М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць,
З. О. Сердюк

Геометрія

**Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти**

Профільний рівень

Київ
Оріон
2020

УДК
Б91

Бурда М. І.
Б91 Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, 2019. — К. : УОВЦ «Оріон», 2020. — 240 с. : іл.
ISBN

УДК

ISBN

ЗМІСТ

Дорогі друзі!

Ви продовжуєте вивчати стереометрію — розділ геометрії про властивості фігур у просторі. У 10 класі ви ознайомилися із взаємним розміщенням прямих і площин у просторі, дізналися про координати, вектори та геометричні перетворення у просторі.

Тепер ви розширите й поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтесь про властивості многогранників і тіл обертання, як знаходити їх об'єми та площі поверхонь. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці.

Як успішно вивчати геометрію за підручником? Увесь матеріал поділено на чотири розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, біля якого є позначка «флешка». Це — найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати й уміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом (′). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння й наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв’язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам’ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв’язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання, розширити кругозір.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

 Поміркуйте

 Типова задача

 Зверніть увагу

 Домашнє завдання

 Як записати/ прочитати

 Запам’ятайте

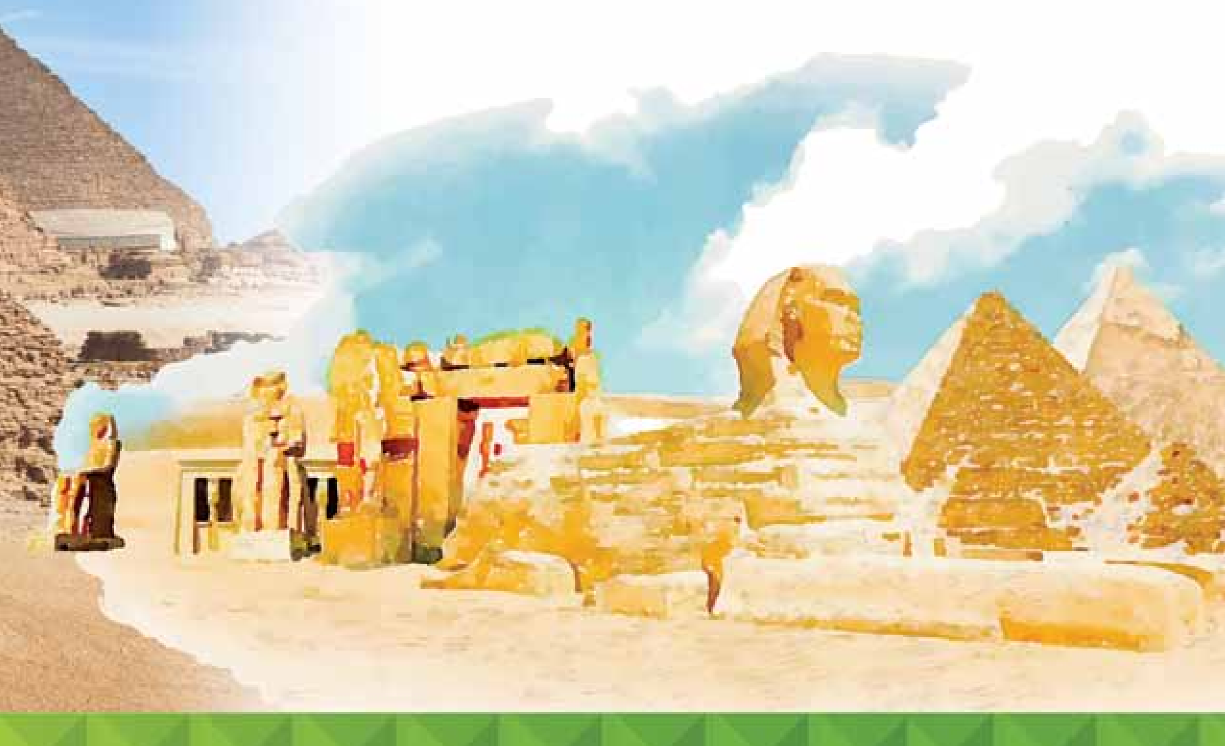
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового та задоволення від навчання!

Розділ 1

Многогранники

У розділі дізнаєтесь:

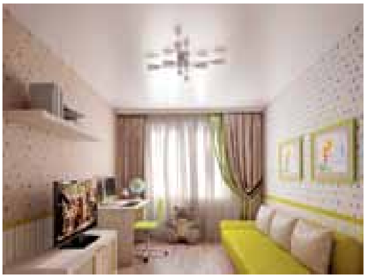
- що таке многогранний кут;
- про многогранник, його різновиди й властивості;
- якими бувають призми, паралелепіпеди та піраміди;
- що таке правильний многогранник та які його властивості;
- як застосувати вивчені означення й властивості на практиці та в розв’язуванні задач

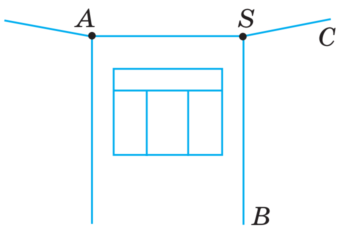


§ 1. МНОГОГРАННІ КУТИ

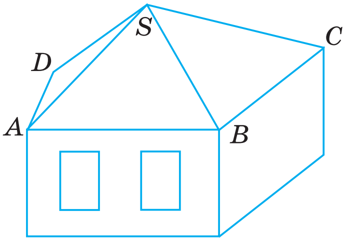
1. ЩО ТАКЕ МНОГОГРАННИЙ КУТ

Подивіться на малюнки 1–3. Ви бачите, що площини двох стін і стелі кімнати (мал. 1) сходяться в одній точці S. Прямі SA, SB і SC перетину цих площин не лежать в одній площині. У кожній із площин утворився відповідний плоский кут: ASB, BSC, CSA. Попарно спільні сторони цих кутів SA, SB і SC утворюють своєрідні ребра конструкції. Розглянемо інші приклади. На малюнку 2 у спільній точці S сходяться площини чотирьох схилів даху будинку, а на малюнку 3 — більш ніж двадцять площин

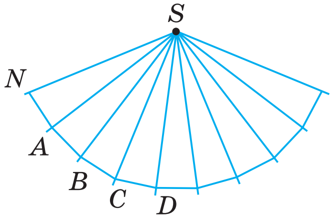




Мал. 1



Мал. 2

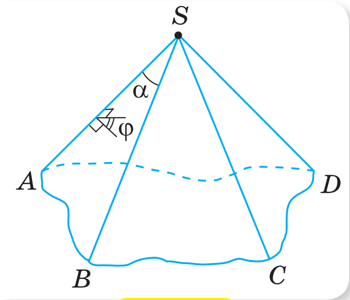


Мал. 3

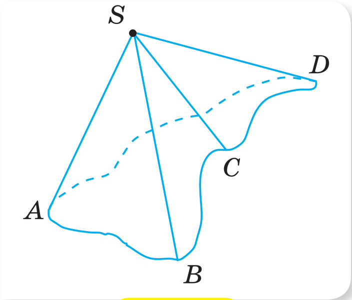
секцій старовинної китайської парасольки. Відповідно, на даху будинку бачимо чотири плоскі кути: ASB, BSC, CSD і DSA, а на парасольці — більше двадцяти плоских кутів: ASB, BSC, CSD,.. NSA. Дах має чотири ребра: SA, SB, SC і SD, а парасолька — більш ніж двадцять ребер: SA, SB, SC,.. SN. Властивості цих та аналогічних їм конструкцій у геометрії вивчають за допомогою фігури «многогранний кут».

Многогранним кутом **називається фігура, утворена кількома плоскими кутами зі спільною вершиною й попарно спільними сторонами, причому кожні три послідовні спільні сторони не лежать в одній площині.**

Плоскі кути многогранного кута також називають його *гранями*, їх спільні сторони — *ребрами*, а спільну вершину — *вершиною* многогранного кута. На малюнку 4 ви бачите чотиригранний кут з вершиною S, гранями ASB, BSC, CSD, DSA та ребрами SA, SB, SC, SD. Елементами многогранного кута є його *плоскі кути при вершині*, а також *двогранні кути при* його *ребрах*.



Мал. 4



Мал. 5

Коротко говоримо: чотиригранний кут з вершиною S або многогранний кут $SABCD$. Про многогранний кут з n гранями говоримо: n-гранний кут.

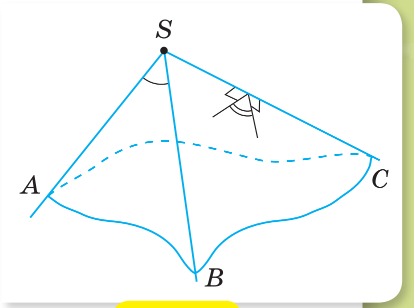
Многогранні кути можуть бути опуклими (мал. 4) і неопуклими (мал. 5). Ми вивчатимемо лише опуклі многогранні кути.

Чи є двогранний кут многогранним кутом? Ні, оскільки двогранний кут не задовольняє означення многогранного кута.

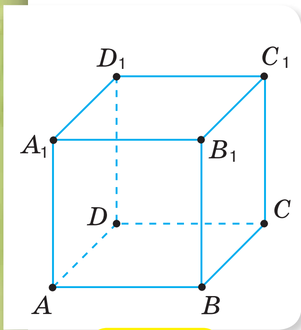
В опуклого многогранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360°.

2. ТРИГРАННИЙ КУТ

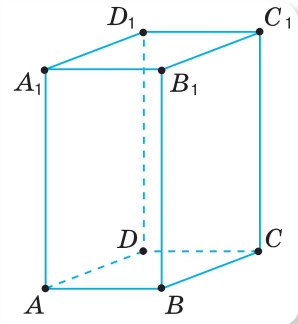
Найменша кількість граней у многогранного кута — три. Такий кут називають *тригранним кутом*. На малюнку 6 ви бачите тригранний кут $SABC$. Про взаємне розміщення його плоских і двогранних кутів можна, наприклад, сказати: плоский кут ASB лежить проти двогранного кута з ребром SC, і навпаки.



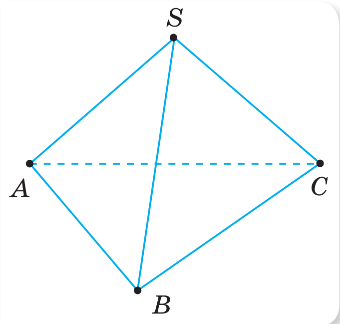
Мал. 6



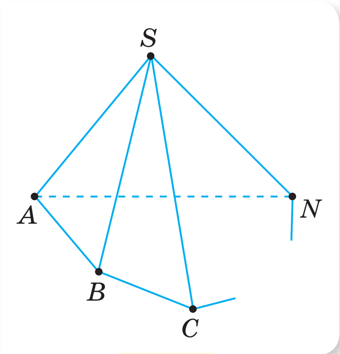
Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9



Мал. 10

Тригранні й многогранні кути є елементами відомих вам многогранників. При кожній вершині куба (мал. 7) і прямокутного паралелепіпеда (мал. 8) відповідні площини граней утворюють тригранний кут. Серед пірамід така властивість притаманна лише трикутній піраміді (мал. 9). В n-кутній піраміді, де $n > 3$ (мал. 10), лише при вершинах основи утворюються тригранні кути, а при вершині піраміди — n-гранний кут.

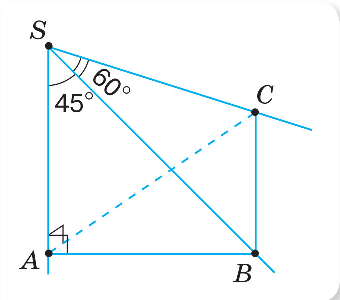
Сформулюємо основні властивості тригранних кутів.

Властивості тригранних кутів.

1. **Кожний плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів.**
2. **Кожний плоский кут тригранного кута більший за різницю двох інших його плоских кутів.**

Задача 1. У тригранного кута з вершиною S два плоскі кути дорівнюють по 45°, а третій — 60° (мал. 11). Чому дорівнює його двогранний кут, що лежить проти найбільшого плоского кута?

Розв'язання. На спільному ребрі рівних плоских кутів даного тригранного кута позначимо точку A і проведемо через неї площину, перпендикулярну до ребра SA. Позначимо B і C точки її перетину з двома іншими ребрами даного тригранного кута. Тоді $\angle ASB = \angle ASC = 45°$, $\angle BSC = 60°$. Треба знайти $\angle BAC$. Для цього знайдемо сторони ΔABC і скористаємося теоремою косинусів. Сторони AB і AC можемо знайти з трикутників SAB і SAC, а сторону BC — з трикутника SBC. $\Delta\, SAB = \Delta\, SAC$ за катетом SA і гострим кутом 45°, звідки $AB = AC$, $SB = SC$. Нехай $SA = a$, тоді $AB = AC = a$, $SB = SC = a\sqrt{2}$.



Мал. 11

ΔSBC — рівнобедрений з кутом при вершині 60°, тому він є рівностороннім і $BC = a\sqrt{2}$. За наслідком з теореми косинусів одержимо:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot a \cdot a} = 0.$$

Отже, $\angle BAC = 90°$.

Чи можна вважати кути ABC і ACB трикутника ABC лінійними кутами двогранних кутів при ребрах SB і SC тригранного кута $SABC$ на малюнку 11? Ні, оскільки площина трикутника ABC не перпендикулярна до прямих SB і SC.

Лінійні кути двогранних кутів при ребрах тригранного кута не можуть лежати в одній площині, оскільки жодна площина не може бути одночасно перпендикулярною до трьох прямих, що перетинаються.

3. ТЕОРЕМИ ПРО ТРИГРАННІ КУТИ

Ви знаєте, що в трикутнику існують залежності між його сторонами й кутами, зокрема теорема косинусів і теорема синусів.

Чи існує залежність між мірою двогранних кутів тригранного кута та його плоских кутів? Відповідь дають наступні теореми.

ТЕОРЕМА 1

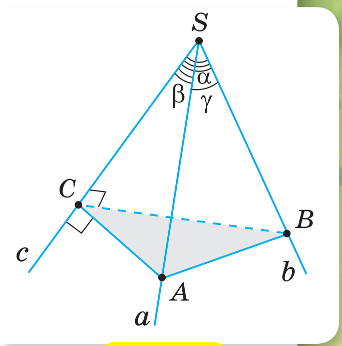
(косинусів для тригранного кута).

Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута і $\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ, то $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos C$.

Дано: α, β, γ — плоскі кути тригранного кута (мал. 12), $\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ.

Довести: $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos C$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли кути α і β — гострі. На ребрі c візьмемо довільну точку C, відмінну від точки S. Через точку C проведемо у гранях Sac і Sbc перпендикуляри CA і CB до ребра c, де точки A і B — точки перетину цих перпендикулярів із променями a і b. Тоді $\alpha = \angle CSB$, $\beta = \angle CSA$, $\gamma = \angle ASB$. Звідси $\angle ACB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі c.



Мал. 12

Позначимо довжину відрізка SC через n, тоді з прямокутних трикутників SCA і SCB маємо:

$$SA = \frac{n}{\cos\beta}, \quad SB = \frac{n}{\cos\alpha}, \quad CA = n\,\mathrm{tg}\beta, \quad CB = n\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Застосуємо теорему косинусів для трикутників SAB і CAB:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos\gamma,\ AB^2 = \frac{n^2}{\cos^2\beta} + \frac{n^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2n^2}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \cos\gamma;$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C, AB^2 = n^2\mathrm{tg}^2\alpha + n^2\mathrm{tg}^2\beta - 2\,n^2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta \cdot \cos C.$$

Прирівняємо праві частини обох рівностей:

$$\frac{n^2}{\cos^2\beta} + \frac{n^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2n^2}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \cos\gamma = n^2\mathrm{tg}^2\alpha + n^2\mathrm{tg}^2\beta - 2n^2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\cos C.$$

Виконавши елементарні тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Інші випадки, коли кути α і β: обидва тупі; обидва прямі; один гострий, а інший прямий; один тупий, а інший гострий, — розгляньте самостійно.

НАСЛІДОК 1 **(формула трьох косинусів для тригранного кута). Якщо у тригранного кута $\angle C = 90°$, то $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$ (мал. 12).** Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми.

НАСЛІДОК 2. **Якщо у тригранного кута $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то $\cos A + \cos B + \cos C = 1$.** Справді, рівність одержимо, якщо виразимо $\cos A$, $\cos B$ і $\cos C$ із співвідношення теореми косинусів для тригранних кутів та врахуємо, що, наприклад, $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

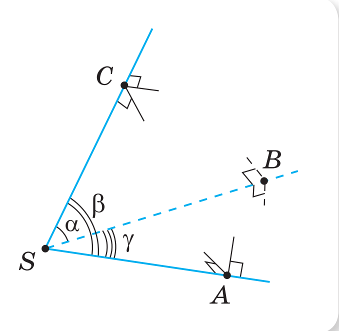
ТЕОРЕМА 2

(синусів для тригранного кута).

Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — протилежні їм двогранні кути, то $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

Дано: α, β, γ — плоскі кути тригранного кута; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — протилежні їм двогранні кути (мал. 13).

Довести: $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.



Мал. 13

Доведення. За теоремою косинусів для тригранного кута:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Звідси $\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$,

$$\cos^2 A = \frac{(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2}{\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

Далі розглянемо відношення

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2 A} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2} =$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\left(1-\cos^2\beta\right)\left(1-\cos^2\gamma\right)-\left(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Аналогічно отримуємо:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 B}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Тому $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}=\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2 B}=\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2 C}$.

Ураховуючи міри кутів α, β, γ, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, одержимо:

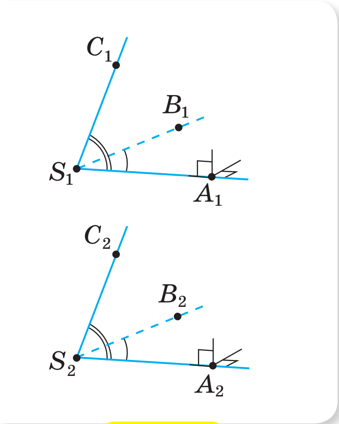
$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Два тригранні кути називаються *рівними*, якщо в них відповідно рівні плоскі кути та відповідно рівні двогранні кути.

