетину площин α і β. Тоді кожна з прямих AC і AB перпендикулярна до DE. Тому кут між прямими AC і AB дорівнює куту між площинами α і β. Оскільки за умовою $\alpha \perp \beta$, то $\angle CAB = 90°$ і $AB \perp AC$. Отже, пряма AB перпендикулярна до прямих DE і AC, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини, $AB \perp \alpha$.

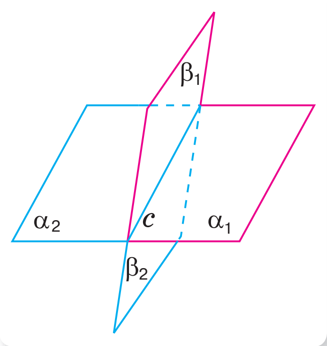


Мал. 295

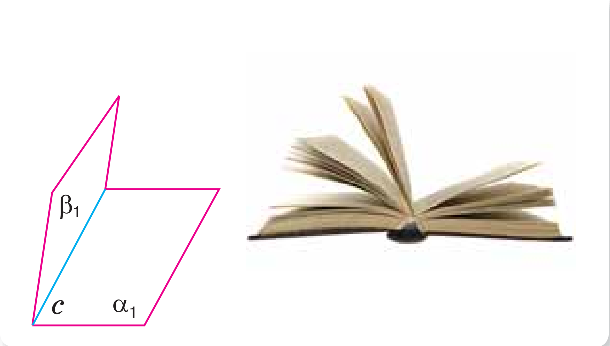
Щоб обґрунтувати перпендикулярність двох площин, знайдіть в одній з цих площин пряму, перпендикулярну до другої площини або до лінії їх перетину.

4. ДВОГРАННИЙ КУТ

На малюнку 311 ви бачите, що пряма c розбиває площину α на дві *частини площини* α_1 і α_2, а площину β — на β_1 і β_2. Частини площин α_1 і β_1 разом зі спільною прямою c, що їх обмежує, утворюють нову геометричну фігуру — *двогранний кут* (мал. 312).



Мал. 311



Мал. 312

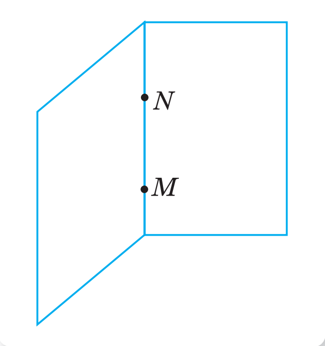
Двогранним кутом **називається фігура, утворена частинами двох площин разом зі спільною прямою, що їх обмежує.**

При цьому частини площин називаються *гранями*, а пряма, що їх обмежує, — *ребром* двогранного кута. На малюнку 312 ви бачите двогранний кут з гранями α_1 і β_1 та ребром c.

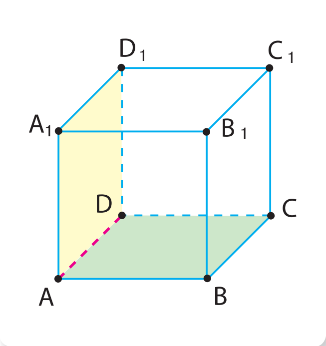
Двогранний кут із ребром c (або при ребрі c). Якщо ребро двогранного кута визначається двома його точками, наприклад, M і N (мал. 313), тоді говоримо: двогранний кут із ребром MN (або при ребрі MN).

Вивчаючи курс геометрії, вам теж зустрічались двогранні кути, оскільки при кожному ребрі многогранника його грані утворюють двогранний кут (мал. 317–318).

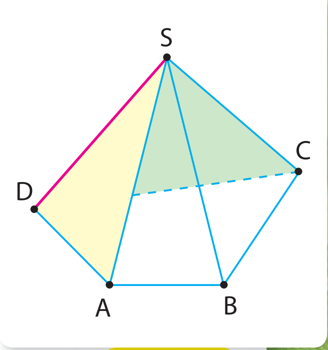
Як вимірювати двогранний кут? Поміркуємо.



Мал. 313

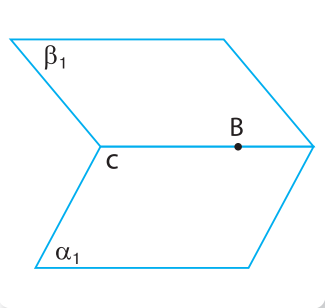


Мал. 317

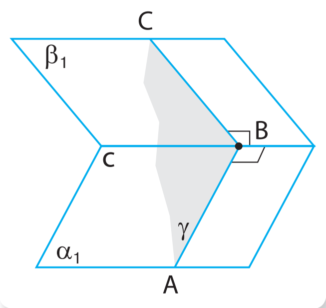


Мал. 318

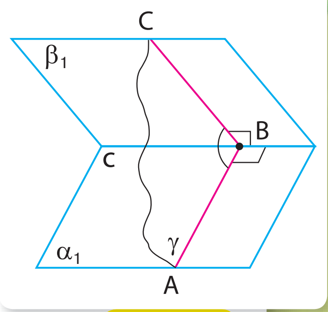
Нехай дано двогранний кут з гранями α_1 і β_1 та ребром c. На його ребрі позначимо довільну точку B (мал. 319) і через неї проведемо площину $\gamma \perp c$. Площина γ перетинає грані α_1 і β_1 за променями $BA \perp c$ і $BC \perp c$ (мал. 320). Оскільки грані двогранного кута є частинами площин α і β, що перетинаються по прямій c, а промені BA і BC є частинами прямих, перпендикулярних до прямої c, то кут ABC між площинами α і β є кутом між гранями α_1 і β_1 даного двогранного кута. Його називають *лінійним кутом*



Мал. 319



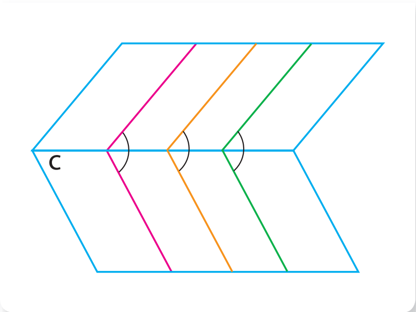
Мал. 320



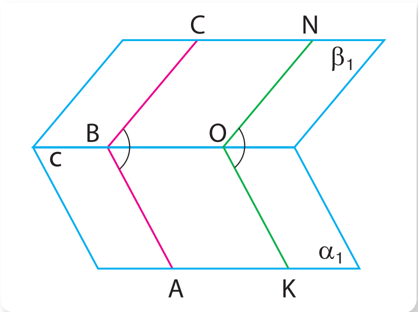
Мал. 321

двогранного кута (мал. 321). З побудови випливає, що **лінійний кут двогранного кута лежить у площині, перпендикулярній до його ребра.**

Для даного двогранного кута можна побудувати безліч лінійних кутів, оскільки вони суміщаються паралельним перенесенням (мал. 322).



Мал. 321



Мал. 321

ТЕОРЕМА

(про рівність лінійних кутів двогранного кута).

Лінійні кути двогранного кута — рівні.

Дано: двогранний кут з гранями α_1 і β_1 та ребром c (мал. 323), його лінійні кути ABC і KON.
Довести: $\angle ABC = \angle KON$.
Доведення. Промені BA і OK лежать в одній грані α_1 даного двогранного кута і перпендикулярні до ребра c, тому вони є співнапрямленими. Аналогічно, промені BC і ON є співнапрямленими. Отже, $\angle ABC$ і $\angle KON$ — це кути зі співнапрямленими сторонами, тома $\angle ABC = \angle KON$.

НАСЛІДОК. Міра лінійного кута двогранного кута не залежить від розміщення його вершини на ребрі двогранного кута.

Твердження безпосередньо впливає з доведеної теореми.

Дізнайтеся більше

1. **Еварист Галуа** (1811–1832) — видатний французький математик, засновник сучасної вищої алгебри. У 15 років прочитав першу математичну книжку, яка потрапила до його рук, — це була «Геометрія» Лежандра. Прочитав її так, як інші читають роман. Він прожив лише двадцять років і лише п’ять років з них займався математикою. Математичні роботи, які зробили його ім’я безсмертним, займають трохи більше 60 сторінок.

2. Кут між площинами широко використовується у будівельній справі. Завжди важливим є питання вибору кута нахилу покрівлі будівельних споруд, оскільки від цього кута залежить, як швидко буде розтавати сніг і крига на даху. На відомості про кут між площинами спираються тоді, коли з'ясовують, під яким кутом треба встановлювати на даху сонячні батареї для їх ефективної роботи тощо. Про ці та інші застосування властивостей кутів між площинами ви зможете дізнатися у мережі Інтернет.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	**Англійська**	**Німецька**	**Французька**
Кут між площинами	Angle between planes	Winkel zwischen den Ebenen	Angle entre les avions
Перпендикулярні площини	Perpendicular to the plane	Senkrecht zur Ebene	Perpendiculaire à l'avion
Двогранний кут	Double corner	Doppelecke	un coin double

Пригадайте головне

1. Дайте означення куту між площинами.
2. Яка градусна міра кута між паралельними площинами?
3. Які площини називаються перпендикулярними?
4. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
5. Доведіть, що пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.
6. Дайте означення двогранному куту. Який кут називають лінійним кутом двогранного кута?

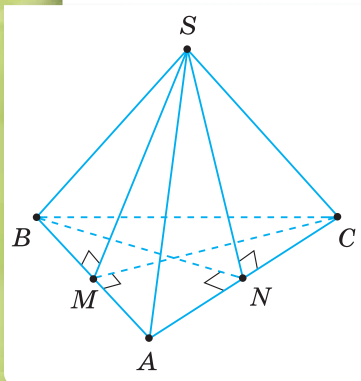
Розв'яжіть задачі

1'. $SABC$ — піраміда (мал. 298). Назвіть кут між площинами граней: 1) SAB і ABC; 2) SAC і ABC.

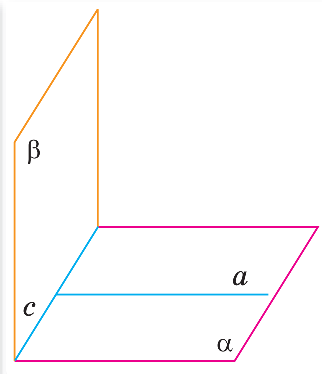
2'. Пряма a лежить у площині α і $a \perp \beta$ (мал. 299). Чи випливає з цього, що $\alpha \perp \beta$?

3'. $\alpha \perp \beta$ (див. мал. 299). Пряма a лежить у площині α і $a \perp c$. Чи можна стверджувати, що $a \perp \alpha$?

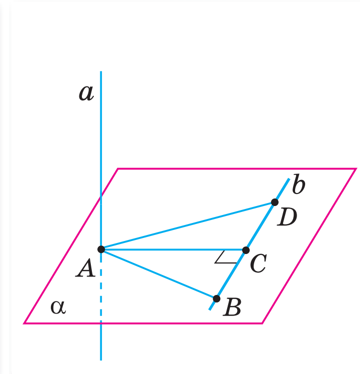
4'. На малюнку 300 $a \perp \alpha$, b лежить у площині α. Як називаються прямі a і b? Довжина якого з відрізків AB, AC, AD є відстанню між прямими a і b?



Мал. 298

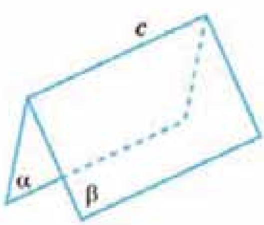


Мал. 299

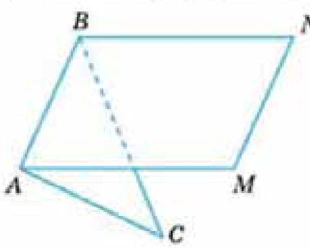


Мал. 300

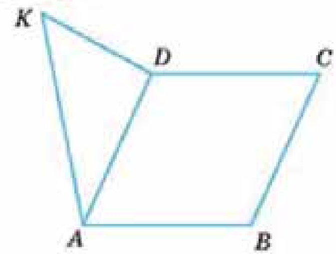
1′. Назвіть грані та ребро двогранного кута на малюнках 339-341.



Мал. 339



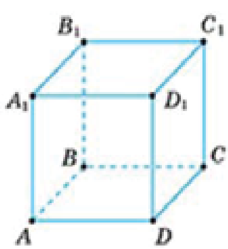
Мал. 340



Мал. 341

2′. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 342). Назвіть грані двогранного кута при ребрі:

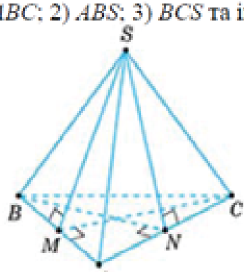
1) AB; 2) B_1C_1; 3) CC_1.



Мал. 342

3′. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (див. мал. 342). Назвіть лінійний кут двогранного кута при ребрі:
1) CD; 2) A_1D_1; 3) DD_1.

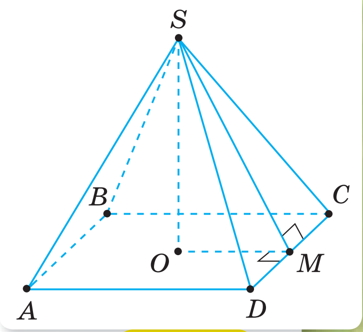
4′. $SABC$ – піраміда (мал. 343). Назвіть всі двогранні кути, утворені гранню:
1) ABC; 2) ABS; 3) BCS та іншими гранями піраміди.



Мал. 343

5°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами:
1) основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD;
2) грані CC_1D_1D і перерізу AA_1C_1C;
3) перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D.

6°. $SABCD$ — чотирикутна піраміда (мал. 301), SO — висота піраміди, φ — кут між площинами граней $ABCD$ і SCD, $SM = a$. Знайдіть SO, якщо:
1) $a = 2$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$.



Мал. 301

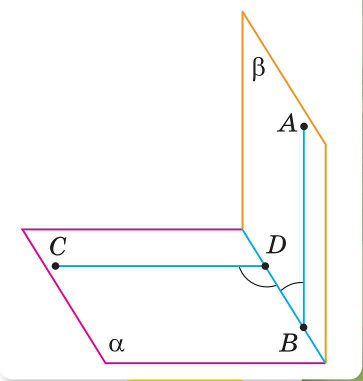
7°. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через ребра BB_1 і DD_1. Обґрунтуйте, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи.

8°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через:
1) ребро AA_1 і перпендикулярна до площини перерізу ABC_1D;
2) ребро CC_1 і перпендикулярна до площини перерізу BB_1D_1D.

9°. Скільки можна провести через дану точку площин, перпендикулярних до даної площини?

10°. Пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину. Як розміщена ця пряма відносно другої площини? Відповідь поясніть.

11°. Дано: $\angle ABD = \angle CDB$, $AB \perp \alpha$ (мал. 302). Довести:
1) $CD \perp \beta$; 2) $\alpha \perp \beta$.



Мал. 302

12°. CD — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що площини трикутників BCD і ACD перпендикулярні.

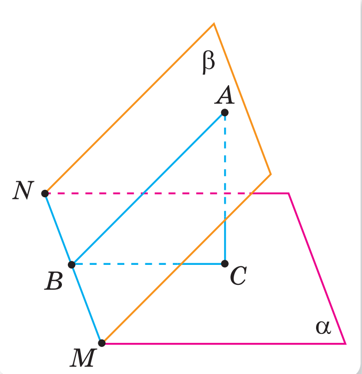
9°. На одній із граней двогранного кута дано точку K. Побудуйте лінійний кут даного двогранного кута так, щоб одна із сторін лінійного кута пройшла через точку K.

11°. $SABC$ – піраміда. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при ребрі:
1) AC;
2) AB;
3) BC.

12°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Побудуйте лінійний кут двогранного кута при ребрі:
1) AD;
2) CC_1;
3) C_1D_1.

14°. Точка B розміщена всередині двогранного кута і віддалена від обох його граней на 9 см. Знайдіть відстань від точки B до ребра двогранного кута, якщо він дорівнює:
1) 60°;
2) 90°;
3) 120°.

13. На малюнку 303 $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. Доведіть, що кут ABC — кут між площинами α і β.



Мал. 303

14. У трикутній піраміді $SABC$ усі ребра рівні, точка M — середина ребра SC. Доведіть, що кут AMB — кут між площинами граней SAC і SBC.

15. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Точка A площини β віддалена від площини α на відстань a. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетин площин, якщо:
1) $a = 10$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$;
3) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$.

16. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Відстань від точки A площини β до прямої перетину площин дорівнює a. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо:
1) $a = 24$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 14$ см, $\varphi = 60°$.

17. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин удвічі далі, ніж від другої площини.

18. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через її висоту і бічне ребро. Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи.

19. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди $SABC$ площиною, що проходить через середини M і N ребер SD і SC перпендикулярно до основи піраміди. Поясніть побудову.

20. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:
1) BCM і DCM; 2) ADM і DCM.

21. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:
1) AMC і ABC; 2) AMC і BMD.

22*. Кінці відрізка довжиною a лежать у двох перпендикулярних площинах. Відрізок утворює з однією площиною кут 45°, а з другою — кут 30°. Знайдіть частину прямої перетину площин, що знаходиться між основами перпендикулярів, проведених до неї з кінців даного відрізка.

21. Двогранний кут, утворений площинами α і β, дорівнює φ. Точка M площини β віддалена від площини α на відстань b. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута, якщо:

1) $b = 12$ см, $\varphi = 30°$;
2) $b = 8\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;
3 $b = 6\sqrt{3}$ см, $\varphi = 60°$.

22. Двогранний кут, утворений площинами α і β, дорівнює φ. Відстань від точки K площини β до ребра двогранного кута дорівнює a. Знайдіть відстань від точки K до площини α, якщо:

1) $a = 18$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 16$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 2\sqrt{6}$ см, $\varphi = 60°$.

23. Точка P належить одній із граней двогранного кута і знаходиться на відстані 8 см від іншої. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута, якщо двогранний кут дорівнює:

1) 45°;
2) 30°;
3) 60°.

24. Точка M належить одній із граней двогранного кута і знаходиться на відстані $4\sqrt{2}$ см від іншої. Визначте міру двогранного кута, якщо відстань від точки M до його ребра дорівнює:

1) $8\sqrt{2}$ см;
2) 8 см;
3) $5\sqrt{2}$ см.

26. Точки A і B належать одній із граней гострого двогранного кута (мал. 346). Через ці точки проведено перпендикуляри AC і BD до іншої грані та перпендикуляри AM і BN до прямої c. Заповніть таблицю 14.

AM	5 см	4 см		4 дм	8 дм	$2\sqrt{2}$ дм
MC		2 см			6 дм	1 дм
AC	3 см		5 см			
BN			$5\sqrt{5}$ см	12 дм		
ND		4 см				5 дм
BD	9 см		15 см	13 дм	25 дм	

33*. Точка A розміщена всередині двогранного кута, який дорівнює 60°, і віддалена від його граней на відстані 2 см і 44 см. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута.

34*. Висота правильної піраміди дорівнює a, а сторона основи – $4\sqrt{3}a$. Знайдіть двогранний кут між площинами основи і бічної грані, якщо основа піраміди:
1) трикутник; 2) квадрат; 3) шестикутник.

35*. Відстані від точки A, розміщеної всередині двогранного кута, до його граней дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного двогранного кута, якщо його міра дорівнює: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°.

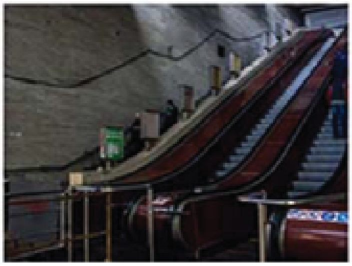
Проявіть компетентність

23. Знайдіть кут загострення стамески за розмірами, даними на малюнку 305.

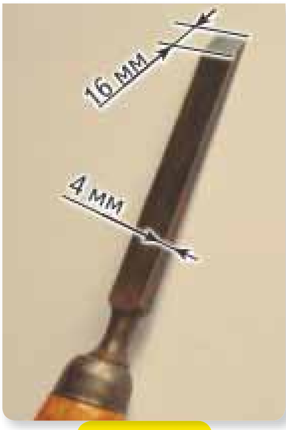
24. Вертикальність встановленої плоскої поверхні (стіни, паркану тощо) можна перевірити за допомогою виска — мотузки з тягарцем (мал. 306). Поясніть, як це зробити. На чому ґрунтується така перевірка?

25. Кут між площинами іноді називають кутом найбільшого нахилу або підйому. Кут найбільшого підйому гори дорівнює 30° (мал. 307). Під яким кутом φ до підошви гори треба прокласти прямолінійну дорогу AB, щоб кут її нахилу до площини горизонту дорівнював 16°?

41. Кут нахилу ескалатора станції «Х» київського метрополітену дорівнює 30°. Під час спуску до станції метро на ескалаторі встановлено 25 світильників. Відстань між будь-якими двома з них дорівнює 4,5 м. Визначте, на якій глибині знаходиться ця станція метрополітену.

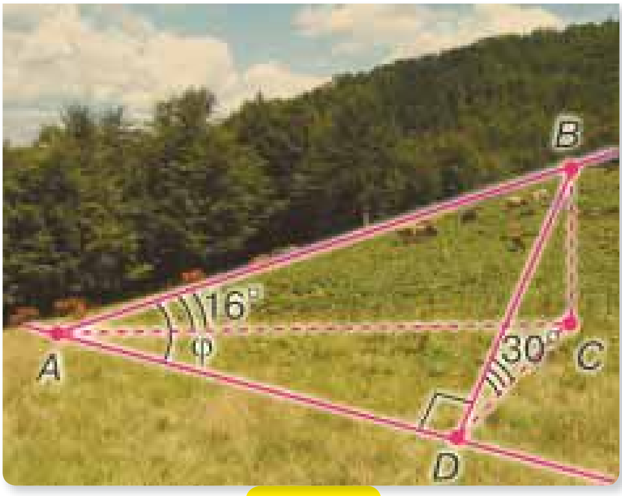


42. На покриття будинку знадобилося 40 дерев'яних дощок завширшки 35 см. Визначте міру двогранного кута між схилами даху, якщо відстань між їх нижніми кінцями дорівнює 4,8 м.



Мал. 305

Мал. 306



Мал. 307

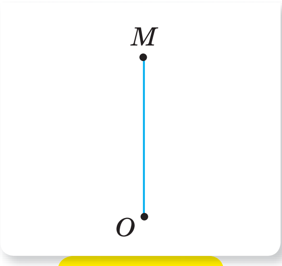
§ 3.5. ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ

Ви вже знаєте, як знаходити відстані на площині: між двома точками (мал. 308), від точки до прямої (мал. 309), між двома паралельними прямими (мал. 310).

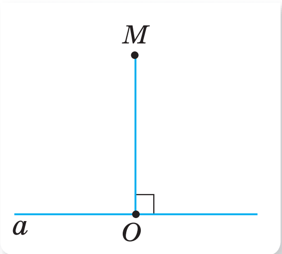
У просторі відстань між двома точками знаходять так само, як і на площині — за довжиною відрізка з кінцями в даних точках (див. мал. 308).

Ви знаєте, що через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести єдину площину (наслідок 1 з аксіом стереометрії). Тому відстань від точки до прямої у просторі можна знаходити, як у планіметрії (мал. 309). Для цього треба знайти довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

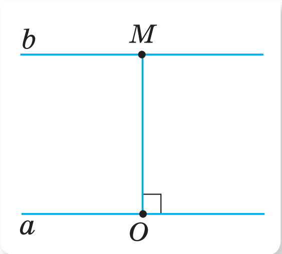
Спираючись на теорему про існування та єдиність площини, що проходить через дві паралельні прямі, одержуємо висновок: відстань між двома паралельними прямими в просторі можна знаходити, як у планіметрії. Для цього треба знайти довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї з даних паралельних прямих до другої прямої (мал. 310).



Мал. 308



Мал. 309



Мал. 310

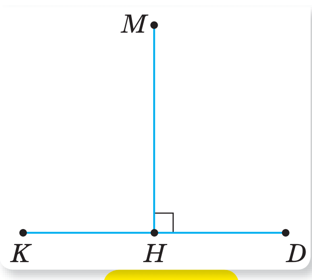
Як знаходити відстань між іншими геометричними фігурами у просторі? Для цього треба знати, яким є означення такої відстані та які дії треба виконати, щоб її знайти.

1. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ВІДРІЗКА (ПРОМЕНЯ)

Із курсу планіметрії ви знаєте, що *відстань від точки до відрізка (променя)* — це найменша відстань від даної точки до точок відрізка. Ця відстань дорівнює:

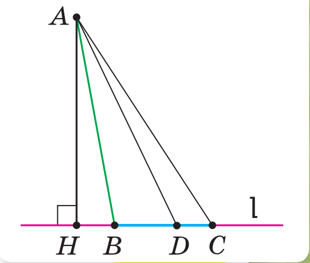
— або довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої, що містить відрізок (промінь), якщо основа цього перпендикуляра належить відрізку (мал. 311);

— або відстані від даної точки до найближчої точки відрізка у супротивному випадку.



Мал. 311

На малюнку 312 відстань від точки A до відрізка BC дорівнює довжині відрізка AB. Обґрунтуйте цей висновок самостійно.



Мал. 312

? Як без побудови визначити, чи належить відрізку основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої, що містить відрізок? Відповідь дає наступна задача.

Задача 1. За відомими довжинами сторін ΔAMB з'ясуйте, як на прямій AB розміщується основа висоти MH трикутника відносно кінців його сторони AB.

Розв'язання. Розміщення основи висоти MH, проведеної до сторони AB, залежить від того, якими є кути A і B трикутника.

Якщо $\angle A$ і $\angle B$ — гострі (мал. 313), то в ΔAMB основа висоти MH лежить на стороні AB. За теоремою косинусів одержуємо:

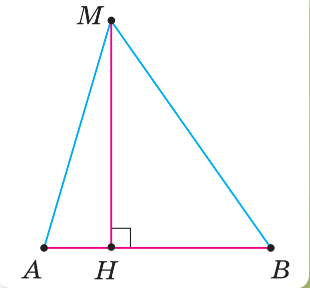
$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2\ MA \cdot AB\cos A$,

$MA^2 = MB^2 + AB^2 - 2\ MB \cdot Ab\cos B$,

звідки $MB^2 < MA^2 + AB^2$ і $MA^2 < MB^2 + AB^2$, тобто:

$MA^2 + AB^2 - MB^2 > 0$ і $MB^2 + AB^2 - MA^2 > 0$.

А це означає, що основа висоти MH лежить на стороні AB трикутника AMB тоді, коли обидва вирази $MA^2 + AB^2 - MB^2$ і $MB^2 + AB^2 - MA^2$ є додатними.

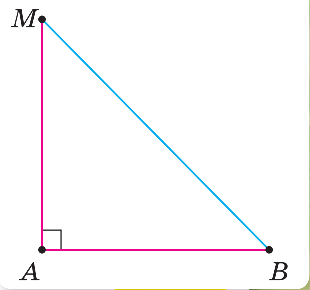


Мал. 313

Якщо в ΔAMB або $\angle A$, або $\angle B$ — прямий (мал. 314), то ΔAMB — прямокутний і основа його висоти MH збігається з одним із кінців сторони AB — або з точкою A, або з точкою B. Тоді або $MB^2 = MA^2 + AB^2$, або $MA^2 = MB^2 + AB^2$, тобто:

або $MA^2 + AB^2 - MB^2 = 0$, або $MB^2 + AB^2 - MA^2 = 0$.

А це означає, що основа висоти MH збігається з одним із кінців сторони AB трикутника AMB тоді, коли один із виразів — або $MA^2 + AB^2 - MB^2$, або $MB^2 + AB^2 - MA^2$ — дорівнює нулю.



Мал. 314

Якщо в ΔAMB або $\angle A$, або $\angle B$ — тупий (мал. 315), тоді основа висоти MH лежить на продовженні сторони AB. За теоремою косинусів одержуємо:

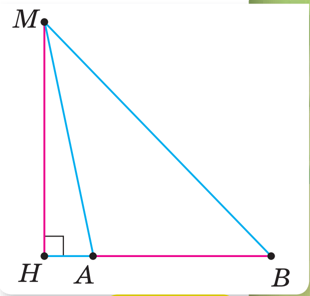
або $MB^2 = MA^2 + AB^2 + 2\ MA \cdot AB\cos A$,

або $MA^2 = MB^2 + AB^2 + 2\ MB \cdot AB\cos B$,

звідки або $MB^2 > MA^2 + AB^2$, або $MA^2 > MB^2 + AB^2$, тобто:

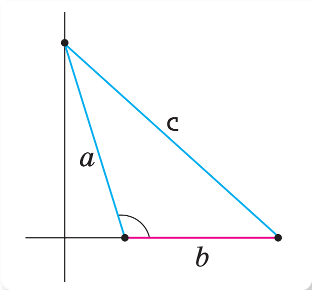
або $MA^2 + AB^2 - MB^2 < 0$, або $MB^2 + AB^2 - MA^2 < 0$.

А це означає, що основа висоти MH лежить на продовженні сторони AB трикутника AMB тоді, коли один із виразів — або $MA^2 + AB^2 - MB^2$, або $MB^2 + AB^2 - MA^2$ — є від'ємним.



Мал. 315

Щоб за відомими сторонами a, b і c трикутника визначити, чи належить стороні b основа висоти до цієї сторони (мал. 316), достатньо оцінити знак виразів:
$a^2 + b^2 - c^2$ і $c^2 + b^2 - a^2$:
— якщо обидва вирази додатні, то основа висоти належить стороні b;
— якщо один із виразів дорівнює нулю, то основа висоти збігається з одним із кінців сторони b;
— в усіх інших випадках основа висоти не належить стороні b.



Мал. 316

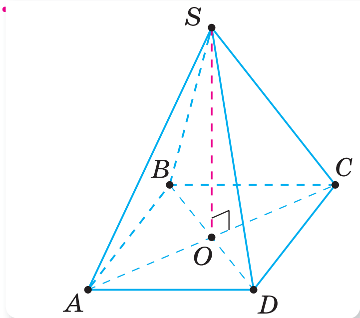
Потреба знаходити відстань від точки поза площиною до прямої, що лежить у цій площині, виникає і на практиці. Наприклад, якщо треба визначити відстань від вершини башти до дороги за відомими висотою башти та відстанню від дороги до основи башти (мал. 317).


Мал. 317

2. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ

Відстанню від точки до площини **називається довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини.**

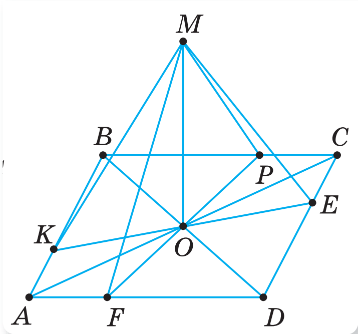
Наприклад, відстанню від вершини піраміди до площини основи є довжина висоти піраміди, проведеної з вершини до основи (мал. 318). Про особливості її побудови залежно від виду піраміди ви дізнаєтесь у курсі геометрії 11 класу.



Мал. 318

Щоб знайти відстань від точки до площини, треба:
1) через дану точку провести площину, перпендикулярну до даної площини;
2) провести пряму перетину цих двох площин;
3) у побудованій площині провести перпендикуляр з даної точки до прямої перетину площин;
4) визначити довжину цього перпендикуляра.

Задача 2. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює 10 см, а до площини ромба — 8 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.



Мал. 319

Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 319), $MK = MP = ME = MF = 10$ см, $MO = 8$ см. За означенням відстані $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $ME \perp CD$, $MF \perp AD$. Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OE \perp CD$, $OF \perp AD$. Оскільки відстані від точки M до сторін ромба рівні, то відрізки OK, OP, OE, OF також рівні як проекції рівних похилих. Звідси точка O — основа перпендикуляра MO — є центром кола, вписаного в ромб. Із прямокутного трикутника MOK знайдемо радіус цього кола:

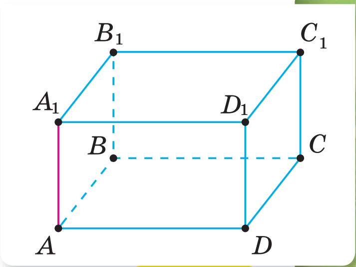
$$R = OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см)}.$$

Якщо точка A однаково віддалена від усіх сторін многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини многокутника, також однаково віддалена від його сторін, тобто є центром вписаного в многокутник кола.

3. ВІДСТАНЬ ВІД ПРЯМОЇ ДО ПАРАЛЕЛЬНОЇ ЇЙ ПЛОЩИНИ

***Відстанню від прямої до паралельної їй площини* називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки цієї прямої до площини.**

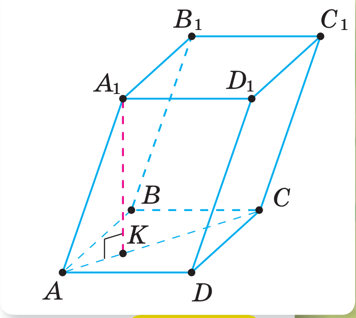
Наприклад, відстанню від ребра верхньої основи паралелепіпеда до площини нижньої основи є довжина бічного ребра, якщо паралелепіпед є прямим (мал. 320), і довжина перпендикуляра, проведенного з будь-якої точки ребра верхньої основи до площини нижньої основи якщо паралелепіпед є похилим (мал.321).



Мал. 320

Щоб знайти відстань від прямої до паралельної їй площини, треба:

1) на прямій обрати довільну точку;
2) через обрану точку провести площину, перпендикулярну до даної площини;
3) провести пряму перетину цих двох площин;
4) у побудованій площині провести перпендикуляр з цієї точки до прямої перетину площин;
5) визначити довжину побудованого перпендикуляра.

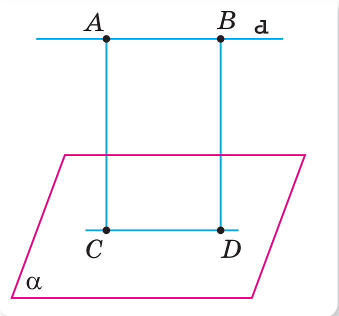


Мал. 321

ТЕОРЕМА **(властивість відстані від прямої до паралельної їй площини).**

Відстань від прямої до паралельної їй площини не залежить від вибору точки на прямій.

Дано: пряма a, площина α, $a \parallel \alpha$ (мал. 322).
Довести: кожна точка прямої a лежить на тій самій відстані від площини α.
Доведення. Проведемо з двох довільних точок A і B прямої a перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини α. Доведемо, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки $AA_1 \perp \alpha$ і $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Проведемо через прямі AA_1 і BB_1 площину. Ця площина перетне площину а по прямій A_1B_1, паралельній AB. Отже, у чотирикутнику ABB_1A_1 протилежні сторони паралельні. Тому він є паралелограмом, а це означає, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки точки A і B були обрані довільно на прямій a, то твердження справедливе для будь-яких точок прямої.



Мал. 322

На практиці відстань від прямої до паралельної їй площини доводиться знаходити на будівництві (мал. 323), в побуті (мал. 324), на виробництві. Наприклад, для тролейбусних мереж важливо, щоб у точках підвішування висота контактних дротів над рівнем дорожного полотна була однаковою: $5{,}7 \pm 0{,}1$ м (мал. 325).


Мал. 323

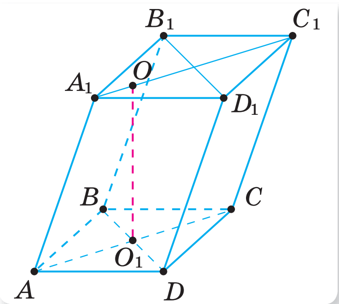

Мал. 324


Мал. 325

4. ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ

Відстанню між паралельними площинами **називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до іншої.**

Наприклад, відстань між двома протилежними гранями паралелепіпеда — це довжина висоти паралелепіпеда, проведеної з довільної точки однієї грані до площини протилежної грані (мал. 326).



Мал. 326

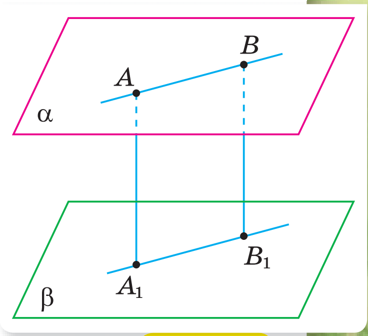
Щоб знайти відстань між паралельними площинами, треба:
1) на одній з площин обрати довільну точку;

2) через обрану точку провести площину, перпендикулярну до другої площини;
3) провести пряму перетину цих двох площин;
4) у побудованій площині провести перпендикуляр з цієї точки до прямої перетину площин;
5) визначити довжину побудованого перпендикуляра.

ТЕОРЕМА **(властивість відстані між паралельними площинами).**

Відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки на одній з площин.

Дано: площини $\alpha \parallel \beta$.
Довести: відстань між α і β не залежить від вибору точки на одній з площин.
Доведення. Проведемо з двох довільних точок A і B площини α перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини β (мал. 327). Доведемо, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки $AA_1 \perp \beta$ і $BB_1 \perp \beta$, то $AA_1 \parallel BB_1$. Проведемо через прямі AA_1 і BB_1 площину. Ця площина перетне площину а по прямій AB, а площину β по прямій A_1B_1, прямі AB і A_1B_1 — паралельні. Отже, у чотирикутнику ABB_1A_1 протилежні сторони паралельні. Тому він паралелограм, а це означає, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки точки A і B були обрані довільно на площині α, а площину α було обрано довільно з двох площин, то твердження справедливе для будь-яких точок на одній з паралельних площин.

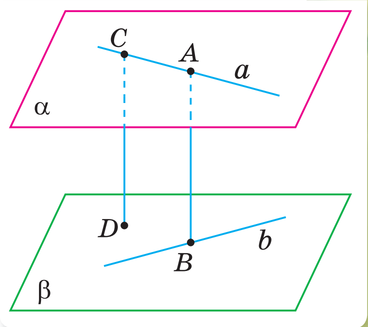


Мал. 327

5. ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Ви вже знаєте, що через кожну з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну іншій мимобіжній прямій. Ви також знаєте, як знаходити відстань між паралельними площинами.

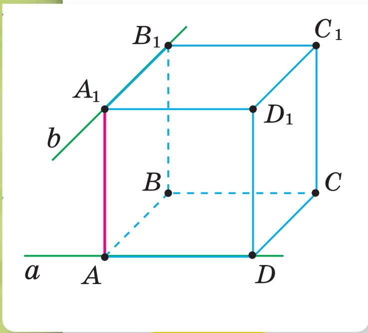
? Чи можна застосувати алгоритм знаходження відстані між паралельними площинами до знаходження відстані між мимобіжними прямими? Щоб відповісти на це запитання, спочатку з'ясуємо, чи кожний перпендикуляр між двома паралельними площинами є перпендикуляром до двох мимобіжних прямих.



Мал. 328

На малюнку 328 ви бачите відрізки AB і CD, які є перпендикулярами до паралельних площин α і β. Обидва кінці відрізка AB лежать на мимобіжних прямих a і b, а у відрізка CD лише його кінець C лежить на одній з них — на прямій a. Отже, відрізок CD, хоча і лежить на прямій, перпендикулярній до обох мимобіжних прямих a і b, але не є перпендикуляром до цих прямих.

***Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих* називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.**

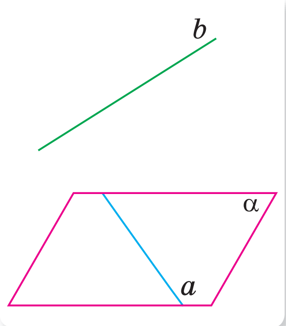


Мал. 329

На малюнку 329 відрізок AB — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих a і b. А в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 329) спільним перпендикуляром до мимобіжних прямих a і b, що містять ребра AD і A_1B_1, є відрізок AA_1.

ТЕОРЕМА **(існування і єдиності спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих).**

Дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж один.



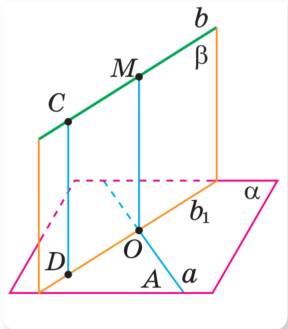
Мал. 330

Дано: a і b — мимобіжні прямі (мал. 330).

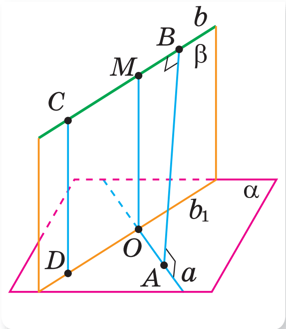
Довести: 1) існує спільний перпендикуляр до прямих a і b;
2) спільний перпендикуляр — єдиний.

Доведення. 1) Доведемо, що існує спільний перпендикуляр до прямих a і b. Проведемо через пряму a площину α, паралельну прямій b (мал. 331). З довільної точки C прямої b проведемо перпендикуляр CD до площини α і проведемо через прямі CD і b площину β. Площина β перпендикулярна до площини α (за ознакою перпендикулярності площин) і перетинає площину α по прямій $b_1 \| b$ (за властивістю площин, що перетинаються). Через точку O перетину прямих a і b_1 проведемо пряму, перпендикулярну до α. Ця пряма перетинає пряму b у точці M, оскільки вона лежить в одній площині з прямою b і не паралельна β. За властивістю перпендикулярів до площини (задача 1, § 3.3), $OM \| CD$, отже, $OM \perp b$. Оскільки $OM \perp \alpha$, то $OM \perp a$. Отже, пряма OM перпендикулярна до мимобіжних прямих a і b. Відрізок OM — спільний перпендикуляр до прямих a і b.

2) Доведемо єдиність спільного перпендикуляра до прямих a і b. Припустимо, що існує інший спільний перпендикуляр до прямих a і b, наприклад, відрізок AB ($A \in a$, $B \in b$) (мал. 332). Оскільки $AB \perp b$, $b_1 \| b$, то $AB \perp b_1$. Тоді, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма $AB \perp \alpha$.



Мал. 331



Мал. 332

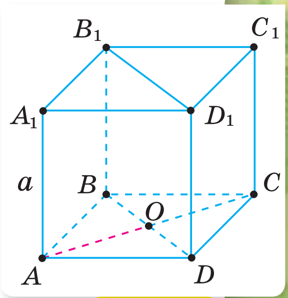
Одержали, що $OM \perp \alpha$ і $AB \perp \alpha$. Із цього випливає, що $OM \parallel AB$. А це значить, що точки O, M, A, B, а отже, і мимобіжні прямі a і b лежать в одній площині, що неможливо. Отже, припущення було неправильним, а правильним є те, що спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих — єдиний.

Відстанню між мимобіжними прямими **називається довжина їх спільного перпендикуляра.**

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a (мал. 333). Знайдіть відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD.

Розв'язання. Грані куба — квадрати. Тоді пряма AA_1 перпендикулярна до площини основи, а отже, і до прямої AO. $AO \perp BD$, оскільки діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні. Тоді відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра AO. Звідси одержуємо:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}, \text{ а } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Мал. 333

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, треба:
1) через одну з даних мимобіжних прямих провести площину, паралельну другій прямій;
2) через другу з мимобіжних прямих провести площину, перпендикулярну до першої прямої, та позначити точку їх перетину;
3) з побудованої точки провести перпендикуляр до першої з мимобіжних прямих;
4) визначити довжину цього перпендикуляра.

Дізнайтеся більше

Для точного і водночас зручного виконання будівельних робіт використовують різні види сучасних вимірювальних приладів.

Тахометри (мал. 338). Тахометрична зйомка дозволяє відобразити план рельєфу місцевості. Тахометри з високим ступенем точності визначають відстані до об'єктів, їх висоту щодо базової лінії, а також координати. Крім виконання цих функцій, тахометри також мають досить великий обсяг пам'яті для зберігання одержаних даних, деякі моделі сумісні з комп'ютером за допомогою спеціальних програм. Управління тахометром здійснюється за допомогою клавіатури, а одержані результати можна побачити на спеціальному дисплеї.

Мал. 338

Далекоміри (мал. 339). Лазерний далекомір дозволяє безконтактним способом вимірювати відстані до необхідних вам об'єктів. При цьому завдяки особливої технології при роботі з цим приладом досягається висока точність вимірювань (похибка в межах 3 мм). Лазерні рулетки (різновид далекоміра) можуть зберігати в пам'яті до 80 вимірювань (залежно від моделі), а також вимірюють кути нахилу різних об'єктів. Вони дуже зручні в роботі, мають велику дальність вимірювань (до 200 м).

Мал. 339

Детектори (мал. 340). Такі прилади допомагають визначити наявність за стіною або перекриттям прихованих об'єктів (проводки, арматури, металевих і дерев'яних елементів, комунікацій). Залежно від того, які саме вимірювання необхідно провести, використовують детектор проводки, детектор води, детектор металу тощо. Більшість із цих приладів працює від батарей, має високу точність і велику глибину проникнення.

Мал. 340

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
відстань	distance	Entfernung	distance
відстань між фігурами	the distance between the figures	der Abstand zwischen den Figuren	la distance entre les figure

Пригадайте головне

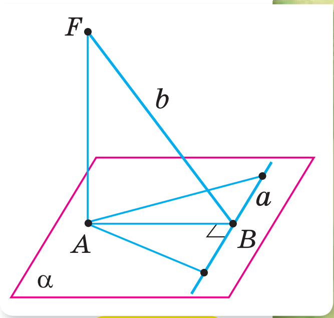
1. Що слід розуміти під відстанню від точки до відрізка (променя)?
2. Що називають відстанню від точки до площини? Від прямої до паралельної їй площини? Між паралельними площинами?
3. Сформулюйте і доведіть властивість відстані від прямої до паралельної їй площини.
4. Сформулюйте і доведіть властивість відстані між паралельними площинами.
5. Що називається спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?
6. Доведіть теорему існування і єдиності спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих.
7. Що називають відстанню між мимобіжними прямими?

Розв'яжіть задачі

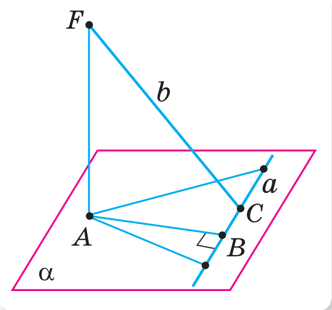
1'. На малюнках 341–343 укажіть відрізок, довжина якого є відстанню від точки F до прямої a.

2'. На малюнку 344 укажіть відрізок, довжина якого є відстанню від вершини D до ребра CC_1.

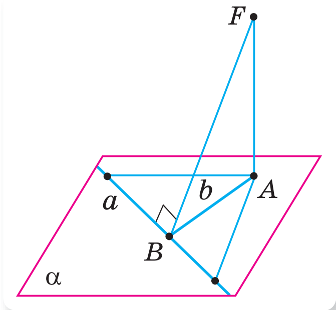
3'. З точки A, яка не лежить у площині α, проведено перпендикуляр AK і дві похилі AN і AM до площини α. Довжиною якого з відрізків вимірюється відстань від точки A до площини α? Відповідь поясніть.



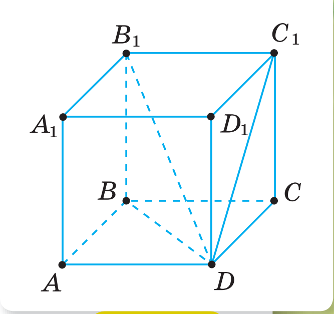
Мал. 341



Мал. 342



Мал. 343



Мал. 344

4'. Укажіть відрізок довжина якого є відстанню від прямої l, яка проходить через ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до площини, яка містить грань куба CC_1D_1D.

5'. Виміри паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно дорівнюють a, b, c. Знайдіть відстань між площинами протилежних граней ABB_1A_1 і CC_1D_1D паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

6'. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між ребрами AB і CC_1.

7°. З точки M до площини α проведено похилі, як показано на малюнку 345. Проекція похилої MB перпендикулярна до прямої l. Укажіть відрізок, довжина якого є відстанню від точки M до прямої l.

8°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O — точка перетину діагоналей. $AB = a$, $OM = b$. Знайдіть відстань від точки M до сторони CD, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 15$ см.

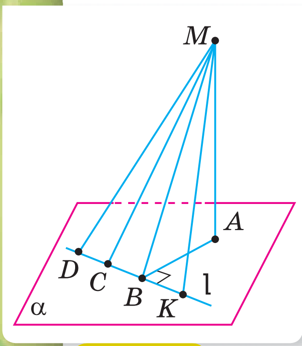
9°. З вершини B прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM до його площини (мал. 346). $AB = a$, $BC = b$, $BM = c$. Знайдіть відстані від точки M до сторін CD і AD, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 16$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $c = 24$ см.

10°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O — точка перетину його діагоналей. Доведіть, що точка M рівновіддалена від вершин квадрата.

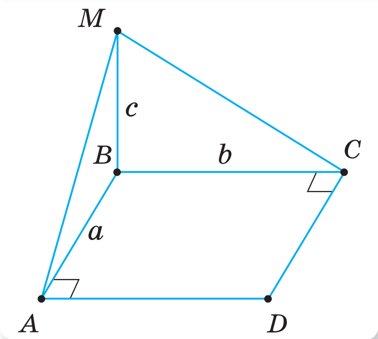
11°. Точка віддалена від площини на відстань h. Знайдіть довжини похилих, проведених з цієї точки під такими кутами до площини:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

12°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a. Знайдіть відстань:
1) від прямої AA_1 до площини BB_1D_1D;
2) від прямої AD до площини A_1BCD.

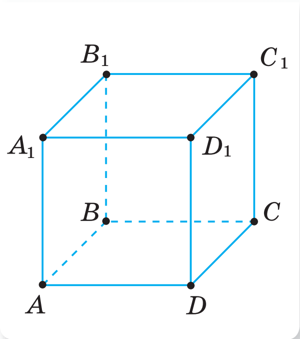
13°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 347). Чому дорівнює відстань:
1) від вершини A до площини грані
2) від прямої A_1D_1 до площини грані ABCD;
3) між площинами граней AA_1D_1D і BB_1C_1C.



Мал. 345



Мал. 346



Мал. 347

14°. Чому дорівнюють відстані між протилежними гранями прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 12 см, 47 см і 11 см?

15°. Чому дорівнюють відстані між протилежними гранями куба з ребром 5 см?

16°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a (мал. 348). Знайдіть відстань між прямими:
1) AA_1 і BC; 2) CC_1 і AB_1; 3) AC і B_1D_1.

17°. Визначте за даними на малюнку 349, довжиною якого з відрізків AK, A_1C чи A_1C_1 вимірюється відстань між ребрами AA_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Відповідь поясніть.

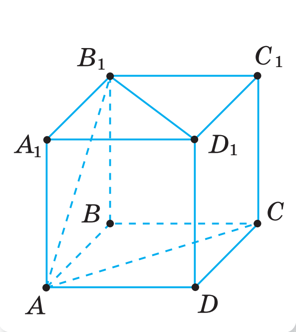
18. Відрізок AB перетинає деяку площину в точці O. Прямі AD і BC, які перпендикулярні до цієї площини, перетинають її в точках D і C відповідно. $AD = a$, $BC = b$, $OC = c$. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 2$ см, $c = 1{,}5$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см.

19. Відрізок MH перетинає деяку площину в точці K. Через кінці відрізка проведено перпендикулярні до цієї площини прямі HP і ME, які перетинають площину в точках P і E. $HP = a$, $HK = b$, $ME = c$. Знайдіть довжину відрізка PE, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см.

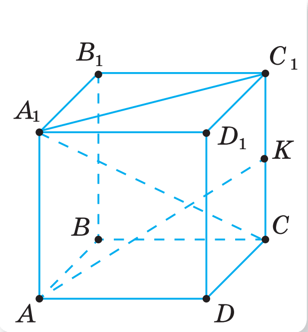
20. Доведіть, що коли точка рівновіддалена від вершин паралелограма, то цей паралелограм — прямокутник.

21. Якщо точка рівновіддалена від вершин ромба, то цей ромб — квадрат. Доведіть.

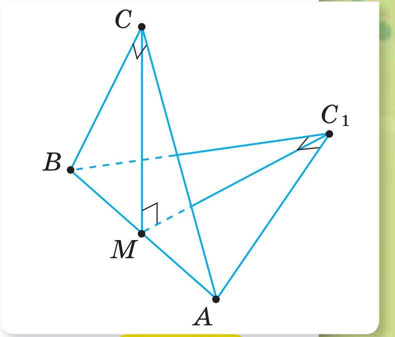
22. Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників з спільною гіпотенузою $AB = a$ перпендикулярні (мал. 350). Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо:
1) $a = 10$ см;
2) $a = 18$ см;
3) $a = 22$ см.



Мал. 348



Мал. 349



Мал. 350

23. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. $AB = a$. Знайдіть:
1) відстань між точками D і D_1;
2) відстань між точками C і D_1;
3) кут між діагоналями AC і AC_1.

24. Точка знаходиться на відстані a від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин, якщо:
1) $a = 4\sqrt{2}$ см;
2) $a = 5$ см.

25. З вершин A і B трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника. Обчисліть відстань від вершини C прямого кута трикутника ABC до середини відрізка A_1B_1, якщо $A_1C = 17$ см, $A_1A = 15$ см, $B_1C = 3\sqrt{13}$ см, $B_1B = 9$ см.

26. CM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). $CM = a$, $AB = b$, $AC = c$. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB, якщо:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 2$ см, $c = 5$ см.

27. Доведіть, що коли точка рівновіддалена від усіх сторін паралелограма, то цей паралелограм — ромб.

28. Точка F рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Доведіть, що основа перпендикуляра FO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, вписаного в многокутник.

29. З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CD до його площини. $AC = a$, $CD = b$. Знайдіть відстань від точки D до гіпотенузи AB, якщо:
1) $a = 6\sqrt{2}$ см, $b = 8$ см;
2) $a = 12\sqrt{2}$ см, $b = 5$ см.

30. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка M, яка лежить поза площиною ромба, віддалена від його сторін на 8 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

31. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює a, а до площини ромба — b. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $a = 24$ см, $b = 7$ см;
2) $a = 16$ см, $b = 12$ см.

32. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 144 см. Точка M віддалена від кожної сторони цього трикутника на 19 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

33. AM — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AM, якщо $MB = 15$ см, $MC = 24$ см і $MD = 20$ см.

34. **З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини. Знайдіть відстань від заданої точки до прямої, яка проходить через основи похилих, якщо кут між їх проекціями дорівнює 120°.**

35. З точки, віддаленої від площини на a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань від заданої точки до прямої, яка проходить через основи похилих.

36. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 30 см і 40 см. З вершини A ромба проведено перпендикуляр AM до його площини. Знайдіть відстань від точки M до протилежної сторони ромба, якщо $AM = 10$ см.

37. Сторони паралелограма AB і ВС відповідно дорівнюють 20 см і 24 см, а кут між ними — 120°. З вершини B паралелограма проведено перпендикуляр BK до його площини. Знайдіть відстань від точки K до сторони CD паралелограма, якщо $BK = 3$ см.

38. Пряма CK перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ із стороною 2 см, $CK = 1$ см. Знайдіть відстань від точки K до вершин квадрата.

39. Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ із стороною 3 см, $CM = 4$ см. Знайдіть відстань від точки M до вершин квадрата.

40. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$. Знайдіть відстань від точки D до середини M гіпотенузи трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 24$ см.

41. Пряма AD перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$. Знайдіть відстань від точки D до вершин B і C, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 15$ см.

42. Пряма OM перпендикулярна до площини кола з центром O, а точка A лежить на колі. Знайдіть AM, якщо: 1) $OA = 6$ см, $\angle OMA = 30°$; 2) $OM = 4$ см, площа круга дорівнює 25π см^2.

43. Точка A знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника, якщо: 1) $a = \sqrt{6}$ см; 2) $a = 3$ см.

44. Точка D знаходиться на відстані 10 см від вершини прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки D до площини трикутника.

45. Точка K знаходиться на відстані 20 см від вершини прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть відстань від точки K до площини трикутника.

46. З точки A до площини а проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть проекції похилих і відстань від точки A до площини α.

47. З точки до площини проведено дві похилі, які відносяться, як 5 : 8, а проекції похилих дорівнюють 7 см і 32 см. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до площини.

48. Точка A знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника, якщо: 1) $a = \sqrt{6}$ см; 2) $a = 3$ см.

49. Точка D знаходиться на відстані 10 см від вершини прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки D до площини трикутника.

50. Точка K знаходиться на відстані 20 см від вершини прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть відстань від точки K до площини трикутника.

51. Через катет AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α під кутом φ до площини трикутника. $AB = c$, $AC = b$. Знайдіть відстань від вершини B до площини α, якщо:
1) $c = 20$ см, $b = 16$ см, $\varphi = 30°$;
2) $c = 10$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $c = 13$ см, $b = 5$ см, $\varphi = 60°$.

52. Площини α і β взаємно перпендикулярні і перетинаються по прямій a. Площина γ перетинає площини α і β по прямим b і c відповідно, паралельним прямій a. Відстань між прямими b і a дорівнює 8 см, а між c і a — 15 см. Знайдіть відстань між прямою a і площиною γ.

53. Площини ϖ і γ перпендикулярні і перетинаються по прямій m. Площина φ перетинає площини ϖ і γ по прямим k і p, паралельним прямій m. Відстань між прямими k і p дорівнює 20 см, а між прямими m і p — 16 см. Знайдіть відстань між прямою m і площиною φ.

54. Площини α і β перпендикулярні і перетинаються по прямій c. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих a і b відповідно. Знайдіть відстань між прямими a і c, якщо відстань між a і b дорівнює 30 см, а між b і c — 24 см.

55. Площини α і β перпендикулярні і перетинаються по прямій c. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих a і b відповідно. Знайдіть відстань між прямими b і c, якщо відстань між a і c дорівнює 12 см, а між b і a — 20 см.

56. На площині α проведені паралельні прямі a і b, відстань між якими дорівнює 44 см. Пряма c паралельна даним прямим і віддалена від площини α на 15 см, а від прямої a — на 39 см. Знайдіть відстань між прямими b і c.

57. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює a. Відрізок довжиною c упирається своїми кінцями у ці площини. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин, якщо:
1) $a=10$ см, $c=26$ см;
2) $a=12$ см, $c=13$ см.

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб з ребром a. Знайдіть відстань між прямими:
1) BB_1 і AC; 2) AA_1 і B_1D.

59. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) з катетами a і b. Знайдіть відстань між прямими CM і AB, якщо:
1) $a = 20$ см, $b = 15$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см.

60. Сторони основ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між ребром AA_1 і діагоналлю B_1D паралелепіпеда.

61*. Кінці відрізка лежать на перпендикулярних площинах і віддалені від прямої їх перетину на 7 см і 24 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до прямої перетину площин.

62*. Прямі AB і CD перпендикулярні до деякої площини і перетинають її в точках B і D відповідно. Знайдіть відстань між точками A і C, якщо $AB = 9$ см, $CD = 15$ см, $BD = 8$ см.

63*. Через кінці відрізка MH проведено прямі, перпендикулярні до деякої площини, які перетинають цю площину в точках K і T відповідно. $KT = a$, $MK = b$, $HT = c$. Знайдіть довжину відрізка MH, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 20$ см.

64*. Точка A знаходиться на відстанях a і b від двох площин, що перетинаються. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює: 1) 90°; 2) 60°; 3) 30°.

65*. З вершин A і B рівностороннього трикутника ABC зі стороною $AB = 6$ см, проведено до площини трикутника перпендикуляри AA_1 і BB_1. Відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника. Обчисліть відстань від вершини C трикутника ABC до середини відрізка A_1B_1, якщо $A_1C = 2\sqrt{10}$ см, $B_1C = 2\sqrt{13}$ см.

66*. Точка M знаходиться на відстані 27 см від сторін рівнобічної трапеції. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 16 см і 30 см.

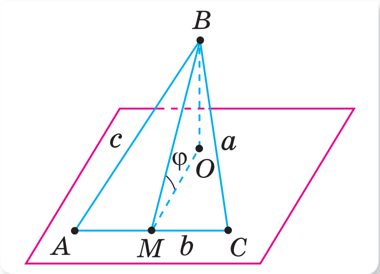
67*. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, $AB = BC = 5$ см. З центра O кола, вписаного в трикутник, проведено перпендикуляр $OK = 2$ см до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки K до сторін трикутника.

68*. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

69*. З даної точки до площини проведено три рівні похилі довжиною 74 см. Відстані між кінцями похилих дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

70*. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD, BC і висота відповідно дорівнюють 24 см, 10 см і 17 см. Точка M знаходиться на відстані 85 см від вершин трапеції. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції.

71*. Точка M рівновіддалена від усіх вершин многокутника. Доведіть, що основа перпендикуляра MO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, описаного навколо многокутника.



Мал. 351

72*. У трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (мал. 351). Через сторону AC проведена площина під кутом φ до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини B до площини, якщо:
1) $a = 25$ см, $b = 36$ см, $c = 29$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 25$ см, $b = 12$ см, $c = 17$ см, $\varphi = 60°$.

73*. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведено площину α. Знайдіть відстань від прямої BC до площини α, якщо площа ромба дорівнює 20 см^2, сторона — 5 см, а кут між проекціями сторони CD і висоти CH ($H \in AD$) дорівнює 45°.

74*. Через сторону AD ромба $ABCD$ проведено площину α. Знайдіть відстань від прямої BC до площини α, якщо площа ромба дорівнює 80 см^2, сторона — 8 см, а кут між проекціями сторони CD і прямою AD дорівнює 45°.

75*. Кожне ребро тетраедра $ABCD$ дорівнює a. Знайдіть відстань між ребрами AB і CD.

76*. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней.

Проявіть компетентність

77. Запропонуйте, використавши означення відстані між прямою і паралельною їй площиною, спосіб перевірки паралельності прямої і площини.

78. Запропонуйте, використавши означення відстані між паралельними площинами, спосіб перевірки паралельності площин.

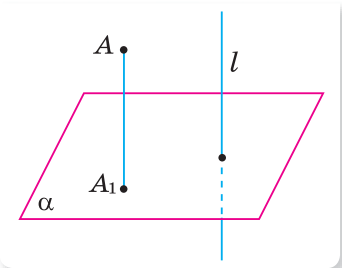
79. Лісничий слідкує за пожежами з вежі для спостережень, яку збудовано на високому пагорбі. Висота пагорбу 726 м, а висота вежі — 24 м. На якій відстані від пункту спостереження виникла пожежа, якщо лісничий побачив вогонь під кутом 7° до горизонту?

80. Вертикальна вежа підтримується чотирма тросами, які одним кінцем прикріплено до вежі на відстані 16 м від землі, а другим — до землі на відстані 12 м від основи вежі. Скільки метрів тросу знадобилося для кріплення, якщо на закріплення кінців витрачено 10 м?

§ 3.6. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

1. ПОНЯТТЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Ви вже знаєте, як зображати просторові фігури на площині, використовуючи паралельне проектування. Розглянемо окремий його вид. Нехай проектування задано площиною проекцій α і напрямом проектування — прямою l (мал. 352). Якщо пряма l перпендикулярна до площини проекцій α, то таке проектування називають *ортогональним або прямокутним*. При ортогональному проектуванні усі проектувальні прямі перпендикулярні до площини проекцій.

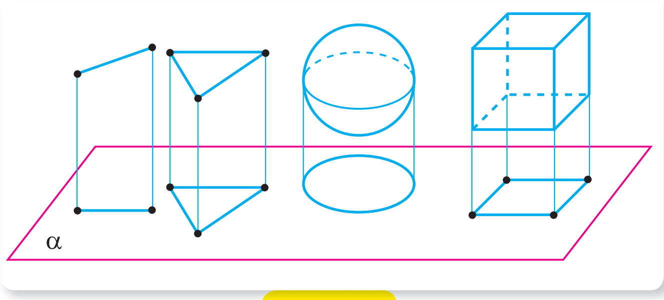


Мал. 352

Проекцією точки A при ортогональному проектуванні є основа перпендикуляра A_1, проведеного з даної точки до площини. Проекцією фігури F на площину називають фігуру F_1, яка складається з проекцій усіх точок фігури F.

Ортогональне проектування має всі властивості паралельного проектування, оскільки є окремим його видом.

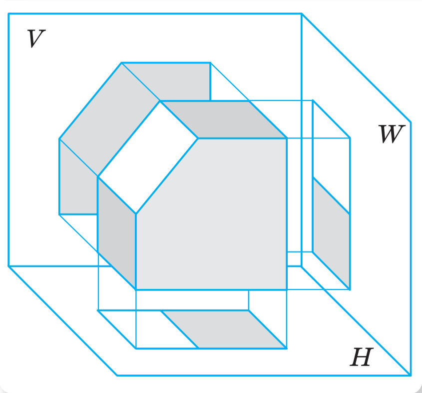
На малюнку 353 зображені деякі фігури та їх проекції при ортогональному проектуванні.



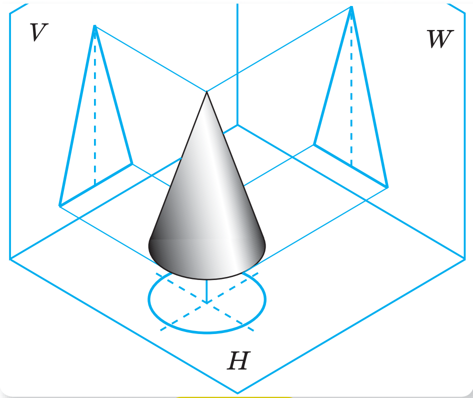
Мал. 353

? Чи може ортогональна проекція трикутника бути відрізком? Так, якщо площина трикутника перпендикулярна до площини проекцій.

Ортогональне проектування застосовується у кресленні. Воно може здійснюватись на дві або три перпендикулярні площини. Якщо таких площин три, то вони називаються фронтальною (V), горизонтальною (H) і профільною (W). Через характерні точки (найчастіше це вершини) фі-



Мал. 354



Мал. 355

гури проводять проектувальні прямі до перетину з площинами проекцій. Точки перетину сполучають прямими або кривими лініями. Утворені фігури будуть проекціями даної фігури на площини V, H і W (мал. 354).

На малюнку 355 зображені проекції конуса, основа якого паралельна горизонтальній площині H. Тоді його проекція на цю площину — круг. Фронтальна і профільна проекції конуса — рівнобедрені трикутники.

Надалі розглядатимемо ортогональне проектування лише плоских геометричних фігур на одну площину.

2. ПЛОЩА ОРТОГОНАЛЬНОЇ ПРОЕКЦІЇ МНОГОКУТНИКА

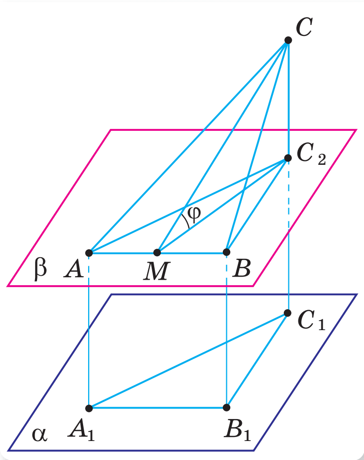
ТЕОРЕМА **(про площу ортогональної проекції многокутника).**

Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

Дано: S — площа многокутника, $S_{\text{пр}}$ — площа проекції многокутника, φ — кут між їх площинами.

Довести: $S_{\text{пр}} = S \cdot \cos\varphi$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли даним многокутником є трикутник ABC, сторона AB якого паралельна площині проекції α (мал. 356). Проекцією ΔABC на площину α є $\Delta A_1B_1C_1$. Проведемо через AB площину $\beta \parallel \alpha$. Проекція ΔABC на площину β — ΔABC_2, який дорівнює $\Delta A_1B_1C_1$. Проведемо у ΔABC висоту CM і сполучимо точки M і C_2. За теоремою про три перпендикуляри, C_2M — висота ΔABC_2. Тоді $\angle CMC_2 = \varphi$ є кутом між площиною β і площиною ΔABC, а отже,



Мал. 356

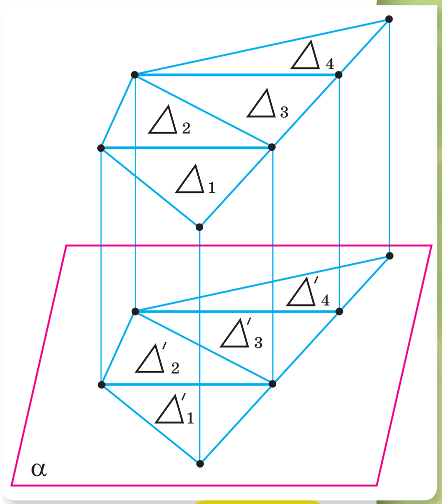
між α і площиною ΔABC, оскільки $\beta \mid\mid \alpha$.
Одержали:

$C_2M = CM \cdot \cos\varphi$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM$,

$S_{\Delta ABC_2} = \frac{1}{2} AB \cdot CM_2$.