Для встановлення рівності тригранних кутів, як і для трикутників на площині, використовують ознаки рівності тригранних кутів.

Задача 2 (ознака рівності тригранних кутів). **Якщо два плоскі кути і двогранний кут між ними одного тригранного кута відповідно дорівнюють двом плоским кутам і двогранному куту між ними другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні. Доведіть.**

Розв'язання. Розглянемо два тригранні кути з вершинами S_1 і S_2 та ребрами S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1 і S_2A_2, S_2B_2, S_2C_2 відповідно (мал. 14). За умовою задачі, $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$, $\angle A_1S_1C_1 = \angle A_2S_2C_2$, двогранний кут з ребром S_1A_1 дорівнює двогранному куту з ребром S_2A_2. Виконаємо переміщення, за якого вершина S_1 першого тригранного кута переходить у вершину S_2 другого тригранного кута, ребро S_1A_1 переходить у ребро S_2A_2, грані $A_1S_1B_1$ і $A_1S_1C_1$ переходять у грані $A_2S_2B_2$ і $A_2S_2C_2$ відповідно. Тоді, оскільки $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$ і $\angle A_1S_1C_1 = \angle A_2S_2C_2$, то ребра S_1B_1 і S_1C_1 перейдуть у ребра S_2B_2 і S_2C_2 відповідно. Звідси отримуємо, що дані тригранні кути рівні.



Мал. 14

Дізнайтеся більше

1. Доведемо твердження про те, що **в опуклого тригранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360°**.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний тригранний кут з вершиною S і плоскими кутами α, β і γ. З вершини S цього тригранного кута проведемо промінь c', доповняльний до c (мал. 15). Для тригранного кута, утвореного променями a, b і c', застосуємо властивість тригранного кута про те, що кожний його плоский кут менший від суми двох інших плоских кутів, отримаємо: $\gamma < (180° - \alpha) + (180° - \beta)$. Звідси $\alpha + \beta + \gamma < 360°$.

2. Доведемо аналогічне твердження для випадку довільного многогранного кута: **в опуклого многогранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360°**.

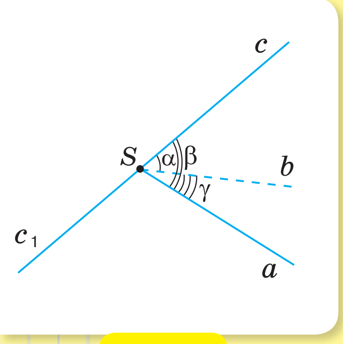
Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний опуклий многогранний кут з вершиною S і проведемо площину, яка перетинає всі його ребра в деяких точках M_1, M_2,.. M_n (мал. 16). Очевидно, що многокутник $M_1M_2...M_n$ — опуклий. Тоді маємо:

$$\begin{gathered}\angle M_1SM_2 + \angle M_2SM_3 + \ldots + \angle M_nSM_1 = \\ = (180° - \angle SM_1M_2 - \angle SM_2M_1) + \\ + (180° - \angle SM_2M_3 - \angle SM_3M_2) + \ldots + \\ + (180° - \angle SM_nM_1 - \angle SM_1M_n) = \\ = 180° \cdot n - (\angle SM_1M_n + \angle SM_1M_2) - \\ - (\angle SM_2M_1 + \angle SM_2M_3) - \ldots - (\angle SM_nM_{n-1} + \angle SM_nM_1).\end{gathered}$$

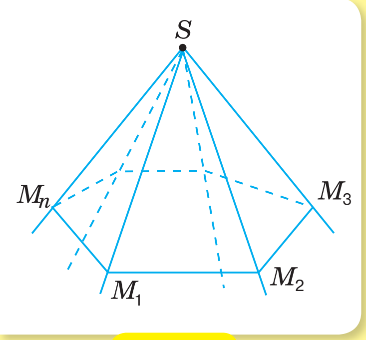
Але, за властивістю тригранного кута, сума двох його плоских кутів більша за третій плоский кут. Тому

$$\begin{aligned}&\angle SM_1M_n + \angle SM_1M_2 < \angle M_nM_1M_2,\\ &\angle SM_2M_1 + \angle SM_2M_3 < \angle M_1M_2M_3,\\ &\ldots,\\ &\angle SM_nM_{n-1} + \angle SM_nM_1 < \angle M_{n-1}M_nM_1.\end{aligned}$$

Звідси $\angle M_1SM_2 + \angle M_2SM_3 + \ldots + \angle M_nSM_1 < 180° \cdot n - (\angle M_nM_1M_2 + \angle M_1M_2M_3 + \ldots + \angle M_{n-1}M_nM_1) = 180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°$.



Мал. 15



Мал. 16

3. Мар'ям Мірзахані (1977–2017) іранська жінка-математик. У 2014 р. стала першою науковицею та першою представницею Ірану, яка удостоїлась медалі Філдса за працю над поясненням симетрії викривлених поверхонь. До тематики її досліджень належать простір Тайхмюллера, геометрія Лобачевського, ергодична теорія та симплектична геометрія.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Тригранний кут	Trihedral angle	Dhiseitide Ecke
Многогранний кут	Polyhedral angle	Korperliche Ecke

Пригадайте головне

1. Дайте означення многогранному куту.
2. Що таке плоский кут многогранного кута?
3. Якою має бути сума всіх плоских кутів многогранного кута?
4. Дайте означення тригранному куту.
5. Сформулюйте властивості тригранних кутів.
6. Сформулюйте й доведіть теорему косинусів для тригранного кута.
7. Сформулюйте й доведіть теорему синусів для тригранного кута.
8. Які тригранні кути називаються рівними?
9. Наведіть приклад ознаки рівності тригранних кутів.

Розв'яжіть задачі

1'. Скільки тригранних кутів має: 1) трикутна піраміда; 2) чотирикутна піраміда; 3) паралелепіпед?

2'. Скільки ребер та двогранних кутів має многогранний кут, у якого: 1) 5 граней; 2) 10 граней; 3) *n* граней?

3'. Скільки площин симетрії може мати тригранний кут?

4'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Назвіть усі його тригранні кути та визначте градусні міри відповідних їм плоских кутів.

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, *GeoGebra*: *https://www.geogebra.org/geometry*.

5°. Чи існує тригранний кут з такими плоскими кутами:
1) 25°, 35° і 70°; 2) 60°, 70° і 80°; 3) 110°, 155° і 160°?

6°. Чи існує чотиригранний кут з такими плоскими кутами:
1) 40°, 70°, 100° і 150°; 2) 30°, 40°, 70° і 150°; 3) 120°, 50°, 50° і 60°?

7°. Чи можуть утворити тригранний кут три плоскі кути зі спільною вершиною, які мають градусну міру:
1) 160°, 113° і 137°; 2) 60°, 110° і 177°; 3) 10°, 13° і 38°?

8°. У яких межах може лежати плоский кут тригранного кута, якщо два інші плоскі кути дорівнюють:
1) 20° і 90°; 2) 30° і 120°; 3) 170° і 190°?

9°. З точки поза площиною до площини проведено дві похилі, одна з яких утворює з площиною кут α, а інша — кут β. Укажіть найбільше та найменше з можливих значень кута між цими похилими, якщо:
1) $\alpha = 70°$, $\beta = 15°$;
2) $\alpha = 90°$, $\beta = 20°$;
3) $\alpha = 75°$, $\beta = 23°$.

10°. Як побудувати тригранний кут, який рівний даному тригранному куту?

11°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ. Знайдіть $\angle C$, якщо:
1) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$;
2) $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 45°$;
3) $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 35°$.

12°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle A$ — двогранний кут, що лежить проти кута α. Знайдіть α, якщо:
1) $\angle A = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$;
2) $\angle A = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$;
3) $\angle A = 20°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 55°$.

13°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle A$ — двогранний кут, що лежить проти кута α. Знайдіть γ, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$;
2) $\angle A = 90°$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$;
3) $\angle A = 60°$, $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$.

14°. У тригранному куті α, β, γ — його плоскі кути, $\angle B$ — двогранний кут, що лежить проти кута β. Заповніть таблицю 1.

Таблиця 1

α	30°	35°	75°	
β	45°		45°	50°
γ	45°	40°		60°
$\angle B$		55°	60°	35°

15. У тригранного кута з вершиною S плоскі кути дорівнюють α, α і β. Через точку A спільного ребра рівних плоских кутів проведено площину ABC, перпендикулярну до цього ребра, де точки B і C — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо: 1) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $SA = 5$ см; 2) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $SA = 6$ см; 3) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $SA = 4\sqrt{2}$ см.

16. У тригранного кута з вершиною S плоскі кути дорівнюють α, β і β. Через точку K спільного ребра рівних плоских кутів проведено площину KMN, перпендикулярну до цього ребра, де M і N — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть довжину відрізка SK, якщо:
1) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $MN = 3$ см;
2) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $MN = 8$ см;
3) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $MN = 4\sqrt{2}$ см.

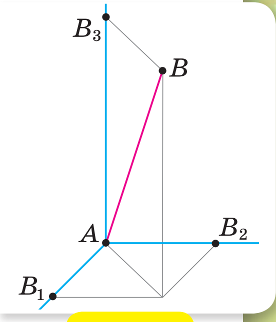
17. У тригранного кута з вершиною S через точку B спільного ребра рівних плоских кутів, які дорівнюють по α, проведено площину ABC, перпендикулярну до цього ребра, де A і C — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть невідомий плоский кут тригранного кута, якщо:
1) $\alpha = 45°$, $AC = 3\sqrt{2}$ см, $AB = 3$ см;
2) $\alpha = 30°$, $AC = 6\sqrt{2}$ см, $AB = 3$ см;
3) $\alpha = 60°$, $AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{3}$ см.

18. У тригранного кута з вершиною S через точку C спільного ребра рівних плоских кутів, які дорівнюють по α, проведено площину ABC, перпендикулярну до цього ребра, де A і C — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Двогранний кут при ребрі SC дорівнює β. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
1) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $SC = 4\sqrt{2}$ см;
2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $SC = 7\sqrt{2}$ см;
3) $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $SC = 4\sqrt{3}$ см.

19. Кожний із плоских кутів тригранного кута дорівнює $60°$. Від вершини цього тригранного кута на одному з ребер відкладено відрізок завдовжки 3 см, а з кінця цього відрізка проведено перпендикуляр до протилежної грані. Знайдіть довжину перпендикуляра.

20. У тригранному куті всі плоскі кути прямі. Усередині цього тригранного кута з його вершини проведено відрізок (мал. 17), проекції якого на ребра відповідно дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть довжину цього відрізка.

21. У тригранному куті всі плоскі кути прямі. Усередині цього тригранного кута дано точку, відстані від якої до його граней відповідно дорівнюють 1 см, 2 см і 2 см. Знайдіть відстань від даної точки до вершини даного тригранного кута.



Мал. 17

22. У тригранному куті два плоскі кути дорівнюють по 60°, а третій — прямий. Знайдіть кут між площиною прямого кута і протилежним ребром.

23. У тригранному куті ребра взаємно перпендикулярні. З вершини S цього кута всередині нього проведено відрізок SA. З кінця A цього відрізка до кожного з ребер проведено перпендикуляри довжиною a. Знайдіть відстань від точки A до граней тригранного кута, якщо:

1) $a = 5$ см; 2) $a = 6\sqrt{2}$ см;

3) $a = 2\sqrt{6}$ см.

24. У тригранному куті ребра взаємно перпендикулярні. З вершини S цього кута всередині нього проведено відрізок SA. З кінця A цього відрізка до кожного з ребер проведено перпендикуляри, довжини яких дорівнюють a, b, c. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо:

1) $a = 5$ см, $b = 10$ см, $c = 10$ см;

2) $a = 1$ см, $b = 2\sqrt{6}$ см, $c = 2\sqrt{6}$ см;

3) $a = 2$ см, $b = 6$ см, $c = 2\sqrt{6}$ см.

25. (Друга теорема косинусів для тригранного кута). **Якщо $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — двогранні кути тригранного кута, γ — плоский кут тригранного кута, що лежить проти $\angle C$, то $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos\gamma$. Доведіть.**

26. **Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B + C = 360°$, то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.**

27. **Якщо α, β — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A$, $\angle B$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B = 180°$, то $\alpha + \beta = 180°$. Доведіть.**

28. У тригранному куті $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — його двогранні кути, а α — плоский кут, що лежить проти $\angle A$. Знайдіть $\angle A$, якщо:

1) $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$, $\alpha = 60°$;

2) $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$, $\alpha = 30°$;

3) $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$, $\alpha = 30°$.

29. У тригранному куті α, β — два його плоскі кути, а $\angle A$, $\angle B$ — протилежні їм двогранні кути. Чи існує такий тригранний кут, у якого:

1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 60°$, $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 60°$;

2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 120°$, $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 50°$;

3) $\angle A = 20°$, $\angle B = 140°$, $\angle C = 160°$, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 140°$?

30. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, а $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B + C = 360°$. Чи існує такий тригранний кут, у якого:

1) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$; 2) $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$;

3) $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$?

31. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°. Знайдіть двогранний кут при ребрі основи.

32. **Доведіть, що якщо в правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 60°, то протилежні бічні ребра взаємно перпендикулярні.**

33. Знайдіть двогранні кути тригранного кута, якщо всі його плоскі кути дорівнюють по 60°.

34. Знайдіть двогранний кут тригранного кута, якщо два інші його двогранні кути дорівнюють по 135°, а їх спільний плоский кут — прямий.

35. **Якщо плоский кут і прилеглі до нього двогранні кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють плоскому куту і прилеглим до нього двогранним кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні.** Доведіть.

36. **Якщо двогранні кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють двогранним кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні.** Доведіть.

37. **Якщо плоскі кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють плоским кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні.** Доведіть.

38. У тригранного кута з вершиною D два плоскі кути ADB і ADC дорівнюють по 60°, а третій кут BDC — прямий. Доведіть, що площина BAC, яка відтинає від ребер даного тригранного кута три рівні відрізки DA, DB, DC, перпендикулярна до площини прямого кута.

39. Знайдіть геометричне місце точок, які лежать усередині тригранного кута й рівновіддалені від: 1) площин усіх трьох граней тригранного кута; 2) усіх трьох ребер тригранного кута.

40. **Якщо тригранний кут має два рівні гострі плоскі кути, то площина, яка проходить через їх спільне ребро перпендикулярно до протилежної грані, перетинає її по бісектрисі третього плоского кута.** Доведіть.

41*. Знайдіть плоскі кути тригранного кута, якщо його двогранні кути дорівнюють 60°, 120° і 90°.

42*. Усередині тригранного кута, плоскі кути якого 90°, 90° і 60°, дано точку, відстані від якої до граней дорівнюють 10 см, 13 см і 12 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.

43*. Через кожне ребро тригранного кута, у якого жодне з ребер не перпендикулярне до протилежної грані, проведено площину, перпендикулярну до протилежної грані. Доведіть, що всі ці площини мають спільну пряму.

44*. Один із плоских кутів чотиригранного кута дорівнює 168°, а інші відносяться, як 7 : 8 : 10. Визначте невідомі кути даного чотиригранного кута, якщо відомо, що вони виражені в градусах цілими числами.

45*. Доведіть, що чотиригранний кут можна перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився паралелограм.

46*. Доведіть, що сума двогранних кутів чотиригранного кута більша за 360°.

47*. Один із плоских кутів шестигранного кута дорівнює 160°, а інші відносяться, як 2 : 3 : 5 : 7 : 9. Визначте невідомі кути даного шестигранного кута, якщо відомо, що їх градусні міри є цілими числами.

Проявіть компетентність

48. Наведіть приклади з довкілля, які ілюструють многогранні кути.

49. Як за допомогою кутника з'ясувати, що меблі зібрано правильно і двері не перекосило?

50. Дах будинку має форму чотиригранного кута (мал. 18). У нього протилежні плоскі кути рівні й дорівнюють 50° і 70°, а довжина кожного ребра — 4 м. Черепицю, якою обшивають дах будинку, кріплять на обрешітку — каркас із дерев'яних дощок (мал. 19). Дошки беруть розміром 30 × 100 мм у перерізі. Відстань між дошками в обрешітці становить 30 см.

1) Якої довжини мають бути найдовші дошки кожної частини даху?
2) Скільки дощок потрібно для обрешітки даху?
3) Оцініть вартість обрешітки даху. Необхідні дані знайдіть у мережі Інтернет.

Мал. 18

Мал. 19

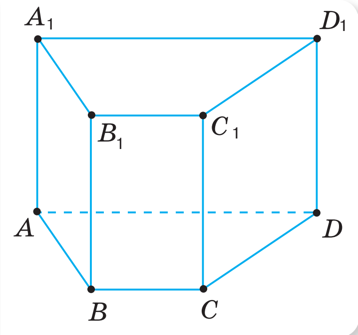
§ 2. МНОГОГРАННИКИ

1. МНОГОГРАННИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

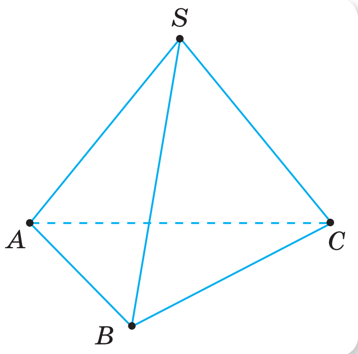
Ви вже знаєте, що таке многогранник і його поверхня, що призма (мал. 20) і піраміда (мал. 21) є різновидами многогранників.

На практиці вам траплялися такі предмети, як контейнер (мал. 22) і цеглина (мал. 23). Обидва вони мають форму прямокутного паралелепіпеда (мал. 24). Кожний із цих предметів розбиває простір на дві частини — ту, що міститься всередині предмета, і ту, що розміщується ззовні нього. Яку б точку всередині контейнера ви не взяли, вона не є точкою контейнера, а кожна точка всередині цеглини є точкою цеглини. Загалом, контейнер дає приклад *многогранної поверхні*, а цеглина — *многогранного тіла*. Для геометрії ці випадки є принципово різними.