Звідси $S_{\Delta ABC_2} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$. Оскільки $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$, то і площі їх рівні. Отже, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$.



Мал. 357

Якщо фігура, яку проектуємо, є многокутником, то спочатку розіб'ємо його на трикутники так, щоб одна із сторін кожного трикутника була паралельною площині проекцій а (мал. 357). Потім для кожного з таких трикутників Δ і його проекції Δ' запишемо рівність: $S_\Delta' = S_\Delta \times \cos\varphi$. Усі ці рівності додамо почленно. Тоді у лівій частині одержимо площу проекції многокутника, а у правій — площу даного многокутника, помножену на $\cos\varphi$: $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$.

? Чи може площа ортогональної проекції многокутника бути більшою за площу самого многокутника? Не може. Оскільки $0 \le \cos\varphi \le 1$, то з формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ одержимо: $S_{пр} \le S$.

З а д а ч а. Знайдіть площу многокутника, якщо площа його ортогональної проекції дорівнює 15 см², а кут між площинами многокутника і його проекції дорівнює 60°.

Р о з в' я з а н н я. З формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ матимемо:

$$S = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \frac{15}{\cos 60^\circ} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \ (\text{см}^2).$$

З формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ одержуємо такі формули:

$$S = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}, \quad \cos\varphi = \frac{S_{пр}}{S}.$$

За цими формулами можна знайти площу многокутника, або площу його ортогональної проекції, або кут між площинами многокутника і проекції.

Надалі замість «ортогональна проекція» коротко говоритимемо: проекція.

Дізнайтеся більше

Гаспар Монж (1746–1818) — відомий французький математик, громадський діяч, член Паризької академії наук. Виявивши великі здібності, він став викладачем фізики, коли йому не виповнилось ще й 16 років. Незмінними об'єктами його інтересів були геометрія та креслення. Почавши із задачі про точну нарізку каміння за заданими ескізами (для архітектури і фортифікації), Монж прийшов до створення методів, узагальнених ним згодом у новій науці — *нарисній геометрії*, творцем якої він по праву вважається.

Мал. 358

Ім'я Гаспара Монжа внесено до списку найвидатніших учених Франції, який викарбовано на першому поверсі Ейфелевої вежі. На честь ученого названо астероїд 28766 Монж.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

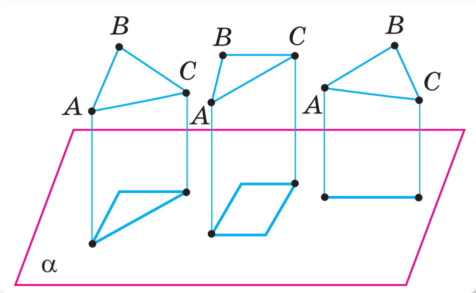
Українська	Англійська	Німецька	Французька
ортогональне проектування	the orthogonal design	orthogonales Design	un conception orthogonale
проекція фігури	the proφection of the figure	Proφektion der Figur	un proφection de la figure

Пригадайте головне

1. Що таке ортогональне або прямокутне проектування?
2. Які особливості має ортогональне проектування?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про площу ортогональної проекції многокутника.

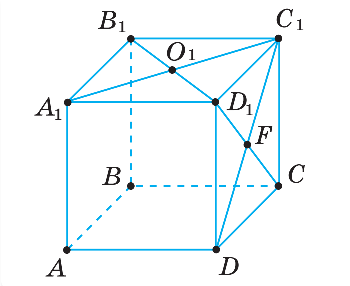
Розв'яжіть задачі

1'. Які з фігур, зображених на малюнку 359, можуть бути проекціями трикутника ABC на площину α?



Мал. 359

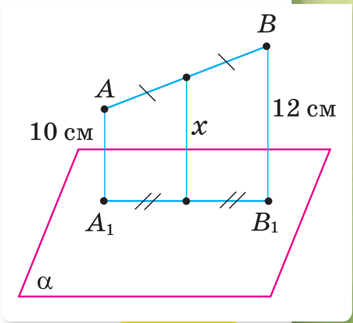
2'. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за площину проекції взято грань $ABCD$ (мал. 360). Назвіть проекцію:
1) точки перетину діагоналей грані DD_1C_1C;
2) точки перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$;
3) ребра B_1C_1;
4) грані $A_1B_1C_1D_1$;
5) трикутника $A_1C_1D_1$.



Мал. 360

3'. Чи може проекцією кола бути:
1) коло; 2) відрізок; 3) еліпс?

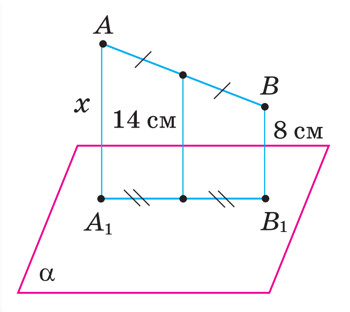
4°. Кінець A відрізка AB із довжиною a лежить у площині α, а кінець B віддалений від цієї площини на відстань b. Знайдіть: 1) проекцію відрізка AB; 2) відстань від середини відрізка до площини.



Мал. 361

5°. Кінець A відрізка AB лежить у площині α, а середина відрізка віддалена від цієї площини на відстань a. Знайдіть відстань від кінця B відрізка до площини α, якщо:
1) $a = 7$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 11$ см.

6°. На малюнках 361, 362 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. За даними на малюнках знайдіть невідомий відрізок x.



Мал. 362

7°. Чи може проекція відрізка на площину бути:
1) меншою за відрізок;
2) рівною відрізкові;
3) більшою за відрізок?

8°. Сторона $AC = a$ рівностороннього трикутника лежить у площині α, а вершина B віддалена від площини на b. Знайдіть проекції сторін AB і BC на площину α, якщо:
1) $a = 20$ см, $b = 12$ см;
2) $a = 25$ см, $b = 15$ см.

9°. Площа трикутника дорівнює S, а кут між площиною проекцій і площиною трикутника дорівнює φ. Знайдіть площу проекції трикутника, якщо:
1) $S = 36$ см^2, $\varphi = 60°$; 2) $S = 24\sqrt{3}$ см^2, $\varphi = 30°$; 3) $S = 20$ см^2, $\varphi = 45°$.

10. На малюнках 363, 364 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. За даними на малюнках знайдіть невідомий відрізок x.

11. Відрізок AB перетинає площину α. Знайдіть відстань від середини відрізка до площини α, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють: 1) 10 см і 6 см; 2) 14 см і 8 см.

12. Відрізок AB перетинає площину α. Знайдіть проекцію A_1B_1 відрізка AB на площину α, якщо:
1) $AB = 26$ см, $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 2$ см;
2) $AB = 20$ см, $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 6$ см.

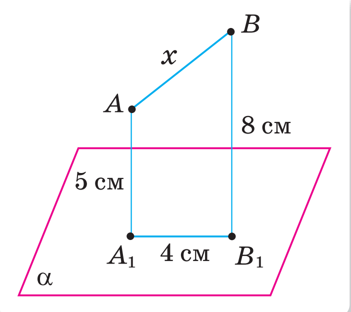
13. Відрізок $AB = a$ лежить поза площиною α, а пряма AB нахилена до площини α під кутом φ (мал. 365). Знайдіть проекцію відрізка AB на площину α, якщо: 1) $a = 12$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 8$ см, $\varphi = 30°$;
3) $a = 16$ см, $\varphi = 45°$.

14. Відрізок $AB = a$ лежить поза площиною α, $A_1B_1 = b$ — проекція відрізка AB на площину α, φ — кут між прямою AB і площиною. Знайдіть відрізок AB, якщо:
1) $b = 4$ см, $\varphi = 60°$;
3) $b = 3\sqrt{3}$ см, $\varphi = 30°$.
2) $b = 2\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;

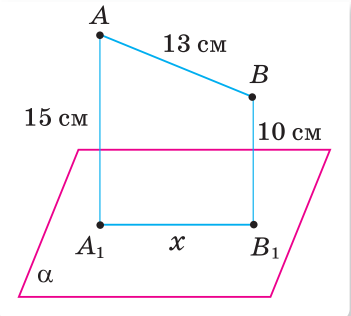
15. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено площину α, віддалену від гіпотенузи на відстань a (мал. 366). Катети трикутника дорівнюють b і c. Знайдіть проекції катетів і гіпотенузи на площину α, якщо:
1) $b = 15$ см, $c = 20$ см, $a = 12$ см;
2) $b = 10$ см, $c = 24$ см, $a = 6$ см.

16. Площа трикутника дорівнює S, а його проекції — S_1. Знайдіть кут між площиною проекції і площиною даного трикутника, якщо:
1) $S = 36$ см², $S_1 = 18$ см²;
2) $S = 24$ см², $S_1 = 12\sqrt{2}$ см²;
3) $S = 28$ см², $S_1 = 14\sqrt{3}$ см².

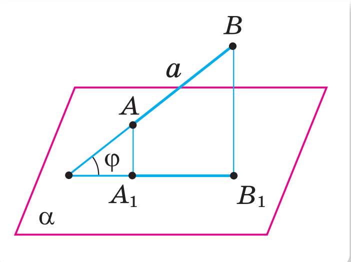
17. S — площа многокутника, S_1 — площа його проекції, φ — кут між площинами многокутника і його проекції. Заповніть таблицю 13.



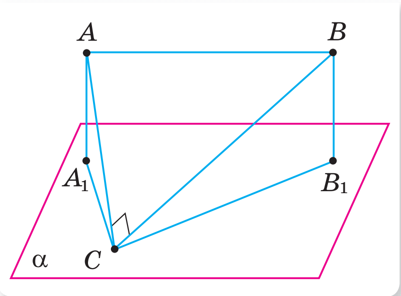
Мал. 363



Мал. 364



Мал. 365



Мал. 366

Таблиця 13

S	128 см^2	$64\sqrt{3}$ см^2		$32\sqrt{2}$ см^2	96 см^2
S_1	64 см^2		24 см^2		48 см^2
φ		30°	60°	45°	

18. Проекцією трикутника ABC на площину α є прямокутний рівнобедрений трикутник $A_1B_1C_1$ з гіпотенузою a. Кут між площинами трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнює φ. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:

1) $c = 8$ см, $\varphi = 45°$; 2) $c = 6$ см, $\varphi = 30°$.

19. Проекцією трикутника ABC із сторонами a, b, c на площину α є трикутник $A_1B_1C_1$. Кут між площинами трикутників дорівнює φ. Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:

1) $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 7$ см, $b = 17$ см, $c = 18$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см, $\varphi = 30°$.

20. Через одну із сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють d_1 і d_2, проведено площину α під кутом φ до площини ромба. Знайдіть площу проекції ромба на площину α, якщо:

1) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 6$ см, $\varphi = 60°$;
2) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 8\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;
3) $d_1 = 9\sqrt{3}$ см, $d_2 = 8$ см, $\varphi = 30°$.

21. Площа чотирикутника дорівнює S. Його проекцією на площину α є ромб з діагоналями d_1 і d_2. Знайдіть кут між площинами чотирикутника і ромба, якщо:

1) $S = 96$ см^2, $d_1 = 8$ см, $d_2 = 12$ см;
2) $S = 60$ см^2, $d_1 = 6$ см, $d_2 = 10\sqrt{2}$ см;
3) $S = 20$ см^2, $d_1 = 5\sqrt{3}$ см, $d_2 = 4$ см.

22. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a, гострий кут — α. Кут між площинами прямокутного трикутника і його проекції дорівнює φ. Знайдіть площу проекції прямокутного трикутника, якщо:

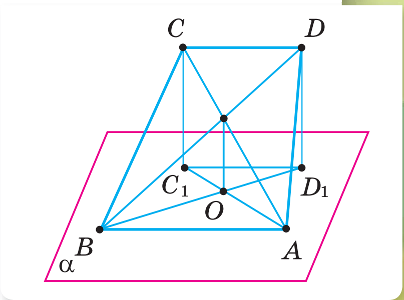
1) $a = 4$ см, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$; 3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$, $\varphi = 45°$.
2) $a = 6$ см, $\alpha = 45°$, $\varphi = 60°$;

23*. Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на a і b. Точка M ділить даний відрізок у відношенні $m : n$. Як віддалена від площини точка M, якщо:

1) $a = 10$ см, $b = 25$ см, $m : n = 2 : 3$;
2) $a = 4$ см, $b = 20$ см, $m : n = 3 : 5$?

24*. Сторона ромба дорівнює a, а кут — 60°. Через одну із сторін ромба проведено площину. Проекція другої сторони на площину дорівнює b. Знайдіть проекції діагоналей ромба.

25*. Через сторону AD паралелограма $ABCD$ проведено площину α. $AD = 10$ см, $AB = 15$ см, а проекції діагоналей AC і BD на площину α відповідно дорівнюють 13,5 см і 10,5 см. Знайдіть діагоналі паралелограма.



Мал. 367

26*. Через основу AB трапеції $ABCD$ проведено площину α (мал. 367). Основи трапеції відносяться, як $m : n$ (m відповідає основі AB). Знайдіть:
1) відстань від точки M перетину діагоналей трапеції до площини α, якщо основа CD віддалена від площини на a;
2) відстань від основи CD до площини α, якщо точка перетину діагоналей віддалена від площини на b.

27*. Через гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину α під кутом 30° до його катета. Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника.

28*. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють d_1 і d_2. Проекцією цього чотирикутника є ромб із стороною a і кутом α. Знайдіть кут між площинами чотирикутника і ромба, якщо: 1) $d_1 = 8$ см, $d_2 = 9$ см, $a = 6$ см, $\alpha = 30°$;
2) $d_1 = 16$ см, $d_2 = 8$ см, $a = 8$ см, $\alpha = 60°$.

Проявіть компетентність

29. Потрібно протягнути два електричних проводи від стовпа до будинку (мал. 368). На стовпі вони кріпляться на висоті 9 м, а на стіні будинку — на висоті 4 м. Скільки потрібно проволоки, якщо відстань від стовпа до будинку 20 м, а на кріплення і провисання потрібно добавити 6% знайденої довжини?

30. Двосхилий дах будівлі має ухил 45° і площу основи 100 м² (мал. 369). Знайдіть, користуючись цими даними, скільки квадратних метрів заліза піде на покриття, якщо витрати на згин і обрізки становлять 6% .


Мал. 368


Мал. 369

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
5. Дайте означення кута між прямою і площиною.
6. Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
7. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.
8. Дайте означення кута між площинами. Які площини називаються перпендикулярними?
9. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
10. Що таке ортогональне проектування?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10 — 15 хв.

№ 1

1° Пряма *CD* перпендикулярна до сторони *AC* прямокутного трикутника *ABC* ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

А. Пряма *CD* і площина *ABC*.
Б. Пряма *BC* і площина *ACD*.
В. Пряма *AB* і площина *BCD*.
Г. Пряма *AC* і площина *BCD*.

2° З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які дорівнюють 12 см і 15 см. Знайдіть проекцію похилої.

А. 8 см. **Б.** 81 см. **В.** 9 см. **Г.** 3 см.

3° Точка віддалена від площини на 8 см. Знайдіть довжину похилої, проведеної з цієї точки під кутом 30° до площини.

А. 4 см.
Б. 16 см.
В. 12 см.
Г. 24 см.

4 Пряма *CM* перпендикулярна до площини квадрата *ABCD* зі стороною 2 см, $CM = 1$ см. Знайдіть відстань від точки *M* до вершини *A* квадрата.

А. 3 см.
Б. 9 см.
В. $2\sqrt{2}$ см.
Г. 5 см.

5* З вершини прямого кута *C* рівнобедреного трикутника *ABC* проведено перпендикуляр *CM* до його площини. Знайдіть відстань від точки *M* до гіпотенузи *AB*, якщо $AC = 2$ см, $CM = 1$ см.
А. 3 см.
Б. $\sqrt{3}$ см.
В. 4 см.
Г. 1 см.

№ 2

1° Відрізок AB паралельний площині α. Із точки A до площини а проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, яка перетинає площину α в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$?

А. Довільний чотирикутник.
Б. Трапеція.
В. Ромб.
Г. Прямокутник.

2° $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD.

А. 60°.
Б. 90°.
В. 45°.
Г. 30°.

3° Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками D і D_1, якщо $AB = 9$ см.

А. $9\sqrt{2}$ см.
Б. 9 см.
В. 8 см.
Г. $8\sqrt{2}$ см.

4 Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між прямими CM і AB.

А. 4,8 см.
Б. 7 см.
В. 5,8 см.
Г. 10 см.

5* Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників зі спільною гіпотенузою перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо гіпотенуза дорівнює $12\sqrt{2}$ см.

А. 10 см.
Б. 12 см.
В. 24 см.
Г. $6\sqrt{2}$ см.

Розділ 4

Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі

У розділі дізнаєтесь:

- як у просторі визначають координати точки, середини відрізка;
- як знайти довжину відрізка у прямокутній декартовій системі координат;
- що таке вектор; колінеарні, рівні вектори;
- які дії можна виконувати над векторами та які їх властивості;
- про симетрію відносно точки і площини, поворот, паралельне перенесення;
- як застосувати вивчений матеріал до розв’язування геометричних задач та задач практичного змісту

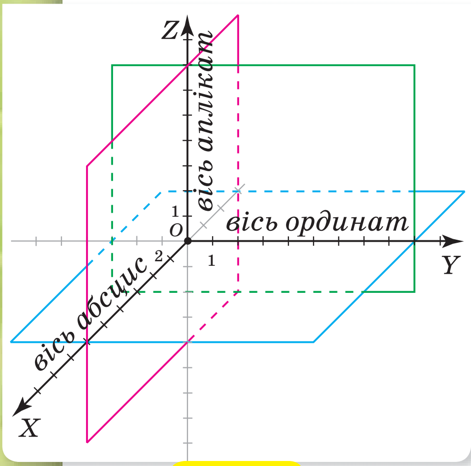
§ 4.1. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

1. ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Ви вже знаєте, як вводять систему координат на площині. У просторі *прямокутну декартову систему координат* можна задати аналогічно. Для цього треба провести три координатні прямі з рівними одиничними відрізками так, щоб вони попарно перетиналися під прямим кутом у початку їх відліку (*початку координат*) (мал. 436), та визначити, яку з осей вважати першою координатною віссю (*віссю абсцис*), яку — другою (*віссю ординат*), а яку — третьою (*віссю аплікат*).

Позначають: O – початок координат, OX — вісь абсцис, OY — вісь ординат, OZ — вісь аплікат.

***Прямокутною декартовою системою координат* називається трійка взаємно перпендикулярних координатних прямих зі спільним початком.**



Мал. 436

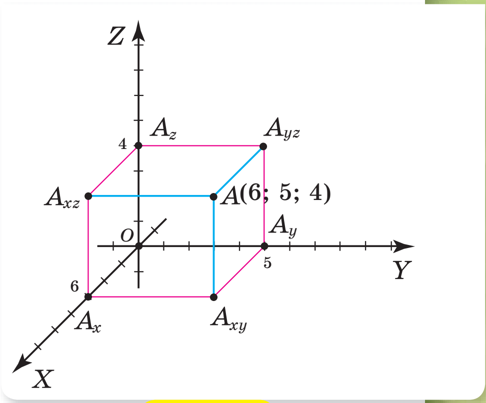
Простір із введеною в ньому системою координат називають *координатним простором*.

Координатні осі OX, OY, OZ, взяті попарно, визначають три координатні площини — XOY, XOZ, YOZ. Ці площини попарно перпендикулярні. Спільною точкою координатних площин і координатних осей є початок координат. Він розбиває кожну з осей на дві півосі — додатну та від'ємну. Координатні площини розбивають простір на 8 частин — *координатних октантів* (табл. 14).

Таблиця 14

Знак чисел на півосі	Координатні октанти							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
OX	+	–	–	+	+	–	–	+
OY	+	+	–	–	+	+	–	–
OZ	+	+	+	+	–	–	–	–

Для наочності зображення фігур у просторовій прямокутній декартовій системі координат $OXYZ$ її будують у такий спосіб (мал. 436):
1) осі OY і OZ розміщують відповідно горизонтально і вертикально, а вісь OX — під однаковим кутом до кожної з них;
2) додатний напрям на осях вказують так, щоб перехід OX — OY — OZ здійснювався проти годинникової стрілки;
3) одиничні відрізки на зображенні осей OY і OZ задають однакової довжини, а на зображенні осі OX — удвічі коротший.



Мал. 437

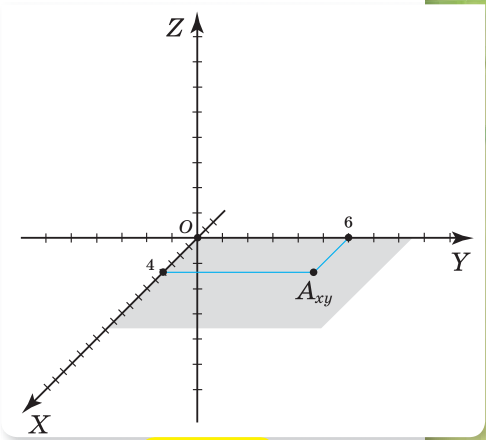
Кожній точці у просторі можна поставити у відповідність трійку чисел, узятих у певному порядку, і, навпаки, кожній трійці чисел відповідає єдина точка координатного простору. Така упорядкована трійка чисел називається *координатами точки в прямокутній декартовій системі координат*.

Щоб визначити координати точки в прямокутній декартовій системі координат у просторі, треба знайти відстані від цієї точки до відповідних координатних площин та узяти їх з відповідними знаками. Наприклад, на малюнку 437 точка A має координати: A (6; 5; 4). Її проекції на координатні площини мають відповідно координати: Axy (6; 5; 0), Ayz (0; 5; 4), Axz (6; 0; 4). Проекції даної точки на координатні прямі мають координати: Ax (6; 0; 0), Ay (0; 5; 0), Az (0; 0; 4).

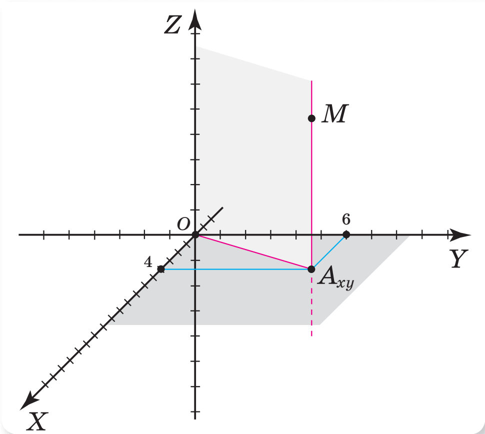
Точка, її проекції на координатні площини, її проекції на осі координат, початок координат у прямокутній системі координат у просторі є вершинами прямокутного паралелепіпеда.

З а д а ч а. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте точку A (4; 6; 3).

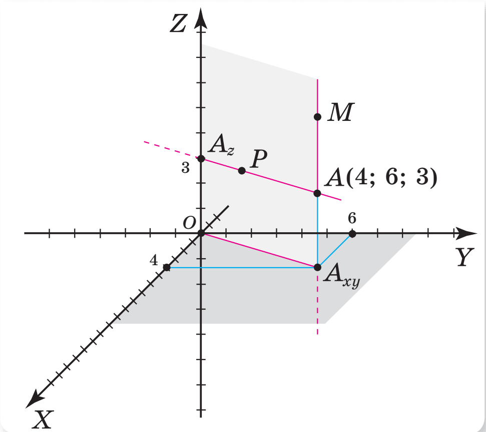
Р о з в' я з а н н я. Позначимо точки, що є проекціями точки A на координатні осі: Ax (4; 0; 0), Ay (0; 6; 0), Az (0; 0; 3). Через точку Ax проводимо пряму паралельно осі OY, а через точку Ay — пряму паралельно осі OX (мал. 438). Ці прямі перетинаються в точці Axy (4; 6; 0). Через цю точку паралельно осі OZ проводимо пряму $AxyM$ (мал. 439). Далі, проводимо пряму AzP паралельно прямій $OAxy$ (мал. 440). Точка перетину прямих AzP і $AxyM$ — шукана точка A (4; 6; 3).



Мал. 438



Мал. 439



Мал. 440

2. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

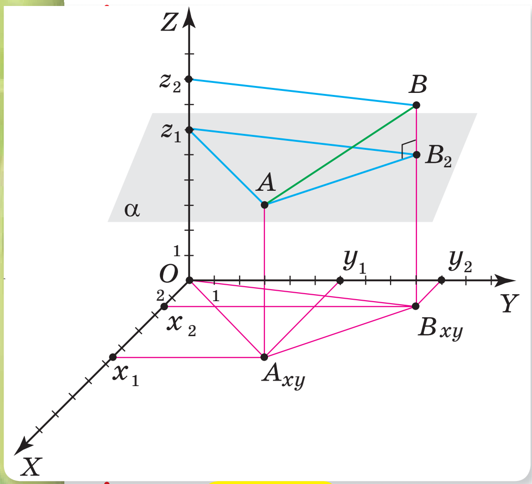
ТЕОРЕМА (про відстань між двома точками із заданими координатами).

Відстань між двома точками із заданими координатами у прямокутній декартовій системі координат дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Дано: $OXYZ$ — декартова прямокутна система координат, $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$.

Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли відрізок AB не паралельний осі OZ (мал. 441). Побудуємо проекції точок $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ на площину XOY. Відповідно маємо точки $A_{xy}\,(x_1;\, y_1;\, 0)$ і $B_{xy}\,(x_2;\, y_2;\, 0)$.



Мал. 441

Через точку A проведемо площину α паралельно площині XOY. Ця площина перетинає пряму BB_{xy} в точці B_2. Оскільки пряма BB_{xy} перпендикулярна до площини α, то трикутник AB_2B — прямокутний.

$BB_2 = \left|BB_{xy} - B_2B_{xy}\right| = \left|z_2 - z_1\right|.$

$AB_2 = A_{xy}B_{xy}.$

Як відомо з планіметрії,

$$A_{xy}B_{xy} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Тоді $AB_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

За теоремою Піфагора, з $\Delta\, AB_2B$ маємо: $AB^2 = AB_2^2 + BB_2^2$.

Звідси $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Тепер розглянемо випадок, коли відрізок AB паралельний осі OZ. Тоді $AB = A_zB_z = |z_2-z_1|$. Оскільки $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$, то

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} .$$

3. КООРДИНАТИ ТОЧКИ, ЩО ДІЛИТЬ ДАНИЙ ВІДРІЗОК У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ, якщо $AC = \lambda CB$.

ТЕОРЕМА **(про координати точки, що ділить даний відрізок у заданому відношенні).**

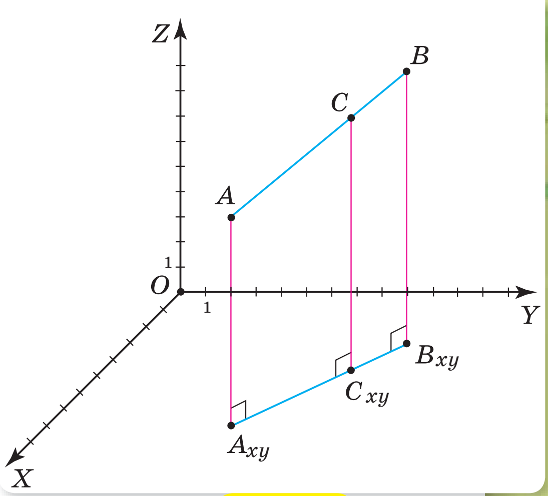
Координати точки C $(x; y; z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ, у прямокутній декартовій системі координат виражаються через координати точок A $(x_1; y_1; z_1)$ і B $(x_2; y_2; z_2)$ за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат, A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$, C $(x; y; z)$, точка C ділить відрізок AB у відношенні λ: $AC = \lambda CB$.

Довести: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли відрізок AB не паралельний осі OZ. Спроектуємо точки A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$ і C $(x; y; z)$ на площину XOY (мал. 442). Відповідно маємо точки A_{xy} $(x_1; y_1; 0)$, B_{xy} $(x_2; y_2; 0)$, C_{xy} $(x; y; 0)$. $A_{xy}A \,||\, B_{xy}B \,||\, C_{xy}C$, тоді, за теоремою Фалеса, $A_{xy}C_{xy} = \lambda C_{xy}B_{xy}$. Як відомо з планіметрії, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.



Мал. 442

Спроектувавши точки A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$ і C $(x; y; z)$ на площину XOZ та провівши аналогічні міркування, маємо

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$. Отже,

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$,

$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

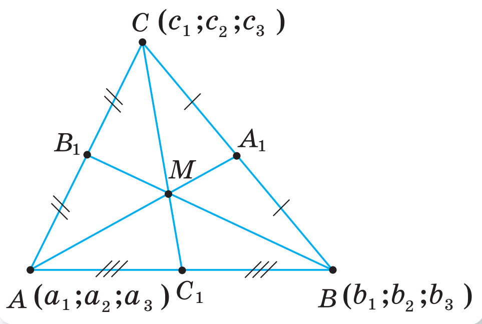
Самостійно розгляньте випадок, коли відрізок AB паралельний осі OZ.

НАСЛІДОК. Координати середини $C(x; y; z)$ відрізка AB знаходять через координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Справді, якщо точка C — середина відрізка AB, то $\lambda = 1$. Підставивши це значення у формули координат точки, що ділить даний відрізок у заданому відношенні, одержимо формули координат середини відрізка.

Задача. У прямокутній декартовій системі координат вершини трикутника ABC мають координати: $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $B(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $C(c_1;\ c_2;\ c_3)$. Знайдіть координати точки перетину медіан (*центра мас*) трикутника.



Мал. 443

Розв'язання. Як відомо, медіани трикутника перетинаються і точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини (мал. 443).

Нехай AA_1 — медіана ΔABC, $M(m_1;\ m_2;\ m_3)$ — точка перетину медіан трикутника. Оскільки точка A_1 — середина відрізка BC, то вона має координати: $A_1\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}; \frac{b_3 + c_3}{2}\right)$. Оскільки $AM = 2MA_1$, то, за теоремою про координати точки, що ділить відрізок у відношенні $\lambda = 2$ одержимо:

$$m_1 = \frac{a_1 + 2 \cdot \frac{b_1 + c_1}{2}}{3},\quad m_2 = \frac{b_1 + 2 \cdot \frac{b_2 + c_2}{2}}{3},\quad m_3 = \frac{c_1 + 2 \cdot \frac{b_3 + c_3}{2}}{3}.$$

Отже, точка перетину медіан трикутника має координати:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3};\ \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3};\ \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right).$$

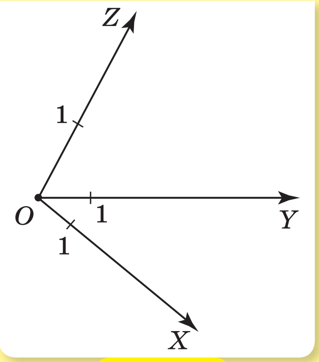
Координати точки перетину медіан (центра мас) трикутника є середнім арифметичним відповідних координат вершин трикутника.

Дізнайтеся більше

1. У перекладі з латинської *abscissa* означає «відрізок», *ordinata* — та, що визначає, ставить у відповідність, *applicata* — та, що прикладається (апліката дає додаткові відомості до двох наявних координат площини — абсциси і ординати).

Терміни «абсциса», «ордината», «координата» в сучасному їх тлумаченні ввів Г. В. Лейбніц (1646-1716).

2. Узагалі, система координат — це сукупність домовленостей, які визначають розміщення точки у просторі. Тому в просторі, як і на площині, системи координат можна вводити різними способами. Вибір тієї чи іншої системи координат залежить від особливостей фігур, що задано. Одним із прикладів системи координат у просторі, що відмінна від прямокутної декартової, є косокутна система координат (мал. 444). У такій системі координат координатні прямі не обов'язково є перпендикулярними, а одиничні відрізки — рівними між собою.



Мал. 444

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
Система координат	the coordinate system	ein Koordinatensystem	système de coordonnées
Координати точки	the coordinates of the point	Koordinaten Punktes	Coordonnées du point

Пригадайте головне

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат у просторі.
2. Яку назву мають осі координат? Точка їх перетину?
3. Що таке координатні площини?
4. Що називають координатним простором?
5. Поясніть, як визначити координати точки в прямокутній декартовій системі координат у просторі.
6. Які особливості координат проекцій точки на координатні площини? А на координатні прямі?
7. Поясніть, як побудувати точку за її координатами.
8. Запишіть: формулу відстані між двома точками із заданими координатами; формули координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; формули координат середини відрізка.

Розв'яжіть задачі

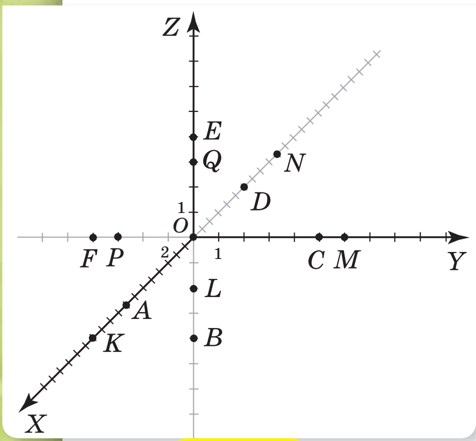
1'. За даними на малюнку 445 визначте координати точок: 1) *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; 2) *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*.

2'. На якій координатній осі лежить точка: 1) *A* (0; 1; 0); 2) *B* (– 2; 0; 0); 3) *C* (0; 0; – 5); 4) *K* (0; 0; 1); 5) *L* (0; – 4; 0); 6) *M* (3; 0; 0)? Побудуйте її.

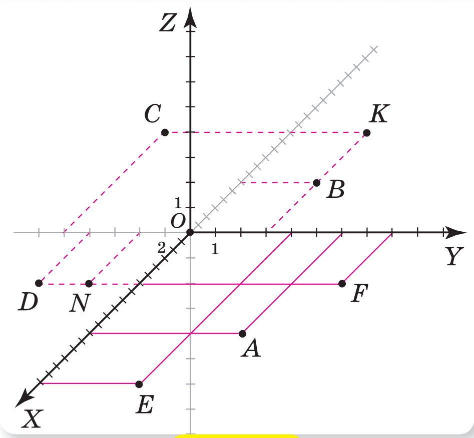
3'. Запишіть проекції точок *A* (1; 2; 6), *B* (3; – 1; 10), *C* (– 4; – 3; 2) на: 1) координатні прямі; 2) координатні площини.

4'. За даними на малюнках 446 – 448 запишіть: 1) проекції даних точок на координатні прямі; 2) координати даних точок.

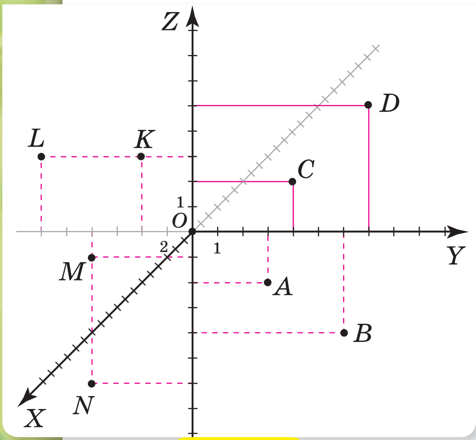
5'. У якій координатній площині лежить точка: 1) *A* (4; 1; 0); 2) *B* (– 2; 0; 3); 3) *C* (0; – 1; – 5); 4) *K* (6; 0; 1); 5) *L* (0; – 4; – 3); 6) *M* (3; 2; 0)? Запишіть координати проекції даної точки на координатні прямі. Побудуйте задану точку.



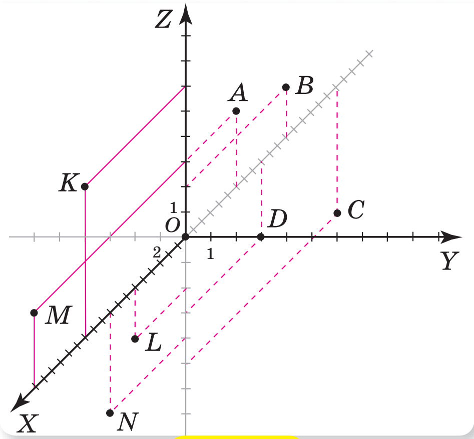
Мал. 445



Мал. 446



Мал. 447



Мал. 448

6'. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте у ній точки: 1) A (1; 1; 1), B (1; −1; 1), C (−1; −1; 1), D (−1; 1; 1); 2) A (−1; −1; −1), B (−1; 1; −1), C (1; 1; −1), D (1; −1; −1).

7'. Які знаки мають координати точок у певному координатному октанті? Заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

	I октант	II октант	IV октант	VI октант	VIII октант
Знак абсциси					
Знак ординати					
Знак аплікати					

8°. Запишіть координати точки B, якщо з точкою A (3; 4; 1) вона має:
1) рівні абсциси й рівні аплікати, але протилежні ординати;
2) рівні ординати й рівні аплікати, але протилежні абсциси;
3) протилежні абсциси й протилежні ординати, але рівні аплікати;
4) рівні абсциси і рівні ординати, але протилежні аплікати.

9°. Запишіть координати точки B, якщо з точкою A (7; 10; 4) вона має:
1) протилежні абсциси, протилежні ординати, протилежні аплікати;
2) рівні ординати, але протилежні абсциси, протилежні аплікати.

10°. Знайдіть координати всіх вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 см, якщо:
1) початок координат міститься у вершині A, вісь абсцис збігається з прямою AB, вісь ординат — з прямою AD, вісь аплікат — з прямою AA_1;
2) початок координат міститься у вершині B, вісь абсцис збігається з прямою BC, вісь ординат — з прямою BA, вісь аплікат — з прямою BB_1;
3) початок координат міститься у вершині A_1, вісь абсцис збігається з прямою A_1B_1, вісь ординат — з прямою A_1A, вісь аплікат — з прямою A_1D_1.

11°. Знайдіть координати всіх вершин прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо:
1) A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), D (0; 3; 0), A_1 (0; 0; 5);
2) B (0; 1; 0), D (1; 0; 0), C (0; 0; 0), C_1 (0; 0; 4).

12°. Запишіть координати точки A, якщо:
1) A_x (2; 0; 0), A_y (0; −1; 0), A_z (0; 0; −3);
2) A_{xy} (−5; −3; 0), A_{yz} (0; −3; −3), A_{xz} (−5; 0; −3).
Координати скількох проекцій на координатні прямі достатньо знати, щоб визначити координати даної точки? Координати скількох проекцій на координатні площини достатньо знати, щоб визначити координати даної точки?

13°. Запишіть координати точки B, якщо:
1) B_x (–5; 0; 0), B_y (0; 2; 0), B_z (0; 0; –1).
2) B_{xy} (2; 1; 0), B_{yz} (0; 1; –3), B_{xz} (2; 0; –3).

14°. Знайдіть відстань від точки A до початку координат, якщо:
1) A (2; 4; $\sqrt{5}$); 2) A (3; 6; – 2); 3) A (3; $\sqrt{2}$; 5).

15°. Визначте відстань між точками:
1) A (1; –2; 15), B (4; 2; 3); 2) A (–5; –7; 1), B (3; –1; 1).

16°. За координатами точки знайдіть відстань від цієї точки до вказаної координатної площини. Заповніть таблицю 15.

Таблиця 15

Координати точки	(5; –1; 2)	(–5; –1; –2)	(4; 8; 3)	(–6; 7; –2)
Відстань до XOY				
Відстань до XOZ				
Відстань до YOZ				

17°. За координатами точки, знайдіть відстань від цієї точки до вказаної осі координат. Заповніть таблицю 16.

Таблиця 16

Координати точки	(5; –1; 2)	(–5; –1; –2)	(3; 4; 5)	(–2; 1; –2)
Відстань до осі абсцис				
Відстань до осі ординат				
Відстань до осі аплікат				

18°. Визначте відстань від точки M (– 5; 3; 4):
1) до початку координат; 2) до точки B (1; – 2; 2);
3) до вісі OX; 3) до вісі OZ;
5) до площини YOZ; 6) до площини XOZ.

19°. Визначте відстань між проекціями точок A (5; 0; 2), B (3; 4; 5) на вісь:
1) абсцис; 2) ординат; 3) аплікат.

20°. Знайдіть довжину відрізка AB, кінці якого є проекціями точок на площину XOY, якщо:
1) A (0; 0; 0), B (3; 4; 5);
2) A (2; – 3; 4), B (0; – 3; 3).

21°. Яка з точок A (–2; –1; 3), B (1; 5; 3), C (10; –3; 3) ближче розміщена до осі:
1) OZ; 2) OX; 3) OY?

22°. Яка з точок A (–2; –1; 3), B (0; 1; 3), C (0; –3; –3) ближче розміщена до точки M (0; –3; 3)?

23°. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо:
1) A (0; 0; 0), B (3; 1; $\sqrt{6}$), C (3; 4; 0);
2) A (0; 0; 0), B (– 24; 0; 0), C (0; – 7; 0).

24°. Відстань між точками A і B дорівнює d. Знайдіть x, якщо:
1) $A(2; 3; 1)$, $B(x; 3; 1)$, $d = 2$;
2) $A(-1; x; 2)$, $B(3; 2x; 5)$, $d = 10$;
3) $A(2; 1; x)$, $B(5; -3; 6x)$, $d = 5\sqrt{3}$.

25°. Доведіть, що $AB = 2CD$, якщо:
1) $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 0; 5)$, $D(0; 0; 4)$;
2) $A(7; 6; 0)$, $B(-1; 2; 2\sqrt{5})$, $C(0; 2; 3)$, $D(0; -1; -1)$;
3) $A(\sqrt{2}; 1; -1)$, $B(3\sqrt{2}; 3; 1)$, $C(2; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$.

26°. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним, якщо $A(3; 5; -4)$, $B(2; 1; 4)$, $C(4; -3; 0)$.

27°. Знайдіть площу грані куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо:
1) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 2)$; 2) $A(3; 1; -1)$, $C(1; 2; -1)$.

28°. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, знаючи координати його вершин $A(5; 2; 1)$, $B(8; 7; 1)$.

29°. Доведіть, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:
1) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 1; 0)$;
2) $A(-2; 0; -1)$, $B(0; 0; 1)$, $C(0; 0; -3)$.

30°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(5; 4; -1)$, $B(-7; 4; -6)$, $C(-12; 4; 6)$ і $D(0; 4; 11)$ є ромбом.

31°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(7;2;4), B(4;-4;2), C(6;-7;8), D(9;-1;10)$ є квадратом.

32°. Чи правильне твердження: «У прямокутній декартовій системі координати задано точки A, B, C, такі, що $AC = \lambda CB$, тоді координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x; y; z)$ пов'язано рівностями: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$»?

33°. Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ. За координатами двох даних точок знайдіть координати третьої точки. Заповніть таблицю 17.

Таблиця 17

Точка A	(2; – 1; 2)		(3; – 2; 1)
Точка B		(– 6; 1; 2)	
Точка C	(3; 4; – 3)	(2; 0; 4)	(1; 0; 2)
λ	5	0,5	3

34°. Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ. Знайдіть координати точки C, якщо:
1) $A(1; 0; 2)$, $B(6; 0; 12)$, $\lambda = 3$;
2) $A(-5; 4; 6)$, $B(3; 1; 9)$, $\lambda = 0{,}5$.

35°. Знайдіть значення n і m, при яких точка $C(0; -3; n)$ ділить відрізок AB у відношенні $2 : 1$, якщо:
1) $A(m; 0; 0)$, $B(3; -4{,}5; 6)$;
2) $A(m; -5; -1)$, $B(-1; n; -2{,}5)$;
3) $A(6; m; n + 2)$, $B(3n; -3; -2)$.

36°. Точка C ділить відрізок AB у відношенні λ. Знайдіть λ, якщо:
1) A (1; 1; 1), B (2; 2; 2), C (3; 3; 3);
2) A (1; 5; 2), B (3; 0; 1), C (2,5; 1,25; 1,25).

37°. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо:
1) A (1; 1; 1), B (2; 2; 2), C (9; 6; – 12);
2) A (1; – 2; 14), B (2; – 1; 2), C (3; 3; – 1).

38°. Точка C — середина відрізка AB. За координатами двох даних точок знайдіть координати третьої точки. Заповніть таблицю 18.

Таблиця 18

Точка A	(3; 8; 1)		(13; 1; – 3)	(0; 0; 0)
Точка B	(1; – 2; – 1)	(2; 3; 1)	(5; 1; – 1)	
Точка C		(– 1; 0; 4)		(1; 2; 3)

39°. Точка C ділить відрізок AB навпіл. Знайдіть:
1) координати точки C, якщо A (– 3; 4; 1), B (9; 2; 11);
2) координати точки A, якщо C (2; 0; 8), B (– 3; 1; 3).

40°. Чи лежить середина відрізка AB на осі OY, якщо:
1) A (0; 2; 4), B (– 3; 2; 3); 2) A (1; – 5; 2), B (7; 5; 3)?

41°. Знайдіть значення n і m, при яких точка C (n; m – 3; 4) є серединою відрізка AB, якщо: 1) A (0; 0; 0), B (2; 4; 8); 2) A (8; – 3; 2), B (2; – 1; 6)?

42°. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$ за координатами трьох його вершин:
1) A(2; 5; 1), B(8; 13; 3), C(16; 9; 5); 2) A(5; 1; 2), B(9; 4; 2), C(9; – 2; 0).

43°. Знайдіть довжини медіан трикутника ABC, якщо A (2; – 8; 3), B (6; 6; – 1), C (0; – 4; – 5).

44. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$, $AC = 8$, $AA_1 = 4$. Введено систему координат так, що початок координат міститься у центрі O грані $ABCD$, вісь абсцис збігається з прямою OB, вісь ординат — з прямою OC, вісь аплікат — з прямою OO_1, де O_1 — центрі грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати всіх вершин паралелепіпеда.

45. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a. Введено систему координат так, що початок координат міститься у центрі O грані $ABCD$, вісь OX збігається з прямою OB, вісь OY — із прямою OC, вісь OZ — із прямою OO_1, де O_1 — центрі грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати всіх вершин куба.

46. На осі OZ знайдіть точки, рівновіддалені від точок:
1) A (1; 4; 0), B (3; 1; 1); 2) A (2; 1; 3), B (1; 4; 5).

47. На осі OX знайдіть точки, рівновіддалені від точок A (– 4; 0; 1), B (2; 4; – 3).

48. Точка C ділить відрізок AB у відношенні 2 : 1. Точка M ділить відрізок AC у відношенні 3 : 1. Знайдіть координати точки M. Відомо, що: 1) A (0; 0; 0), B (3; – 3; 3); 2) A (1; 3; 5), B (3; 1; 7).

49. Точка C ділить відрізок AB у відношенні 3 : 1. Точка M ділить відрізок AC у відношенні 5 : 1. Знайдіть координати точки M, якщо A (4; 2; – 1), B (5; 0; 1).

50. Відрізок AB перетинає площину YOZ у точці C. Знайдіть відношення $AC : CB$, якщо A (8; 5; 2), B (– 4; 3;– 4). Знайдіть координати точки C.

51. A (– 2; 1; 4), B (m; m; m + 1). За якого значення m точка C, яка ділить відрізок AB у відношенні 2 : 5, лежить у площині:
1) OXZ; 2) OZY; 3) OXY?

52. Точка M, яка лежить на осі ординат, рівновіддалена від точок A (3; 1; 4) і B (3; 5; 4). Знайдіть відношення, в якому точка M ділить відрізок OC, якщо C (0; 6; 0), O (0; 0; 0).

53. AA_1 — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть координати точки A_1, якщо A (2; – 3; 4), B (0; – 3; 3), C (2; 4; 6).

54. AA_1 — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть координати точки A_1, якщо A (1; 2; 3), B (5; 5; 3), C (1; – 4; – 5).

55. Знайдіть довжину медіани AM, бісектриси AD трикутника ABC, якщо A (0; 1; 4), B (3; 1; –2), C (0; –5; – 8).

56. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма за координатами трьох його вершин (0; 0; 0), (1; 2; 3), (–10; 8; 6).

57. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма, якщо три його вершини мають координати: (0; 0; 0), (5; –1; 4), (1; 3; 10).

58. Обчисліть площу ромба, якщо три його вершини мають координати: A (– 3; 8), B (1; 5), C (4; 1).

59. Дано дві вершини трикутника A (–4; –1; 2), B (3; 5; –16). Знайдіть координати третьої вершини C, якщо середина сторони AC лежить на осі OY, а середина сторони BC — у площині XOZ.

60*. Дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, основа якої — рівнобедрений прямокутний трикутник ($AC = CB$). Відомо, що A(6; 3; 0), B(–6; 3; 0), $AA_1 = 5$, а точка C належить площині XOY. На ребрі CC_1 вибрано точку M так, що $CM = 4MC_1$. Знайдіть координати точки C; площу перерізу, проведеного через сторону AB та точку M.

61*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відомо, що A(0; 4; 0), B(0; 0; 0), C(4; 0; 0). На ребрі AA_1 позначено точку M так, що $AM = 3MA_1$. Знайдіть периметр перерізу, проведеного через ребро CD та точку M.

62*. На ребрах AA_1, CD, B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вибрано відповідно точки M, N, P. Відомо, що $CN = ND$, $3AM = AA_1$. Відомо, що сума $MP^2 + NM^2 + NP^2$ набуває найменшого значення. Визначте розміщення точки P.

63*. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+z^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}=6$;

2) $\sqrt{x^2+4x+y^2+10y+z^2+2z+30}+\sqrt{x^2-2x+y^2+2y+z^2+2z+3}=5$;

3) $\sqrt{x^2+6x+y^2+18y+z^2+2z+91}+\sqrt{x^2+4x+y^2+2y+z^2+10z+30}=8$?

Проявіть компетентність

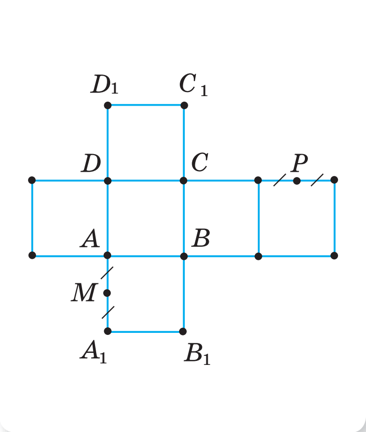
64. Кристалічна ґратка кристала кухонної солі є кубом, в центрі якого розташований іон натрію (Na^+) з координатами $(0{,}5a;\ 0{,}5a;\ 0{,}5a)$. Один з найближчих до нього іон хлору (Cl^-) має координати ядра $(a;\ 0{,}5a;\ 0{,}5a)$. Знайдіть відстань між іонами натрію і хлору, якщо довжина ґратки дорівнює $a = 5{,}63 \cdot 10^{-10}$ м.

65. На кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1 см було введено прямокутну декартову систему координат, у якій: початок координат — це вершина A, вісь абсцис збігається з прямою AB, вісь ординат — із прямою AD, вісь аплікат — із прямою AA_1. На малюнку 449 зображено розгортку даного куба. Знайдіть координати точок M і P, позначених на малюнку.

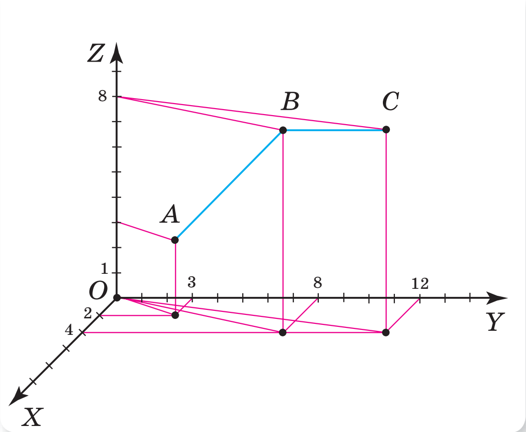
66. На розгортці куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 449) позначено точки M і P. Знайдіть відстань між точками M і P куба, якщо на розгортці відстань між цими точками дорівнює $\sqrt{34}$.

67. Під час ремонту даху, майстер перемістився з точки A в точку C за схемою, зображеною на малюнку 450. Знайдіть:
1) довжину пройденого шляху;
2) відстань від точки A до точки C.

68. Щоб потрапити від входу в торговий центр до його взуттєвого відділу, треба пройти десять кроків прямо, шість кроків наліво, піднятися ліфтом на третій поверх, пройти чотири кроки направо. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте траєкторію руху від входу до взуттєвого відділу.



Мал. 449



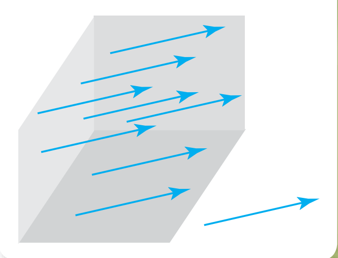
Мал. 450

§ 4.2. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

1. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА У ПРОСТОРІ

Із курсу геометрії і фізики ви знаєте, що таке скалярні й векторні величини, як задають вектор на площині.

Вектор у просторі визначають аналогічно: його теж характеризують через *довжину* і *напрям*, а від точки прикладання абстрагуються. *Зображенням вектора* є всі напрямлені відрізки в просторі, які мають ту саму довжину й однаковий напрям. Але на аркуші паперу не можна побудувати повне зображення вектора, як і зображення всієї прямої чи площини. Тому **вектор зображають лише одним *напрямленим відрізком*** (мал. 451). Його початок і кінець задають довжину і напрям решти відповідних напрямлених відрізків. Узагалі, будь-яка упорядкована пара точок визначає вектор.

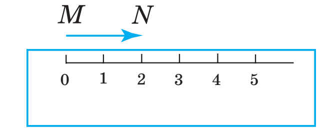


Мал. 451

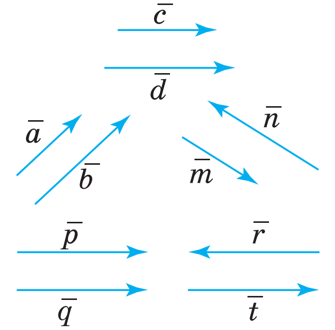
Мал. 452

Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

У просторі, як і на площині, вектор позначають за допомогою риски або стрілки: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$, $\overline{a}$ або $\vec{a}$ (мал. 452). Довжина вектора — це довжина напрямленого відрізка, що зображає даний вектор, її позначають так: $\left|\overline{MN}\right| = 2$ см (мал. 453). Так само, як і на площині, визначають: нуль-вектор $\overline{0}$, одиничний вектор $\overline{e}$ (за означенням, $\left|\overline{e}\right| = 1$), колінеарні вектори $\overline{a} \parallel \overline{b}$ (за означенням, вони паралельні одній прямій), співнапрямлені вектори $\overline{c} \uparrow\uparrow \overline{d}$, протилежно напрямлені вектори $\overline{m} \uparrow\downarrow \overline{n}$, рівні вектори $\overline{p} = \overline{q}$ (за означенням вони мають рівні довжини і співнапрямлені), протилежні вектори $\overline{r} = -\overline{t}$ (мал. 454).



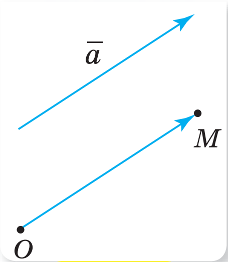
Мал. 453



Мал. 454

У просторі, як і на площині, для будь-якого вектора $\overline{a}$ і деякої точки O існує лише одна точка M, що $\overline{OM} = \overline{a}$ (мал. 455). Побудову точки M називають *відкладанням вектора $\overline{a}$ від точки O*.

Будь-який вектор у просторі можна відкласти від даної точки. І зробити це можна єдиним способом.



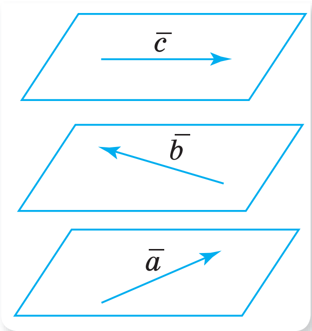
Мал. 453

2. КОМПЛАНАРНІ ВЕКТОРИ

Новим для простору є поняття *компланарних векторів*.

Вектори **називаються *компланарними*, якщо вони паралельні одній площині.**

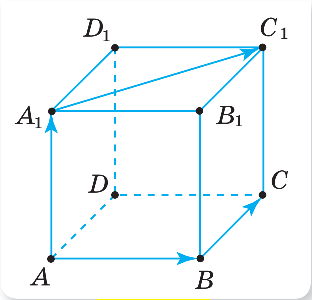
На малюнку 462 ви бачите компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$.



Мал. 462

Задача 1. На ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AA_1}$ і $\overline{A_1C_1}$ (мал. 463). Чи є компланарними вектори: $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{A_1C_1}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AA_1}$?

Розв'язання. Відрізки AB і BC, що відповідають векторам $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, лежать в основі $ABCD$ даного куба, тому вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ паралельні площині ABC, тобто є компланарними. Відрізок A_1C_1, що відповідає вектору $\overline{A_1C_1}$, лежить в основі $A_1B_1C_1D_1$ даного куба. Оскільки основи куба лежать у паралельних площинах, то вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{A_1C_1}$ є компланарними. Пряма AA_1 перетинає основу $ABCD$ даного куба, тому вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AA_1}$ не можуть бути компланарними.



Мал. 462

- Будь-які два вектори є компланарними.
- Якщо з трьох векторів хоча б два вектори колінеарні, то задані три вектори є компланарними.
- Якщо з трьох векторів хоча б один вектор є нуль-векторм, то задані три вектори є компланарними.

ТЕОРЕМА **(про компланарні вектори).**

Якщо для неколінеарних векторів $\overline{p}$, $\overline{q}$ і ненульового вектора $\overline{n}$ виконується рівність $\overline{n} = \lambda\overline{p} + \mu\overline{q}$, де λ і μ — деякі числа, то вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{n}$ — компланарні.

Дано: $\overline{p}$, $\overline{q}$ — неколінеарні вектори, $\overline{n} = \lambda\overline{p} + \mu\overline{q}$, $\overline{n} \neq 0$, λ і μ — деякі числа.

Довести: $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{n}$ — компланарні.

Доведення. Від деякої точки відкладемо вектори $\overline{p}$ і $\overline{q}$, паралельні площині α. Вектори $\lambda\overline{p}$ і $\mu\overline{q}$ також паралельні площині α, тому їх сума — (нехай вектор $\overline{n}$), паралельно цій самій площині. Звідси випливає, що вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{n}$ паралельні площині α, а отже, компланарні.

НАСЛІДОК. Для некомпланарних векторів $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ рівність $n_1\overline{p} + n_2\overline{q} + n_3\overline{r} = \overline{0}$ виконується тільки за умови, що $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Припустимо, що $n_1 \neq 0$. Розділивши дану рівність на n_1, одержимо: $\overline{p} + \frac{n_2}{n_1}\overline{q} + \frac{n_3}{n_1}\overline{r} = \overline{0}$. Звідки $\overline{p} = -\frac{n_2}{n_1}\overline{q} - \frac{n_3}{n_1}\overline{r}$. А це означає, що вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ — компланарні, що суперечить умові твердження.

Щоб спростувати деяке твердження, достатньо навести хоча б один приклад, який задовольняє умову твердження, але суперечить його вимозі.

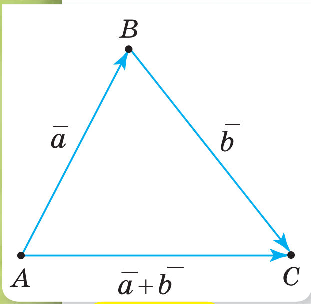
Задача 2. Дано площину ABC і деяку точку M. Якщо для будь-якої точки O простору існують числа λ і k, для яких виконується умова $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + (1-k-\lambda)\overrightarrow{OC}$, то точка M належить площині ABC.

Розв'язання. Перепишемо рівність $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + (1-k-\lambda)\overrightarrow{OC}$ у вигляді $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OC} - \lambda\overrightarrow{OC}$. Знайдемо різницю векторів $\overline{OM}$ і $\overline{OC}$:

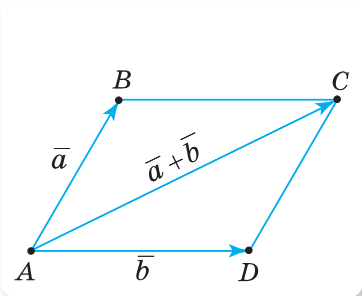
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$. Тоді, згідно з теоремою про компланарні вектори, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ і $\overline{CM}$ — компланарні. Це означає, що точка M належить площині ABC.

3. ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО.

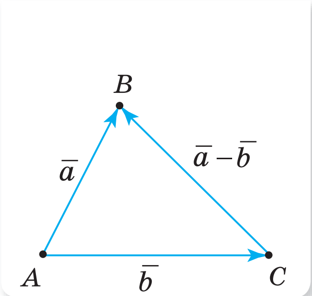
Як і на площині, так і в просторі два вектори додають за відомими вам правилами — трикутника (мал. 456) або паралелограма (мал. 457). Різницю двох векторів у просторі знаходять так само, як і на площині (мал. 458). Узагалі, для будь-яких трьох точок простору A, B і C справджуються рівності:



Мал. 456



Мал. 457



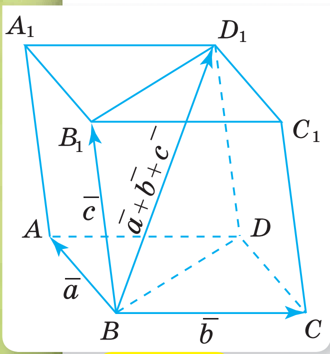
Мал. 458

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}, \quad \overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}.$$

Для додавання трьох некомпланарних векторів застосовують *правило паралелепіпеда* (мал. 459):

$$\overline{BD_1}=\overline{BA}+\overline{BB_1}+\overline{BC}.$$

Сформулюйте його самостійно.



Мал. 459

Добуток $\overline{d}$ ненульового вектора $\overline{a}$ і числа k ($k \neq 0$) визначають у просторі так само, як і на площині, і позначають $\overline{d}=k\cdot\overline{a}$. За означенням:

1) $|\overline{d}|=|k|\cdot|\overline{a}|$;

2) $\overline{d}\uparrow\uparrow\overline{a}$, якщо $k>0$ (мал. 460);

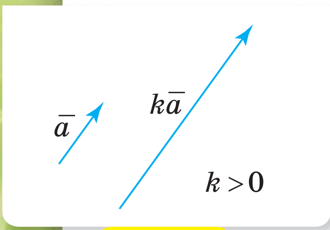
3) $\overline{d}\uparrow\downarrow\overline{a}$, коли $k<0$ (мал. 461).

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{d}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке число l, що $\overline{d}=\lambda\overline{a}$.

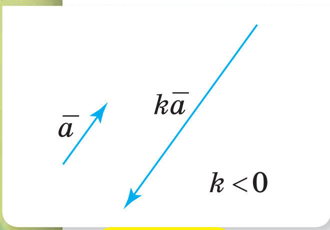
Добуток нуль-вектора на число і вектора на число нуль є нуль-вектором:

$$k\cdot\overline{0}=0\cdot\overline{a}=\overline{0}.$$

Властивості додавання векторів і множення вектора на число наведено в таблиці 22.



Мал. 460



Мал. 461

Таблиця 22

Властивості	
Додавання векторів	**Множення вектора на число**
Переставний закон	
$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$	$k\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k$
Сполучний закон	
$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$	$k\cdot\left(m\cdot\overline{a}\right)=\left(k\cdot m\right)\cdot\overline{a}$
Перший розподільний закон $\left(k+m\right)\cdot\overline{a}=k\cdot\overline{a}+m\cdot\overline{a}$	
Другий розподільний закон $k\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=k\cdot\overline{a}+k\cdot\overline{b}$	
$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$	$1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ $-1\cdot\overline{a}=-\overline{a}$
	$k\cdot\overline{0}=0\cdot\overline{a}=\overline{0}$

4. РОЗКЛАД ВЕКТОРА ЗА ТРЬОМА НЕКОМПЛАНАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

Ви знаєте, що на площині будь-який ненульовий вектор можна розкласти за двома неколінеарними векторами, і такий розклад — єдиний.

? Чи справедливий цей факт для векторів у просторі? Відповідь дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА **(про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами).**

Будь-який ненульовий вектор у просторі можна розкласти за трьома некомпланарними векторами, і такий розклад — єдиний.

Дано: $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ — некомпланарні вектори, $\overline{n}$ — будь-який ненульовий вектор простору.

Довести: існує єдина трійка чисел n_1, n_2, n_3 таких, що $\overline{n}=n_1\overline{p}+n_2\overline{q}+n_3\overline{r}$.

Доведення. 1. Доведемо, що числа n_1, n_2, n_3 існують.

Відкладемо дані вектори від спільного початку O (мал. 464). Вектор $\overline{n}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, які колінеарні з векторами $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ відповідно, тобто: $\overline{OP}=n_1\overline{p}$, $\overline{OQ}=n_2\overline{q}$, $\overline{OR}=n_3\overline{r}$, де n_1, n_2, n_3 — деякі числа, що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді $\overline{n}=n_1\overline{p}+n_2\overline{q}+n_3\overline{r}$.

Отже, одержали розклад вектора $\overline{n}$ за векторами $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

2. Доведемо, що трійка чисел n_1, n_2, n_3 — єдина.
Припустимо, що існує інший розклад вектора $\overline{n}$ за векторами $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$:

$\overline{n} = m_1 \cdot \overline{p} + m_2 \cdot \overline{q} + m_3 \cdot \overline{r}$.

Тоді $n_1 \cdot \overline{p} + n_2 \cdot \overline{q} + n_3 \cdot \overline{r} = m_1 \cdot \overline{p} + m_2 \cdot \overline{q} + m_3 \cdot \overline{r}$. Звідси $(m_1 - n_1) \cdot \overline{p} + (m_2 - n_2) \cdot \overline{q} + (m_3 - n_3) \cdot \overline{r} = \overline{0}$. Оскільки вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ некомпланарні, то $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $m_3 = n_3$, що суперечить припущенню. Отже, розклад вектора за трьома некомпланарними векторами — єдиний.

Розклад нульового вектора за трьома некомпланарними векторами має вигляд: $\overline{0} = 0 \cdot \overline{p} + 0 \cdot \overline{q} + 0 \cdot \overline{r}$, і такий розклад — єдиний.

Задача 3. На ребрах SA, SB, AC піраміди $SABC$ позначено точки M, N, H такі, що: $SM = \frac{1}{2}SA$, $SN = \frac{2}{5}SB$, $AH = \frac{2}{3}AC$. У якому відношенні площина MNH ділить ребро BC?

Мал. 466

Розв'язання. Нехай площина MNH перетинає ребро BC в точці O так, що $\frac{BO}{BC} = \lambda$ і ділить його у відношенні $\frac{BO}{BC} = \lambda$.
Оберемо три некомпланарні вектори, наприклад, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ (рис. 466). Розкладемо вектор $\overline{SO}$ за векторами $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ двома способами.

Спосіб 1. Так як точки O, M, N, H належать одній площині, то існують такі числа λ і k, що: $\overline{SO} = k\overline{SM} + \lambda\overline{SN} + (1 - k - \lambda)\overline{SH}$.

Згідно з умовою, $\overline{SM} = \frac{1}{2}\overline{SA}$, $\overline{SN} = \frac{2}{5}\overline{SB}$, $\overline{SH} = \frac{2}{3}\overline{SC} + \frac{1}{3}\overline{SA}$.

Тоді: $\overline{SO} = \frac{k}{2}\overline{SA} + \frac{2\lambda}{5}\overline{SB} + (1 - k - \lambda)\left(\frac{2}{3}\overline{SA} + \frac{1}{3}\overline{SA}\right)$,

$$\overline{SO} = \left(\frac{k}{6} - \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{3}\right)\overline{SA} + \frac{2\lambda}{5}\overline{SB} + \frac{2}{3}(1 - k - \lambda)\overline{SC}.$$

Спосіб 2. Оскільки точки B, C і O лежать на одній прямій, то виконується рівність: $\overline{SO} = p\overline{SC} + (1 - p)\overline{SB}$.