Многогранником **називається геометричне тіло, поверхня якого складається з плоских многокутників.**



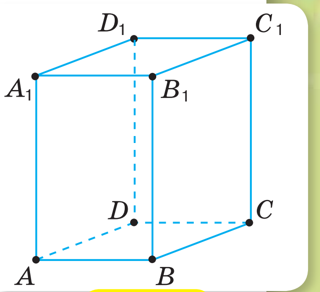
Мал. 20



Мал. 21

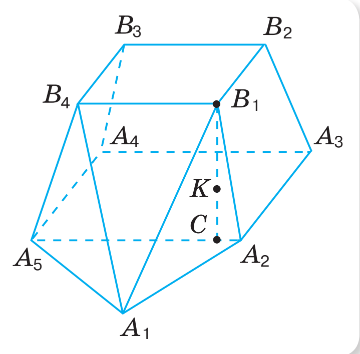
Мал. 22

Мал. 23



Мал. 24

Плоскі многокутники, що утворюють *поверхню многогранника*, називають *гранями*, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* многогранника (мал. 25). Його поверхня розбиває простір на дві області — внутрішню та зовнішню область многогранника. Точки, що лежать у внутрішній області многогранника, називають його *внутрішніми точками* (наприклад, точка K на мал. 25). Точки многогранника, що не є внутрішніми його точками, називають *точками поверхні* многогранника (наприклад, точки B_1 і C на малюнку 25).



Мал. 25

Многогранник позначають назвами його вершин, наприклад, $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4$ (мал. 25), або $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 20), або $SABC$ (мал. 21).

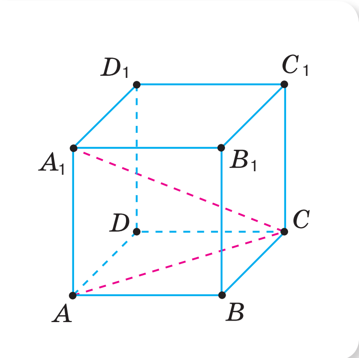
Яка найменша кількість граней у многогранника? Чотири (мал. 21).

Вершини, що є кінцями одного ребра, називають *сусідніми вершинами* многогранника, два ребра, що мають спільну вершину, — *сусідніми ребрами* многогранника, а дві грані, що мають спільне ребро, — *суміжними гранями* многогранника. Відрізок, що сполучає дві вершини многогранника, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю* многогранника (наприклад, відрізок A_1C на малюнку 26). Якщо дві вершини лежать в одній грані, але не є сусідніми, тоді відрізок, що їх сполучає, називають *діагоналлю грані* многогранника (наприклад, відрізок AC на малюнку 26).

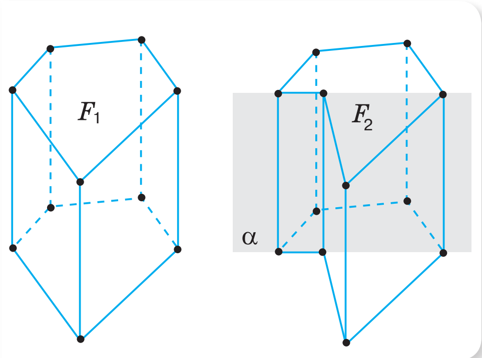
На малюнку 2.8 ви бачите многогранники F_1 і F_2. У чому їх відмінність?

Жодна із площин, які містять грані многогранника F_1, не розбиває його на частини. Він лежить з одного боку від будь-якої із цих площин. Такий многогранник називають *опуклим*. Многогранник F_2 розбивається на частини площиною α. Він лежить з різних боків від цієї площини. Тому цей многогранник не є опуклим.

Надалі ми розглядатимемо лише опуклі многогранники.

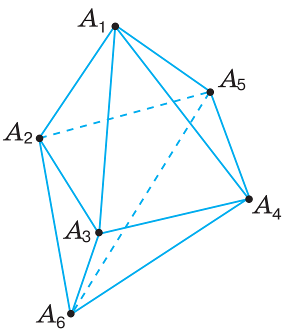


Мал. 26



Мал. 27

Дві грані многогранника, що мають спільне ребро, утворюють *двогранний кут при даному ребрі многогранника*, а три й більше граней, що сходяться в одній вершині, — *многогранний кут при даній вершині многогранника*. На малюнку 28 ви бачите, що в многогранника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ є: 12 ребер, тому він має 12 двогранних кутів; 6 вершин, тому в нього 6 многогранних кутів, з яких 4 тригранні (при вершинах A_2, A_3, A_4 і A_5) і 2 чотиригранні (при вершинах A_1 і A_6).



Мал. 28

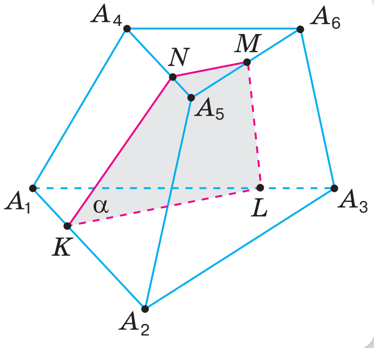
2. ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКА

Площина, що перетинає многогранник, називається *січною площиною*.

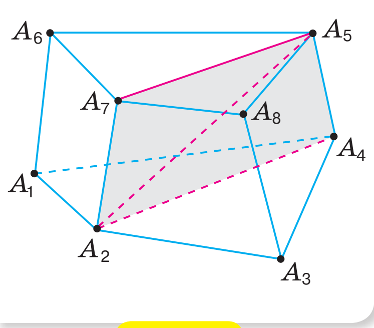
Січну площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що не належить їй, або двома прямими, що перетинаються, або двома паралельними прямими.

У результаті перетину многогранника січною площиною утворюється *переріз многогранника*. Ви знаєте, що це — плоский многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані многогранника. Сторони перерізу лежать у гранях многогранника, а вершини — на ребрах многогранника. На малюнку 29 ви бачите чотирикутник $KLMN$, що є перерізом многогранника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ січною площиною α. Якщо січна площина проходить через діагональ многогранника, тоді цей переріз називають *діагональним перерізом многогранника* (мал. 30).

Оскільки дві площини не можуть перетинатися більше ніж по одній прямій, то в грані многогранника не може бути більше одного відрізка перетину із січною площиною.



Мал. 29



Мал. 30

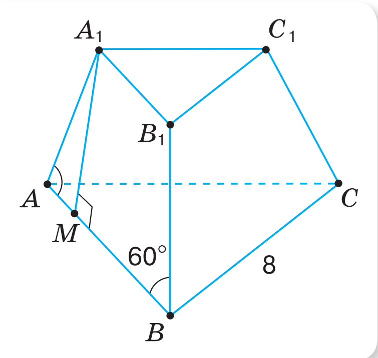
3. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ МНОГОГРАННИКА

Площею поверхні **многогранника називається сума площ усіх його граней.**

Площу поверхні многогранника позначають: $S_{\text{пов}}$.

Наведене означення підказує спосіб знаходження площі поверхні многогранника.

Задача 1. У многогранника $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 31) грані ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні правильні трикутники з коефіцієнтом подібності $k = 2$, а інші грані — рівні рівнобедрені трапеції з гострим кутом 60°. Знайдіть площу поверхні многогранника, якщо $AB = 8$ см.



Мал. 31

Розв'язання. За умовою, грань ABC даного многогранника — правильний трикутник зі стороною 8 см. Тому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Оскільки трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні з коефіцієнтом $k = 2$, то:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2 = 2^2 = 4.$$

Звідси:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{S_{\Delta ABC}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Оскільки інші грані даного многогранника — рівні трапеції, то достатньо знайти площу, наприклад, грані ABB_1A_1 за її основами AB і A_1B_1 та висотою A_1M:

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1M = \frac{8+4}{2} \cdot \frac{8-4}{2} \cdot \text{tg}60° = 12\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Отже, площа поверхні даного многогранника дорівнює:

$$S_{\text{пов}} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + 3S_{ABB_1A_1} = 16\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3 \cdot 12\sqrt{3} = 56\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Щоб знайти площу поверхні многогранника, знайдіть площі всіх його граней і отримані значення додайте.

4. ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА

Позначимо в многограннику кількість його вершин $В$, кількість граней $Г$, а кількість ребер — $Р$. Тоді має місце теорема.

ТЕОРЕМА

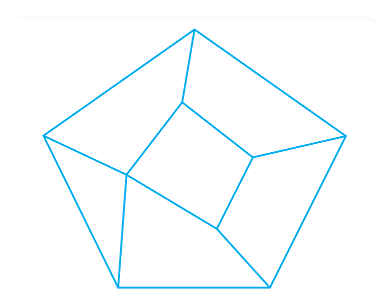
(Теорема Ейлера).

У будь-якому опуклому многограннику $В + Г – Р = 2$.

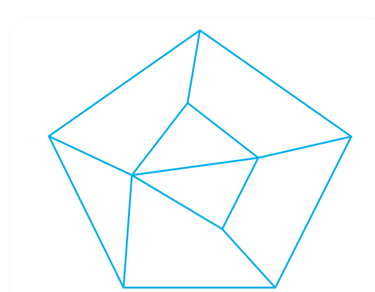
Дано: довільний опуклий многогранник, у якого $В$ — кількість його вершин, $Г$ — кількість граней, $Р$ — кількість ребер.
Довести: $В + Г – Р = 2$.
Доведення. Видалимо умовно одну з граней многогранника. У результаті дістанемо деяку многогранну поверхню F, яка має таку само кількість ребер і вершин, що й даний многогранник, але число її граней дорівнює $Г – 1$.
Розгорнемо умовно цю многогранну поверхню F на площині (мал. 32). Вона складається з $Г – 1$ многокутників. Позначимо $Г – 1 = Г_1$. Кількість вершин усіх цих многокутників дорівнює $В$, а кількість сторін — $Р$. Якщо провести діагональ у будь-якому із цих многокутників, то кількість вершин не зміниться, а кількість многокутників і кількість сторін збільшиться на 1. Тому загалом різниця кількості многокутників і кількості сторін не зміниться (мал. 33).
Розгортка поверхні F утворює так звану «трикутну сітку», в якої різниця кількості сторін трикутників і суми кількості трикутників та їх вершин дорівнює $В + Г_1 – Р$.
Вилучатимемо із сітки по одному «крайньому» трикутнику. При цьому число $В + Г_1 – Р$ не зміниться, оскільки відкидаються один трикутник, одна вершина та два ребра (або один трикутник й одне ребро).
У результаті дістанемо один трикутник, для якого

$$В + Г_1 – Р = 3 + 1 – 3 = 1.$$

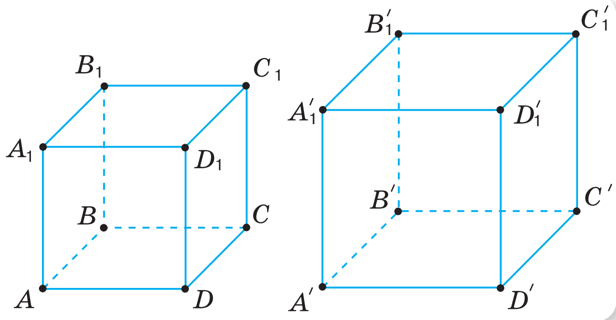
Тоді $В + Г – Р = 2$.



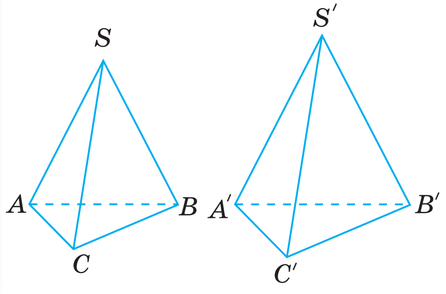
Мал. 32



Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35

5. ПОДІБНІ МНОГОГРАННИКИ

Два многогранники називаються *подібними*, якщо вони суміщаються перетворенням подібності.

На малюнку 34 ви бачите два подібні куби — $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. У них: тригранні кути при відповідних вершинах рівні; двогранні кути при відповідних ребрах однаково розміщені та рівні; відповідні бічні грані й основи — подібні квадрати ($ABCD \backsim A'B'C'D'$, $A_1B_1C_1D_1 \backsim A_1'B_1'C_1'D_1'$, $ABB_1A_1 \backsim A'B'B_1'A_1'$ тощо). На малюнку 35 — дві подібні правильні трикутні піраміди — $SABC$ та $S'A'B'C'$. У них: тригранні кути при відповідних вершинах рівні; двогранні кути при відповідних ребрах однаково розміщені та рівні; відповідні бічні грані й основи — подібні трикутники ($\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, $\Delta SAB \backsim \Delta SA'B'$, $\Delta SBC \backsim \Delta SB'C'$, $\Delta SAC \backsim \Delta SA'C'$).

Число, яке дорівнює відношенню відповідних сторін подібних многогранників, називають *коефіцієнтом їх подібності*.

У подібних многогранників:
1) **відповідні многогранні кути рівні;**
2) **відповідні двогранні кути рівні й однаково розміщені;**
3) **відповідні ребра пропорційні;**
4) **відповідні грані є подібними многокутниками.**

ТЕОРЕМА **(про відношення площ поверхонь подібних многогранників).**

Площі поверхонь подібних многогранників відносяться, як квадрати довжин відповідних ребер.

Дано: Многогранники $F \backsim F'$ з коефіцієнтом подібності k, d_i і d_i' — довжини двох будь-яких відповідних ребер, S — площа поверхні многогранника F, S' — площа поверхні многогранника F'.

Довести: $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{d^2}{d'^2}$.

Доведення. Нехай $S_1, S_2, S_3, \dots S_n$ — площі граней многогранника F, S'_1, S'_2, $S'_3, \dots S'_n$ — площі відповідних граней многогранника F'. Тоді $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$, $S' = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n$. Оскільки відповідні грані подібних многогранників — подібні многокутники, то їх площі відносяться, як квадрати довжин відповідних ребер. Тому $\frac{S_1}{S'_1} = \frac{d_1^2}{d_1'^2}$,

$\frac{S_2}{S'_2} = \frac{d_2^2}{d_2'^2}$, $\frac{S_3}{S'_3} = \frac{d_3^2}{d_3'^2}$, …, $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{d_n^2}{d_n'^2}$.

За умовою задачі $\frac{d_1}{d'_1} = \frac{d_2}{d'_2} = \frac{d_3}{d'_3} = \dots = \frac{d_n}{d'_n} = k$, тому

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = \frac{S_3}{S'_3} = \dots = \frac{S_n}{S'_n} = k^2.$$

Звідси $S_1 = k^2 S'_1$, $S_2 = k^2 S'_2$, $S_3 = k^2 S'_3$, …, $S_n = k^2 S'_n$.

Тоді $\frac{S}{S'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} = \frac{k^2 S'_1 + k^2 S'_2 + k^2 S'_3 + \dots + k^2 S'_n}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} =$

$= \frac{k^2 \left(S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n\right)}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} = k^2$.

Задача 2. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{2}{3}$. Знайдіть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо площа повної поверхні куба $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ дорівнює 24 см².

Розв'язання. Нехай ребро куба $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ дорівнює a'. Площа повної поверхні цього куба дорівнює шести площам квадратів з ребром a':

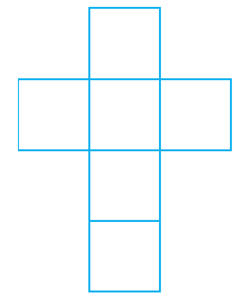
$S'_{пп} = 6 \cdot S'_{кв} = 6a'^2$. Звідси $6a'^2 = 24$ (см²), $a'^2 = 4$ см², $a' = 2$ см. Тоді $a = \frac{2}{3}a' = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (см).

Дізнайтеся більше

1. Поняття многогранника відоме здавна. У Стародавній Греції його називали *poluedron* — той, що має багато опор. Нинішній термін уперше трапляється в перекладі «Начал» Евкліда, зробленому П. І. Суворовим і В. М. Нікітіним. У книзі «Евклідових стихій осьм книг», виданої в Санкт-Петербурзі в 1784 та 1789 рр., автори намагалися перекласти російською мовою всі терміни, які використовував Евклід. Вони також пропонували окремі слов'янські назви замість давньогрецьких чи латинських, щоб досягти більшої наочності термінології й зрозумілості змісту.

2. Символ S для позначення площі фігури походить від латинської назви *superficils*, що означає «поверхня».

3. Вам уже траплялося поняття «розгортка многогранника». Розгортку многогранника одержимо, якщо його поверхню «розріжемо» вздовж ребер і «розгорнемо» на площину. На малюнку 36 зображено розгортку куба.



Мал. 36

У вас могло виникнути запитання: Чи будь-яка сукупність многокутників є розгорткою многогранника? Поміркуємо.

Нехай дано кілька многокутників, які задовольняють такі умови: 1) кожна сторона кожного многокутника відповідає тільки одній стороні іншого многокутника (назвемо ці сторони тотожними), отже, тотожні сторони мають бути рівними; 2) від кожного многокутника до будь-якого наступного можна перейти, проходячи через многокутники, які мають тотожні сторони. Лише та сукупність многокутників є розгорткою, яка задовольняє умови 1) і 2).

4. Співвідношення $B + \Gamma - P = 2$ уперше виявив Рене Декарт у 1620 р. Леонард Ейлер, займаючись дослідженням опуклих многогранників, перевідкрив цю формулу та опублікував її в 1752 р. У роботі Ейлера цю формулу записано так: $S + H = A + 2$, де S — число вершин, H — число граней, A — число ребер опуклого тривимірного многогранника. Число $B + \Gamma - P$ називають *ейлеровою характеристикою* многогранника. У 1899 р. Жуль Анрі Пуанкаре узагальнив співвідношення для випадку n-вимірного многогранника: $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i A_i = 1+(-1)^{n-1}$, де A_i — число i-вимірних граней n-вимірного многогранника.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Многогранник	Polyhedron	Polyeder

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке многогранник.
2. Що таке грані многогранника; його вершини; його ребра?
3. Що таке сусідні вершини многогранника; сусідні ребра; суміжні грані?
4. Що таке діагональ многогранника; діагональ грані многогранника?
5. Який многогранник називається опуклим?
6. Поясніть, що таке січна площина многогранника. Як її можна задати?
7. Поясніть, що таке переріз многогранника. Що таке діагональний переріз многогранника?
8. Поясніть, що таке площа поверхні многогранника.

9. Як знайти площу поверхні многогранника?
10. Сформулюйте й доведіть теорему Ейлера.
11. Які многогранники називаються подібними?
12. Сформулюйте й доведіть теорему про відношення площ поверхонь подібних многогранників.

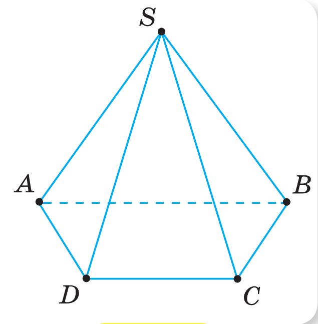
Розв'яжіть задачі

51'. За малюнками 37–39 з'ясуйте:
1) як називається даний многогранник;
2) скільки в нього основ;
3) скільки в нього бічних граней;
4) які многокутники лежать у його основах;
5) які многокутники є його бічними гранями.

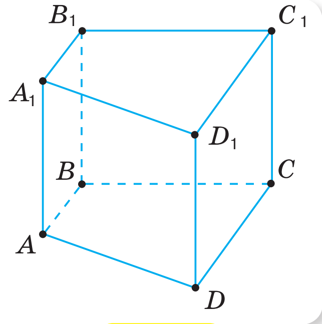
52'. Назвіть вершини та ребра многогранника (мал. 37–39).
Які його грані:
1) сходяться у вершині: а) A; б) B; в) C;
2) мають спільне ребро: а) AB; б) AC; в) BC?

53'. За малюнками 37–39 з'ясуйте:
1) скільки двогранних кутів має даний многогранник;
2) скільки многогранних кутів має даний многогранник, назвіть їх.

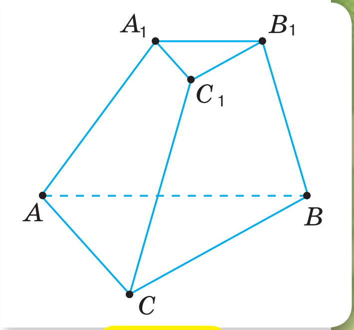
54'. За малюнками 40–42 з'ясуйте:
1) яка площина перетинає даний многогранник;
2) по яких відрізках січна площина перетинає його грані;
3) який многокутник утворився в перерізі.



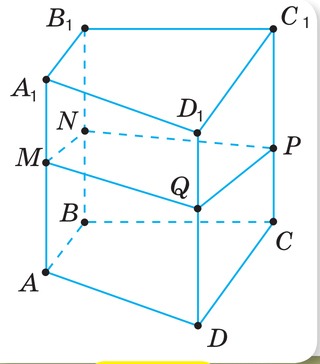
Мал. 37



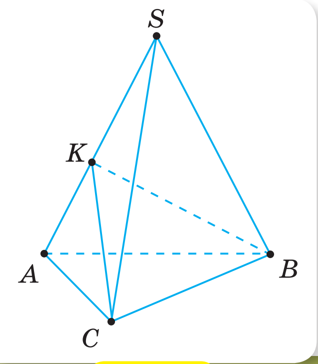
Мал. 38



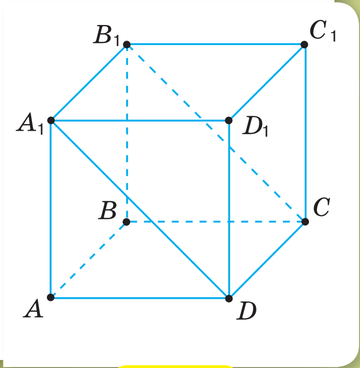
Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

55'. В одного прямокутного паралелепіпеда сторони основи дорівнюють a і b, а в іншого — c і d. Чи будуть подібними ці паралелепіпеди, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см, $d = 10$ см;
2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 12$ см, $d = 12$ см;
3) $a = 8$ см, $b = 16$ см, $c = 6$ см, $d = 12$ см?

56'. Площі поверхонь двох подібних кубів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть їх коефіцієнт подібності, якщо:
1) $S_1 = 4$ см²; $S_2 = 9$ см²;
2) $S_1 = 25$ см²; $S_2 = 9$ см²;
3) $S_1 = 16$ см²; $S_2 = 36$ см².

57°. Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 43). Назвіть площини, кожна з яких проходить через:
1) три вершини многогранника;
2) ребро й вершину многогранника;
3) два ребра многогранника, що мають спільну точку.

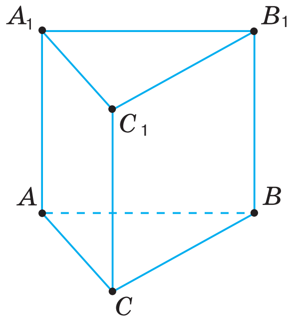
58°. Дано многогранник $SABCD$ (мал. 44). Назвіть площини, кожна з яких проходить через:
1) три вершини цього многогранника;
2) ребро й вершину цього многогранника;
3) два ребра цього многогранника, що перетинаються.

59°. Січна площина многогранника — трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і кутом між ними — 45°. Знайдіть площу січної площини многогранника.

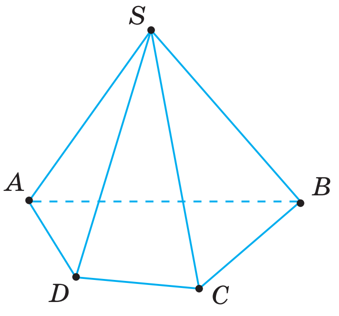
60°. Січна площина многогранника — прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Знайдіть діагональ січної площини многогранника.

61°. Січна площина многогранника — прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см та гострим кутом 60°. Знайдіть радіус вписаного в цей трикутник кола.

62°. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайдіть площу його повної поверхні, якщо:
1) $S_1 = 5$ см², $S_2 = 13$ см², $S_3 = 21$ см²;
2) $S_1 = 14$ см², $S_2 = 23$ см², $S_3 = 31$ см²;
3) $S_1 = 15$ см², $S_2 = 16$см², $S_3 = 24$ см².



Мал. 43



Мал. 44

63°. Скільки діагональних перерізів можна провести у:
1) кубі;
2) паралелепіпеді?

64°. Накресліть:
1) прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину через:
а) вершини A, C, D_1;
б) вершини B_1, D_1, C;
в) ребра BC і A_1D_1;
г) ребра AA_1 і CC_1.
Які многокутники дістали в перерізі?

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: *https://www.geogebra.org/geometry*.

65°. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{3}{4}$. Знайдіть діагональ основи другого куба, якщо ребро першого з них дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

66°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні прямокутні паралелепіпеди з коефіцієнтом подібності $k = \frac{1}{2}$. Знайдіть площу повної поверхні першого з них, якщо ребра другого дорівнюють:
1) 4 см, 5 см, 8 см;
2) 2 см, 6 см, 10 см;
3) 3 см, 8 см, 12 см.

67°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні прямокутні паралелепіпеди. Знайдіть площі повної поверхні обох паралелепіпедів, якщо найбільше ребро другого паралелепіпеда дорівнює 18 см, а ребра першого дорівнюють:
1) 2 см, 3 см, 6 см;
2) 4 см, 7 см, 9 см;
3) 5 см, 13 см, 24 см.

68. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a см проведено січну площину через ребра AB та C_1D_1. Знайдіть площу даного перерізу, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 4$ см;
3) $a = 8$ см.

69. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a см проведено січну площину через вершини A і B та середини ребер DD_1 та CC_1. Знайдіть площу даного перерізу, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 4$ см;
3) $a = 8$ см.

70. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з площею основи S проведено січну площину через середини ребер AB, BC та A_1B_1 та B_1C_1. Знайдіть площу даного перерізу, якщо:
1) $S = 16$ см^2;
2) $S = 36$ см^2;
3) $S = 8$ см^2.

71. У многогранника бічні грані — рівнобедрені трикутники з бічною стороною 5 см та гострим кутом при вершині — 30°, основа — квадрат. Знайдіть площу бічної поверхні многогранника.

72. У многогранника бічні грані — два прямокутники зі сторонами 10 см і $4\sqrt{2}$ см та два прямокутники зі сторонами 10 см і 6 см, основи — також прямокутники. Знайдіть площу діагонального перерізу даного многогранника.

73. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед; 2) куб. Через діагональ бічної грані та вершину верхньої основи, яка не збігається з жодним кінцем цієї діагоналі, проведіть січну площину так, щоб у перерізі одержати: а) трикутник; б) чотирикутник.

74. Паралелепіпеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k=\dfrac{5}{3}$. Площі трьох граней першого з них відносяться, як 3 : 4 : 5, а площа його повної поверхні дорівнює 48 см^2. Знайдіть площі граней другого паралелепіпеда.

75. Многогранники $ABCA_1B_1C_1$ та $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$ — подібні. У них бічні грані — прямокутники, у яких сторони відносяться, як 1 : 3, а основи — правильні трикутники. Площа повної поверхні першого з них дорівнює 64 см^2, а другого — 48 см^2. Знайдіть ребра обох многогранників.

76. Многогранники $ABCA_1B_1C_1$ та $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k=\dfrac{2}{3}$. У многогранника $ABCA_1B_1C_1$ бічні грані — рівні паралелограми зі сторонами 6 см і $4\sqrt{2}$ см та гострим кутом 45°, а основа — правильний трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть площу поверхні многогранника $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$.

77*. **Визначте площу поверхні куба за даною площею S його діагонального перерізу.**

78*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

79*. Знайдіть усі плоскі кути граней чотиригранного кута при одній з вершин многогранника, якщо два з них відносяться, як 1 : 7, а інші два дорівнюють 80° і 170°. Усі бічні грані — рівнобедрені трикутники. Кути виражені цілими числами.

80*. α, β, γ — плоскі кути тригранного кута при одній з вершин многогранника. Доведіть, що $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.

81*. Сума двох плоских кутів тригранного кута при одній з вершин многогранника дорівнює 180°. Доведіть, що спільне ребро цих плоских кутів перпендикулярне бісектрисі третього плоского кута.

82*. Доведіть, що в будь-якому многограннику число граней з непарним числом сторін є парним.

83*. Чи може многогранник мати 11 плоских кутів?

84*. Гранями опуклого многогранника є трикутники. Скільки він має вершин (*В*) і граней (*Г*), якщо кількість його ребер (*Р*) дорівнює:
1) *Р* = 12;
2) *Р* = 15?
Які многогранники одержимо?

85*. Многогранник має п'ять граней. Скільки може бути в нього вершин і ребер?

86*. У кожній вершині опуклого многогранника сходяться три ребра. Скільки він має вершин (*В*) і граней (*Г*), якщо кількість його ребер (*Р*) дорівнює:
1) *Р* = 12;
2) *Р* = 15?
Назвіть вид отриманого многогранника.

Проявіть компетентність

87. Наведіть приклади многогранників на предметах довкілля.

88. Побудуйте розгортку: 1) куба; 2) трикутної призми.

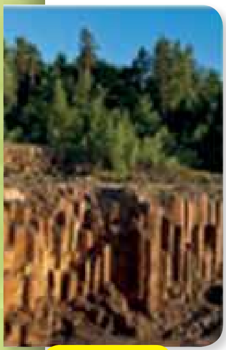
89. Виготовте паперові макети: 1) прямої чотирикутної призми; 2) прямої шестикутної призми.

90. Які потрібно зробити виміри, щоб розрахувати кількість покрівельного матеріалу для садової альтанки із чотирисхилим дахом (мал. 45), якщо кути нахилу всіх схилів — однакові?

Мал. 45

§ 3. ПРИЗМА

Подивіться на малюнок 46. Ви бачите надзвичайну пам'ятку природи — базальтові стовпи, що мають форму різноманітних призм. Вони розміщуються на Рівненщині, де проходить західний схил Українського кристалічного щита. Призми нерідко трапляються в природі, їх часто використовують в архітектурі, на виробництві, у побуті (мал. 47).

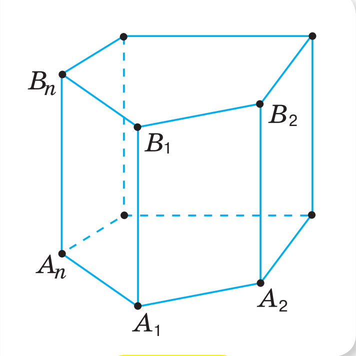

Мал. 46


Мал. 47

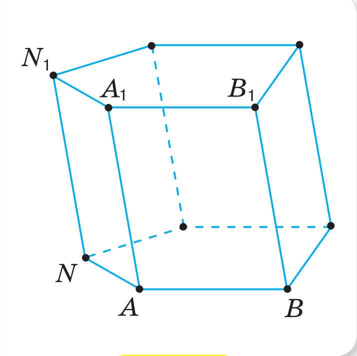
У цьому параграфі ви дізнаєтеся про різновиди призм та їхні геометричні властивості.

1. ПРИЗМА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Ви вже знаєте, що призма — один з видів многогранників. Своєю чергою, призми теж поділяють на види. У попередніх класах ви ознайомилися з прямою призмою та її елементами — основами, бічними гранями, ребрами, висотою (мал. 48). Знаєте, що таке бічна й повна поверхня прямої призми та як їх обчислювати. Крім прямих призм, до цього виду многогранників належать і похилі призми (мал. 49). Обидва види призм мають як спільні, загальні для всіх призм властивості, так й особливі, притаманні лише призмам певного виду. Вивчення призм розпочнемо з їхніх загальних властивостей.



Мал. 48



Мал. 49

Призмою **називається многогранник, у якого дві грані — рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а решта n граней — паралелограми.**

Призму позначають назвами її вершин, наприклад, $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ (мал. 48) або $AB...NA_1B_1...N_1$ (мал. 49).

Рівні n-кутники $A_1A_2...A_n$ і $B_1B_2...B_n$ називають *основами призми*, а паралелограми $A_1A_2B_2B_1$, ... $A_nA_1B_1B_n$ — *бічними гранями призми*. Відрізки A_1A_2, ... A_nA_1 називають *ребрами основ призми*, а відрізки A_1B_1, ... A_nB_n — *бічними ребрами призми*.

Залежно від того, який многокутник лежить в основі, призму називають *трикутною, чотирикутною* чи *n-кутною*. На малюнках 48 і 49 ви бачите п'ятикутні призми.

Чи є елементами призми двогранні та многогранні кути? Так, оскільки призма є многогранником.

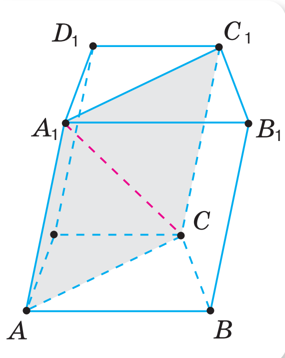
У n-кутної призми $3n$ ребер і $2n$ вершин, тому в неї $3n$ двогранних кутів і $2n$ тригранних кутів, оскільки кожний многогранний кут призми є тригранним.

Відрізок, що з'єднує дві вершини призми, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю призми* (наприклад, відрізок A_1C на малюнку 50). Якщо дві вершини лежать в одній грані, але не є сусідніми, тоді відрізок, що їх з'єднує, називають *діагоналлю грані призми* (наприклад, відрізок AC на малюнку 50). Якщо січна площина проходить через діагональ призми, то утворений переріз називають *діагональним перерізом призми* (наприклад, переріз AA_1C_1C на малюнку 50).

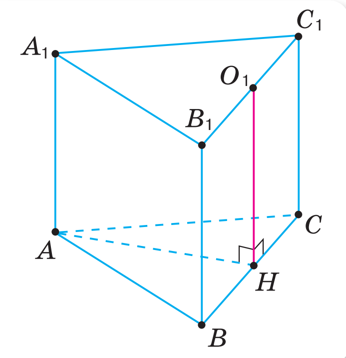
Чи можна стверджувати, що діагональний переріз призми є паралелограмом? Так. Це твердження є справедливим для всіх n-кутних призм, якщо $n > 3$.

Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї з основ призми до площини другої основи, називають *висотою призми* (наприклад, відрізок O_1H на малюнках 51 і 52).

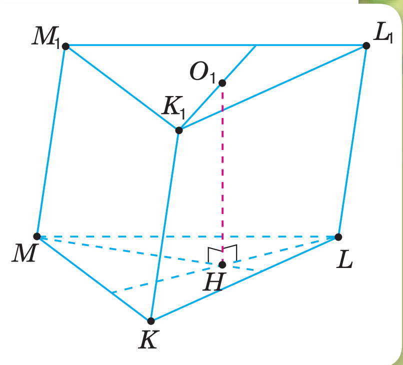
З означень призми та її елементів випливають її властивості.



Мал. 50

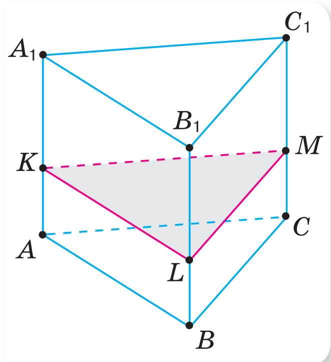


Мал. 51



Мал. 52

Властивості призми.
1. Основи призми — рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами, що лежать у паралельних площинах.
2. Бічні ребра призми паралельні й рівні.
3. Бічні грані призми — паралелограми.
4. Будь-який діагональний переріз призми є паралелограмом (мал. 50).
5. Перерізом призми площиною, паралельною основам, є многокутник, що дорівнює многокутникам основ (мал. 53).



Мал. 53

2. БІЧНА ТА ПОВНА ПОВЕРХНІ ПРЯМОЇ ПРИЗМИ

Бічну поверхню призми утворюють бічні її грані, а *повну поверхню* — усі її грані.