Маємо два розклади вектора $\overrightarrow{SO}$ за векторами $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$:

$$\overline{SO} = p\overline{SC} + (1 - p)\overline{SB} \text{ і } \overline{SO} = \left(\frac{k}{6} - \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{3}\right)\overline{SA} + \frac{2\lambda}{5}\overline{SB} + \frac{2}{5}(1 - k - \lambda)\overline{SC}.$$

Оскільки розклад вектора за векторами $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ єдиний, то в одержаних розкладах коефіцієнти при цих векторах рівними. Звідси:

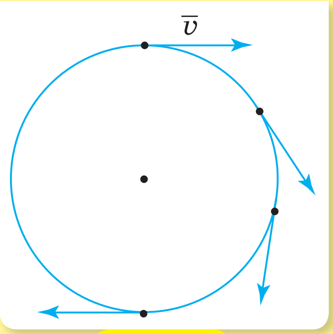
$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{6}-\dfrac{\lambda}{3}=0, \\ \dfrac{2\lambda}{5}=1-p, \\ \dfrac{2}{3}(1-k-\lambda)=p. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо: $p=\dfrac{3}{4}$. Отже, $\dfrac{BO}{BC}=\dfrac{3}{4}$, а $\dfrac{BO}{OC}=3$

Дізнайтеся більше

1. У параграфі, який ви вивчили, вектор визначається як множина однаково напрямлених відрізків тої самої довжини. Такий вектор ще називають вільним вектором. Представником вільного вектора є напрямлений відрізок. У фізиці, механіці, крім вільних векторів, розглядають ще ковзні та зв'язані вектори. Для таких векторів точка прикладання є істотною.

Ковзний вектор — це множина однаково напрямлених відрізків тої самої довжини, які лежать на одній прямій. Точка прикладання вектора «ковзає» вздовж прямої. Прикладом ковзного вектора є сила, що діє на тіло.



Мал. 467

Якщо ж початок вектора «закріпити» в деякій точці, то одержимо зв'язаний вектор (мал. 467). Це — напрямлений відрізок. У фізиці таким є, наприклад, вектор швидкості точок, які рухаються по колу.

2. Термін «колінеарний» походить від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *lineo* — лінія, а термін «компланарний» — від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *planum* — площина.

3. Створенням української математичної термінології багато займався видатний український математик, академік **Михайло Пилипович Кравчук** (1892–1942), який народився у с. Човниці на Волині. Основні праці вченого стосуються розділів вищої математики і відомі за межами України. Дбаючи про розвиток математичної освіти, він висунув багато плідних ідей, які і нині реалізуються у навчанні математики школярів і студентів.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

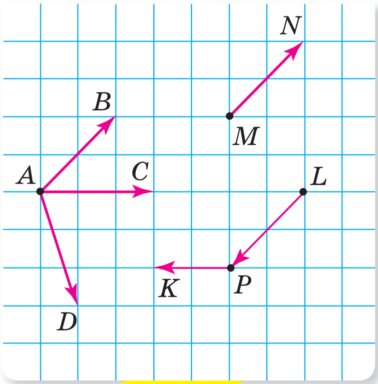
Українська	**Англійська**	**Німецька**	**Французька**
Вектор	a vector	Vektor	vecteur

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке вектор. Як його зображають? Позначають? Як задати вектор?
2. Що таке довжина або модуль вектора?
3. Який вектор називають нуль-вектором? Одиничним вектором?
4. Які вектори називають колінеарними? Співнапрямленими? Протилежно напрямленими? Рівними? Протилежними? Як їх позначають?
5. Сформулюйте означення компланарних векторів.
6. Як знайти суму двох векторів у просторі? А різницю?
7. Поясніть, як знайти суму трьох векторів за правилом паралелепіпеда.
8. Сформулюйте означення добутку вектора на число.
9. Які властивості має додавання векторів? Множення вектора на число?
10. Сформулюйте і доведіть теорему про компланарні вектори.
11. Що означає розкласти вектор за трьома некомпланарними векторами?
12. Сформулюйте і доведіть теорему про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами.

Розв'яжіть задачі

1'. На малюнку 468 назвіть: 1) усі зображені вектори; 2) вектори з початком у точці A; 3) колінеарні вектори; 4) співнапрямлені вектори; 5) протилежно напрямлені вектори.



Мал. 468

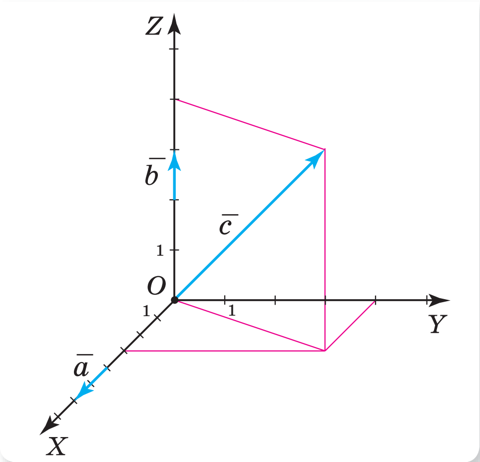
2'. Чому дорівнює модуль вектора (мал. 469): 1) $\overline{a}$; 2) $\overline{b}$; 3) $\overline{c}$? Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

3'. На малюнку 470 дано вектор $\overline{a}$. Побудуйте вектор:
1) $4\overline{a}$; 2) $-2\overline{a}$; 3) $0{,}5\overline{a}$; 4) $-\overline{a}$.

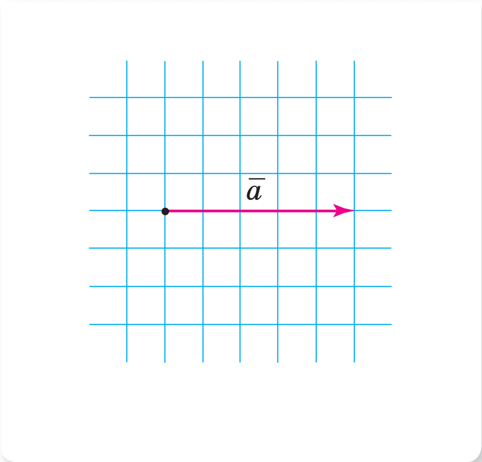
4'. Спростіть вираз:
1) $\overline{a} - \overline{0} + \overline{a}$; 2) $\overline{a} - \overline{b} + \overline{c} - \overline{a} + \overline{b}$; 3) $2(\overline{a} - \overline{b}) - (\overline{c} + \overline{a} + \overline{b})$.

5°. Точка A лежить між точками B і C. Точка M лежить між точками B і C. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$, $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$ назвіть: 1) співнапрямлені вектори; 2) протилежно напрямлені вектори.

6°. Назвіть три трійки некомпланарних векторів, початки і кінці яких є вершинами трикутної піраміди $DABC$.



Мал. 469



Мал. 470

7°. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 5 см і 10 см та відомо, що ці вектори:
1) протилежно напрямлені; 2) співнапрямлені.

8°. Побудуйте колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини дорівнюють по 5 см. Скільки розв'язків має задача?

9°. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектори:
1) $\overline{AA_1}+\frac{1}{2}\overline{DC}+2\overline{CB}$; 2) $\overline{AA_1}+\overline{DA}+\frac{1}{3}\overline{BC}$.

10°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектори:
1) $\overline{AA_1}+\overline{AD}+\overline{AB}$; 2) $\overline{BA}+\overline{DB}+\overline{BC}$.

11°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1 см. Знайдіть довжину вектора:
1) $\overline{AB}+\overline{AD}$; 2) $\overline{AA_1}+\overline{DC}+\overline{C_1C}$; 3) $\overline{AB}+\overline{BC_1}+\overline{CA}$.

12°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 см. Яку довжину має вектор:
1) $\overline{BB_1}+\overline{A_1D_1}$; 2) $\overline{CB_1}-\overline{A\ D_1}$; 3) $2\overline{C_1D_1}+0{,}5\overline{AA_1}$?

13°. Який геометричний зміст рівності $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|$?

14°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що довжина вектора $\overline{AA_1}+\overline{D_1C}+\overline{A_1D_1}+\overline{DA}+\overline{CD}$ не залежить від довжини ребра куба.

15°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть три трійки некомпланарних векторів, початки і кінці яких є вершинами куба. Чи компланарні вектори $\overline{BB_1}+\overline{B_1C_1}$, $\overline{AB_1}+\overline{B_1B}$, $\overline{C_1D_1}$?

16°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть трійку некомпла-нарних векторів, початки і кінці яких є вершинами паралелепіпеда. Чи компланарні вектори $\overline{BA}+\overline{AC_1}$, $\overline{DA_1}$, $\overline{C_1A_1}+\overline{A_1C}$?

17. Дано куб. Скільки пар рівних векторів можна побудувати з кінцями в його вершинах?

18. Дано прямокутний паралелепіпед. Скільки пар рівних векторів можна побудувати з кінцями у його вершинах?

19. Побудуйте піраміду $ABCD$. Побудуйте вектори:
1) $\overline{AD}-\overline{DC}+\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}+2\overline{DA}+\frac{1}{2}\overline{BC}$.

20. M — точка перетину медіан трикутника ABC, O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$.

21. M — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, O — довільна точка простору. Доведіть, що $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

22. Вектори $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{n}$ — некомпланарні. Чи компланарні вектори $\overline{p}+2\overline{q}-\overline{n}$, $3\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{p}+2\overline{q}+3\overline{n}$?

23. Точка M належить площині ABC. Доведіть: для будь-якої точки O простору існують числа λ і k, для яких виконується умова $\overline{OM}=k\overline{OA}+\lambda\overline{OB}+(1-k-\lambda)\overline{OC}$.

24. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки O і O_1 — точки перетину діагоналей граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Запишіть розклад векторів $\overline{BA}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{DO}$, $\overline{DO_1}$, $\overline{OO_1}$ за векторами $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$.

25. У піраміді $DABC$ точки M і N — відповідно середини ребер CB і DA, точка O — точка перетину медіан грані DCB. Запишіть розклад векторів $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{DM}$, $\overline{MN}$, $\overline{AO}$ за векторами $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$, $\overline{AD}=\overline{c}$.

26. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K і L — відповідно середини ребер A_1B_1 і CC_1, точка M — точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$, точка O перетину діагоналей паралелепіпеда. Запишіть розклад векторів $\overline{BC}$, $\overline{B_1D}$, $\overline{AC}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{KL}$, $\overline{AL}$, $\overline{AO}$, $\overline{MO}$ за векторами $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$.

27*. На ребрах SA, SB, AC піраміди $SABC$ позначено точки A_1, B_1, C_1 такі, що: $SA_1=\frac{1}{3}SA$, $SB_1=\frac{1}{4}SB$, $AC_1=\frac{5}{6}AC$. У якому відношенні площина $A_1B_1C_1$ ділить ребро BC?

28*. На ребрах SA, SB, SC піраміди $SABCD$ позначено точки A_1, B_1, C_1 такі, що: $SA_1=\frac{2}{3}SA$, $SB_1=\frac{2}{5}SB$, $SC_1=\frac{1}{2}SC$. У якому відношенні площина $A_1B_1C_1$ ділить ребро SD?

29*. На медіанах SM, SP і SN граней SAB, SBC, SAC піраміди $SABC$ позначено точки M_1, P_1 і N_1 так, що $SM = 2MM_1$, $SP = \frac{2}{3}PP_1$, $SN = NN_1$. У якому відношенні площина $M_1P_1N_1$ ділить ребро SB?

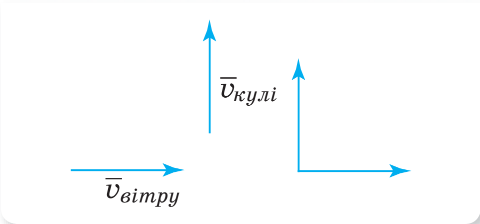
30*. Середня лінія трикутної піраміди — відрізок, що з'єднує середини протилежних його ребер. Доведіть, що середні лінії трикутної піраміди перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл.

Проявіть компетентність

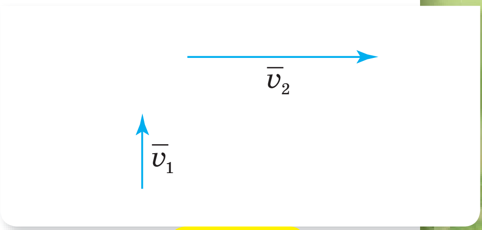
31. Туристи пройшли від базового табору на північ 10 км і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямом 1 км, вони піднялися на гору заввишки 2 км. Покажіть напрями їх руху на плані у масштабі 1 км в 1 см.

32. За малюнком 471 побудуйте напрям руху повітряної кулі.

33. За малюнком 472 побудуйте напрям руху вантажу, який піднімає гелікоптер.



Мал. 471



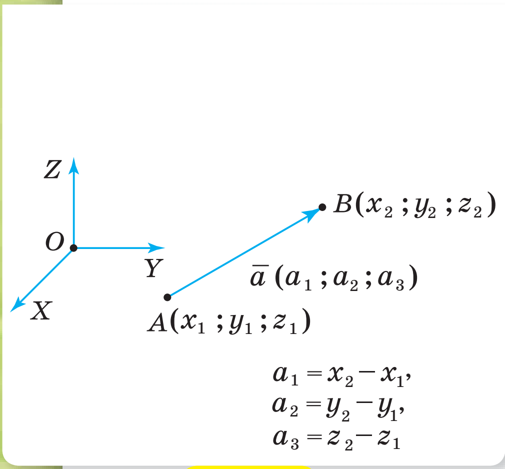
Мал. 472

§ 4.3. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА У ПРОСТОРІ

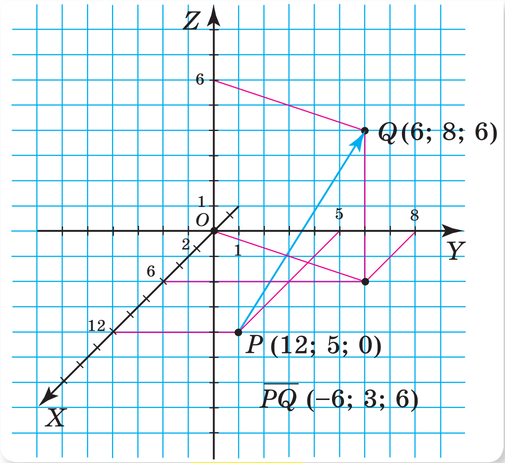
1. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Ви вже знаєте, що упорядкована пара точок A і B визначає вектор $\overline{AB}$.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат точки A і B мають координати: A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$ (мал. 473). Числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ і $a_3 = z_2 - z_1$ задають напрям і довжину вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, тому їх називають *координатами вектора* $\overline{a} = \overline{AB}$ *в даній системі координат*: $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$. Наприклад, вектор PQ на малюнку 474 має координати: PQ (−6; 3; 6).



Мал. 473



Мал. 474

Нуль-вектор має координати (0; 0; 0).

Задача 1. Дано $\overline{AB}$ (5; – 3; – 1), A (– 3; 2; 1). Знайдіть координати точки B.

Розв'язання. Нехай $(x_0; y_0; z_0)$ — координати точки B.
Тоді $x_0 - (-3) = 5$, $y_0 - 2 = -3$, $z_0 - 1 = -1$. Звідси $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$.
Отже, $B(2; -1; 0)$.

Якщо вектор $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ відкласти від початку координат (мал. 475). То він матиме такі ж координати, як у його кінця — точки $M(x_2; y_2; z_2)$. Тобто $\overline{a}$ $(x_2; y_2; z_2)$. І навпаки. Нехай вектор $\overline{a} = \overline{OM}$ $(a_1; a_2; a_3)$ відкладено від початку координат (мал. 476). Тоді точка M має такі ж координати, як і вектор $\overline{a}$: $M(a_1; a_2; a_3)$ і $OM_1 = a_1$, $OM_2 = a_2$, $OM_3 = a_3$. M_1, M_2, M_3 — проекції точки M відповідно на осі абсцис, ординат і оплікат.

На осях прямокутної декартової системи координат від початку координат відкладемо одиничні вектори $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (мал. 476).

Їх називають *координатними векторами* або *базисними векторами*.

Тоді $\overline{OM_1} = a_1\overline{i}$, $\overline{OM_2} = a_2\overline{j}$, $\overline{OM_3} = a_3\overline{k}$.

Вектор $\overline{a}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$ і $\overline{OA_3}$. Звідси дістанемо:

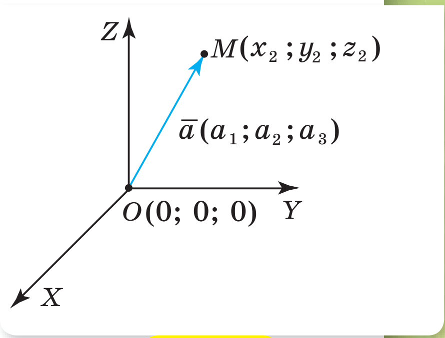
$$\overline{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} =$$

$$= a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}.$$

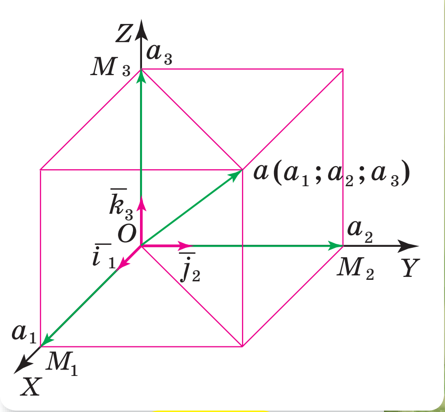
Згідно з теоремою про розклад вектора за трьома некомпланарними векторами, такий розклад вектора *a* єдиний.

Рівність $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ називають *розкладом вектора* $\overline{a}$ *за трьома координатними векторами* $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, а числа a_1, a_2 і a_3 *— коефіцієнтами такого розкладу*.

Отже, **координатами вектора у певній системі координат це коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами.**



Мал. 475



Мал. 476

НАСЛІДОК. У рівних векторів відповідні координати рівні.

Справді, оскільки $\overline{a} = \overline{b}$ і $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$, то $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Як і на площині, для векторів у просторі можна дати наступне означення: **координатами вектора у певній системі координат називають коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами.**

2. ДІЇ З ВЕКТОРАМИ, ЯКІ ЗАДАНО КООРДИНАТАМИ

Ви знаєте, як можна додати вектори, помножити вектор на число, якщо вектори задано напрямленими відрізками. Дізнаємося, як знайти координати суми (різниці) векторів, добутку вектора на число.

ТЕОРЕМА

(про координати суми векторів).

Координати вектора-суми дорівнюють сумі відповідних координат векторів-доданків.

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат, $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\overline{c}(c_1; c_2; c_3)$, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

Довести: $c_1 = b_1 + a_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$.

Доведення. Розкладемо за координатними векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$: $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$, $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, $\overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}$.

Маємо $\overline{a} + \overline{b} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} + b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k} = (b_1 + a_1)\overline{i} + (b_2 + a_2)\overline{j} + (b_3 + a_3)\overline{k}$. За умовою, $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, тоді $\overline{c} = (b_1 + a_1)\overline{i} + (b_2 + a_2)\overline{j} + (b_3 + a_3)\overline{k}$.

Оскільки розклад вектора $\overline{c}$ за координатними векторами єдиний, то $c_1 = b_1 + a_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$.

Доведіть самостійно твердження:

1) координати вектора-різниці дорівнюють різницям відповідних координат даних векторів;

2) координати вектора-добутку даного вектора на число дорівнюють добуткам відповідних координат даного вектора на це число.

Задача 2. Дано вектори $\overline{a}(5; -3; -1)$, $\overline{b}(1; -14; 1)$. На векторах $\overline{AB} = \overline{a}$ і $\overline{AD} = 2\overline{b}$ побудовано паралелограм $ABCD$. Знайдіть координати векторів $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

Розв'язання. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{a} + 2\overline{b}$. $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = 2\overline{b} - \overline{a}$. Послідовно знайдемо координати векторів $2\overline{b}$, $\overline{a} + 2\overline{b}$, $2\overline{b} - \overline{a}$.

$2\overline{b}(2; -28; 2)$, $\overline{AC} = \overline{a} + 2\overline{b} = \overline{(7; -31; 1)}$, $\overline{BD} = 2\overline{b} - \overline{a} = \overline{(-3; -25; 3)}$.

Задача 3. Розкладіть вектор $\overline{n}(11; -6; 5)$ за некомпланарними векторами $\overline{a}(3; -2; 1)$, $\overline{b}(-1; 1; -2)$, $\overline{c}(2; 1; -3)$.

Розв'язання. Нехай шуканий вектор $\overline{n}$ має координати $(n_1; n_2; n_3)$. Тоді $\overline{n} = n_1\overline{a} + n_2\overline{b} + n_3\overline{c}$. Запишемо дану рівність через координати, скориставшись властивостями множення вектора на число і додавання векторів:

$$\begin{cases} 3n_1 - n_2 + 2n_3 = 11, \\ -2n_1 + n_2 + n_3 = -6, \\ n_1 - 2n_2 - 3n_3 = 5. \end{cases}$$

Звідси $n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$. Отже, $\overline{n} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$.

3. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ

? Які особливості координат колінеарних векторів та як за координатами векторів з'ясувати, чи колінеарні вони? Відповідь на ці запитання дають наступні дві теореми.

ТЕОРЕМА **(про координати колінеарних векторів).**

Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні.

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат, вектори $\overline{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ — колінеарні.

Довести: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Доведення. Нехай вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — ненульові. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є колінеарними, якщо існує ненульове число λ таке, що $\overline{a} = \lambda\overline{b}$. Тоді $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$. Звідси $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$.

Випадок, коли хоча б один із векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є нуль-вектором, розгляньте самостійно.

Справджується й обернена теорема.

ТЕОРЕМА **(умова колінеарності векторів, заданих своїми координатами).**

Якщо відповідні координати векторів пропорційні, то вектори колінеарні.

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат, вектори $\overline{a}\,(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}\,(b_1; b_2; b_3)$ такі, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Довести: $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — колінеарні.

Доведення. Нехай $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$, тоді $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$. Маємо $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} = \lambda b_1\overline{i} + \lambda b_2\overline{j} + \lambda b_3\overline{k} = \lambda(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) = \lambda\overline{b}$, тоді вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є колінеарними.

НАСЛІДОК. Нуль-вектор колінеарний із будь-яким вектором.

З а д а ч а 4. За якого значення n вектори $\overline{a}(-4;\ 5;\ n)$ і $\overline{b}(3n;\ 2n-11{,}5;\ -3)$ колінеарні? Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ співнапрямлені чи протилежно напрямлені?

Р о з в' я з а н н я. Запишемо умову колінеарності для векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\frac{-4}{3n}=\frac{5}{2n-11{,}5}=\frac{n}{-3}$. Ця рівність рівносильна системі двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{-4}{3n}=\frac{n}{-3}, \\ \frac{-4}{3n}=\frac{5}{2n-11{,}5}, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2=4, \\ -8n+11{,}5=15n. \end{cases}$$ Звідси $n = 2$.

Отримуємо вектори $\overline{a}(-4;\ 5;\ 2)$ і $\overline{b}(6;\ -7{,}5;\ -3)$.

Тоді $\overline{b} = -\frac{2}{3}\overline{a}$. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ протилежно напрямлені.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

1) співнапрямлені, то існує додатне число λ таке, що $\overline{a} = \lambda\overline{b}$;

2) протилежно напрямлені, то існує від'ємне число λ таке, що $\overline{a} = \lambda\overline{b}$.

4. ДОВЖИНА ВЕКТОРА

Як можна знайти довжину вектора за його координатами? Поміркуємо. Довжина вектора $\overline{AB}$ — це довжина відрізка AB. Нехай у прямокутній декартовій системі координат точки A і B мають координати: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Скористаємося формулою довжини відрізка:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Тоді $|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Ураховуючи, що числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ є координатами вектора $\overline{a}=\overline{AB}$, одержимо **формулу довжини вектора** $\overline{a}$: $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

З а д а ч а 5. Визначте координати вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, $\overline{b}(1;\ -5;\ \sqrt{10})$, $|\overline{a}|=12$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Оскільки $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\overline{a}=\lambda\overline{b}$. Тоді $a_1 = \lambda$, $a_2 = -5\lambda$, $a_3 = \sqrt{10}\lambda$. Знайдемо довжину вектора $\overline{a}$:

$$|\overline{a}|=\sqrt{\lambda^2+25\lambda^2+10\lambda^2}=6|\lambda|.$$

За умовою, $|\overline{a}|=12$. Тоді $6|\lambda|=12$, $|\lambda| = 2$, $\lambda = \pm 2$. Отже, шуканих векторів два: $a_1(2;\ -10;\ 2\sqrt{10})$, $a_2(-2;\ 10;\ 2\sqrt{10})$.

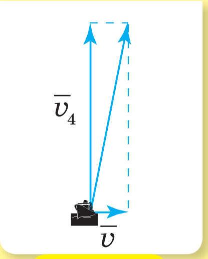
Дізнайтеся більше

1. У фізиці, механіці векторні величини, наприклад, вектор сили, вектор швидкості, подають у вигляді суми їх складових.

Задача. Знайдіть швидкість руху човна, якщо відомо вектор швидкості течії річки $\overline{v_т}$ (8; 0; 0) та вектор швидкості власне човна $\overline{v_ч}$ (0; 40; 0).

Розв'язання. Швидкість руху човна є сумою вектора швидкості течії річки та вектора швидкості власне човна: $\overline{v} = \overline{v_т} + \overline{v_ч}$ (мал. 477).

Звідси $\overline{v}$ (8; 40; 0). $|\overline{v}| = \sqrt{1664} \approx 41$.



Мал. 477

2. Білоусова Віра Петрівна (1906 – 1986) — кандидатка фізико-математичних наук, професорка. Закінчила Київський університет, який на той час був перейменований у Вищий інститут народної освіти. З 1970 року В. П. Білоусова професорка кафедри геометрії Київського Університету. Підручник «Аналітична геометрія» В. П. Білоусової, І. Г. Ільїна, О. П. Сергунової та В. П. Котлової перевидавався декілька разів і тривалий час залишався базовим навчальним посібником для студентів механіко-математичних факультетів.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
Колінеарні вектори	collinear vectors	vecteurs colinéaires	vecteurs colinéaires
компланарні вектори	coplanar vectors	koplanare Vektoren	vecteurs coplanaires

Пригадайте головне

1. Що називають координатами вектора у даній системі координат?
2. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами?
3. Які координати мають рівні вектори? Колінеарні вектори?
4. Як знайти суму векторів, заданих координатами?
5. Як помножити на число вектор, заданий координатами?
6. Доведіть теорему про координати колінеарних векторів.
7. Доведіть умову колінеарності векторів, заданих координатами.

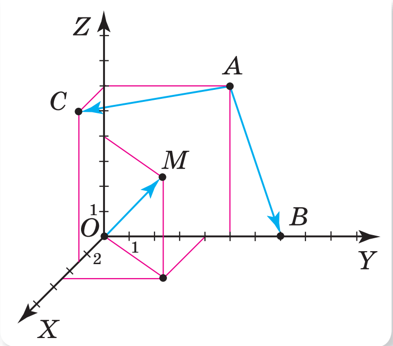
Розв'яжіть задачі

1'. За малюнком 478 знайдіть координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{OM}$.

2'. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$. Заповніть таблицю 23.

Таблиця 23

A	(0; 0; 0)	(2; –7; 0)	(0; 2; 0)	(1; 4; –5)
B	(1; 2; –5)	(–2; 3; –1)	(–10; 3; –12)	(11; –4; 9)
$\overline{AB}$				



Мал. 478

3'. Відкладіть від точки $O(0; 0; 0)$ вектор: 1) $\overline{a}\,(0; 2; 0)$; 2) $\overline{p}\,(6; 0; -7)$; 3) $\overline{n}\,(0; -4; 4)$; 4) $\overline{q}\,(3; 4; -8)$.

4'. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}$:

1) $\overline{a}\,(-5; 0; 0)$; 2) $\overline{a}\,(6; 8; 0)$; 3) $\overline{a}\,(3; 3; -3)$; 4) $\overline{a}\,(3; 4; -12)$.

5'. Знайдіть координати суми векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Заповніть таблицю 24.

Таблиця 24

$\overline{a}$	(2; 0; 2)	(1; –3; 0)	(5; 4; 3)	(–3; – 2; – 6)
$\overline{b}$	(1; 1; 1)	(– 1; 3; 8)	(– 5; 1; – 1)	(13; – 2; 7)
$\overline{a} + \overline{b}$				

6'. Дано вектор $\overline{a}\,(1; -2; 4)$. Знайдіть координати векторів:

1) $5\overline{a}$; 2) $-3\overline{a}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{a}$; 4) $-0{,}2\overline{a}$.

7'. Серед даних векторів знайдіть колінеарні вектори: $\overline{a}\,(3; 2; 2)$, $\overline{b}\,(6; -4; -4)$, $\overline{c}\,(-12; 8; 8)$, $\overline{d}\,(-15; -10; 0)$, $\overline{h}\,(1{,}5; 1; 1)$, $\overline{k}\,(3; 2; 0)$.

8°. Побудуйте вектор $\overline{AB}$, якщо $A(1; 0; 0)$, $B(6; 0; 0)$;
2) $A(0; 6; 4)$, $B(0; 2; -4)$;

9°. Заповніть таблицю 25.

Таблиця 25

A	(0; 0; 0)	(10; 2; –5)		(3; 5; 8)
B			(10; 2; –5)	
$\overline{AB}$	(1; 21;5)	(– 2; 3; – 1)	(– 2; 3; – 1)	(8; –1; 0)

10°. Знайдіть координати точки A, якщо:

1) $\overline{AB}$ (9; 2; 0), B(0; 0; 0); 2) $\overline{BA}$ (– 1; 3; 7), B(0; 0; 0);

3) $\overline{AB}$ (12; – 5; 8), B(2; – 3; – 2); 4) $\overline{BA}$ (–1; 0; 3), B(5; 2; – 10).

11°. Знайдіть координати вектора, протилежного до $\overline{AB}$, якщо:
1) A (10; 2; 0), B (1; 1; 1); 2) A (4; 5; –7), B (0; 4; 6).

12°. Назвіть рівні вектори серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$, якщо: A (2; 1; 3), B (1; 0; 7), C (–2; 1; 5), D (3; 2; 10).

13°. Дано точки B (3; 1; 3) і C (– 2; 8; – 8). Знайдіть координати точки A, якщо: 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

14°. Знайдіть координати векторів $\bar{a} + \bar{b}$ і $-3\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}$ (1; – 1; 0), $\bar{b}$ (3; 2; 6); 2) $\bar{a}$ (6; 0; 7), $\bar{b}$ (2; 3; 0).

15°. Дано вектори $\bar{a}$ (4; – 1; 35), $\bar{b}$ (2; 0; 5), $\bar{c}$ (–7; 1; – 15). Знайдіть координати вектора: 1) $2\bar{a} + 5\bar{b} - \bar{c}$; 2) $\bar{a} - \bar{b} + \frac{1}{5}\bar{c}$.

16°. Знайдіть координати вектора $4\bar{a} - \bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}$ (2; 1; 1), $\bar{b}$ (6; 3; 3); 2) $\bar{a}$ (1; 4; –1), $\bar{b}$ (3; – 1; 2).

17°. Знайдіть координати суми векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо A (– 1; 2; 0), B (2; – 1; 8), C (1; 4; – 3), D (3; – 5; 3).

18°. Знайдіть координати різниці векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо A (0; 0; 0), B (3; 4; 5), C (2; – 3; 4), D (0; – 3; 3).

19°. Який вектор треба додати до вектора $\bar{a}$ (11; – 1; 8), щоб отримати протилежний вектор до вектора $\bar{a}$?

20°. Назвіть колінеарні вектори серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BD}$, якщо: A(–1; 2; 3), B(2; –1; 3), C(1; –3; –1), D(–2; 3; 3).

21°. Дано вектори $\bar{a}$ (4; 6; 1), $\bar{b}$ (2; 0; 5), $\bar{c}$ (–7; 1; –3). Чи колінеарні вектори $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{a} + \bar{b}$?

22°. За яких значень a і b вектори $\bar{a}$ (24; a; 3) і $\bar{b}$ (4; 2; b) колінеарні?

23°. За якого значення l вектори $\bar{a}$ (3; – 1+ l; 2l + 4) і $\bar{b}$ (1; 2; 6) колінеарні?

24°. Чи є одиничним вектор: 1) $\bar{a}$ (– 1; 0; 0); 2) $\bar{b}\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13}\right)$; 3) $\bar{c}$ (1;1; 1)?

25°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) A(3; 2; 1), B(8; 7; 1); 2) A (10; 3; 3), B (– 2; 0; – 1).

26°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо A (6; 4; 0); B (– 3; 1; $\sqrt{10}$).

27°. Довжина вектора $l\bar{a}$ дорівнює 5. Знайдіть l, якщо:

1) $\bar{a}$ (– 1; 2; 0); 2) $\bar{a}$ (0; – 4; 3); 3) $\bar{a}$ (10; 5; $10\sqrt{5}$).

28. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром завдовжки 1. Взявши за початок координат вершину A, а за координатні вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, знайдіть координати:
1) вершин C, B_1 і C_1;
2) точок K і L — середин ребер A_1B_1 і CC_1 відповідно.

29. Визначте координати векторів, які збігаються з медіанами $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB}$ (3; –4; 6) і $\overrightarrow{AC}$ (5; 3; –1).

30. Знайдіть координати вершин трикутника ABC і координати вектора $\overrightarrow{CA}$, якщо A (2; –5; –4), $\overrightarrow{AB}$ (0; 2; 6), $\overrightarrow{BC}$ (4; 2; –1).

31. На площині XOY знайдіть таку точку c, щоб вектори $\overline{AB}$ (2; 6; 0) і $\overline{CO}$ були рівними.

32. Знайдіть довжину вектора $2\overline{a} - \overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}$ (0; 5; 10), $\overline{b}$ (4; 2; 5); 2) $\overline{a}$ (5; 3; 1), $\overline{b}$ (1; 2; 3).