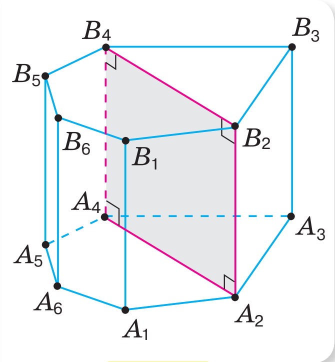
Площею бічної поверхні **призми називається сума площ її бічних граней.**
Площею повної поверхні **призми називається сума площ усіх її граней.**

Площу бічної і повної поверхонь призми відповідно позначають: $S_{бп}$ і $S_{пп}$.

Наведені означення підказують спосіб знаходження площ бічної та повної поверхонь призми.

Ви знаєте, що призма може бути *прямою* та *похилою*. На малюнках 49, 50 і 52 ви бачите приклади похилої призми. Її бічне ребро не перпендикулярне до основ і не дорівнює висоті цієї призми.

У прямої призми (мал. 48, 51, 53) кожне бічне ребро перпендикулярне до її основ. Звідси й назва — «пряма призма». Пряма призма має всі властивості призми, а також особливу властивість: її бічні грані — прямокутники, у яких дві протилежні сторони є бічними ребрами призми, а дві інші — ребрами основ призми. Крім того, будь-який її діагональний переріз є прямокутником (мал. 54).



Мал. 54

Для обчислення площ бічної і повної поверхонь прямої призми зручно користуватися відповідними формулами. Виведіть їх самостійно.

Формула площі бічної поверхні прямої призми:

$$S_{бп} = P_{осн} \cdot H,$$

де $P_{осн}$ — периметр основи, H — висота призми.

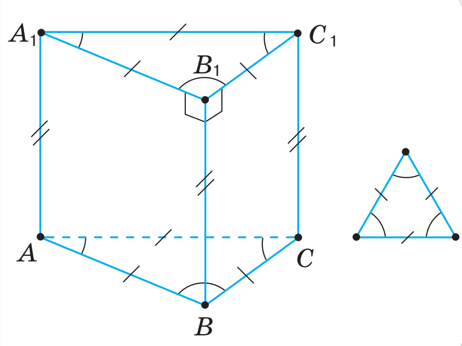
Формула площі повної поверхні прямої призми:

$$S_{пп} = P_{осн} \cdot H + 2S_{осн},$$

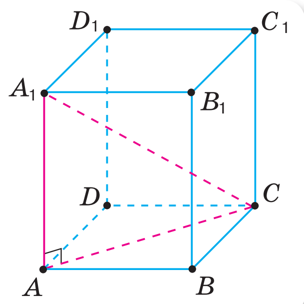
де $P_{осн}$ — периметр основи, $S_{осн}$ — площа основи, H — висота призми.

Пряму призму, основами якої є правильні многокутники, називають *правильною призмою*. На малюнку 55 ви бачите правильну трикутну призму.

Правильна призма має всі властивості прямої призми. Її особлива властивість полягає в тому, що всі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники. Доведіть цю властивість самостійно.



Мал. 55



Мал. 56

Задача 1. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2, а висота — 14 см. Знайдіть діагональ призми.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 56) — дана призма.

Оскільки її основа — квадрат, то $AB = \sqrt{144} = 12$ (см).

Діагональ квадрата $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (см).

З прямокутного трикутника ABC дістанемо:

$$A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{288 + 196} = \sqrt{484} = 22 \text{ (см)}.$$

У правильної n-кутної призми:
1) основою є:
- правильний трикутник, якщо $n = 3$;
- квадрат, якщо $n = 4$;
- правильний п'ятикутник, якщо $n = 5$ тощо;

2) бічне ребро є висотою.

3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИЙ ПЕРЕРІЗ ПРИЗМИ. БІЧНА ПОВЕРХНЯ ПОХИЛОЇ ПРИЗМИ.

Перпендикулярним перерізом призми **називається переріз призми площиною, перпендикулярною до її бічного ребра.**

Оскільки бічні ребра призми паралельні, то перпендикулярний переріз призми є перпендикулярним до всіх її бічних ребер. У прямої призми перпендикулярний переріз є паралельним площинам основ призми.

ТЕОРЕМА

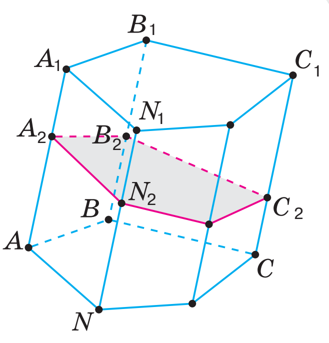
(про бічну поверхню похилої призми).

Бічна поверхня похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на довжину бічного ребра.

Дано: $ABC...NA_1B_1C_1...\ N_1$ (мал. 57) — n-кутна призма, $A_2B_2C_2...N_2$ — її перпендикулярний переріз, його периметр P.

Довести: $S_{бп} = P \cdot AA_1$.

Доведення. Бічні грані даної призми є паралелограмами. Розглянемо один з них, наприклад, паралелограм ABB_1A_1. У ньому одна зі сторін перпендикулярного перерізу A_2B_2 буде висотою, проведеною до сторони AA_1. Тоді площа цього паралелограма $S_1 = A_2B_2 \cdot AA_1$. Аналогічно можна знайти площі всіх бічних граней призми: $S_2 = B_2C_2 \cdot BB_1, ..\ S_n = N_2A_2 \cdot AA_1$. За означенням, площа бічної поверхні дорівнює сумі площ всіх її бічних граней, тобто $S_{бп} = S_1 + S_2 + ... + S_n = A_2B_2 \cdot AA_1 + B_2C_2 \cdot BB_1 + ... + N_2A_2 \cdot AA_1$. Але $AA_1 = BB_1 = CC_1 = ... = NN_1$, $P = A_2B_2 + B_2C_2 + ... + N_2A_2$, тому $S_{бп} = S_1 + S_2 + ... + S_n = A_2B_2 \cdot AA_1 + B_2C_2 \cdot BB_1 + ... + N_2A_2 \cdot AA_1 = (A_2B_2 + B_2C_2 + ... + N_2A_2) \cdot AA_1 = P \cdot AA_1$.



Мал. 57

Очевидно, що теорема про бічну поверхню похилої призми є правильною і для прямої призми. Зокрема перпендикулярним перерізом прямої призми є будь-який переріз цієї призми площиною, паралельною площинам її основ.

Якщо деякий многокутник є перпендикулярним перерізом призми, то його внутрішні кути є лінійними кутами двогранних кутів при відповідних бічних ребрах.

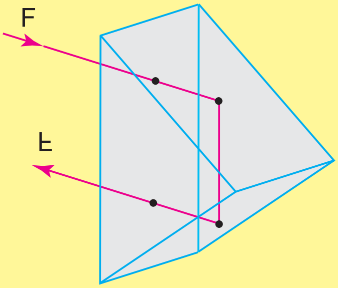
У прямої призми лінійними кутами двогранних кутів при бічних ребрах є безпосередньо кути основи.

Дізнайтеся більше

1. Термін «призма» походить від грецького слова *prisma*, що означає «розпилений». Призми широко використовуються в оптиці. Оптичний прилад, який називають оптичною призмою, виготовляють із прозорого матеріалу (наприклад, оптичного скла) у формі призми, що має плоскі поліровані грані, через які входить і виходить світло. Світло в такій призмі заломлюється так, як показано на малюнку 58.


Мал. 58

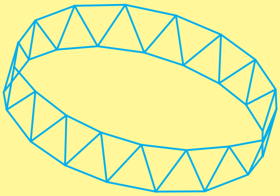
Один з видів оптичної призми — *призма Порро* (мал. 59). Названа іменем її винахідника, італійського інженера та оптика — Ігнаціо Порро (1795–1875). Використовується в оптичних приладах для зміни орієнтації зображення (перевертання). В основі такої призми лежить рівнобедрений прямокутний трикутник. Зображення при проходженні через призму віддзеркалюється відносно площини симетрії, перпендикулярної основі. Напрям променів змінюється на 180°.

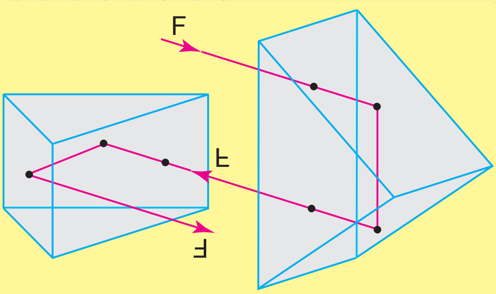


Мал. 59

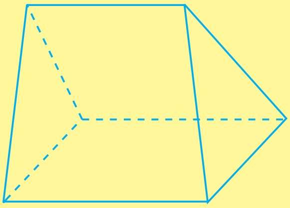
Призми Порро часто використовують парами (так звані подвійні призми Порро). Друга призма цієї пари, що повернута на 90° відносно першої, встановлюється так, щоб промінь потрапляв у неї після виходу з першої призми (мал. 60). Подвійна призма Порро часто використовується в біноклях для перевертання зображення, збільшення відстані між об'єктивом та окуляром.

2. *Призматоїдом* називається многогранник, у якого дві грані (основи призматоїда) лежать у паралельних площинах, а інші грані — трикутники або трапеції, причому в трикутників одна сторона, а в трапецій обидві основи є сторонами основи призматоїда. На малюнках 61 і 62 зображено два види призматоїдів: антипризма та клин.


Мал. 61

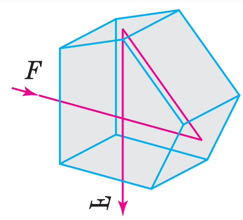


Мал. 60

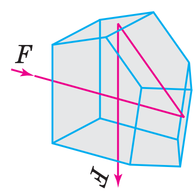

Мал. 62

3. *Пентапризма* (мал. 63) — загальна назва оптичних систем, які слугують для повороту осі світлового потоку на 90° і подовження шляху його слідування за рахунок двох і більше відображень від дзеркальних поверхонь за мінімальних зовнішніх розмірів оптичної системи.

У видошукачах дзеркальних фотоапаратів застосовується так звана пентапризма з «дахом» (мал. 64). «Дах» — це дві грані призми, розміщені під кутом 90°, при парному відображенні від яких зображення дзеркально не розвертається. Пентапризма з дахом перетворює зворотне зображення на матовому склі в пряме, не дзеркальне, яке можна далі розглядати через окуляр.



Мал. 63



Мал. 64

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Пряма призма	Right prism	Gerades Prisma
Похила призма	Inclined prism	Schiefes Prisma
Бічна поверхня призми	The side surface of the prism	Die Seitenfläche des Prismas

Пригадайте головне

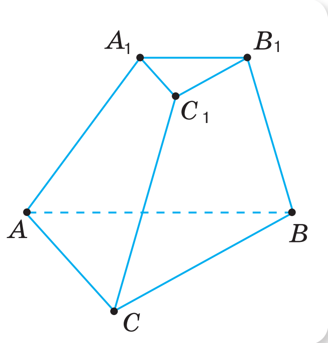
1. Що таке призма; основи та бічні грані призми; ребра основ та бічні ребра призми?
2. Яку призму називають трикутною, чотирикутною, n-кутною; прямою; похилою?
3. Що таке діагональ призми; діагональ грані призми; діагональний переріз призми; висота призми?
4. Сформулюйте властивості призми.
5. Поясніть, що таке бічна поверхня призми, її повна поверхня.
6. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми; площу її повної поверхні?
7. Поясніть, що таке правильна призма.
8. Поясніть, що таке перпендикулярний переріз призми.
9. Як знайти площу бічної поверхні похилої призми; площу її повної поверхні?

Розв'яжіть задачі

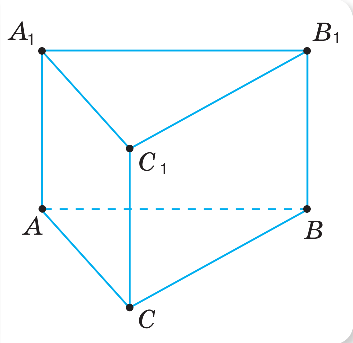
91'. На якому з малюнків 65–67 зображено призму? Яка із цих призм пряма, а яка — похила?

92'. На якому з малюнків 68–71 зображено:
1) трикутну призму;
2) чотирикутну призму?

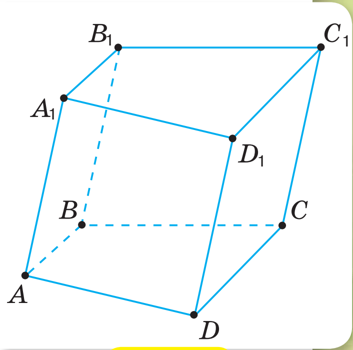
93'. На малюнку 72 зображено пряму чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть: 1) висоту призми; 2) діагональ призми; 3) діагональ грані ADD_1A_1 призми; 4) діагональний переріз призми.



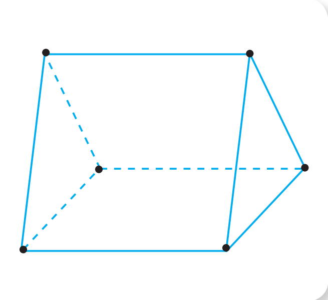
Мал. 65

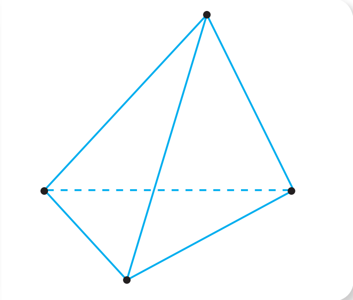


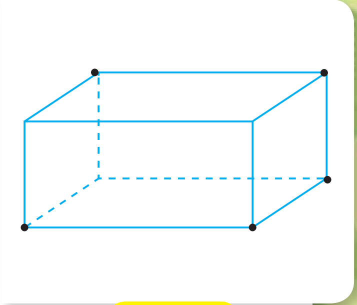
Мал. 66

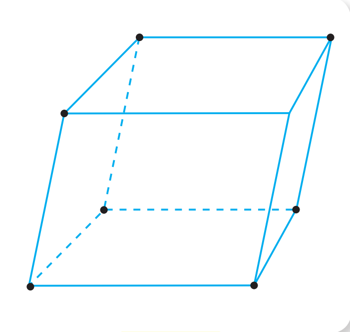


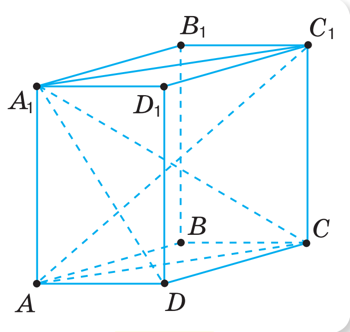
Мал. 67


Мал. 68


Мал. 69


Мал. 70


Мал. 71



Мал. 72

94'. Дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через: 1) три вершини призми; 2) ребро та вершину призми; 3) два ребра призми, що мають спільну точку.

95'. Чи може бути похилою призма, у якої всі бічні грані — квадрати?

96'. Скільки діагоналей можна провести:
1) у трикутній призмі;
2) чотирикутній призмі;
3) шестикутній призмі;
4) n-кутній призмі?

97'. Чи існує призма, у якій тільки одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи?

98'. Чи правильно, що перпендикулярний переріз похилої призми паралельний до площин її основ?

99°. Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати пряма призма?

100°. Чи є правильною пряма призма, якщо в її основі лежить:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція? Відповідь поясніть.

101°. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами a і b, а висота призми — h. Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $h = 5$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $h = 2{,}5$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $h = 8$ см.

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: *https://www.geogebra.org/geometry*.

102°. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см, а бічне ребро дорівнює:
1) 6 см; 2) 12 см; 3) $2\sqrt{2}$ см.
Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми.

103°. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює S, а бічне ребро дорівнює c. Знайдіть ребро основи призми, якщо:
1) $S = 16\sqrt{3}$ см², $c = 4$ см; 2) $S = \sqrt{3}$ см², $c = 1$ см; 3) $S = 64\sqrt{3}$ см², $c = 3$ см.

104°. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює S, а висота — h. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
1) $S = 4\sqrt{3}$ см², $h = 2$ см; 2) $S = 9\sqrt{3}$ см², $h = 3$ см; 3) $S = 16\sqrt{3}$ см², $h = 6$ см.

105°. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a, висота призми — h. Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 2$ см, $h = 5$ см; 2) $a = 6$ см, $h = 10$ см; 3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 15$ см.

106°. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S, а бічне ребро дорівнює h. Знайдіть ребро основи призми, якщо: 1) $S = 16$ см^2, $h = 4$ см; 2) $S = 18$ см^2, $h = 3$ см; 3) $S = 54$ см^2, $h = 6$ см.

107°. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S, а повної поверхні — Q. Знайдіть ребро основи призми, якщо: 1) $S = 24$ см^2, $Q = 56$ см^2; 2) $S = 12$ см^2, $Q = 30$ см^2; 3) $S = 15$ см^2, $Q = 65$ см^2.

108°. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S, а діагональ основи дорівнює d. Знайдіть бічне ребро призми, якщо:
1) $S = 24$ см^2, $d = 3\sqrt{2}$ см; 2) $S = 48$ см^2, $d = 6\sqrt{2}$ см; 3) $S = 16\sqrt{2}$ см^2, $d = 4$ см.

109°. Побудуйте розгортку правильної n-кутної призми зі стороною основи a і висотою H, якщо:
1) $n = 3$, $a = 4$ см, $H = 5$ см;
2) $n = 4$, $a = 3$ см, $H = 5$ см;
3) $n = 6$, $a = H = 4$ см.

110°. У похилої призми бічне ребро a, а перпендикулярний переріз — квадрат, площа якого S. Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $S = 9$ см^2;
2) $a = 6$ см, $S = 16$ см^2;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $S = 27$ см^2.

111°. У похилої призми бічне ребро a, а перпендикулярний переріз — прямокутник, у якого сторони відносяться, як $1 : 3$, а діагональ d. Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $d = 2\sqrt{5}$ см;
2) $a = 3$ см, $d = 3\sqrt{10}$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $d = 2\sqrt{15}$ см.

112°. У похилої призми бічне ребро a, а перпендикулярний переріз — рівнобічна трапеція з основами b і c та висотою h. Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 3$ см, $c = 9$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 4$ см, $c = 14$ см, $h = 12$ см;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $b = 3\sqrt{2}$ см, $c = 7\sqrt{2}$ см, $h = 2$ см.

113°. Відстані між прямими, які містять бічні ребра похилої трикутної призми, дорівнюють a, b, c, а бічне ребро — h. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
1) $a = 8$ см, $b = 12{,}5$ см, $c = 19{,}5$ см, $h = 20$ см;
2) $a = 15$ см, $b = 14$ см, $c = 13$ см, $h = 10$ см;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $b = 6\sqrt{3}$ см, $c = 7\sqrt{3}$ см, $h = 5\sqrt{3}$ см.

114. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою a і висотою, проведеною до цієї основи — b, висота призми — h. Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $h = 10$ см;
2) $a = 10$ см, $b = 12$ см, $h = 16$ см;
3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $h = 15$ см.

115. У прямої трикутної призми сторони основи b і c утворюють кут α, а бічне ребро дорівнює d. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо:
1) $b = 2$ см, $c = 4$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 30°$;
2) $b = c = 12$ см, $d = 16$ см, $\alpha = 60°$;
3) $b = 2\sqrt{2}$ см, $c = 3$ см, $d = 8$ см, $\alpha = 45°$.

116. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами a, b і c, а бічне ребро дорівнює h. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо:
1) $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 4$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см, $h = 6$ см;
3) $a = 7$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $h = 8$ см.

117. В основі прямої призми лежить правильний n-кутник зі стороною a. Висота призми дорівнює h. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми. Заповніть таблицю 2.

Таблиця 2

N	3	3	4	4	6	6
A	4 см	6 см	3 см	4 см	2 см	3 см
H	6 см	10 см	18 см	12 см	3 см	4 см
$S_{бп}$						
$S_{пп}$						

118. Основа прямої призми — ромб, сторона якого дорівнює b, гострий кут — β. Через більшу діагональ основи й середину однієї сторони другої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $b = 2$ см, $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$;
2) $b = 10$ см, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$;
3) $b = 4\sqrt{2}$ см, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$.

119. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами a і b та висотою c, висота призми — h. Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см, $h = 15$ см;
2) $a = 2$ см, $b = 1,5$ см, $c = 1$ см, $h = 10$ см;
3) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см, $h = 12$ см.

120. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює d, а висота призми — h. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо: 1) $d = 4\sqrt{2}$ см, $h = 5$ см; 2) $d = 9\sqrt{2}$ см, $h = 5$ см; 3) $d = 8$ см, $h = 4\sqrt{2}$ см.

121. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a; переріз, проведений через діагональ основи й протилежну вершину іншої основи, перетинає бічні грані по відрізках, кут між якими — α. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо: 1) $a = 2$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 4$ см, $\alpha = 60°$; 3) $a = 8$ см, $\alpha = 60°$.

122. У правильній чотирикутній призмі через середини двох суміжних сторін основи проведено площину, яка перетинає три бічні ребра й нахилена до площини основи під кутом α. Сторона основи — a. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 12$ см, $\alpha = 30°$.

123. Площа основи правильної шестикутної призми дорівнює $54\sqrt{3}$ см^2, а висота — 5 см. Знайдіть найбільшу діагональ призми.

124. Чи залежить кількість вершин (ребер, граней) у призми від того, що в її основі лежить правильний многокутник?

125. Виведіть формулу для обчислення кількості: 1) вершин n-кутної призми; 2) ребер n-кутної призми; 3) граней n-кутної призми.

126. Основою прямої призми є трикутник зі стороною a та прилеглими до неї кутами α, β, а бічне ребро дорівнює c. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо:
1) $a = 6$ см, $c = 4$ см, $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$;
2) $a = 8$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 65°$, $\beta = 55°$;
3) $a = 2$ см, $c = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$.

127. Основою призми є квадрат зі стороною a. Одна з бічних граней також квадрат, а інша — ромб із гострим кутом 60°. Знайдіть повну поверхню призми.

128. Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней — квадрат, а спільне ребро двох інших бічних граней нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть повну поверхню призми.

129*. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть висоту призми.

130*. Прямокутник зі сторонами 8 см і 34 см пряма m розбиває на два подібні прямокутники, площі яких відносяться, як 1 : 3. На кожному з прямокутників як на основі побудовано пряму призму висотою 8 см. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь побудованих призм.

131*. На сторонах прямокутного трикутника з катетами a і b побудовано квадрати. Їх вершини з'єднано відрізками так, що утворився опуклий шестикутник. Він є основою прямої призми з висотою h. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь цієї призми.

132*. У правильній трикутній призмі кут між діагоналлю бічної грані й іншою бічною гранню дорівнює α. Знайдіть висоту та бічну поверхню призми, якщо ребро основи дорівнює a.

133*. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми утворює з іншою бічною гранню кут 30°. Знайдіть висоту призми, якщо сторона основи дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

134*. Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною a, а довжина бічного ребра b. Одне з бічних ребер утворює з прилеглими сторонами основи кути по 45°. Знайдіть бічну поверхню призми.

Проявіть компетентність

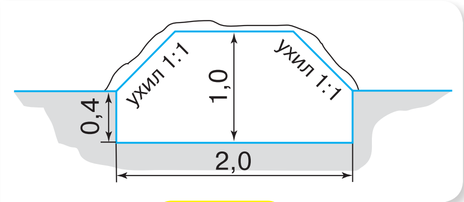
135. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють пряму призму.

136. Які призми та які їхні властивості використовують під час ремонту квартири?

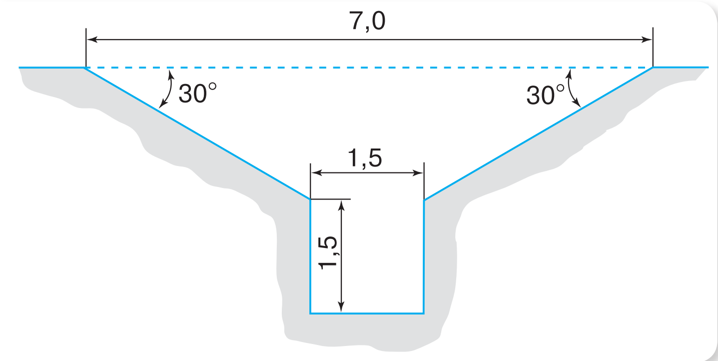
137. Для кращого зберігання овочі складають у бурти. Перпендикулярний розріз такого бурта зображено на малюнку 73, розміри вказано в метрах. Визначте площу, яку потрібно вкрити шаром соломи, якщо довжина бурта — 15 м.

138. Під час розвантаження торфу викопують траншею, перпендикулярний розріз якої зображено на малюнку 74, розміри вказано в метрах. Дно і стіни траншеї обшивають дошками. Знайдіть площу укріплення траншеї, довжина якої 120 м.

139. Намалюйте розгортку правильної восьмикутної призми, сторона основи якої дорівнює 5 см, а висота призми — 16 см.



Мал. 73



Мал. 74

§ 4. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

1. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД, ЙОГО ВИДИ

Подивіться на малюнки 75–78. Ви бачите кристали кухонної солі (мал. 75) та ісландського шпату (мал. 76), що мають природну форму паралелепіпеда. Нас оточують різноманітні предмети (мал. 77) й споруди (мал. 78), що мають таку само геометричну форму. Узагалі, форма паралелепіпеда є найпоширенішою серед рукотворних об'єктів.


Мал. 75


Мал. 76


Мал. 77


Мал. 78

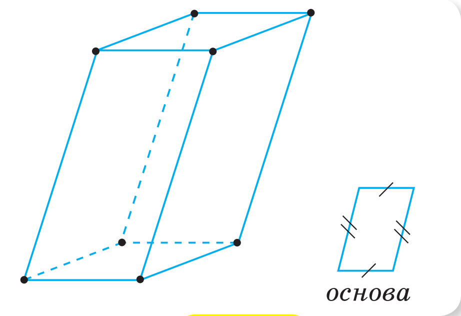
Паралелепіпед належить до окремого виду призм. У попередніх класах ви ознайомилися з прямокутним паралелепіпедом і кубом, який є різновидом прямокутного паралелепіпеда. Проте ці многогранники не вичерпують усіх видів паралелепіпедів.

Паралелепіпедом **називається призма, основами якої є паралелограми.**

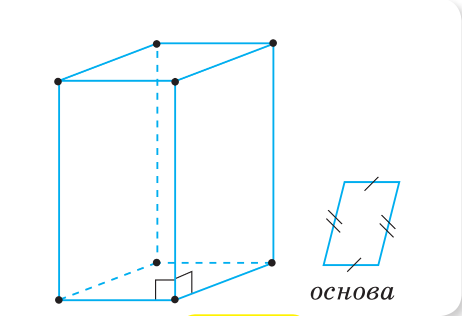
З означення випливає, що в паралелепіпеда: 1) бічні грані — паралелограми, оскільки цей многогранник є призмою; 2) основи — паралелограми (за означенням).

Ви знаєте, що прямокутник — окремий вид паралелограма. Тому можливі такі види паралелепіпеда:

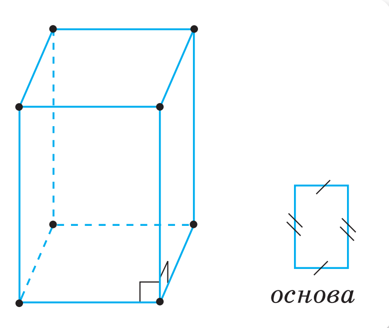
- *похилий паралелепіпед* (мал. 79), у нього всі грані — паралелограми;
- *прямий паралелепіпед* (мал. 80), у нього бічні грані — прямокутники, основи — паралелограми;



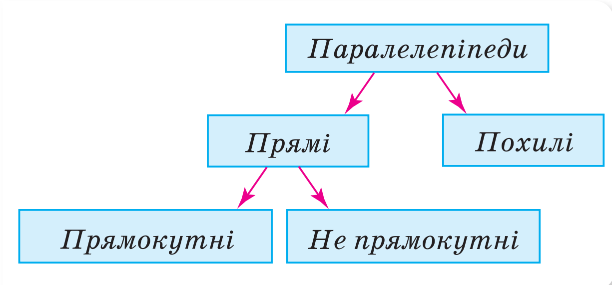
Мал. 79



Мал. 80



Мал. 81



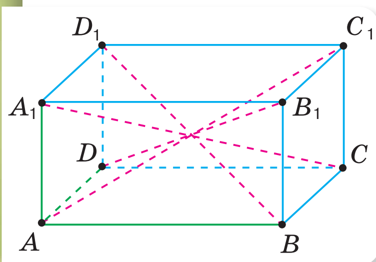
Мал. 82

- *прямокутний паралелепіпед* (мал. 81), у нього всі грані — прямокутники.

Зв'язок між паралелепіпедами різних видів показано на малюнку 82.

Оскільки прямий паралелепіпед є різновидом прямої призми, то він має всі її властивості. Особлива його властивість полягає в тому, що в ньому **протилежні грані рівні й паралельні**. Доведіть цю властивість самостійно.

? Чи кожний прямий паралелепіпед є правильною чотирикутною призмою? Ні, лише той, у якого основи — квадрати.



Мал. 83

Прямокутний паралелепіпед (мал. 83) — один з найбільш відомих вам многогранників. У ньому: 6 граней, які є прямокутниками, 12 ребер, 8 вершин, 12 двогранних кутів, кожний з яких є прямим, 8 тригранних кутів, у кожного з яких усі три плоскі кути є прямими, 4 діагоналі, 6 діагональних перерізів. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають його *вимірами*.

2. ВЛАСТИВОСТІ ДІАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

ТЕОРЕМА **(про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда).**

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

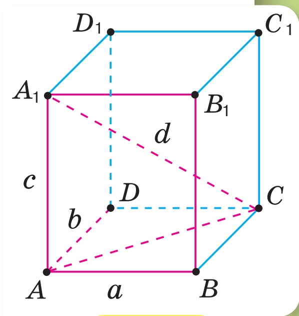
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 84), $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, $A_1C = d$.

Довести: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Доведення. Трикутник A_1AC — прямокутний із прямим кутом A, оскільки ребро A_1A даного паралелепіпеда перпендикулярне до площини його основи. Тому, за теоремою Піфагора, $d^2 = AC^2 + c^2$ (1). Основа даного паралелепіпеда — прямокутник, тому трикутник ABC — прямокутний.

У ньому: $\angle ABC = 90°$, $AB = a$, $BC = AD = b$, отже, за теоремою Піфагора, $AC^2 = a^2 + b^2$ (2). З рівностей (1) і (2) одержимо:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



Мал. 84

НАСЛІДОК. **У прямокутному паралелепіпеді всі діагоналі рівні.**

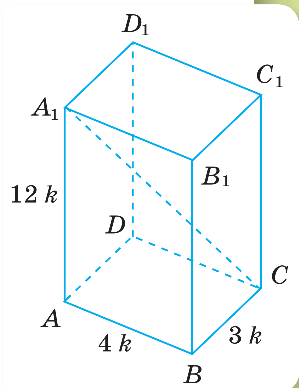
Задача 1. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 85) $AD : AB : A_1A = 3 : 4 : 12$, а діагональ на 1 см довша за його висоту A_1A. Яка довжина діагоналі паралелепіпеда?

Розв'язання. За умовою, виміри даного паралелепіпеда відносяться, як 3 : 4 : 12. Введемо коефіцієнт пропорційності $k > 0$. Тоді $AB = 4k$ см, $AD = 3k$ см, $A_1A = 12k$ см, $A_1C = 12k + 1$ (см). За теоремою про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда, $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + A_1A^2$. Маємо рівняння відносно k:

$$(12k + 1)^2 = (4k)^2 + (3k)^2 + (12k)^2.$$

Це рівняння зводиться до квадратного рівняння $25k^2 - 24k - 1 = 0$, яке має два корені: 1 і $-\frac{1}{25}$.

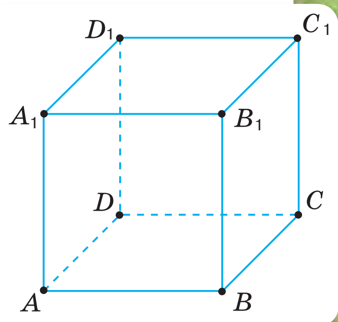
Оскільки $k > 0$, то $k = 1$. Отже, $A_1C = 12 \cdot 1 + 1 = 13$ (см).



Мал. 85

Якщо в ході розв'язування геометричної задачі одержали квадратне рівняння, то його корені необхідно дослідити.

Прямокутний паралелепіпед, який має три рівні виміри, називають *кубом* (мал. 86). З означення випливає, що всі грані куба — квадрати. Оскільки куб — окремий вид прямокутного паралелепіпеда, то він має всі його властивості. Особливі властивості куба сформулюйте самостійно.



Мал. 86

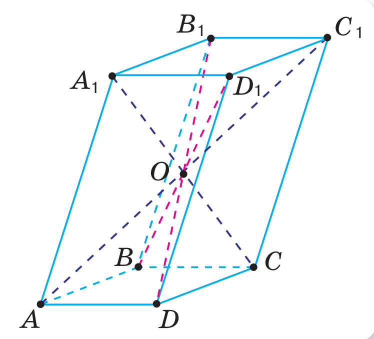
ТЕОРЕМА (про точку перетину діагоналей паралелепіпеда).

Усі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й діляться цією точкою навпіл.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед (мал. 87), AC_1, BD_1, B_1D і A_1C — його діагоналі.

Довести: діагоналі AC_1, BD_1, B_1D і A_1C перетинаються в точці O; точка O — середина діагоналей AC_1, BD_1, B_1D і A_1C.

Доведення. Діагоналі AC_1 і BD_1 паралелепіпеда та діагоналі граней AD_1 і BC_1 утворюють чотирикутник ABC_1D_1. У нього $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$, тому $AB = D_1C_1$. Оскільки AB і D_1C_1 відповідно паралельні ребру DC, то, за ознакою паралельності прямих, вони паралельні між собою. Отже, чотирикутник ABC_1D_1 — паралелограм. У нього AC_1 і BD_1 — діагоналі. За властивістю діагоналей паралелограма, вони перетинаються в точці O й діляться цією точкою навпіл.



Мал. 87

Для діагоналей AC_1 і B_1D паралелепіпеда побудуємо чотирикутник ADC_1B_1. Він також є паралелограмом. Дані діагоналі AC_1 і B_1D в цьому паралелограмі є його діагоналями, тому вони перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Оскільки серединою діагоналі AC_1 є точка O, то вона є і точкою перетину діагоналей AC_1 і B_1D.

Міркуючи аналогічно, одержимо, що діагоналі B_1D і A_1C перетинаються і в точці перетину діляться навпіл, а точкою їх перетину є також точка O.

Отже, всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці O і діляться цією точкою навпіл.

НАСЛІДОК 1. **Протилежні грані паралелепіпеда рівні й паралельні.**

Справді, основи паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рівні й паралельні за означенням. Його бічні грані, наприклад, AA_1D_1D і BB_1C_1C, — паралелограми (за властивістю паралелепіпеда), тому $AA_1 \parallel BB_1$, $AD \parallel BC$ і, за ознакою паралельності площин, $AA_1D_1D \parallel BB_1C_1C$. Далі, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ як бічні ребра, $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$ як сторони основ, тому паралелограми AA_1D_1D і BB_1C_1C — рівні.

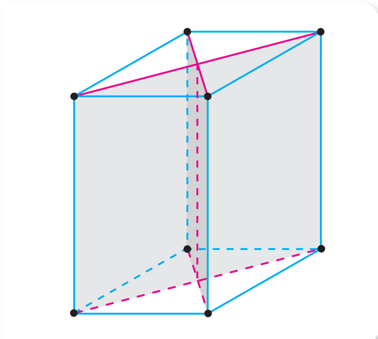
НАСЛІДОК 2. **Середина діагоналі паралелепіпеда є його центром симетрії.**

Справді, при центральній симетрії відносно точки O — середини діагоналі BD_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка B переходить у точку D_1, точка A — у точку C_1, відрізок AB переходить у відрізок C_1D_1. Аналогічно, відрізок CD переходить у відрізок A_1B_1. Внутрішня область також відображається на себе. Отже, при симетрії із центром в точці O паралелепіпед відображається на себе, а точка O — центр симетрії даного паралелепіпеда.