33. Знайдіть довжину вектора $\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, якщо:

1) $\overline{a}$ (3; 0; 0), $\overline{b}$ (2; 0; 0), $\overline{c}$ (0; 0; 4);

2) $\overline{a}$ (4; 6; 1), $\overline{b}$ (2; 0; 5), $\overline{c}$ (–7; 1; –3).

34. Побудуйте паралелограм на векторах $\overline{OA}$ (2; 1; 6) і $\overline{OB}$ (1; 0; –4). Визначте довжини його діагоналей.

35. Обчисліть $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо відомо координати векторів $\overline{a}$ (3; –5; 8), $\overline{b}$ (–1; 1; –4).

36. Чи лежать на одній прямій точки:
1) A (1; 1; 1), B (2; 2; 2), C (9; 6; – 12); 2) A (1; – 2; 4), B (2; – 1; 2), C (3; 0; 0)?

37. Доведіть, що $ABCD$ є трапецією, якщо: A(–1; 2; 3), B(2; –1; 1), C(1; –3; –1), D(–5; 3; 3).

38. Доведіть, що $ABCD$ є паралелограмом, якщо: A(3; 0; 0), B(5; –1; –1), C(1; 2; 2), D(–3; 3; 3).

39. Визначте координати вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, $\overline{b}$ (16; – 15; 12), $\left|\overline{a}\right| = 75$.

40. Визначте координати вектора $\overline{a}$, якщо $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, $\overline{b}$ (3; – 4; 5), $\left|\overline{a}\right| = 10\sqrt{2}$.

41. Знайдіть координати вектора $\overline{b}$, що колінеарний вектору $\overline{a}$, якщо $\left|\vec{b}\right| = 10$ і відомо координати вектора $\vec{a}(2\sqrt{2}; -1; 4)$.

42. Знайдіть координати вектора $\overline{b}$, що колінеарний вектору $\overline{a}$, якщо $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{30}$ і відомо координати вектора $\vec{a}(1; -5; 2)$.

43*. Дано вектори $\overline{AC}$ $(-3; 0; 4)$, $\overline{AB}$ $(5; -2; -14)$. Знайдіть одиничний вектор, який виходить з точки A і ділить кут CAB навпіл.

44*. Визначте координати вектора $\overline{c}$, паралельного бісектрисі кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $|\overline{c}|=4$, $\overline{a}$ $(2; 4; 4)$, $\overline{b}$ $(-1; 2; -2)$.

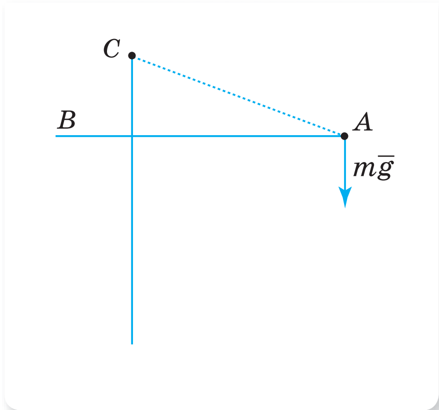
Проявіть компетентність

45. На тіло діють сили $\overline{F_1}$ $(1; 5; 8)$ і $\overline{F_2}$ $(-4; 7; 2)$. Знайдіть вектор рівнодійної сили.

46. Дано вектор рівнодійної сили $\overline{F}$ $(6; 2; 3)$. Знайдіть вектори сил, що мають напрями осей координат і для яких дана сила є рівнодійною.

47. Щоб зважити брусок вагою 12 Н за допомогою двох динамометрів, розрахованих на вимірювання сили 6 Н, треба обидва динамометри закріпити поряд на одному рівні, а брусок підвісити до обох гачків динамометрів. Обґрунтуйте, чому так можна зважити брусок.

48. На малюнку 480 AB — стріла крана, AC — трос. До кінця стріли прикладено силу 300 Н. Розкладіть її за векторами $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$.



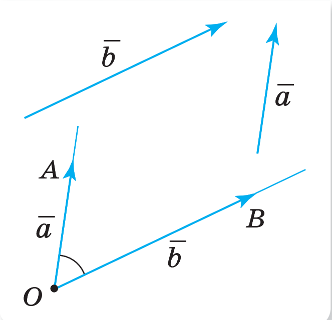
Мал. 480

§ 4.4. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Ви вже знаєте, що на площині над векторами можна виконувати такі дії, як додавання, множення вектора на число та скалярне множення. У попередньому параграфі ви дізналися, що дії додавання векторів і множення вектора на число на площині й у просторі визначаються аналогічно. Аналогічними є і властивості цих дій.

1. ОЗНАЧЕННЯ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

На малюнку 481 ви бачите два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Відкладемо від точки O вектори $\overline{OA} = \overline{a}$ і $\overline{OB} = \overline{b}$. Промені OA і OB утворюють кут AOB, який називають *кутом між векторами* $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



Мал. 481

Коротко записуємо: $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$, і читаємо: кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ співнапрямлені, то $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 0°$, а якщо протилежно напрямлені, то $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 180°$.

Скалярним добутком **двох векторів називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.**

Скалярний добуток позначають, як і на площині: $\overline{a}\ \overline{b}$.

Отже, за означенням:

$$\overline{a}\ \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right).$$

З означення скалярного добутку випливають наступні факти.

1. Якщо $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (мал. 482), то

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 0° = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot 1 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|.$$

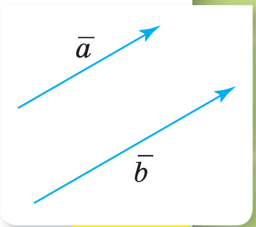
2. Якщо $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (мал. 483), то

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 180° = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot (-1) = -|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|.$$

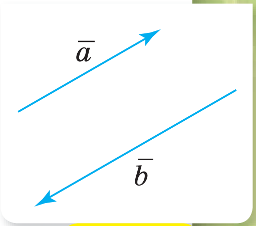
3. Якщо $\overline{a} = \overline{b}$, то

$$\overline{a}\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cdot \cos 0° = |\overline{a}|^2.$$

Добуток $\overline{a}\,\overline{a}$ називають *скалярним квадратом вектора* $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}^{\,2}$. Отже, $\overline{a}^{\,2} = |\overline{a}|^2$, тобто **скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.**



Мал. 482



Мал. 483

4. $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ (***переставний закон***). Справді:

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = |\overline{b}| \cdot |\overline{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = \overline{b}\,\overline{a}.$$

5. $(k\overline{a})\overline{b} = k(\overline{a}\,\overline{b})$ (***сполучний закон відносно скалярного множника***).

6. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори взаємно перпендикулярні або хоча б один із векторів є нуль-вектором, тобто:

$\overline{a}\overline{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли або $\overline{a} = 0$, або $\overline{b} = 0$, або $\overline{a} \perp \overline{b}$.

2. ФОРМУЛА СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ, ЯКІ ЗАДАНО КООРДИНАТАМИ В ПРЯМОКУТНІЙ ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

ТЕОРЕМА **(про скалярний добуток векторів, які задано координатами).**

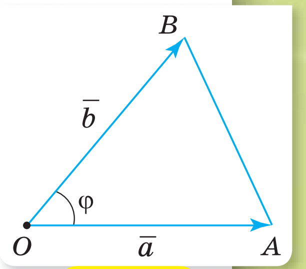
Скалярний добуток двох векторів, які задано координатами в прямокутній декартовій системі координат, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

$$\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат, $\overline{a}\,(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\overline{b}\,(b_1;\, b_2;\, b_3)$.

Довести: $\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Доведення. 1. Нехай вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не є колінеарними. Відкладемо ці вектори від точки O. Нехай $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = \varphi$ (мал. 484). З $\Delta\, AOB$, за теоремою косинусів, одержимо:



Мал. 484

$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$. (1)

Оскільки $OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \bar{a}\bar{b}$, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$,
$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$, то, підставивши ці дані в рівність (1), одержимо:

$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 - \bar{a}\bar{b}$.

Звідси випливає, що $\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

2. Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — колінеарні. Тоді існує таке число λ, що $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.
Звідси одержуємо: $\bar{a}\bar{b} = \bar{a} \cdot \lambda\bar{a} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{a}) = \lambda\bar{a}^2 = \lambda(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) =$
$= a_1 \cdot (\lambda a_1) + a_2 \cdot (\lambda a_2) + a_3 \cdot (\lambda a_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
Отже, скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат даних векторів: $\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Цю теорему можна використати для доведення властивостей скалярного множення.

ТЕОРЕМА (розподільний закон скалярного множення двох векторів).

Скалярний добуток суми двох векторів на третій вектор дорівнює сумі скалярних добутків векторів-доданків на третій вектор.

$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

Дано: $OXYZ$ — прямокутна декартова система координат,
$\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\bar{c}(c_1; c_2; c_3)$.

Довести: $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

Доведення.

$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3$
$+ b_3c_3 = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

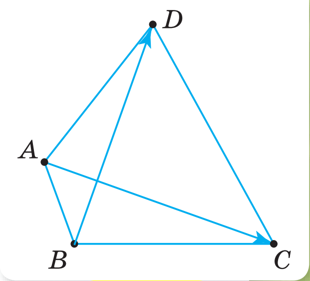
Отже, $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

Задача 1. Дано чотирикутник $ABCD$, у якого $A(3; 1; 2)$, $B(0; 0; 0)$, $C(5; -2; 7)$, $D(8; 7; 1)$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Задамо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ (мал. 485), знайдемо їх координати $\overline{AC}(2; -3; 5)$, $\overline{BD}(8; 7; 1)$ та обчислимо їх скалярний добуток:
$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 2 \cdot 8 + (-3) \cdot 7 + 5 \cdot 1 = 0$.

Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні, а отже, перпендикулярні й діагоналі чотирикутника.



Мал. 485

Щоб встановити, чи перпендикулярні два відрізки:
1)задайте вектори на даних відрізках;
2)покажіть, що скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.

З а д а ч а 2. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо A (1; 1; 3), B (1; 3; 3), C (1; 3; 5).

Р о з в' я з а н н я. Кут A трикутника ABC дорівнює куту між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, тому його знаходимо з формули скалярного добутку векторів: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\cdot\cos\angle A$. Тоді спочатку знайдемо координати цих векторів: $\overline{AB}$ (0; 2; 0) і $\overline{AC}$ (0; 2; 2).

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ та їх довжини:

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=0\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 2=4.$

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{0^2+2^2+0^2}=2$, $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Отримані значення підставляємо у формулу $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\cdot\cos\angle A$:

$4=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos A$, звідси $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle A=45°$.

Кут між векторами $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$ можна знайти за формулою:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=\frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|},\ \text{або}\ \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

З а д а ч а 3. Обчисліть довжину вектора $\overline{p}=\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}$, якщо $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{c}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$, $\overline{b}\perp\overline{c}$, $\overline{a}\perp\overline{b}$, $\left(\widehat{\overline{c};\overline{b}}\right)=60°$.

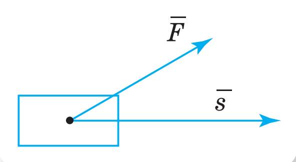
Р о з в' я з а н н я. Обчислимо скалярний квадрат вектора $\overline{p}=\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}$ і скористаємося властивостями скалярного множення.

$\overline{p}^2=\left(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}\right)^2=\overline{a}^2+4\overline{b}^2+9\overline{c}^2+4\overline{a}\overline{b}-12\overline{c}\overline{b}-6\overline{c}\overline{a}.$

Оскільки $\overline{b}\perp\overline{c}$ і $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\ \overline{c}=\overline{a}\ \overline{b}=0$. Крім того, $\overline{c}\overline{b}=1\cdot 2\frac{1}{2}=1$, $\overline{a}^2=\overline{c}^2=1$, $\overline{b}^2=4$. Тоді одержимо: $\overline{p}^2=1+16+9-12=14$. Оскільки $\overline{p}^2=\left|\overline{p}\right|^2$, то $\left|\overline{p}\right|=\sqrt{14}$.

Щоб знайти довжину суми векторів:
1) знайдіть скалярний квадрат даної суми векторів;
2) скористайтеся формулою $\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2$.

Скалярне множення векторів широко застосовується в механіці. Наприклад, робота, яку виконує сила $\overline{F}$, що діє на тіло при його переміщенні на вектор $\overline{s}$, дорівнює скалярному добутку векторів $\overline{F}$ і $\overline{s}$ (мал. 486).



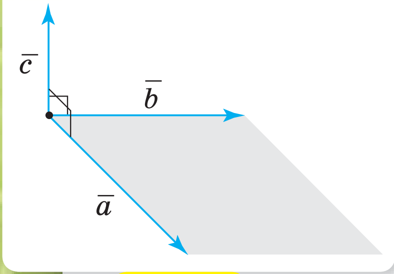
Мал. 486

Дізнайтеся більше

1. Крім скалярного добутку векторів розглядають ще й векторний добуток.

Векторним добутком двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який задовольняє вимоги: 1) $\overline{c} \perp \overline{b}$ і $\overline{c} \perp \overline{a}$; 2) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| \sin\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$; 3) напрям вектора $\overline{c}$ такий, що перехід від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки, коли дивитися на їх площину з кінця вектора $\overline{c}$.

Геометричний зміст векторного добутку: **площа паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює модулю їх векторного добутку (мал. 487).**



Мал. 487

Словничок

Прочитайте і прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	**Англійська**	**Німецька**	**Французька**
Скалярний добуток векторів	scalar product of vectors	Skalarprodukt von Vektoren	produit scalaire de vecteurs

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке кут між двома векторами.
2. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів. Чим зумовлена назва скалярного множення?
3. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
4. Сформулюйте теорему про рівність нулю скалярного добутку двох векторів.
5. Які властивості скалярного множення?
6. Як знайти скалярний добуток векторів за їх координатами?
7. Як знайти кут між двома векторами?

Розв'яжіть задачі

1'. За даними на малюнках 488, 489 назвіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Яка його градусна міра?

2'. Яка довжина вектора, якщо його скалярний квадрат дорівнює: 9; 2) 81; 3) 3? Відповідь поясніть.

3'. З'ясуйте, які координати мають вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, яка їх довжина, який кут між ними, якщо $\cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=\dfrac{3\cdot(-2)+3\cdot2+1\cdot1}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}$.

4'. Спростіть вираз:

1) $\overline{a}\,\overline{b}-(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{c})$;

2) $(-\overline{a}+5\overline{c})(\overline{a}+\overline{c})+(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-4\overline{c})$; 3) $-4\overline{a}\,\overline{b}+(\overline{a}+\overline{b})^2$.

5°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=45°$; 3) $|\overline{a}|=|\overline{b}|=6$, $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$;

2) $|\overline{a}|=5; |\overline{b}|=6$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=135°$; 4) $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=3$, $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$.

6°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=3$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=60°$; 2) $|\overline{a}|=5; |\overline{b}|=1$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=120°$.

7°. Знайдіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}\ \overline{b}=\sqrt{2}$, $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=1$; 2) $\overline{a}\ \overline{b}=-12$, $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$;

3) $\overline{a}\ \overline{b}=10$, $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=5$.

8°. Знайдіть довжину вектора $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}\ \overline{b}=1$, $|\overline{a}|=2$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=60°$; 2) $\overline{a}\ \overline{b}=-6$, $|\overline{a}|=3$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=180°$.

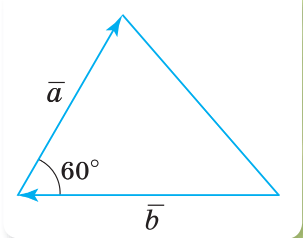
9°. Трикутник ABC — рівносторонній, знайдіть кут між векторами:
1) $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$; 2) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; 3) $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$.

10°. Як розміщені вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, якщо:

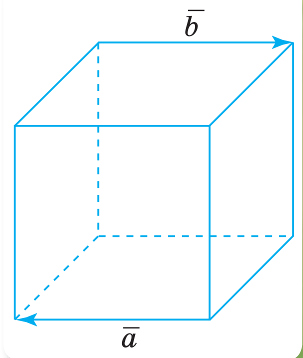
1) $\overline{a}\ \overline{b}=0$, $\overline{a}\ \overline{c}=0$, $\overline{b}\ \overline{c}=0$;

2) $\overline{a}\ \overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, $\overline{c}\ \overline{b}=-|\overline{c}|\cdot|\overline{b}|$;

3) $\overline{a}\ \overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, $\overline{c}\ \overline{b}=|\overline{c}|\cdot|\overline{b}|$? Побудуйте вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.



Мал. 488



Мал. 488

11°. Дано одиничні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Знайдіть $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})^2$, якщо:

1) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 30°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 120°$;

2) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 60°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 60°$.

12°. Дано одиничні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Знайдіть $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2$, якщо:

1) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 45°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 45°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 60°$;

2) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 120°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 90°$.

13°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1. Знайдіть:

14°. 1) $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$; 3) $\overline{AB}\cdot\overline{DA}$; 5) $\overline{AB}\cdot\overline{DC}$;

2) $\overline{BA}\cdot\overline{B_1A_1}$; 4) $\overline{AC}\cdot\overline{B_1D_1}$; 6) $\overline{D_1A_1}\cdot\overline{BC}$.

15°. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 5$. Знайдіть:

1) $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$; 3) $\overline{AA_1}\cdot\overline{BB_1}$;

2) $\overline{AB}\cdot\overline{CC_1}$; 4) $\overline{AC}\cdot\overline{B_1D_1}$.

16°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}$ (5; – 1; 1), $\bar{b}$ (1; 8; 2); 2) $\bar{a}$ (1; – 3; 1), $\bar{b}$ (– 1; 7; 11).

17°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}$ (– 1; 2; 0), $\bar{b}$ (2; – 1; 4); 2) $\bar{a}$ (0; 1; 5), $\bar{b}$ (– 1; – 1; 6).

18°. Доведіть, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні:

1) $\bar{a}$ (– 2; 2; – 4), $\bar{b}$ (1; 5; 2); 2) $\bar{a}$ (– 1; 0; 2), $\bar{b}$ (0; 4; 0).

19°. Знайдіть кут між векторами:

1) $\bar{a}$ (2; 0; 1), $\bar{b}$ (0; – 1; 0); 2) $\bar{a}$ (2; $2\sqrt{3}$; 6), $\bar{b}$ (1; $\sqrt{3}$; 3).

20°. Знайдіть кут між векторами:

1) $\bar{a}$ (6; – 8; 1), $\bar{b}$ (12; 9;1); 2) $\bar{a}$ (– 1; 1; 2), $\bar{b}$ (2; – 2; 1).

21°. Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — попарно взаємно перпендикулярні. Обчисліть $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\bar{a}$, якщо:

1) $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=1$, $|\bar{c}|=1$; 2) $|\bar{a}|=12$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=1$.

22°. Дано одиничні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Знайдіть $(\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-\bar{c})$, якщо:

1) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 120°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 60°$;

2) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 90°$; $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 90°$.

23°. Відомо, що $|\bar{b}| = 5$, $|\bar{c}| = 1$, $\bar{a}\ \bar{b} = -10$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 120°$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{c}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 90°$. Знайдіть:

1) $\bar{a}\ \bar{c}$;

2) $(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+2\bar{b}+3\bar{c})$,

3) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2$;

4) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}-2\bar{b})$.

24°. Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — співнапрямлені. Знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ і $2\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 2$.

25°. Дано одиничні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Знайдіть $|\bar{a}-\bar{b}|^2$, якщо:

1) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$;

2) $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 180°$.

26°. Дано одиничні вектори $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Знайдіть $|\bar{b}+\bar{c}|^2$, якщо:

1) $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 120°$;

2) $\left(\widehat{\bar{c};\bar{b}}\right) = 90°$.

27°. Знайдіть $|\bar{a}+2\bar{b}|$ і $|\bar{a}-3\bar{b}|$, якщо:

1) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 120°$;

2) $|\bar{a}| = 7$, $|\bar{b}| = 8$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$.

28. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB = 3$, $BC = 6$, $AA_1 = 9$. Точка M ділить сторону A_1B_1 у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини B_1. Знайдіть: 1) $\overline{AM} \cdot \overline{AA_1}$; 2) $\overline{A_1M} \cdot \overline{D_1C_1}$; 3) $\overline{AD_1} \cdot \overline{AM}$.

29. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром $2a$. M — середина ребра AA_1, O — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдіть:
1) $\overline{AM} \cdot \overline{AA_1}$; 2) $\overline{AM} \cdot \overline{CC_1}$; 3) $\overline{OB_1} \cdot \overline{AC}$; 4) $\overline{OA_1} \cdot \overline{AM}$.

30. Знайдіть косинус кута між векторами $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, якщо:
1) $A\ (1; 1; 1)$, $B\ (5; 3; -8)$, $C\ (1; -7; 0)$;
2) $A\ (-4; 1; -2)$, $B\ (-1;0; 3)$, $C\ (0; 3; 2)$.

31. На осі OY знайдіть таку точку C, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CM}$ були перпендикулярні, якщо:
1) $A\ (3; 1; 5)$, $B\ (0; 0; 0)$, $M\ (1; 0; 0)$;
2) $A\ (-12; 1; 5)$, $B\ (-1; 1; 9)$, $M\ (0; 3; 0)$.

32. За якого значення λ вектори $\bar{a}\ (8; 0; -6)$ і $\bar{b}\ (3; \lambda; 1)$ утворюють кут $60°$?

33. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо A (2; 1; 3), B (7; 4; 5), C (4; 2; 1).

34. Під яким кутом з точки B (– 4; – 2; 0) видно точки P (–1; – 2; 4) і M (3; – 2; 1)?

35. Знайдіть довжини діагоналей та кут між ними прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$ (– 5; 2; 3), $\bar{b}$ (4; – 2; 1), $\bar{c}$ (0; 1; 0).

36. Обчисліть кут між діагоналями паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$ (7; 1; 0), $\bar{b}$ (1; – 7; 0), $\bar{c}$ (0; 0; 10).

37. $\bar{a}=2\bar{p}+\bar{q}-4\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{p}+\bar{q}+\bar{n}$ і $\bar{p}(1;3;0), \bar{q}(0;-2;-1)$, $\bar{n}(1;0;1)$. Знайдіть довжини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та кут між ними.

38. Визначте довжину вектора $\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c}$, якщо:

1) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — одиничні та попарно взаємно перпендикулярні;

2) $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=1$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 180°$, $(\widehat{\bar{a};\bar{c}}) = 60°$, $(\widehat{\bar{c};\bar{b}}) = 120°$.

39*. $\bar{p}, \bar{q}$, $\bar{n}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори. $\bar{a}=2\bar{p}+\bar{q}-4\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{p}+\bar{q}+\bar{n}$, Знайдіть: 1) косинус кута між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$; 2) довжини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

40*. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ — одиничні, $|\bar{b}|=2$, $\bar{b}\perp\bar{c}$, $\bar{a}\perp\bar{b}$. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{c}$, якщо $\bar{p}=\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{q}=5\bar{a}-4\bar{b}$, $\bar{p}\perp\bar{q}$.

41*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром $2a$. Точка M — середина ребра AA_1, точка O — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдіть 1) $\overline{DM}\cdot\overline{OD_1}$, 2) $\overline{BM}\cdot\overline{D_1C}$, 3) $\overline{OB}\cdot\overline{MB}$.

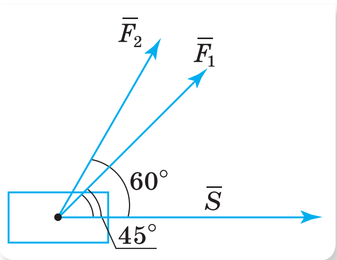
42*. Доведіть рівність:

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2+|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|^2+|\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}|^2+|-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2=4(|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2).$$

З'ясуйте геометричний зміст цієї рівності.

Проявіть компетентність

43. Вантаж тягнуть за дві мотузки, які утворюють відповідно кути 60° і 45° (мал. 490). Яку роботу треба виконати для переміщення вантажу на 10 м, якщо до кожної мотузки прикладається стала сила 50 Н?



Мал. 490

44. Обчисліть, яку роботу виконує сила $\bar{F}(6;-2;5)$, якщо її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки A (– 1; 0; – 8) у точку B (0; 0; 0).

45. Які кути утворює рівнодійна трьох сил $\bar{F}_1(1;4;3), \bar{F}_2(0;1;-1), \bar{F}_3(0;2;2)$ зі своїми складовими?

§ 4.5. РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ. РІВНЯННЯ СФЕРИ

1. РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Ви вже знаєте, як задати рівняння прямої на площині.

Площину в просторі задають рівнянням:

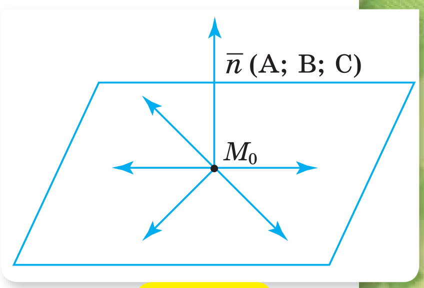
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C —довільні числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

Таке рівняння називають *загальним рівнянням площини*. Числа A, B, C і D називають *коефіцієнтами* загального рівняння площини.

? Чи кожне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ задає площину? Ні. Наприклад, якщо $A = B = C = D = 0$, то дане рівняння задає весь простір.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнтів у загальному рівнянні площини. Позначимо на площині точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$. Нехай M $(x; y; z)$ — інша довільна точка площини. Координати цих точок задовольняють рівняння даної площини: $Ax + By + Cz + D = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Почленно віднімемо ці рівняння: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Вираз, одержаний у лівій частині рівняння, можна тлумачити як скалярний добуток векторів $\overline{M_0\quad}$ $(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ і $\overline{n}(A;B;C)$. Цей скалярний добуток дорівнює нулю, тому $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$. Оскільки точка M — довільна точка площини, то вектор $\overline{n}(A;B;C)$ перпендикулярний до всіх векторів площини, які віднесені до точки M_0 (мал. 491), а тому він перпендикулярний і до даної площини.



Мал. 491

Вектор, координати якого відповідно дорівнюють коефіцієнтам при x, y, z у загальному рівнянні площини, перпендикулярний до цієї площини.

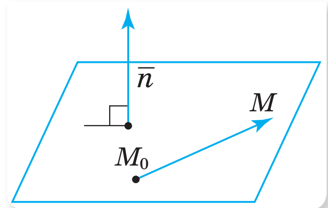
Вектор $\overline{n}(A;B;C)$ називають *вектором нормалі площини*.

Рівняння площини, яка проходить через точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}(A;B;C)$, має вигляд (мал. 492):

$$A(x - x_{0)} + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Наприклад, вектор $\overline{n}(0;0;1)$ є вектором нормалі площини XOY, тоді її рівняння: $z = 0$.

Ви знаєте, що, за аксіомою стереометрії, через три точки, які не лежать на одній прямій, проходить площина і до того ж тільки одна.



Мал. 492

Як скласти рівняння площини, якщо відомі координати трьох її точок, що не лежать на одній прямій? Відповідь на це запитання дає наступна задача.

Задача 1. Складіть рівняння площини, яка проходить через три точки M_1 (1; 3; 1), M_2 (0; 1; 6), M_3 (1; – 1; 3).

Розв'язання. Нехай $Ax + By + Cz + D = 0$ — рівняння шуканої площини. Оскільки дані точки лежать у цій площині, то їх координати задовольняють рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$. Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+3B+C+D=0, \\ B+6C+D=0, \\ A-B+3C+D=0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} A=8B, \\ D=-13B, \\ C=2B. \end{cases}$$

Підставимо вирази $A=8B, D=-13B, C=2B$ у загальне рівняння шуканої площини: $8Bx + By + 2Bz - 13B = 0$. Одержане рівняння набуває вигляду: $8x + y + 2z - 13 = 0$.

Щоб скласти рівняння площини, яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій, треба підставити в загальне рівняння площини координати заданих точок та розв'язати систему одержаних рівнянь.

Відстань d від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюють за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Кут між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходять за формулою:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|},$$ де $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$ — вектори нормалей площин.

**Якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то скалярний добуток їх векторів нормалей дорівнює нулю;
якщо дві площини паралельні, то їх вектори нормалей колінеарні.**

Задача 2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку A(1; 2; 3) і паралельна площині $x - y + 4z - 3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $Ax + By + Cz + D = 0$ — рівняння шуканої площини. Для площини $x - y + 4z - 3 = 0$ визначимо її вектор нормалі: $\overline{n}(1;-1;4)$. Оскільки шукана площина паралельна даній, то вектор

$\overline{n}(1;-1;4)$ є вектором нормалі й шуканої площини. Тоді A = 1, B = – 1, C = 4. Маємо: $x - y + 4z + D = 0$. Щоб знайти коефіцієнт D, підставимо координати точки A в одержане рівняння: 1 – 2 + 12 + D = 0. D = – 11. Отже, рівняння шуканої площини є таким: $x - y + 4z - 11 = 0$.

Ви знаєте, що якщо дві площини перетинаються, то вони перетинаються по прямій. Тому пряму в просторі можна визначити як лінію перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

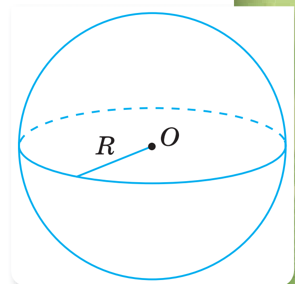
Наприклад, вісь абсцис є прямою перетину площин XOZ і XOY, а тому задається системою рівнянь: $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

Кут між прямими дорівнює куту між векторами, які відповідно паралельні заданим прямим.

2. РІВНЯННЯ СФЕРИ

Ви вже знаєте, що таке геометричне місце точок (ГМТ) на площині. У просторі це поняття визначають аналогічно. Розглянемо приклад.

Кожна точка сфери (мал. 493) віддалена від її центра на одну й ту саму відстань — довжину радіуса сфери, а жодна інша точка простору, яка не має такої властивості, не належить сфері. Отже, **сферою є геометричне місце точок простору, кожна з яких рівновіддалена від заданої точки (центра сфери).**



Мал. 493

Якщо, спираючись на означення сфери, задати залежність між абсцисою, ординатою та аплікатою точок сфери в прямокутній декартовій системі координат, то одержимо *рівняння сфери*:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

де $C\,(x_0; y_0; z_0)$ — центр сфери, R — радіус сфери.

Якщо центр сфери міститься в початку координат, то рівняння сфери має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Справді, початок координат O має координати (0; 0; 0), тому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ і рівняння сфери набуває вигляду: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 2. Знайдіть координати центра й радіус сфери, заданої рівнянням $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24x + 4y - 32z + 37 = 0$.

Розв'язання. Поділимо дане рівняння на 4 і виділимо повні квадрати зі змінними x, y, z:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + y - 8z + \frac{37}{4} = 0,$$

$$(x^2-2\cdot x\cdot 3+9)+\left(y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+(z^2-2\cdot z\cdot 4+16)-9-\frac{1}{4}-16+\frac{37}{4}=0,$$

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-4)^2=16.$$

Отже, центр сфери має координати: $C\left(3;-\frac{1}{2};4\right)$, а її радіус $R = 4$.

Дізнайтеся більше

1. Геометричні місця точок простору можна задавати не тільки рівняннями, а й нерівностями та їх системами. Наприклад, площина $Ax + By + Cz + D = 0$ розбиває простір на дві частини, які задаються нерівностями: $Ax + By + Cz + D < 0$ і $Ax + By + Cz + D > 0$. Щоб визначити, у якій саме частині простору відносно площини $Ax + By + Cz + D = 0$ лежить точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, треба підставити координати цієї точки в ліву частину рівняння площини та визначити знак одержаного числового виразу.

2. Елена Лукреція Корнаро Піскопія (1646 – 1684) — італійський філософ, математик, перша жінка у світі, яка офіційно була студенткою. Піскопія вирішила повністю присятити себе науці. У 1677 році вона провела свій перший публічний диспут в Падуанському університеті. Згодом Піскопія добилася дозволу захистити докторську дисертацію. Це сталося 25 червня 1678 р. Проте її науковий доробок був опублікований в Пармі лише після смерті (1688 р.). У Падуанському університеті встановлено її скульптурний пам'ятник.

Словничок

Українська	Англійська	Німецька	Французька
Рівняння лінії	the equation of a line	Die Liniengleichung	équation de ligne

Прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Пригадайте головне

1. Запишіть рівняння площини.
2. Який вектор є вектором нормалі до площини?
3. Запишіть формулу відстані від точки до площини.
4. За якою формулою можна обчислити кут між площинами у просторі?
5. Яким рівнянням задається сфера у прямокутній декартовій системі координат?
6. Яким рівнянням задається сфера у прямокутній декартовій системі координат з центром у початку координат?

Розв'яжіть задачі

1'. Яке з рівнянь є рівнянням площини:
1) $x + 1 = 0$;
2) $x + yz + 1 = 0$;
3) $3x - 5y - 2z = 0$;
4) $xyz = 0$;
5) $x - 15y - 6z + 9 = 0$?

2'. Яка з точок A (0; 0; 0), B (1; – 1; – 2), C (5; 3; 4), D (1; 2; 3), M (– 6; 8; – 4) лежить у площині $x - y - 2z + 6 = 0$?

3'. Визначте координати вектора нормалі площини:
1) $y = 2$;
2) $x - y = 0$;
3) $4x - y - z + 2 = 0$;
4) $x - y + z + 10 = 0$.

4'. На площині $5x + 4y - 2z + 3 = 0$ знайдіть дві точки:
1) ординати яких дорівнюють –1;
2) абсциси яких дорівнюють 2;
3) аплікати яких дорівнюють 5.

5'. За даними на малюнку 494 складіть рівняння сфери.

6'. Яке з рівнянь є рівнянням сфери:
1) $x + y + z = R^2$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
4) $x^2 - y^2 + z^2 = 9$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$;
6) $x^2 + y^2 + z = 1$?

7'. Знайдіть координати центра та радіус сфери:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
2) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-8)^2 = 12$;
3) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

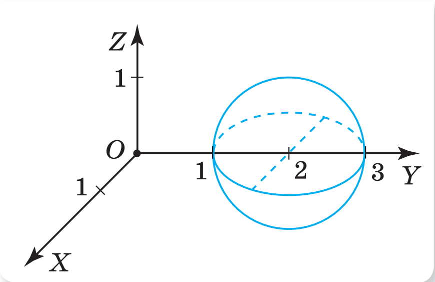
8'. Яка з точок A (1; – 2; 4), B (1; – 2; 9), C (– 1; 2; – 4), D (1; 4; 6), M (– 2; 2; 0) лежить на сфері $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$?

9'. На сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ знайдіть точку M_0 (x_0; y_0; z_0), якщо:
1) $x_0 = 6$, $y_0 = 0$; 2) $y_0 = -8$, $z_0 = 6$; 3) $x_0 = 5$, $z_0 = 5$.

10'. Чи може точка сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ мати абсцису: 1) 8; 2) 5; 3) 1?

11°. Визначте кілька точок площини $x + 4y + 2z - 2 = 0$.

12°. За якого значення m точка $M(1; 2; m)$ лежить у площині:
1) $y + z - 5 = 0$; 2) $x + 4y + 2z - 2 = 0$?



Мал. 494

13°. За якого значення m точка $A(9;\ 0;\ -m)$ лежить у площині $x + 8y + 2z - 3 = 0$?

14°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M\ (8;\ 6;\ -4)$ і паралельна площині:
1) XOZ; 2) XOY; 3) YOZ.

15°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;\ -7;\ 5)$ і паралельна площині:
1) XOZ; 2) XOY; 3) YOZ.

16°. Знайдіть точки перетину з осями координат площини:
1) $x + 4y + 3z - 12 = 0$;
2) $4x - 5y - 2z = 20$;
3) $x - y + 3z - 6 = 0$;
4) $x = 2$?
Побудуйте зображення площини.

17°. Знайдіть точки перетину з осями координат площини:
1) $x + y + z - 4 = 0$;
2) $x - 2y - 4z = 8$;
3) $x + 4y + 2z - 2 = 0$.
Побудуйте зображення площини.

18°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0;\ 0)$, $C\ (1;\ 3;\ 0)$, $A_1\ (0;\ 0;\ 5)$. Складіть рівняння площин, що містять грані паралелепіпеда.

19°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overline{n}$, якщо:
1) $M\ (0;\ 0;\ 0)$, $\overline{n}(1;1;1)$; 2) $M\ (8;\ -4;\ -3)$, $\overline{n}(-2;5;-3)$.

20°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overline{n}$, якщо:
1) $M\ (0;\ 0;\ 0)$, $\overline{n}(3;4;1)$; 2) $M\ (1;\ 2;\ 3)$, $\overline{n}(1;0;2)$.

21°. Знайдіть відстань від точки A до площини $12x + 4y + 3z - 2 = 0$, якщо:
1) $A\ (0;\ 0;\ 0)$;
2) $A\ (-5;\ 10;\ -1)$.

22°. Знайдіть відстань від точки A до площини $2x + 2y + z - 2 = 0$, якщо:
1) $A\ (1;\ 1;\ 1)$;
2) $A\ (-8;\ -2;\ 2)$.

23°. Знайдіть косинус кута між площинами:
1) $x = 2$ і $3x - 4y + 12z - 1 = 0$;
2) $z = 0$ і $x - y - 2z = 20$.

24°. Знайдіть косинус кута між площинами:
1) $x - 2y = 1$ і $z - 3 = 0$;
2) $x = 0$ і $x - y + z - 1 = 0$.

25°. Чи перпендикулярні площини:
1) $x + 4y + 2z - 2 = 0$ і $2x + 8y + 4z - 2 = 0$;
2) $3x - 2y + 3z = 0$ і $2x + 12y + 6z - 2 = 0$?

26°. Визначте координати кількох точок, що належать прямій:
$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 2x - y + 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

27°. Чи лежить на сфері $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$ точка:
1) A (1; 1; 1); 2) C (1; – 2; 4)?

28°. Складіть рівняння сфери з центром у точці C і радіусом R, якщо:
1) $C(0; 0; 0)$, $R = 2$;
2) $C(2; -1; 3)$, $R = 6$;
3) $C(5; -3; 7)$, $R = \sqrt{7}$;
4) $C(3; 3; 3)$, $R = 3$.

29°. Складіть рівняння сфери з центром у точці C і радіусом R, якщо:
1) $C(0; 3; 0)$, $R = 5$;
2) $C(-9; -1; 5)$, $R = 2$.

30°. Знайдіть радіус сфери з центром у точці (8; 6; –4), яка дотикається до площини: 1) XOY; 2) XOZ; 3) YOZ.

31. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки:
1) $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(1; 2; 3)$, $M_3(-1; 3; -3)$;
2) $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 1; 3)$, $M_3(0; -1; 2)$;
3) $M_1(1; 0; 3)$, $M_2(0; 1; 1)$, $M_3(0; 2; 0)$.

32. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки M_1 (2; 0; 0), M_2 (1; – 1; 2), M_3 (0; 4; – 2).

33. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Введемо систему координат так, що початок координат — вершина A, вісь абсцис збігається з прямою AB, вісь ординат — з прямою AD, вісь аплікат — з прямою AA_1. Складіть рівняння площини ACA_1.

34. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$, якщо:
1) $M_1(0; -1; 3)$, $M_2(1; 3; 5)$;
2) $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(4; 6; 5)$.

35. За якого значення λ є паралельними площини: $x + \lambda y + 4z - 5 = 0$ і $2x + 8y + 2\lambda z - 2 = 0$?

36. За якого значення λ є перпендикулярними площини $3x + \lambda y + z = 0$ і $5x + y + \lambda z - 2 = 0$?

37. Яка з точок A (1; – 2; 4), B (1; – 2; 9), C (– 1; 2; 4), D (1; 4; 6), M (– 2; 2; 0) ближче розміщена до площини $x + y - z - 5 = 0$?

38. Знайдіть координати центра та радіус сфери:
1) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-11=0$;
2) $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0$.

39. Знайдіть координати центра та радіус сфери:
1) $x^2+y^2+z^2=2x$; 2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$.

40. Складіть рівняння сфери, якщо кінцями одного з її діаметрів є точки:
1) $A(1; 1; 1)$, $B(3; 3; 3)$;
2) $A(-1; 4; -3)$, $B(3; 0; -1)$;
3) $A(7; -2; 4)$, $B(9; -8; 6)$;
4) $A(2; 2; 2)$, $B(-2; -2; -2)$.

41. Складіть рівняння сфери з центром у точці C, яка проходить через точку A, якщо:
1) $C(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 1)$; 2) $C(3;-2;1)$, $A(2;-1;-3)$.

42. Складіть рівняння сфери з центром у точці $C(2; 0; -3)$, яке проходить через точку $M(4; -2; -2)$.

43. Знайдіть відстань між центрами сфер $x^2+y^2+z^2+4y-2z-9=0$, $x^2+y^2+z^2+6x-10z-200=0$.

44. Знайдіть відстань між центром сфер $x^2+y^2+z^2+2x+6y-9=0$, $x^2+y^2+z^2+8x+4y-16z=0$?

45. За якого значення λ відстань від центра сфери $x^2+\lambda x+y^2+z^2-6z=36$ до початку координат дорівнює 18?

46*. За якого значення λ відстань від початку координат до площини $\lambda x+y-z-15=0$ дорівнює 5?

47*. Знайдіть відстань від точки $D(7; 1; 5)$ до площини, яка проходить через точки $A(0; 2; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 0; 1)$.

48*. Знайдіть висоту AH піраміди, якщо $A(10; -20; -22)$, $B(1; -3; 4)$, $C(0; 3; 0)$, $D(0{,}5; 0; 1)$.

49*. Складіть рівняння сфери, що проходить через точки $A_1(5; -8; 2)$, $A_2(-2; -8; -5)$, $A_3(8; -2; 5)$, $A_4(2; -5; 8)$.

50*. Складіть рівняння сфери, що проходить через точки $A(4; -2; 4)$, $B(7; 1; -2)$, $C(8; 6; -4)$, $D(4; 7; -5)$.

51*. Визначте взаємне розміщення двох сфер:

1) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$, $(x-1)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=9$;

2) $x^2+y^2+z^2+4y-6z-4=12$ і $x^2+y^2+z^2-4y+6z-12=0$.

52*. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16,\\ x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0?\end{cases}$$

Проявіть компетентність

53. Тіло рухається вздовж прямої. У момент часу $t = 0$ тіло знаходилось в точці $A(1; 0; 2)$, а в момент часу $t = 2$ — у точці $B(3; 2; 0)$. Доведіть, що не існує значення t, за якого тіло проходить через точку $C(6; 8; -3)$.

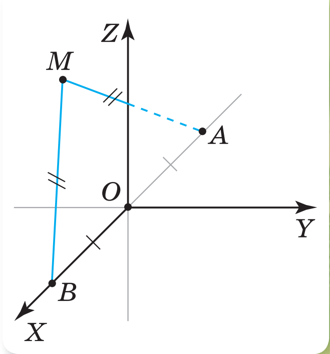
54. Фіксуються координати двох літаків, які рухаються прямолінійно. У момент часу t_1 літаки знаходились у точках $A_1(10; 3; 25)$, $B_1(8; 6; 11)$, а в момент часу t_2 — у точках $A_2(15; 3; 40)$, $B_2(14; 5; 9)$. Доведіть, що траєкторії літаків взаємно перпендикулярні. Чи лежать траєкторії літаків в одній площині?

§ 4.6. ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1. МЕТОД КООРДИНАТ

Метод координат доцільно застосовувати для знаходження довжини відрізка, доведення належності трьох точок одній прямій, чотирьох точок одній площині тощо.

З а д а ч а 1. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки простору до кінців будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда не залежить від вибору цієї діагоналі.



Мал. 496

Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 496).

1. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат O містився у вершині D, вісь абсцис збігалася з прямою DA, вісь ординат — з прямою DC, вісь аплікат — з прямою DD_1. Нехай $AB = b$, $AD = a$, $AA_1 = c$.

2. Знайдемо координати вершин паралелепіпеда у цій системі координат:
D (0; 0; 0), $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ b;\ 0)$, C $(0;\ b;\ 0)$, D_1 $(0;\ 0;\ c)$, A_1 $(a;\ 0;\ c)$, B_1 $(a;\ b;\ c)$, C_1 $(0;\ b;\ c)$.

3. Запишемо умову задачі у координатній формі. Нехай M $(x;\ y;\ z)$ — будь-яка точка простору. Знайдемо суми квадратів відстаней від точки M до кінців кожної з діагоналей AC_1, A_1C, BD_1, DB_1:

$$AM^2 + MC_1^{\,2} = \left((x-a)^2 + y^2 + z^2\right) + \left(x^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right) =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2ax - 2yb - 2cz + a^2 + b^2 + c^2,$$

$$A_1M^2 + MC^2 = \left((x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2\right) + \left(x^2 + (y-b)^2 + z^2\right) =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2ax - 2yb - 2cz + a^2 + b^2 + c^2,$$

$$BM^2 + MD_1^{\,2} = \left((x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2\right) + \left(x^2 + y^2 + (z-c)^2\right) =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2ax - 2yb - 2cz + a^2 + b^2 + c^2,$$

$$DM^2 + MB_1^{\,2} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right) =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2ax - 2yb - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 .$$

Отже, $AM^2 + MC_1^2 = A_1M^2 + MC^2 = BM^2 + MD_1^2 = D_1M^2 + MB^2$.
Тобто сума квадратів відстаней від довільної точки простору до кінців будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда не залежить від вибору цієї діагоналі.

Розв'язуючи задачу методом координат, треба:
1) ввести прямокутну декартову систему координат (для цього треба вказати розміщення початку координат та осей координат відносно даної фігури);
2) визначити координати точок даної фігури;
4) подати умову задачі в координатній формі;
5) скористатися відомими формулами;
6) подати одержаний результат мовою геометрії.

Метод координат також застосовують для знаходження геометричного місця точок простору. Розглянемо задачу.

Задача 2. Знайдіть геометричне місце точок простору, які рівновіддалені від точок A і B, якщо $AB = 2a$.

Розв'язання. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат O містився в середині відрізка AB, а відрізок AB лежав на осі OX (мал. 497). Тоді точки A і B матимуть координати: A ($-a$; 0; 0), B (a; 0; 0). Нехай M (x; y; z) — точка, що належить шуканому геометричному місцю точок простору. За умовою задачі, точка M рівновіддалена від точок A і B, тобто $AM = MB$. Запишемо цю умову в координатній формі:

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} .$$

Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата та спростимо її:

$$(x+a)^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 ,$$

$$x^2 + 2xa + a^2 = x^2 - 2xa + a^2 ,$$

$$x = 0 .$$

Одержали рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до осі OX.

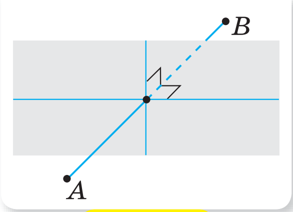
Покажемо, що кожна точка, координати якої задовольняють рівняння $x = 0$, рівновіддалена від точок A і B. Нехай точка N (0; b; c) — деяка точка, що задовольняє рівняння $x = 0$, тоді:

$$NA = \sqrt{(0+a)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

$$NB = \sqrt{(0-a)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} .$$

Звідси $AN = NB$.

Отже, геометричним місцем точок простору, які рівновіддалені від точок A і B, є площина, яка проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до нього (мал. 497).



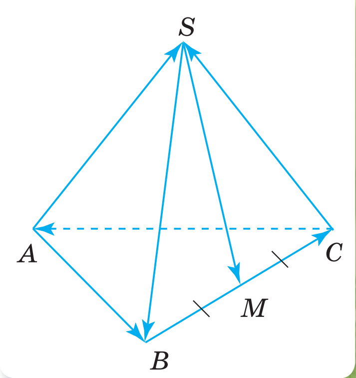
Мал. 497

Геометричним місцем точок простору, які рівновіддалені від двох даних точок A і B, є площина, яка проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до нього.

Щоб знайти геометричне місце точок (ГМТ) простору методом координат, треба:
1) ввести прямокутну декартову систему координат;
2) позначити $M\ (x;\ y;\ z)$ деяку точку, що належить шуканому ГМТ;
4) подати умову ГМТ в координатній формі;
5) скористатися відомими формулами;
6) одержати рівняння (нерівність чи їх систему);
7) подати одержаний результат мовою геометрії.

2. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

Векторним методом можна скористатися, коли треба знайти геометричне місце точок простору, довжину відрізка, градусну міру кута, відношення, в якому дана точка ділить даний відрізок, довести належність трьох точок одній прямій, паралельність прямих, перпендикулярність прямих тощо.



Мал. 498

Задача 3. Доведіть, що ребра AB і SC правильної піраміди $SABC$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Покажемо, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{SC}$ взаємно перпендикулярні (мал. 498). Для цього доведемо, що скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{SC}$ дорівнює нулю. З трикутника ABS: $\overline{AB}=\overline{SB}-\overline{SA}$. Тоді $\overline{AB}\cdot\overline{SC}=(\overline{SB}-\overline{SA})\cdot\overline{SC}=$

$$=\overline{SB}\cdot\overline{SC}-\overline{SA}\cdot\overline{SC}=\left|\overline{SB}\right|\left|\overline{SC}\right|\cos(\angle BSC)-\left|\overline{SA}\right|\left|\overline{SC}\right|\cos(\angle ASC).$$

Оскільки $\left|\overline{SB}\right|=\left|\overline{SA}\right|$, $\angle BSC=\angle ASC$, то $\overline{AB}\cdot\overline{SC}=0$. Тому, $\overline{AB}\perp\overline{SC}$.

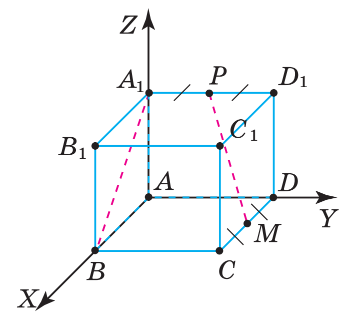
Отже, ребра AB і SC правильної піраміди $SABC$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язуючи задачу векторним методом, треба:
1) сформулювати задачу мовою векторів;
2) ввести допоміжні вектори;
3) скласти векторну рівність (рівності);
4) перетворити векторну рівність (рівності), користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;
5) подати отриманий результат мовою геометрії.

3. ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНИЙ МЕТОД

Для обчислення кутів, довжин відрізків доцільно застосовувати векторно-координатний метод, який полягає у використанні векторів, заданих координатами.

Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. $AB = AD = 4$ см, $AA_1 = 3$ см. Точки M і P — середини ребер CD і A_1D_1 відповідно. Знайдіть кут між прямими BA_1 і MP.



Мал. 499

Розв'язання. Кут між прямими BA_1 і MP дорівнює куту між векторами $\overline{BA_1}$ і $\overline{MP}$. Визначимо координати цих векторів. Для цього введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат O містився у точці A, вісь абсцис збігалася з прямою AB, вісь ординат — з прямою AD, вісь аплікат — з прямою AA_1 (мал. 499).

У такій системі координат: B (4; 0; 0), A_1 (0; 0; 3), M (2; 4; 0), P(0; 2; 3).

Тоді $\overline{BA_1}\,(-4; 0; 3)$, $\overline{MP}\,(-2; -2; 3)$.

Скористаємося формулою $\cos\left(\overline{BA_1}\,\widehat{;}\,\overline{MP}\right) = \dfrac{\overline{BA_1}\cdot\overline{MP}}{\left|\overline{BA_1}\right|\cdot\left|\overline{MP}\right|}$.

Тоді: $\cos\left(\overline{BA_1}\,\widehat{;}\,\overline{MP}\right) = \dfrac{-4\cdot(-2)+0\cdot(-2)+3\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Звідси $\left(\overline{BA_1}\,\widehat{;}\,\overline{MP}\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Отже, кут між прямими BA_1 і MP дорівнює $\arccos\dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Розв'язуючи задачу векторно-координатним методом, треба:
1) сформулювати задачу мовою координат і векторів;
2) ввести прямокутну декартову систему координат (для цього треба вказати розміщення початку координат та осей координат відносно даної фігури);
2) визначити координати точок даної фігури;
3) ввести допоміжні вектори, визначити їх координати;
4) скористатися відомими формулами, законами дій над векторами;
5) подати отриманий результат мовою геометрії.

Дізнайтеся більше

1. Векторно-координатний метод допомагає розв'язувати ряд нерівностей, рівнянь, їх систем. Розглянемо приклад.

Задача 5.

Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{2x+1-3y}+\sqrt{2y-x}+2\sqrt{y-x}=3$.

Розв'язання.

Введемо вектори $\overline{n}(2;1;2)$, $\overline{m}(\sqrt{2x+1-3y};\sqrt{2y-x};\sqrt{y-x})$. Знайдемо довжини векторів $\overline{n}$ і $\overline{m}$ та їх скалярний добуток:

$$\left|\overline{n}\right|=3,\quad \left|\overline{m}\right|=\sqrt{2x+1-3y+2y-x+y-x}=1,$$

$$\overline{n}\overline{m}=2\sqrt{2x+1-3y}+\sqrt{2y-x}+2\sqrt{y-x}.$$

Оскільки, за умовою, $\overline{n}\overline{m}=\left|\overline{n}\right|\left|\overline{m}\right|$, то вектори $\overline{n}$ і $\overline{m}$ — колінеарні, тоді їх координати пропорційні: $\dfrac{\sqrt{2x+1-3y}}{2}=\dfrac{\sqrt{2y-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{y-x}}{2}$.

Звідси $\begin{cases}\sqrt{2x+1-3y}=\sqrt{y-x},\\ 2\sqrt{2y-x}=\sqrt{y-x};\end{cases}$ $\begin{cases}2x+1-3y=y-x,\\ 4(2y-x)=y-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{7}{9},\\ y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

2. Кованцов Микола Іванович (1924 – 1988) — відомий український математик-геометр, доктор фізико-математичних наук, професор. Багато років обіймав посаду завідувача кафедри геометрії Київського державного університету імені Тараса Шевченка. М. І. Кованцови належать наукові та науково-популярні праці в галузі геометрії, методики навчання математики, історії математики, філософських проблем природознавства. Серед них особливе місце займають підручники для студентів університетів: «Проективна геометрія» (1985), «Диференціальна геометрія» (1973), «Математика і романтика» (1980).

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

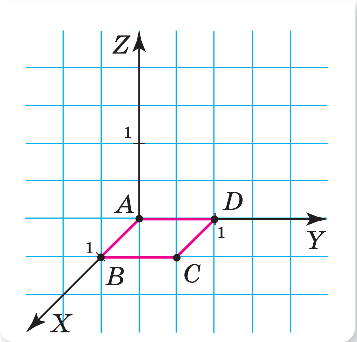
Українська	Англійська	Німецька	Французька
Метод координат	coordinate method	Der Koordinatenmethode	méthode de coordination
Векторний метод	vector method	Vektor-Methode	émthode vectorielle

Пригадайте головне

1. Поясніть, як застосувати метод координат до розв'язування задач.
2. Поясніть, як застосувати метод векторів до розв'язування задач.
3. Як раціонально ввести прямокутну декартову систему координат, якщо задано куб?
4. Як раціонально ввести прямокутну декартову систему координат, якщо задано правильну чотирикутну піраміду?
5. Як раціонально ввести прямокутну декартову систему координат, якщо задано пряму трикутну призму?

Розв'яжіть задачі

1'. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 4 см. Введіть систему координат так, щоб у ній вершини куба мали координати:
1) A (0; 0; 0), B (0; 4; 0), C (4; 4; 0), D_1 (4; 0; 4);
2) A (– 2; 4; 0), B (– 2; 0; 0), C_1 (2; 0; 4), B_1 (– 2; 0; 4).
Визначте координати всіх інших вершин.



Мал. 500

2'. Ребро куба дорівнює 2. Визначте координати його вершин, якщо:
1) початок координат лежить в одній з його вершин, а осі координат містять його ребра, які виходять з цієї вершини;
2) початок координат є серединою одного з ребер куба, вісь ординат містить це ребро, а осі абсцис і аплікат паралельні суміжним з ним відповідним ребрам;
3) початок координат лежить в точці перетину діагоналей куба, а осі координат паралельні його ребрам.

3'. Яка з умов свідчить про те, що точки A, B, C, D лежать в одній площині:
1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; 2) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$; 3) $\overline{AD} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AC}$?

4°. Чи може рівносторонній трикутник ABC мати такі координати вершин: A (0; 0; 0), $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$? Зробіть малюнок.

5°. Сформулюйте мовою координат твердження:
1) точки A, B і C лежать на одній прямій;
2) A, B, C, D лежать в одній площині;
3) відрізки AB і MP мають рівні довжини;
4) точка M — середина відрізка AB.

6°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M — довільна точка простору. Доведіть, що

$$MA^2 + MB_1^2 + MC^2 + MD_1^2 = MB^2 + MA_1^2 + MD^2 + MC_1^2.$$

7°. Знайдіть геометричне місце точок простору, які знаходяться на відстані 2 від площини: 1) XOZ; 2) ZOY; 3) XOY.

8°. Знайдіть геометричне місце точок простору, які знаходяться від площини XOY на відстані: 1) 1; 2) a.

9°. Знайдіть геометричне місце точок рівновіддалених від точок: 1) A (5; 0; 0) і B (– 5; 0; 0); 2) A (4; 6; 8) і B (– 2; 0; – 4).

10°. Знайдіть геометричне місце точок рівновіддалених від точок: 1) A (0; 0; 0) і B (0; 0; 10); 2) A (1; 4; 1) і B (– 3; 2; – 1).

11°. Дано точки A (0; 0; 0) і B (2; 2; 1). Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких: $3AM = MB$; 2) $AM = 3MB$.

12°. Дано точки A(0; 2; 0) і B(9; 4; – 9). Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких $AM = 2MB$.

13°. Дано точки A(3; 0; – 4) і B(– 3; 0; 4). Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких $AM^2 + MB^2 = 25$.

14°. Дано точки A(1; 2; – 4) і B(– 1; 2; – 4). Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких $AM^2 + MB^2 = 4$.

15°. Сформулюйте мовою векторів твердження:
1) прямі AB і MP — паралельні;
2) прямі AB і MP — перпендикулярні;
3) точки A, B і C лежать на одній прямій;
4) відрізки AB і MP мають рівні довжини;
5) точка M — середина відрізка AB.

16. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1 см. На ребрі AB позначено точку M так, що $AM : MB = 2 : 3$, а на ребрі C_1D_1 — точку P так, що $D_1P : PC_1 = 1 : 4$. Знайдіть MP.

17. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрі BC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 1$, а на ребрі A_1B_1 — точку N так, що $A_1N = NB_1$. Знайдіть косинус кута між прямими AA_1 і MN.

18. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрі AB вибрано точку M таку, що $AM : MB = 3 : 1$, на ребрі A_1B_1 точку N таку, що $A_1N : NB_1 = 2 : 1$. Знайдіть кут між прямими AA_1 і MN.

19. Дано точки A (2; 2; 2) і B(−2; −2; −2). Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких:
1) $MA^2 - MB^2 = 16$; 2) $MA^2 + MB^2 = 25$.

20. Відстань між точками A і B дорівнює 6. Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких: 1) $MA^2 + MB^2 = 6$; 2) $MA^2 - MB^2 = 6$.

21. Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких: 1) $MA^2 + MB^2 = 36$; 2) $MA^2 - MB^2 = 16$.

22. У просторі дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M простору, для яких $AM = 6MB$.

23. Дано правильний трикутник abc. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

24. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки M до площини A_1BD, якщо точка M — це:
1) точка перетину діагоналей грані BCB_1C_1;
2) середина ребра B_1C_1.

25. ABC — правильний трикутник $AB = 2$ см. Через середину o сторони AB проведено відрізок OM перпендикулярно до площини трикутника ABC. $OM = 1$ см. Знайдіть кут між прямими AB і CM.

26. Дано правильний трикутник ABC зі стороною 4 см. Через середину O сторони AB проведено відрізок OM перпендикулярно до площини трикутника ABC. $OM = 2$ см. Знайдіть кут між прямими AM і CB.

27. Дано одиничний куб. Знайдіть множину точок простору, сума квадратів відстаней від яких до вершин куба дорівнює 16.

28*. Дано три взаємно перпендикулярні прямі DA, DB, DC. Знайдіть множину точок M, для яких $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$, якщо $DA = DB = DC$.

29*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M і N — центри граней $A_1B_1C_1D_1$ і BCB_1C_1. У якому відношенні площина, що проходить через точки A, M і N, ділить ребро B_1C_1?

30*. У трикутній піраміді $ABCD$ усі ребера мають однакову довжину. Всередині піраміди існує точка M, для якої $MA = MB = \sqrt{2}$, $MC = MD = \sqrt{6}$.
Знайдіть довжину ребра піраміди.

31*. У просторі проведено промені DA, DB і DC так, що $\angle CDB = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів CDB і ADC.

32*. У просторі проведено промені DA, DB і DC так, що $\angle CDB = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle ADB = \gamma$. Знайдіть кут між прямою AD та бісектрисою кута, утвореного прямими DB і DC.

33*. У площині дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = a$, $BC = b$. Відрізок CD перпендикулярний до площини ABC, $CD = c$. Знайдіть відстань від точки C до площини ABD.

34*. Розв'яжіть систему: $\begin{cases} x^2 + y^4 + z^6 = 1, \\ x^3 + y^5 + z^7 = 2, \\ x^4 + y^6 + z^8 = 4. \end{cases}$

35*. Доведіть нерівність $\sqrt{1-a} + \sqrt{4a-3} + 2\sqrt{8-3a} \le 6$.

36*. Доведіть нерівність $12\sqrt{1+x} + 3\sqrt{y+6} + 4\sqrt{7+z} \le 52$, якщо $x + y + z = 2$.

37*. Для додатних a, b, c доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

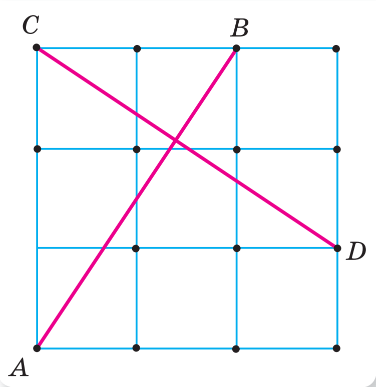
38*. Для додатних a, b, c доведіть нерівність

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge(a+b+c)^2.$$

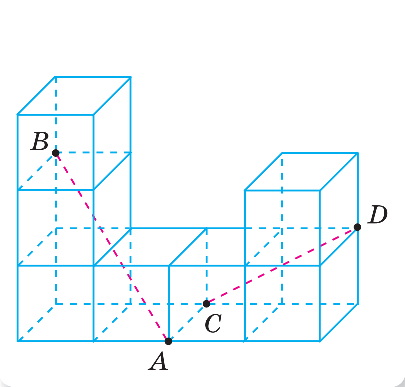
Проявіть компетентність

39. Вантаж спускається на парашуті зі швидкістю 5 м/с. Під яким кутом до вертикалі спускатиметься вантаж, якщо вітер переміщує його вздовж поверхні землі зі швидкістю 3 м/с?

40. Із сірників побудовано фігуру (мал. 503). Доведіть, що прямі AB і CD перпендикулярні.



Мал. 503

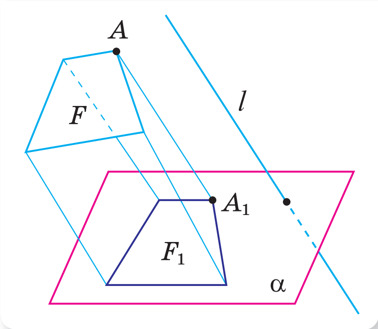


Мал. 504

41. Із кубиків побудовано фігуру (мал. 504). Знайдіть:
1) кут між прямими AB і CD; 2) відстань між точками B і D.

§ 4.7. ПЕРЕМІЩЕННЯ В ПРОСТОРІ

З курсу геометрії 9 класу ви вже знаєте, що таке перетворення площини, які перетворення зберігають відстань між точками площини (переміщення). У просторі геометричне перетворення визначають аналогічно.



Мал. 504

1. ЩО ТАКЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОСТОРУ

Розглянемо у просторі фігуру F, кожну точку якої спроектуємо на площину а (мал. 506). Задане відображення є перетворенням фігури F на фігуру F_1.

Перетворенням простору **називається відображення простору на себе, при якому образи будь-яких двох різних точок є різними.**

Наприклад, перетворенням простору є поворот кожної точки простору навколо деякої прямої. Таке перетворення простору зберігає відстань між відповідними точками.

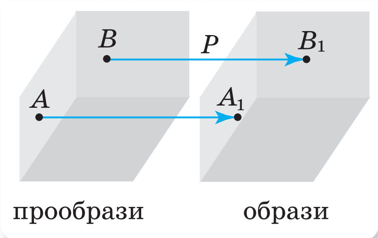
2. ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Перетворення простору називається *переміщенням*, якщо воно зберігає відстань між точками.

На малюнку 507 ви бачите точки A і B, які переміщенням P переводяться в точки A_1 і B_1. При цьому $AB = A_1B_1$.

Точки A_1 і B_1 називають *образами* точок A і B відповідно.

Точки A і B називають *прообразами* точок A_1 і B_1 відповідно.



Мал. 507

Коротко записують: $P(A) = A_1$, і читають:
— переміщення P переводить точку A в точку A_1;
— образом точки A при переміщенні P є точка A_1;
— прообразом точки A_1 при переміщенні P є точка A.

Властивості переміщення
1. Переміщення пряму переводить у пряму, площину — у площину..
2. При переміщенні, точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. При переміщенні зберігаються градусні міри кутів.
4. Переміщення будь-яку фігуру переводить у рівну їй фігуру.

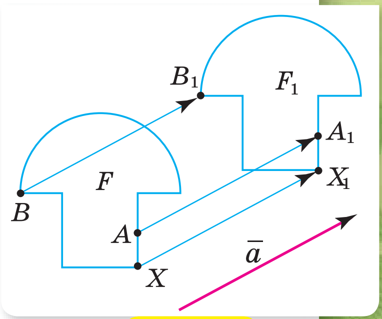
Окремими видами переміщення є паралельне перенесення, симетрії, повороти.

3. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Перетворення простору, при якому всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань, називається *паралельним перенесенням*.

Можна сказати, що точки фігури F (мал. 508) при паралельному перенесенні зміщуються на певний вектор $\overline{a}$.

Коротко записуємо: $T_{\overline{a}}(A)=A_1$, і читаємо: паралельне перенесення на вектор $\overline{a}$ переводить точку A в точку A_1.



Мал. 508

ТЕОРЕМА (властивість паралельного перенесення).

Паралельне перенесення є переміщенням.

Дано: $\overline{a}$ — вектор паралельного перенесення, $T_{\overline{a}}(A)=A_1$, $T_{\overline{a}}(B)=B_1$.

Довести: $AB = A_1B_1$.

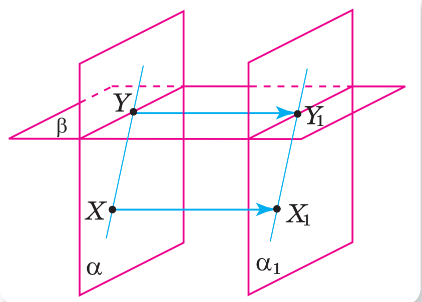
Доведення. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$. Нехай у цій системі координат точки A і B мають координати: A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$. Тоді $A_1(x_1 + a_1; y_1 + a_2; z_1 + a_3)$, $B_1(x_2 + a_1; y_2 + a_2; z_2 + a_3)$:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1=\sqrt{(x_2+a_1-x_1-a_1)^2+(y_2+a_2-y_1-a_2)^2+(z_2+a_3-z_1-a_3)^2},$$ тобто

$$A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$ Звідси $AB = A_1B_1$.

Властивості переміщення простору можна доводити векторно-координатним методом.



Мал. 508

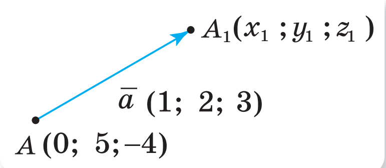
Паралельне перенесення має всі властивості переміщення. Його особлива властивість полягає в тому (мал. 509), що:

1) пряма при паралельному перенесенні переходить у паралельну їй пряму або в себе;

2) площина при паралельному перенесенні переходить у паралельну їй площину або в себе.

Паралельність прямих випливає з паралельності й рівності відрізків XX_1 і YY_1. Якщо ж пряма (площина) паралельна напряму перенесення, то кожна точка прямої (площини) переходить у точку цієї самої прямої (площини), а сама пряма (площина) переходить у себе. Наприклад, на малюнку 74 бачимо: $T_{\overline{XX_1}}(YY_1) = YY_1$, $T_{\overline{XX_1}}(\beta) = \beta$.