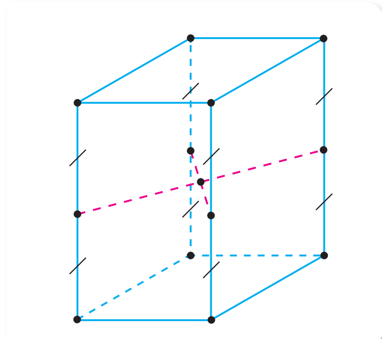
3. СИМЕТРІЯ В ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ

Згідно з наслідком 2 з теореми про точку перетину діагоналей паралелепіпеда, будь-який паралелепіпед має центр симетрії — точку перетину його діагоналей.

Про осі та площини симетрії паралелепіпеда так однозначно сказати не можна. У довільного паралелепіпеда осей і площин симетрії немає. Проте прямий паралелепіпед (не прямокутний) завжди має вісь симе-



Мал. 88



Мал. 89

трії — пряму, яка проходить через центри симетрії його основ, і площину симетрії, яка проходить через середини його бічних ребер. Якщо у прямого паралелепіпеда основами є ромби (не квадрати), то він має ще дві площини та дві осі симетрії (мал. 88–89).

? Чи має прямокутний паралелепіпед центри, осі, площини симетрії? Так. Дослідіть це самостійно.

? Чи має куб центри, осі, площини симетрії? Так.

- Центром симетрії куба є точка перетину його діагоналей.
- Куб має дев'ять площин симетрії:
  а) шість діагональних площин;
  б) три площини, що проходять через середини кожної четвірки його паралельних ребер перпендикулярно до них.
- Куб має 13 осей симетрії.

Дізнайтеся більше

1. Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів *parallox* — паралельний та *epipedon* — площина. Термін «куб» (*cubox*) теж античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, а після обточування — на шість граней.

2. Теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда іноді називають *просторовою теоремою Піфагора*. У стереометрії є декілька аналогів теореми Піфагора. Частіше за все, це теорема, яку ви вивчили. Іноді — це формула відстані між двома точками в просторі, заданими у прямокутній декартовій системі координат. Існує ще й такий аналог: якщо через кінці ребер прямокутного паралелепіпеда, що сходяться в одній вершині, проведено площину, то квадрат площі отриманого перерізу дорівнює сумі квадратів площ трикутників, які відтинає січна площина від його граней, що сходяться в цій вершині. Ще один аналог — теорема французького математика Жана Поля де Гуа, який жив у XVIII ст.

Теорема де Гуа. У трикутній піраміді $ABCD$, у якої три кути при вершині D ($\angle ADB$, $\angle BDC$ і $\angle CDA$) — прямі, квадрат площі грані, що лежить проти вершини D, дорівнює сумі квадратів площ граней, прилеглих до цього кута.

Тобто $S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BDC} + S^2_{ADC}$.

3. Поворот навколо деякої прямої на кут 180° називають симетрією відносно прямої (або *поворотною симетрією*).

Якщо поворотом навколо деякої прямої на кут $\frac{360°}{n}$, де n — натуральне число, $n \geq 2$, фігура суміщається сама із собою, то така пряма називається *віссю симетрії n-го порядку* цієї фігури.

Композиція повороту навколо прямої та симетрії відносно площини, перпендикулярної до цієї прямої, називається дзеркальним поворотом (або *дзеркальною симетрією*).

У куба:

- шість осей симетрії другого порядку — прямі, які з'єднують середини протилежних ребер куба;
- чотири осі симетрії третього порядку — діагоналі куба;
- три осі симетрії четвертого порядку, які з'єднують точки перетину діагоналей протилежних граней куба.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Паралелепіпед	Parallelepiped	Parallelepiped
Куб	Cube	Würfel

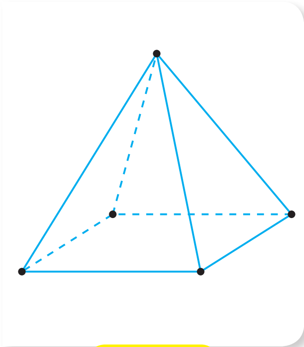
Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке паралелепіпед.
2. Що є основами паралелепіпеда; його гранями?
3. Який паралелепіпед називається похилим; прямим; прямокутним?
4. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
5. Сформулюйте й доведіть теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.
6. Сформулюйте й доведіть теорему про точку перетину діагоналей паралелепіпеда.

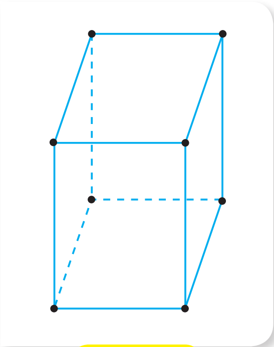
Розв'яжіть задачі

140'. На якому з малюнків 90–92 зображено паралелепіпед?

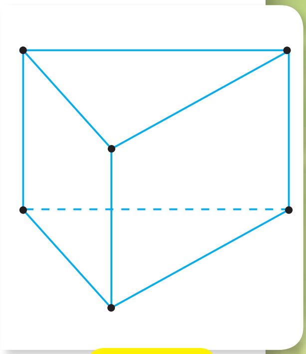
141'. За малюнком 93 назвіть: 1) основи паралелепіпеда; 2) бічні грані паралелепіпеда; 3) діагоналі паралелепіпеда; 3) діагональний переріз паралелепіпеда.



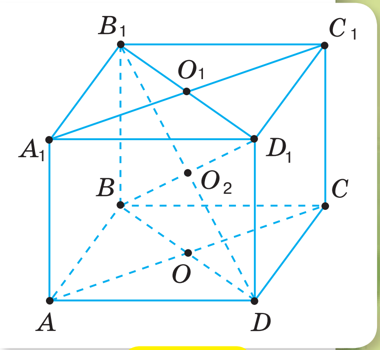
Мал. 90



Мал. 91



Мал. 92



Мал. 93

142'. На які многогранники розіб'ється паралелепіпед, у якого проведено діагональний переріз?

143'. Скільки граней непрямокутного паралелепіпеда можуть мати форму прямокутника?

144'. Скільки діагоналей похилого паралелепіпеда можуть бути рівними?

145'. Чи правильно, що паралелепіпед прямий, якщо дві його діагоналі рівні?

146'. Чи може діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда бути квадратом?

147'. Чи може існувати паралелепіпед, у якого: 1) тільки одна грань є ромбом; 2) усі кути кожної грані — гострі?

148°. Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α, бічне ребро дорівнює c. Знайдіть його повну поверхню, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30°$;
2) $a = 3$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $c = 8$ см, $\alpha = 60°$;
3) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 6$ см, $c = 12$ см, $\alpha = 45°$.

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: *https://www.geogebra.org/geometry*.

149°. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a й гострим кутом α, бічне ребро дорівнює c. Знайдіть його повну поверхню, якщо:
1) $a = 3$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30°$;
2) $a = 4$ см, $c = 6$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 5\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\alpha = 60°$.

150°. Основа прямого паралелепіпеда — ромб із діагоналями d_1 і d_2, а бічне ребро — h. Знайдіть його бічну й повну поверхні якщо:
1) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 8$ см, $h = 5$ см;
2) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 24$ см, $h = 8$ см; 3) $d_1 = 48$ см, $d_2 = 20$ см, $h = 10$ см.

151°. У прямокутному паралелепіпеді виміри дорівнюють a, b, c. Знайдіть його діагональ, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 4\sqrt{6}$ см, $c = 5$ см.

152°. У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює d, а сторони основи — a і b. Знайдіть його бічне ребро, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 10$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 5$ см, $d = 5\sqrt{3}$ см;
3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 4\sqrt{6}$ см, $d = 13$ см.

153°. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b, c. Знайдіть його бічну поверхню, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 4$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 2{,}5$ см;
3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 6\sqrt{3}$ см, $c = 12$ см.

154°. У кубі з однієї вершини проведено дві діагоналі бічних граней. Визначте кут між ними.

155°. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть його діагональ, якщо:
1) $a = 3$ см; 2) $a = 8$ см; 3) $a = 6\sqrt{2}$ см.

156°. Бічна поверхня куба дорівнює: 1) 4 см^2; 2) 36 см^2; 1) 8 см^2. Яку довжину має його ребро?

157°. Знайдіть повну поверхню куба, якщо його діагональ дорівнює d.

158°. Знайдіть повну поверхню куба, якщо площа його діагонального перерізу дорівнює S.

159°. Відстані між бічними гранями похилого паралелепіпеда відносяться, як 3 : 25 : 26, а площа перпендикулярного перерізу дорівнює 144 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

160. Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α. Площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює S. Знайдіть його бічне ребро, якщо:
1) $S = 18$ см^2, $a = 3$ см, $b = 2$ см, $\alpha = 30°$;
2) $S = 188$ см^2, $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\alpha = 30°$;
3) $S = 63$ см^2, $a = 5$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30°$.

161. Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β. Знайдіть його діагоналі, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$;
2) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$;
3) $a = 12$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

162. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 21 см і 22 см, а бічне ребро — 20 см. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда, якщо його діагоналі відносяться, як 5 : 9.

163. У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює d, а його виміри відносяться, як $1 : 3 : 5$. Знайдіть його бічне ребро, якщо:
1) $d = 2\sqrt{35}$ см; 2) $d = 5\sqrt{7}$ см; 3) $d = 7\sqrt{5}$ см.

164. Площа основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 240 см^2. Знайдіть площу його бічних граней, якщо площа однієї з них становить $\frac{1}{2}$ площі основи, а площа другої — $\frac{1}{4}$ площі основи. Чому дорівнюють площі бічної та повної поверхонь паралелепіпеда?

165. **Кути, утворені діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з його ребрами, дорівнюють α, β, γ. Доведіть, що $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1$.**

166. Як зміниться площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо кожну з його сторін:
1) збільшити у 2 рази;
2) зменшити у 3 рази;
3) збільшити на 25 %;
4) зменшити на 50 %?

167. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед; 2) куб. Через діагональ нижньої основи та вершину верхньої основи проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістати: а) трикутник; б) чотирикутник.

168. Як зміниться площа повної поверхні куба, якщо його сторону:
1) збільшити в 4 рази;
2) зменшити у 2 рази;
3) збільшити на 50 %;
4) зменшити на 75 %?

169. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точку: 1) P на ребрі BB_1; 2) Q на ребрі BC. Площини яких граней куба перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба? Скільки таких прямих можна провести?

170. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі.

171. **Доведіть, що сума квадратів площ діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ його бічних граней.**

172. Сума всіх ребер паралелепіпеда дорівнює 120 см. Знайдіть довжину трьох ребер, які виходять з однієї вершини, якщо їхні довжини відносяться, як $4 : 5 : 6$.

173. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a, діагоналі паралелепіпеда утворюють з площиною основи кути α і β. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо:
1) $a = 3$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$;
2) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$;
3) $a = 12$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

174. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b, більша діагональ основи — d. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда, якщо:
1) $a = 17$ см, $b = 18$ см, $d = 25$ см, $\alpha = 45°$;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $d = 15$ см, $\alpha = 30°$;
3) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 60°$.

175. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a, діагоналі паралелепіпеда утворюють із площиною основи кути α і β. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) $a = 3$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$;
2) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$;
3) $a = 12$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

176. У прямому паралелепіпеді висота дорівнює 20 см, сторони основи — 17 см і 28 см. Площа перерізу, проведеного через дві більші сторони основ, дорівнює 700 см^2. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

177. Площі двох граней прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 2 : 5. Діагоналі цих граней дорівнюють 10 см і 17 см. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

178. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 34 см, 40 см, 58 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

179. Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6240 см^2, а його виміри відносяться, як 12 : 16 : 21. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

180. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 32 см, 40 см і 48 см. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

181. Переріз куба — правильний многокутник. Доведіть, що цим многокутником може бути лише трикутник, чотирикутник або шестикутник.

182. У кубі проведено два діагональні перерізи. Доведіть, що пряма їх перетину перпендикулярна до двох граней куба.

183*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

184*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що переріз AB_1C_1 — гострокутний трикутник.

185*. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює $\frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)$, де d_1, d_2, d_3 — діагоналі граней, що виходять з однієї вершини.

186*. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі його граней дорівнюють 11 см, 19 см, 20 см.

187*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d_1, діагональ бічної грані — d_2, діагональ основи — d_3. Знайдіть площу основи паралелепіпеда.

188*. Різниця периметра грані одного куба й периметра грані другого куба дорівнює c, а різниця їх площ — d. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь, якщо:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см^2; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см^2.

189*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

190*. На трьох бічних ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 2 : 5. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини верхньої основи куба, а на двох інших — від вершини нижньої основи. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

191*. Чи може переріз куба площиною бути правильним шестикутником? Відповідь поясніть.

192*. У паралелепіпеді довжини трьох ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b, c. Ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним із них кут α. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

193*. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з бічними гранями кути 30° і 45°. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

194*. У прямокутному паралелепіпеді довжина діагоналі дорівнює d. Яку найбільшу площу поверхні може мати такий паралелепіпед?

195*. У прямокутному паралелепіпеді сума довжин всіх ребер дорівнює 48 см. Яку найбільшу площу поверхні може мати такий паралелепіпед?

196*. Доведіть, що відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба втричі менша від довжини діагоналі куба.

197*. Через діагональ куба з ребром a паралельно одній з діагоналей основи проведено площину. Побудуйте переріз куба цією площиною та знайдіть його площу.

198*. Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником.

199*. Основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якого $\angle BAD = 60°$. Бічні ребра паралелепіпеда нахилені до площини основи під кутом 60°, а площина AA_1C_1C перпендикулярна до площини основи. Доведіть, що площі перерізів BB_1D_1D і AA_1C_1C відносяться, як 2 : 3.

200*. Через вершини A_1, B, D паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину. Доведіть, що трикутник, отриманий у перерізі паралелепіпеда цією площиною, перетинається діагоналлю паралелепіпеда AC_1 у точці перетину медіан.

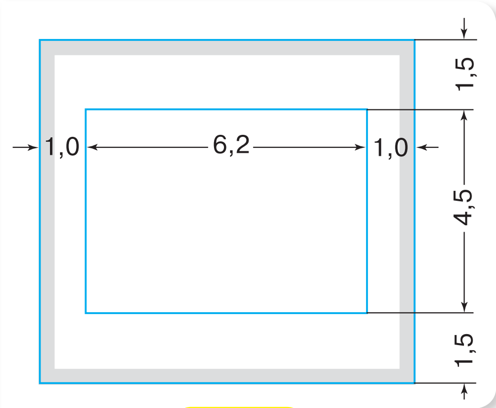
Проявіть компетентність

201. Будинок, довжина якого 37,5 м, ширина 10,5 м, висота 12,8 м, потрібно поштукатурити ззовні. У будинку чотири під'їзди, вхідні двері яких мають розміри 1,8 × 2,4 м, та 66 вікон розмірами 1,6 × 2,25 м. Скільки тонн цементного розчину знадобиться для штукатурення будинку, якщо для 1 м² штукатурки використовують 20 кг розчину?

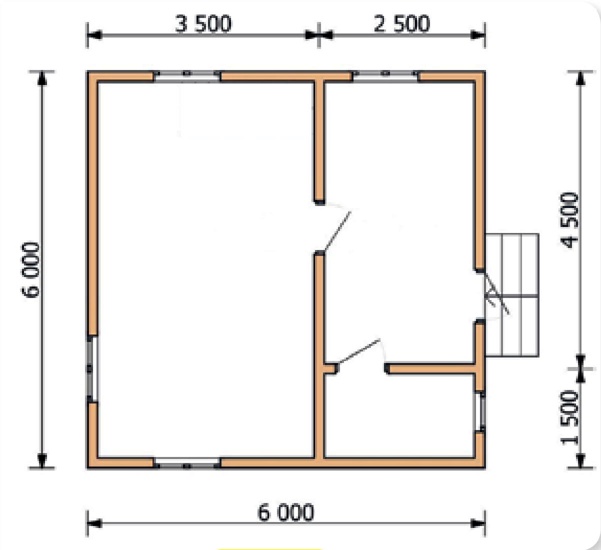
202. Скільки дроту потрібно взяти для виготовлення каркасної моделі прямокутного паралелепіпеда з вимірами 12 см, 8 см, 5 см? На обрізки відходить 3 % дроту.

203. На малюнку 94 вказано розміри перпендикулярного перерізу тунелю в метрах. Визначте площу гідроізоляції ділянки тунелю завдовжки 300 м.

204. На малюнку 95 зображено план двокімнатної квартири (розміри вказано в метрах). Визначте площу стін, які потрібно пофарбувати, якщо висота кімнат 2,5 м, дверей — 2 м, а вікон — 1,5 м.



Мал. 94



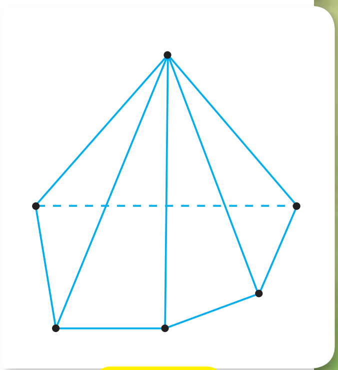
Мал. 95

§ 5. ПІРАМІДА

Подивіться на малюнки 96 і 97. Ви бачите природні та рукотворні об'єкти, що мають форму піраміди.


Мал. 96


Мал. 97


Мал. 98

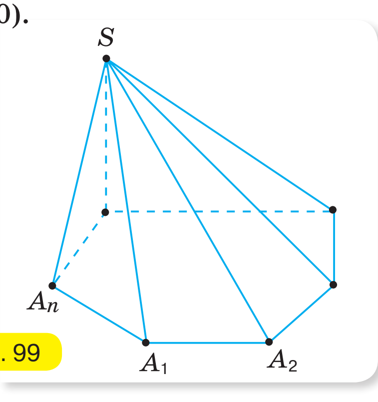
1. ПІРАМІДА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Піраміда (мал. 98), як і призма, — один з видів многогранників. Ви вже знаєте, що є спільного й відмінного в піраміди й призми; як формулюється означення призми. Спробуйте самостійно дати означення піраміді та порівняйте його з наведеним у підручнику.