Задача. Паралельне перенесення визначається вектором $\overline{a}(1; 2; 3)$ (мал. 510). Які координати має образ A_1 точки A (0; 5; – 4)?



Мал. 510

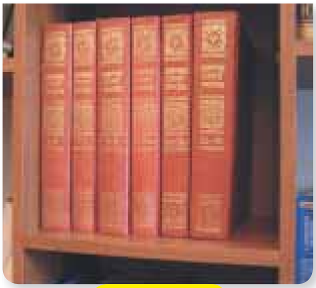
Розв'язання. Точка A (0; 5; – 4) є початком вектора $\overline{a}$, а точка A_1 (x_1; y_1; z_1) — його кінцем. Тоді визначимо координати вектора: $1 = x_1 - 0$, $2 = y_1 - 5$, $3 = z_1 - (-4)$. Звідси $x_1 = 1$, $y_1 = 7$, $z_1 = -1$. Отже, образ A_1 даної точки A має координати: A_1 (1; 7; – 1).

при паралельному перенесенні на заданий вектор будь-яку точку фігури-прообразу можна вважати початком цього вектора, а відповідну їй точку фігури-образу — його кінцем.

Паралельне перенесення просторових об'єктів (вони однакові й періодично повторюються) зустрічаємо в будівлях (мал. 511), в оздобленні алей і парків (мал. 512), у розміщенні багатотомного видання на поличці (мал. 513).

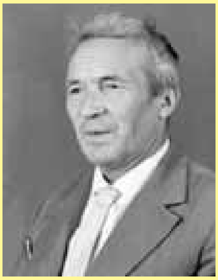

Мал. 511


Мал. 512


Мал. 513

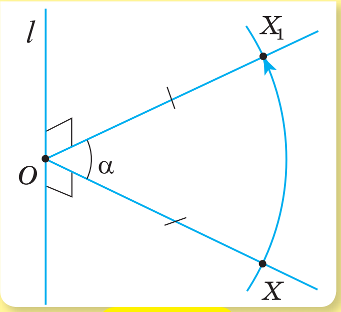
Дізнайтеся більше

1. Одним із видатних математиків XX ст. є академік **Андрій Миколайович Колмогоров** (1903–1987). У всьому світі академіка Колмогорова вважають основоположником сучасної теорії ймовірностей, автором фундаментальних результатів у топології, математичній логіці, теорії турбулентності, теорії алгоритмів та багатьох інших галузях математики. У 60-тих роках XX ст. А. М. Колмогоров очолював реформу шкільної математичної освіти. Під його керівництвом та у співавторстві з О. Ф. Семеновичем і Р. С. Черкасовим був створений підручник з геометрії для 6 – 8 (нині 7 – 9) класів загальноосвітньої школи, в основу якого було покладено теорію геометричних перетворень.



2. Ще одним прикладом переміщення є поворот навколо осі. При такому повороті всі точки простору повертаються навколо тієї самої прямої на один і той самий кут. Тому це переміщення називають *поворотом навколо заданої прямої на заданий кут* (мал. 514).

Пряма l називається *віссю повороту*, кут α між променями OX і OX_1 — *кутом повороту.* Коротко записують: $R_l^{\alpha}(X) = X_1$, і читають: поворот навколо осі l на кут α переводить точку X у точку X_1.



Мал. 514

Словничок

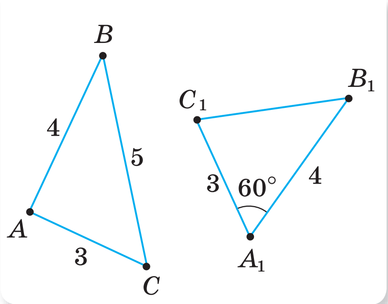
Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька	Французька
паралельне перенесення	parallel transfer	Parallelübertragung	transfert parallèle
переміщення	moving	umziehen	en mouvement

Пригадайте головне

1. Яке перетворення називається переміщенням?
2. Назвіть властивості переміщення.
3. У які фігури переходять прямі, промені, відрізки під час переміщення?
4. Які дві фігури називаються рівними?
5. Що таке паралельне перенесення?
6. Назвіть властивості паралельного перенесення.
7. Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням.

Розв'яжіть задачі



Мал. 517

1'. Перетворення переводить трикутник ABC у трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 517). Чи є це перетворення переміщенням? Поясніть відповідь.

2'. Перетворення переводить куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у куб $BCDAB_1C_1D_1A_1$. Чи є це перетворення переміщенням? Поясніть відповідь.

3'. Позначте точки A, B і C. Побудуйте точку, в яку переходить точка C при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AB}$.

4°. Чи існує переміщення, яке відрізок AB переводить у відрізок CD, якщо:
1) $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 4)$, $C(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$;
2) $A(7;2;4), B(4;-4;2), C(6;-7;8), D(9;-1;10)$?

5°. Чи існує переміщення, яке трикутник ABC переводить у трикутник MNH, якщо $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(1; 0; 0)$, $M(1; 3; -7)$, $N(4; 3; -3)$, $H(0; 3; -7)$?

6°. При переміщенні точки A, B, C, що лежать на одній прямій, переходять у точки A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

7°. Дано трикутник ABC. побудуйте трикутник, у який переходить даний трикутник при паралельному перенесенні на вектор:
1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{BA}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{AB}$.

8°. побудуйте образ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{BB_1}$.

9°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть образ відрізка AB при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{AA_1}$; 2) $\overline{BC}$; 3) $\overline{AD_1}$.

10°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть образ відрізка BB_1 при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{AB}$; 2) $\overline{BD}$; 3) $\overline{DC}$.

11°. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть прообраз точки A при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{C_1B_1}$; 2) $\overline{BA}$; 3) $\overline{C_1B}$.

12°. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть прообраз точки B_1 при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{A_1B_1}$; 2) $\overline{CC_1}$; 3) $\overline{DA_1}$.

13°. $T_{\bar{a}}(A) = A_1$, $T_{\bar{a}}(B) = B_1$. Визначте вид чотирикутника AA_1B_1B.

14°. Знайдіть образ точки $A(-1; 0; 8)$ при паралельному перенесенні на вектор $\bar{a}$, якщо: 1) $\bar{a}(2; 0; 0)$; 2) $\bar{a}(-8; -5; 0)$; 3) $\bar{a}(3; 2; 8)$.

15°. Знайдіть образ точки A (2; – 5; 0) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$, якщо: 1) $\overline{a}$ (0; 6; 0); 2) $\overline{a}$ (0; 0; – 10); 3) $\overline{a}$ (1; 1; – 1).

16°. Знайдіть прообраз точки A (12; 3; 5) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$, якщо: 1) $\overline{a}$ (12; 0; 0); 2) $\overline{a}$ (– 12; 0; 0); 3) $\overline{a}$ (1; 9; 1).

17°. Знайдіть образ точки A (– 7; – 1; 2) при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$, якщо: 1) $\overline{a}$ (0; 1; 0); 2) $\overline{a}$ (7; 1; – 2).

18°. $T_{\overline{a}}(A) = A_1$. Знайдіть координати вектора $\overline{a}$, якщо:

1) A (2; 1; 3), A_1 (2; – 1; 3); 2) A(– 4; 2; – 3), A_1 (4; 2; 3).

19°. $T_{\overline{a}}(A) = A_1$. Знайдіть координати вектора $\overline{a}$, якщо:

1) A (5; 5; 8), A_1 (– 5; – 5; – 8); 2) A(6; 8; 14), A_1 (3; 4; 7).

20°. Складіть рівняння площини, в яку переходить площина $z = 4$ при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$, якщо: 1) $\overline{a}$ (1; 0; 0); 2) $\overline{a}$ (4; 0; 0); 3) $\overline{a}$ (– 1; 2; 4).

21°. Складіть рівняння площини, в яку переходить площина $x = 2$ при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$, якщо: 1) $\overline{a}$ (2; 0; 0); 2) $\overline{a}$ (3; 0; 0); 3) $\overline{a}$ (0; 0; 5).

22°. Визначте координати вектора паралельного перенесення, при якому сфера $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$ переходить у сферу $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 16$.

23°. Складіть рівняння сфери, в яку перейде сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ при паралельному перенесенні на вектор: 1) $\overline{a}$ (1; 0; 0); 2) $\overline{a}$ (– 4; 8; 6).

24. **Доведіть, що переміщення переводить паралельні прямі у паралельні прямі.**

25. **Доведіть, що переміщення переводить кут у рівний йому кут.**

26. Доведіть, що при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}$ пряма, паралельна вектору $\overline{a}$, переходить сама в себе.

27. Знайдіть координати точки, в яку переходить точка A (1; 0; 3) при послідовному паралельному перенесенні на вектори $\overline{a}$, – 2 $\overline{a}$, якщо $\overline{a}$ (3; 5; 7).

28. $ABCD$ — паралелограм, у якого A (1; 2; – 4), B (6; 0; 2), C (3; 2; 8). Знайдіть координати образу точки D при паралельному перенесенні на вектор $\overline{c}$ (1; 4; 0).

29. Знайдіть координати образу точки перетину медіан трикутника ABC при послідовному паралельному перенесенні на вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, – $\overline{AC}$, якщо A (0; 2; – 3), B (– 5; 0; 0), C (0; 0; 6).

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, у якого A (0; 0; 0), B (4; 0; 0), D (0; 4; 0), A_1 (0; 0; 4). Знайдіть координати образу точки перетину його діагоналей при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AC}$.

31. Точка $A(1; 2; 0)$ при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}(0; 0; 3)$ переходить у точку A_1, яка при паралельному перенесенні на вектор $\overline{c}(1; 1; 1)$ переходить у точку A_2. Знайдіть координати точки A_2.

32. Точка A при паралельному перенесенні на вектор $a(4; 0; 0)$ переходить у точку A_1, яка при паралельному перенесенні на вектор $\overline{c}(0; 0; 4)$ переходить у точку $A_2(0; 0; 0)$. Знайдіть координати точки A.

33*. Складіть рівняння прямої, в яку при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}(1; 2; -3)$ переходить пряма, що визначається площинами $x + y - z = 0$ і $2x - y + 3z = 0$.

34*. Складіть рівняння площини, в яку при паралельному перенесенні на вектор $\overline{a}(1; 2; -3)$ переходить площина $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

Проявіть компетентність

35. Магазин і склад розміщені на різних берегах річки (мал. 519). У якому місці потрібно побудувати міст, щоб шлях між ними був найкоротшим?

Мал. 517

§ 4.8. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ, ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

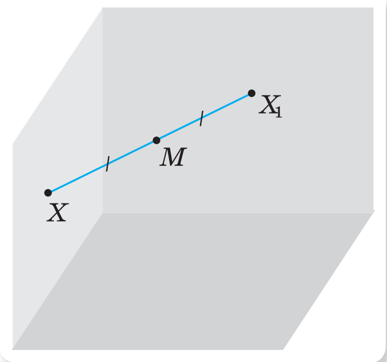
У курсі планіметрії ви ознайомилися з поняттям симетрії як геометричного перетворення, властивостями двох видів симетрії на площині — відносно точки і прямої. У просторі розглядають три види симетрії — відносно точки, прямої і площини. Ми будемо вивчати симетрію відносно точки і площини.

1. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

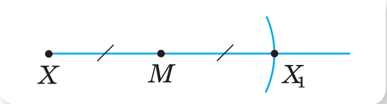
Дві точки X і X_1 простору називаються *симетричними відносно точки M*, якщо M є серединою відрізка $XX1$ (мал. 520).

На малюнку 521 ви бачите, як на площині будували точку X_1, симетричну точці X відносно точки M. Оскільки через пряму MX у просторі завжди можна провести площину, то **означення й властивості точок, симетричних відносно точки M, є однаковими для площини і простору.**

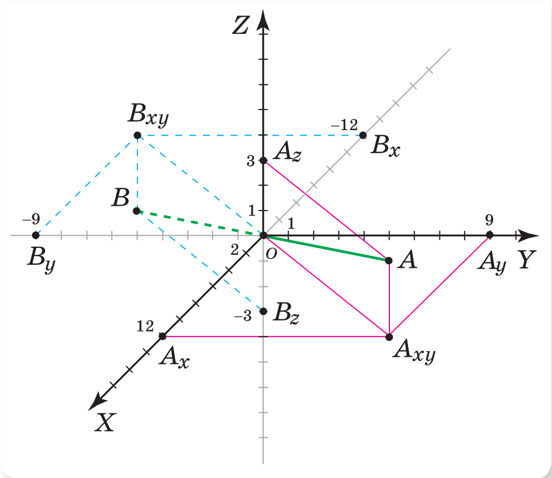
Подивіться на малюнок 522. Точка A має координати $A(12; 9; 3)$, тоді симетрична їй точка B відносно початку координат має координати B $(-12; -9; -3)$.



Мал. 520



Мал. 521

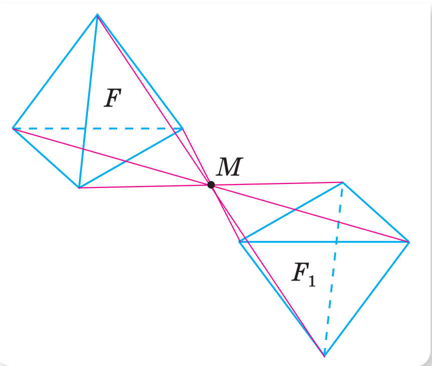


Мал. 522

У точок, симетричних відносно початку координат, відповідні координати є протилежними числами.

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної точки M, називається *перетворенням симетрії* відносно точки M.

При цьому фігури F і F_1 називаються *симетричними відносно точки* M (мал. 523), а точка M — *центром симетрії*. Перетворення симетрії відносно точки інакше називають *центральною симетрією*.



Мал. 523

Коротко записуємо: $Z_M(X) = X_1$ і читаємо: симетрія відносно центра M переводить точку X у точку X_1.

Чи зберігає відстані між двома точками перетворення симетрії відносно точки? Відповідь дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА

(властивість центральної симетрії).

Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

Дано: O — центр симетрії. $Z_O(A) = A_1$, $Z_O(B) = B_1$

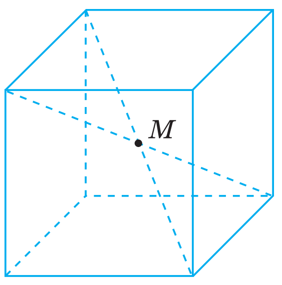
Довести: $AB = A_1B_1$.

Доведення. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат містився у центрі симетрії. Нехай в цій системі координат точки A і B мають координати: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Тоді $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$, $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$. Звідси $AB = A_1B_1$.

Центральна симетрія є переміщенням, тому вона має всі властивості переміщення. Особлива її властивість така: **дана точка та її образ рівновіддалені від центра симетрії і ці три точки лежать на одній прямій.**

Якщо перетворення симетрії відносно точки M переводить фігуру F у себе, то вона називається *центральносиметричною*, а точка M — *центром симетрії фігури*. Наприклад, куб — центральносиметрична фігура. Центром симетрії куба є точка перетину його діагоналей (мал. 524).



Мал. 524

Мал. 525

Мал. 526

Мал. 527

Фігури, що мають центр симетрії, часто зустрічаються в довкіллі. Наприклад, пропелер літака (мал. 525), квітка (мал. 526), сніжинка (мал. 527).

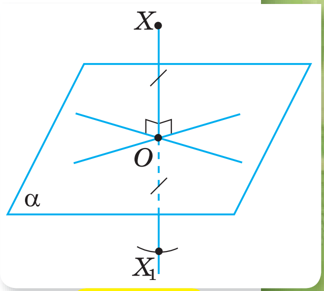
2. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНИ

Дві точки X і $X1$ простору називаються *симетричними відносно площини* α, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка $XX1$ і проходить через його середину.

Якщо точка лежить у площині α, то симетричною їй точкою є сама точка X (мал. 528)

Подивіться на малюнок 528. Точка A має координати $A(12; 9; 3)$, тоді симетрична їй точка B відносно площини α має координати $B(-12; 9; 3)$.

Точки, симетричні відносно певної координатної площини, мають відповідно рівні координати за осями, що визначають цю площину, а треті їх координати є протилежними числами.



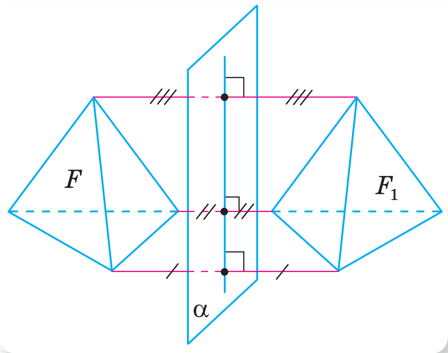
Мал. 528

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної площини α, називається *перетворенням симетрії відносно площини* α.

При цьому фігури F і F_1 називаються *симетричними відносно площини* α (мал. 529), а площина α — *площиною симетрії*.

Коротко записуємо: $S_\alpha(X) = X_1$, і читаємо: симетрія відносно площини α переводить точку X у точку X_1.

Чи зберігає відстані між двома точками перетворення симетрії відносно площини? Відповідь дає наступна теорема.



Мал. 529

ТЕОРЕМА **(властивість симетрії відносно площини).**

Перетворення симетрії відносно площини є переміщенням.

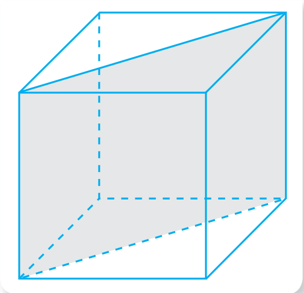
Дано: α — площина симетрії. $S_\alpha(A)=A_1$, $S_\alpha(B)=B_1$

Довести: $AB = A_1B_1$.

Доведення. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб площина симетрії співпадала з площиною XOY. Нехай в цій системі координат точки A і B мають координати: $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тоді $A_1\ (x_1;\ y_1;\ -z_1)$, $B_1\ (x_2;\ y_2;\ -z_2)$. $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$,

$A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}$. Звідси $AB = A_1B_1$.

Симетрія відносно площини є переміщенням, тому вона має всі властивості переміщення. Особлива властивість симетрії відносно площини полягає в тому, що **дана точка та її образ лежать на прямій, перпендикулярній до площини симетрії, і рівновіддалені від точки її перетину з площиною симетрії.**



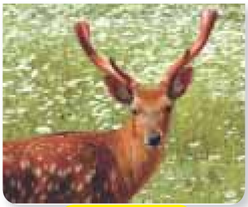
Мал. 530

Якщо перетворення симетрії відносно площини α переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *симетричною відносно площини* α, а площина α — *площиною симетрії фігури*. Наприклад, куб є симетричною фігурою відносно площини. Однією з площин симетрії куба є площина його діагонального перерізу (мал. 530).

Фігури, що мають одну чи кілька площин симетрії, можна зустріти в техніці (мал. 531), архітектурі (мал. 532), природі (мал. 533), побуті (мал. 534).

Мал. 530

Мал. 530



Мал. 530

Мал. 530

Дізнайтеся більше

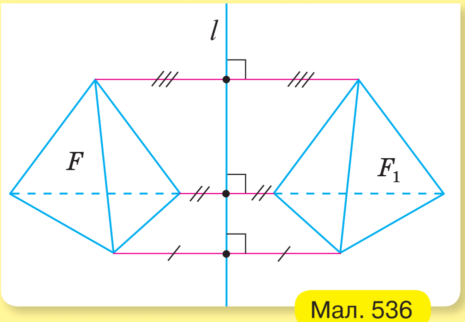
1. У вас могли виникнути запитання: Як визначають у просторі симетрію відносно прямої та які її властивості?

Дві точки X і X_1 простору називаються *симетричними відносно прямої* l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX_1 і проходить через його середину.

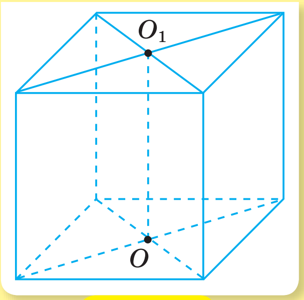
Якщо точка X лежить на прямій l, то симетричною їй точкою є сама точка X.

Оскільки через прямі XX_1 і l у просторі завжди можна провести площину, то означення й властивості точок, симетричних відносно прямої l, є однаковими для площини і простору.

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної прямої l, називають *перетворенням симетрії відносно прямої l.* При цьому фігури F і F_1 називають *симетричними відносно прямої l* (мал. 536), а пряму l — *віссю симетрії.* Перетворення симетрії відносно прямої інакше називають *осьовою симетрією*.



Мал. 536



Мал. 537

Симетрія відносно прямої є переміщенням, тому вона має всі властивості переміщення.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то цю фігуру називають *симетричною відносно прямої l* (або *осесиметричною*), а пряма l — *віссю симетрії фігури*. Наприклад, куб є осесиметричною фігурою. Однією з осей симетрії куба є пряма, що проходить через центри протилежних його граней (мал. 537).

2. На уроках хімії ви дізналися, що будова простих молекул часто є симетричною відносно прямої (площини). Це пояснює фізичні, хімічні властивості таких молекул, характер взаємодії з іншими атомами і молекулами. Так, молекула аміаку NH_3 має симетрію правильної трикутної піраміди, молекула метану CH_4 — симетрію трикутної піраміди, всі ребра якої рівні.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

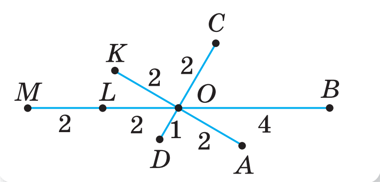
Українська	Англійська	Німецька	Французька
Симетрія	symmetry	Symmetrie	symétrie

Пригадайте головне

1. Які дві точки називаються симетричними відносно даної точки?
2. Яке перетворення називається симетрією відносно даної точки?
3. Яка фігура називається центральносиметричною?
4. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.
5. Які дві точки називаються симетричними відносно даної площини?
6. Яке перетворення називається симетрією відносно даної площини?
7. Яка фігура називається симетричною відносно даної площини?
8. Доведіть, що перетворення симетрії відносно площини є переміщенням.

Розв'яжіть задачі

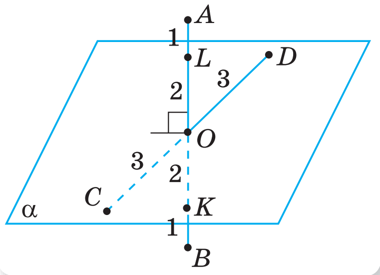
1'. Які з точок, зображених на малюнку 538, симетричні відносно точки O? Поясніть відповідь.



Мал. 537

2'. Позначте точки A і B. Побудуйте точку O, відносно якої ці точки симетричні. Скільки таких точок можна побудувати?

3'. Які з точок, зображених на малюнку 539, симетричні відносно площини α? Поясніть відповідь.



Мал. 537

4'. Дано точки A і B. Як побудувати площину, відносно якої ці точки симетричні? Скільки таких площин можна побудувати?

5°. Точка A лежить на сфері з центром O. Як розміщена точка, симетрична точці A відносно: 1) точки O; 2) діаметра сфери; 3) площини, що проходить через центр сфери?

6°. Дано трикутник ABC. Побудуйте трикутник, що симетричний даному відносно точки: 1) A; 2) P, яка лежить всередині трикутника; 3) K, яка лежить поза трикутником.

7°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть образ при симетрії відносно центра куба:
1) точки B; 2) точки D_1; 3) відрізка DA_1; 4) відрізка A_1A;
5) трикутника AOB; 6) квадрата CC_1DD_1.

8°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Знайдіть образ при симетрії відносно центра паралелепіпеда:
1) точки A; 2) точки B_1; 3) відрізка CA_1; 4) трикутника B_1BO.

9°. Знайдіть координати точки, яка симетрична відносно точки O (0; 0; 0), точці: 1) B(1; 0; 0); 2) C(1; 5; 0); 3) D (4; –2; 2).

10°. Знайдіть координати точки, яка симетрична відносно початку координат, точці: 1) $B(0; 0; -2)$; 2) $C(0; 9; 4)$; 3) $D(-1; -12; 7)$.

11°. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $B(1; 5; 2)$ відносно точки: 1) $A(4; 6; 8)$; 2) $C(-1; 0; 12)$; 3) $D(-6; -9; 5)$.

12°. Дано точки $A(3; 6; 5)$ і $B(6; 6; 12)$. Знайдіть координати точок A_1 і B_1, які симетричні відносно точки: 1) $M(4; 0; 2)$; 3) A.

13°. Дано $A(4; 0; 2)$, $B(0; 7; 2)$, $M(1; 2; 3)$, $P(3; 2; 1)$. Відрізок A_1B_1, симетричний відрізку AB відносно середини відрізка MP. Знайдіть координати точок A_1 і B_1.

14°. Точки $A(0; 3; 7)$ і B — симетричні відносно точки $C(3; -5; 6)$. Знайдіть координати точки B.

15°. Точки $A(-3; 4; 10)$ і B — симетричні відносно точки $C(1; 6; 20)$. Знайдіть координати точки B.

16°. Знайдіть образи вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ при симетрії відносно площини: 1) ABC_1; 2) A_1CD.

17°. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(2; 5; 7)$ відносно площини:
1) XOZ; 2) YOZ; 3) XOY.

18°. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $M(1; 3; 5)$ відносно площини:
1) XOZ; 2) YOZ; 3) XOY.

19°. З'ясуйте, відносно якої координатної площини симетричні точки:
1) (2; 1; 3) і (2; –1; 3); 2) (–4; 2; –3) і (4; 2; 3); 3) (–1; 3; 5) і (1; –3; 5).

20°. Дано точки $A(2; 1; 0)$ і $B(0; 4; 1)$. Знайдіть координати кінців відрізка A_1B_1, симетричного відрізку AB відносно площини $x = 5$.

21°. Дано точки $A(-1; -1; 1)$ і $B(2; 2; 2)$. Знайдіть координати кінців відрізка A_1B_1, симетричного відрізку AB відносно площини $y = 2$.

22°. Знайдіть рівняння площини, яка симетрична площині $y = -1$ відносно площини: 1) $x = 0$; 2) $y = -1$; 3) $y = 1$; 4) $x = 3$; 5) $z - 4 = 0$; 6) $x - 4 = 0$.

23°. Знайдіть рівняння площини, яка симетрична площині $x = 4$ відносно площини: 1) $x = 2$; 2) $y = -4$; 3) $y = 3$; 4) $z = 8$.

24. Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка не проходить через цю точку, переходить у паралельну їй пряму.

25. Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка проходить через цю точку, переходить сама в себе.

26. Побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно:
1) однієї з вершин куба; 2) площини, що містить одну з граней куба.

27. Дано трикутну піраміду. Побудуйте симетричну їй піраміду відносно:
1) вершини піраміди; 2) площини, що містить основу.

28. Скільки у відрізка центрів симетрії? Площин симетрії?

29. Скільки у квадрата центрів симетрії? Площин симетрії?

30. Які осі симетрії має куб? А площини симетрії?

31. Знайдіть центр симетрії двох сфер $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$ і $x^2+y^2+z^2-4x+6y+10z+37=0$.

32. Визначте координати центра симетрії, при якій сфера $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=16$ переходить у сферу $x^2+y^2+z^2-8x+12y+36=0$.

33. Складіть рівняння площини, в яку переходить при симетрії відносно початку координат площина:
1) $z-3=0$; 2) $x+5=0$; 3) $x+z-4=0$; 4) $2x-y+4z+1=0$.

34. Складіть рівняння площини, в яку переходить при симетрії відносно початку координат площина:
1) $x+1=0$; 2) $y-9=0$; 3) $y+z=0$; 4) $3x-5y-z+2=0$.

35. Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно площини $z=1$. Точка A_1 симетрична точці A (1; 2; 7) відносно площини $z=-2$. Знайдіть координати точки A_2. Знайдіть рівняння площини, відносно якої точки A і A_2 є симетричними.

36. Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно площини $x-2=0$. Точка A_1 симетрична точці A (5; 0; – 3) відносно точки M (3; 6; – 8). Знайдіть координати точки A_2. Знайдіть рівняння площини, відносно якої точки A і A_2 є симетричними.

37. Точка A_1 симетрична точці A (1; 6; 5) відносно площини, яка проходить через точку M (2; 0; 0) паралельно площині YOZ. Знайдіть координати точки A_1.

38*. Дано площину і дві точки A і B по один бік від неї. Знайдіть на площині точку N таку, щоб сума відстаней $AN+BN$ була найменшою.

39*. Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно площини $x=y$. Точка A_1 симетрична точці A(0; 4; 0) відносно площини $x+z-4=0$. Знайдіть координати точки A_2.

40*. Точка A_2 симетрична точці A_1 відносно площини $x+y-2=0$. Точка A_1 симетрична точці A (2; 2; – 2) відносно точки M (1; 6; 4). Знайдіть координати точки A_2.

41*. Точка A_1 симетрична відносно площини $x-y-2z+5=0$ точці A(1; 2; 0). Знайдіть координати точки A_1.

42*. Точки A (0; 0; 3) і A_1 симетричні відносно прямої $x=y=z$. Знайдіть координати точки A_1.

43*. Доведіть, що послідовне виконання двох симетрій відносно паралельних площин є паралельним перенесенням.

44*. Дві грані куба зафарбували в синій колір, інші — у зелений. Скільки площин симетрії має куб?

Проявіть компетентність

45. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають центр симетрії, площину симетрії.

46. На прямокутному більярдному столі лежать дві кулі A і B. Як побудувати траєкторію більярдної кулі A, яка відбившись від двох бортів столу, зіткнулася б з кулею B?

47. На прямокутному більярдному столі лежать дві кулі A і B. Як побудувати траєкторію більярдної кулі A, яка, відбившись від чотирьох бортів столу, зіткнулася б з кулею B?

48. На прямокутному більярдному столі лежить куля A. Чи можна побудувати траєкторію більярдної кулі, яка є періодичною?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат у просторі, як визначити координати точки в системі координат.
2. Запишіть формулу відстані між двома точками із заданими координатами.
3. Запишіть формули координат точки, яка ділить відрізок у данному відношенні. Формули координат середини відрізка.
4. Яке рівняння сфери?
5. Запишіть загальне рівняння площини. Який вектор є вектором нормалі до площини?
6. За якою формулою можна обчислити кут між площинами?
7. Яка формула відстані від точки до площини?
8. Що таке вектор? Як зображають вектор?
9. Які вектори називаються колінеарними? Співнапрямленими? Протилежно напрямленими? Рівними? Протилежними? Компланарними?
10. Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
11. Що таке координати вектора?
12. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами? Суму двох векторів? Добуток вектора і числа?
13. Що таке скалярний добуток двох векторів? Які його властивості?
14. Як знайти кут між двома векторами? Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
15. Як застосувати векторний метод до розв'язування задач? Метод координат?
16. Що таке переміщення? Назвіть його властивості.
17. Що таке паралельне перенесення? Які його властивості?
18. Які дві точки називаються симетричними відносно даної точки? Даної площини?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання контрольного завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Які координати проекції точки A (3; 2; 1) на вісь OX?

А. (3; 2; 0). **Б.** (3; 0; 0). **В.** (0; 2; 0). **Г.** (0; 2; 1).

2° Визначте відстань між точками A (4; – 5; 6), B (1; – 1; – 6).

А. $3\sqrt{21}$. **Б.** $\sqrt{61}$. **В.** $\sqrt{7}$. **Г.** 13.

3° Знайдіть відстань від точки C (2; 6; 8) до осі абсцис.

А. 2. **Б.** 16. **В.** 10. **Г.** 14.

4 Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо A (0; 1; 0), B (2; 2; – 3), C (4; 6; – 12).

А. (3; 4,5; – 2,5). **В.** (6; 9; – 15).
Б. (2; 3; – 5). **Г.** (0; 12; 0).

5* Точка C — середина відрізка AB. Точка M ділить відрізок AC у відношенні 1 : 4. Знайдіть координати точки M, якщо C (7; 1; – 4), B (0; 5; 1).

А. (8,4; 0,2; – 5). **В.** (12,6; – 2,2; – 8).
Б. (13,4; – 2,8; – 9,8). **Г.** (2,5; 3; – 1,5).

№ 2

1° Знайдіть координати вектора $2\overline{a}+\overline{b}$, якщо $\overline{a}$ (0; – 1; 3), $\overline{b}$ (1; 2; 1).

А. (1; – 4; 7). **Б.** (1; 1; 4). **В.** (1; 0; 7). **Г.** (2; 2; 8).

2° $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Назвіть вектор, компланарний з векторами $\overline{BA}$, $\overline{BC}$.

А. $\overline{AA_1}$. **Б.** $\overline{BD_1}$. **В.** $\overline{B_1A_1}$. **Г.** $\overline{B_1C}$.

3° За якого значення λ вектори $\overline{a}$ (3; 1; 4) і $\overline{b}$ (3; – 1 +λ; 2λ) рівні?

А. –2. **Б.** 3. **В.** 1. **Г.** 2.

4 Знайдіть кут між векторами $\overline{a}$ (5; 0; 10) і $\overline{b}$ (0; – 4; 0).

А. 60°. **Б.** 180°. **В.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **Г.** 90°.

5* Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — попарно перпендикулярні. Обчисліть $(2\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}-\overline{b})$, якщо $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=1$, $|\overline{c}|=1$.

А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

№3

1°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У яку точку переходить точка D_1 при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AB}$?

А. B_1. **Б.** D. **В.** A_1. **Г.** C_1.

2°. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $B(1; 5; 2)$ відносно точки O (0; 0; 0).

А. (0; 5; 2). **Б.** (– 1; –5; – 2). **В.** (– 1; 5; – 2). **Г.** (1; 5; 2).

3°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого A (0; 0; 0), B (3; 0; 0), C (0; 3; 3), A_1 (0; 0; 3). Складіть рівняння площини BA_1B_1.

А. $x - 3 = 0$. **Б.** $y - 3 = 0$. **В.** $z - 3 = 0$. **Г.** $y = 0$.

4. Знайдіть радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z - 3 = 0$.

А. 4. **Б.** 3. **В.** $\sqrt{3}$. **Г.** 16.

5*. Дано точки A (0; 0; 0) і B (2; 1; 0). Знайдіть рівняння геометричного місця точок M простору, для яких $AM = MB$.

А. $4x + 2y - 5 = 0$. **Б.** $z = 3$. **В.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$. **Г.** $2x + y = 0$.