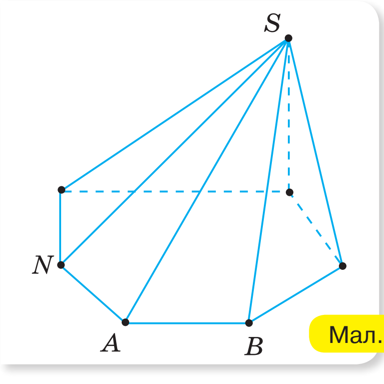
***Пірамідою* називається многогранник, у якого одна грань — довільний *n*-кутник, а решта *n* граней — трикутники, що мають спільну вершину.**

Грань, що є довільним *n*-кутником, називають *основою піраміди*, а грані, що є трикутниками, — *бічними гранями піраміди*. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*, а інші її вершини — *вершинами основи*.

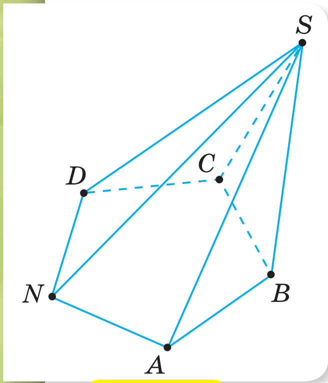
Піраміду позначають назвами її вершин, першою записуючи назву вершини піраміди, наприклад, $SA_1A_2...A_n$ (мал. 99) або $SAB...N$ (мал. 100).



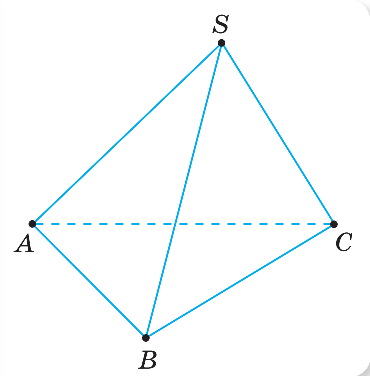
Мал. 99



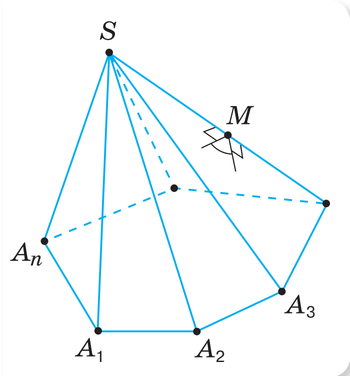
Мал. 100



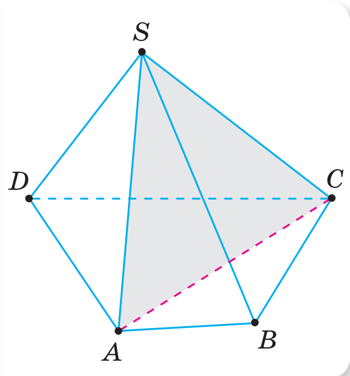
Мал. 101



Мал. 102



Мал. 103



Мал. 104

Відрізки A_1A_2,.. A_nA_1 (мал. 99) називають *ребрами основ піраміди*, а відрізки SA_1, SA_2, ... SA_n — *бічними ребрами піраміди*.

Залежно від того, який многокутник лежить в основі, піраміду називають *трикутною, чотирикутною* чи *n-кутною*. На малюнку 101 ви бачите п'ятикутну піраміду.

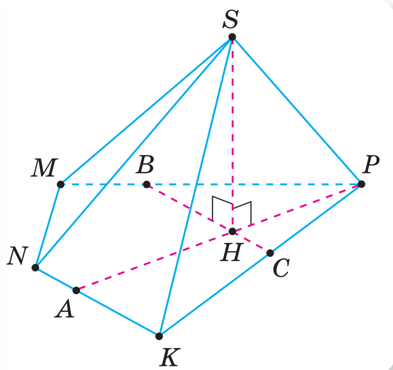
Особливою є трикутна піраміда. У неї будь-яку грань можна вважати основою. Тоді, дотримуючись традиції першою називати вершину піраміди, треба лише відповідно змінити порядок назв вершин піраміди. Наприклад, якщо піраміді на малюнку 102 дати назву $SABC$, тоді її основою треба вважати трикутник ABC, а вершиною — вершину S. Якщо цій піраміді дати назву $ABCS$, тоді її основою треба вважати трикутник BCS, а вершиною — вершину A.

? Чи є елементами піраміди двогранні та многогранні кути? Так, оскільки піраміда є многогранником.

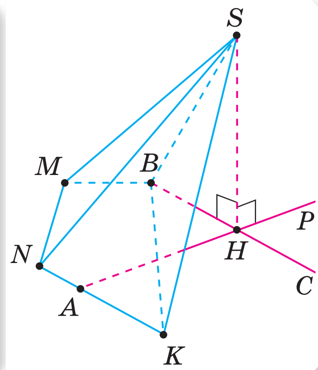
У n-кутної піраміди $2n$ ребер, тому в неї $2n$ двогранних кутів (мал. 103). У вершині n-кутної піраміди сходяться n бічних граней, тому при ній утворюється n-гранний кут. При вершинах основи n-кутної піраміди утворюється n тригранних кутів. Якщо піраміда трикутна, тоді всі її многогранні кути є тригранними (мал. 102).

Відрізок, який з'єднує дві несусідні вершини основи n-кутної піраміди, називається *діагоналлю основи піраміди* (наприклад, відрізок AC на малюнку 104). На відміну від призми, у піраміди немає діагоналей. Але в піраміді, як і в призмі, можна побудувати *діагональний переріз*. Він проходить через два несусідні бічні ребра піраміди й відповідну діагональ основи. Кожний діагональний переріз піраміди є трикутником (наприклад, трикутник SAC на малюнку 104).

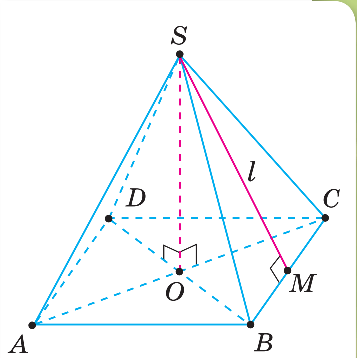
? Чи є правильним твердження: «У кожній піраміді можна побудувати діагональний переріз»? Ні. Наприклад, у трикутної піраміди будь-яка пара бічних ребер є сусідніми й у її основі не можна провести жодної діагоналі. Тому діагональний переріз побудувати не можна.



Мал. 105



Мал. 106



Мал. 107

Щоб спростувати деяке твердження, достатньо навести хоча б один приклад, який задовольняє умову твердження, але суперечить його вимозі.

Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини її основи, називається *висотою піраміди*.

На відміну від прямої призми, бічні ребра піраміди не перпендикулярні до її основи, якщо це спеціально не зазначено. Тому висоту піраміди показують окремо (наприклад, відрізок SH на малюнках 105 і 106).

Бічну поверхню піраміди утворюють трикутники її бічних граней, а *повну поверхню* — усі її грані.

***Площею бічної поверхні* піраміди називається сума площ її бічних граней.**

***Площею повної поверхні* піраміди називається сума площ усіх її граней.**

Площу бічної та повної поверхні відповідно позначають: $S_{бп}$ і $S_{пп}$.

Наведені означення підказують спосіб знаходження площ бічної та повної поверхонь піраміди.

2. ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

Окремим видом піраміди є правильна піраміда. Пригадайте означення такої піраміди та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.

На малюнку 107 ви бачите правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Її основа — квадрат $ABCD$, центр O якого є центром вписаного у квадрат й описаного навколо нього кіл. У квадраті ця точка збігається з точкою перетину його діагоналей. SO — висота даної піраміди.

Основні властивості правильної піраміди:
- **бічні ребра — рівні;**
- **бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники;**
- **бічні ребра нахилені до площини основи під однаковими кутами;**
- **двогранні кути при ребрах основи — рівні;**
- **двогранні кути при бічних ребрах — рівні;**
- **тригранні кути при вершинах основи мають відповідно рівні плоскі кути;**
- **плоскі кути многогранного кута при вершині піраміди — рівні.**

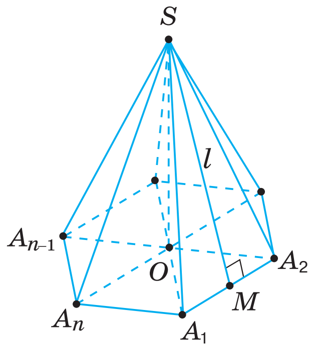
Висоту бічної грані правильної піраміди, яку проведено з її вершини, називають *апофемою піраміди*. На малюнку 107 відрізок SM є апофемою піраміди $SABCD$. Апофему піраміди та її довжину позначають літерою l.

ТЕОРЕМА **(про площу бічної поверхні правильної піраміди).**

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи на апофему піраміди.

Дано: $SA_1A_2...A_n$ — правильна n-кутна піраміда (мал. 108), $SM = l$ — апофема піраміди.

Довести: $S_{бп} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l$.



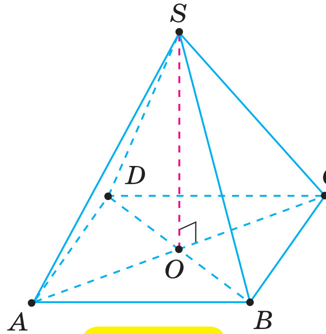
Мал. 108

Доведення. Площа бічної поверхні піраміди, за означенням, дорівнює сумі площ її бічних граней. Оскільки у правильної піраміди бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники з основами, що дорівнюють A_1A_2, і висотами, що дорівнюють l, а кількість бічних граней у даної n-кутної піраміди дорівнює n, то для знаходження площі бічної поверхні піраміди достатньо знайти площу її бічної грані й помножити її на n. Отже, можемо записати:

$$S_{бп} = n \cdot S_{\Delta SA_1A_2} = n \cdot \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot l = \frac{1}{2}(n \cdot A_1A_2) \cdot l = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l.$$

Задача. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, у якої основа — квадрат, висота дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічні ребра мають довжину по 10 см.

Розв'язання. Нехай $SABCD$ (мал. 109) — дана піраміда, у якої $SA = SB = SC = SD = 10$ см. Якщо бічні ребра піраміди рівні, то вершина піраміди проєктується в точку перетину діагоналей O квадрата $ABCD$. Проведемо висоту SO.



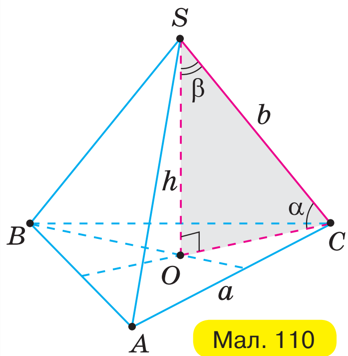
Мал. 109

З прямокутного трикутника SOA ($\angle O = 90°$) $= AO = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{2})^2} =$ $= \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (см). Основою піраміди є квадрат $ABCD$, тому $AD = 10\sqrt{2}$ см і $AB = BC = CD = = DA = 10$ см. $S_{ABCD} = AB^2 = 100$ (см²). $SA = AB$, отже, бічні грані даної піраміди є рівносторонніми трикутниками, тому $S_{\Delta ASB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ (см²), а площа бічної поверхні $S_{бп} =$ $= 4 \cdot S_{\Delta ASB} = 100\sqrt{3}$ (см²). Отже, дістанемо: $S_{пп} = S_{бп} + S_{ABCD} = 100\sqrt{3} + 100$ (см²).

1. Якщо піраміда має рівні ребра або всі її ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вершина піраміди проєктується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.
2. Якщо всі грані піраміди нахилені під однаковим кутом до площини основи, то вершина піраміди проєктується в центр кола, вписаного в основу піраміди.

Якщо всі грані піраміди нахилені під однаковим кутом до площини основи, то вершина піраміди проєктується в центр кола, вписаного в основу піраміди.

Найпростіші задачі на знаходження елементів правильної піраміди (бічного ребра, висоти, ребра основи, двогранного кута при ребрі основи, кута нахилу бічного ребра до площини основи тощо) зводяться до розв'язування прямокутного трикутника. Наприклад, для правильної трикутної піраміди $SABC$ (мал. 110) — це трикутник SOC. У таблиці 3 уміщено деякі такі задачі та їх розв'язання.



Мал. 110

Таблиця 3

Дано	Знайти	Розв'язання
1) a і h	b, α, β	$OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{OC} = \frac{h\sqrt{3}}{a}$; $b = \frac{h}{\sin\alpha}$; $\beta = 90° - \alpha$
2) a і b	h, α, β	$OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$; $h = b\sin\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$
3) a і α	h, b, β	$OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $h = OC \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3}}{3}$; $b = \frac{h}{\sin\alpha}$; $\beta = 90° - \alpha$
4) b і α	h, a, β	$h = b\sin\alpha$; $OC = b\cos\alpha$; $a = OC\sqrt{3} = b\sqrt{3}\cos\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$

3. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

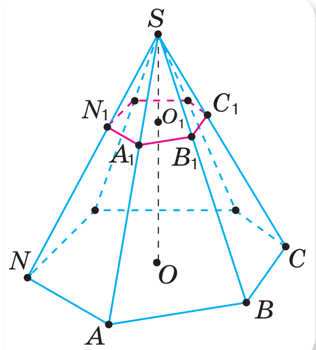
ТЕОРЕМА **(про перетин піраміди площиною, параллельною основі).**

Якщо в піраміді проведено січну площину, яка параллельна основі, то:
1) перерізом є многокутник, подібний основі;
2) площі перерізу й основи відносяться, як квадрати їх відстаней від вершини.

Дано: $SABC...N$ — піраміда (мал. 111), $ABC...N$ — основа, $A_1B_1C_1...N_1$ — січна площина, $ABC...N \,||\, A_1B_1C_1...N_1$, Q_1 — площа основи, Q_2 — площа перерізу, SO_1 — відстань від вершини піраміди до площини перерізу, SO — відстань від вершини піраміди до основи.

Довести: 1) $A_1B_1C_1...N_1 \sim ABC...N$;

2) $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{SO^2}{SO_1^2}$.



Мал. 111

Доведення. 1. Розглянемо трикутники SAB і SA_1B_1. У них: сторони AB і A_1B_1 паралельні як лінії перетину паралельних площин ABC і $A_1B_1C_1$ січною площиною SAB; $\angle ASB = \angle A_1SB_1$ як спільні кути; $\angle SAB = \angle SA_1B_1$ і $\angle SBA = \angle SB_1A_1$ за властивістю паралельних прямих. Тому $\Delta SAB \sim \Delta SA_1B_1$. Звідси $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

Аналогічно: $\Delta SBC \sim \Delta SB_1C_1$,.., $\Delta SNA \sim \Delta SN_1A_1$. Тоді отримаємо: $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{SC}{SC_1} = ... = \dfrac{SN}{SN_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = ... = \dfrac{NA}{N_1A_1} = k$. Отже, $A_1B_1C_1...N_1 \sim ABC...N$.

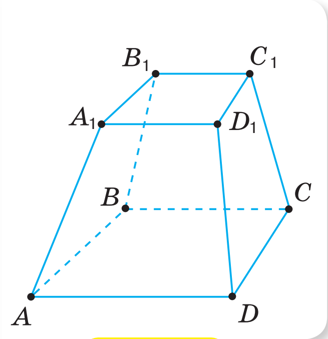
2. Оскільки $A_1B_1C_1...N_1 \sim ABC...N$, то їх площі відносяться, як k^2. Водночас, у трикутників SOA і SO_1A_1: $\angle SOA = \angle SO_1A_1 = 90°$, $\dfrac{SA}{SA_1} = \dfrac{OA}{O_1A_1} = k$.

Тому $\Delta SOA \sim \Delta SO_1A_1$. З подібності трикутників одержимо: $\dfrac{SO}{SO_1} = k$.

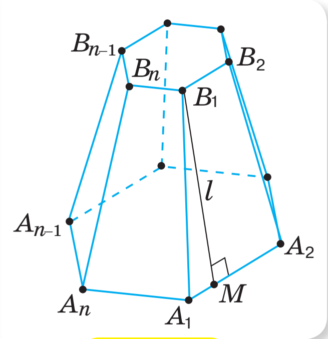
Тоді $\dfrac{Q_1}{Q_2} = k^2 = \dfrac{SO}{SO_1}$.

НАСЛІДОК (про подібні піраміди). **Січна площина, яка паралельна основі піраміди, відтинає подібну піраміду.**

За наслідком (про подібні піраміди), площина, паралельна основі піраміди, відтинає подібну їй піраміду. Частину піраміди, що міститься між



Мал. 112



Мал. 113

її основою і січною площиною, паралельною основі, називають *зрізаною пірамідою* (мал. 112). Грані зрізаної піраміди, які лежать у паралельних площинах, називають *основами зрізаної піраміди*, а інші грані — *бічними гранями зрізаної піраміди*. Основами зрізаної піраміди є подібні многокутники, а бічні грані — трапеції.

У правильної зрізаної піраміди верхня основа — правильний многокутник, подібний нижній основі, а бічні грані — рівні рівнобічні трапеції. Висоти бічних граней правильної зрізаної піраміди — рівні. Їх називають *апофемами правильної зрізаної піраміди* (мал. 113).

ТЕОРЕМА **(про бічну поверхню правильної зрізаної піраміди).**

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему.

Дано: правильна n-кутна зрізана піраміда, P_1 і P_2 — периметри її основ, l — апофема піраміди (мал. 113).

Довести: $S_{бп} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l$.

Доведення. Оскільки P_1 і P_2 — периметри основ правильної зрізаної піраміди, то сторони її основ дорівнюють $\frac{P_1}{n}$ і $\frac{P_2}{n}$. Кожна бічна грань даної піраміди — трапеція з основами $\frac{P_1}{n}$ і $\frac{P_2}{n}$ та висотою, що дорівнює апофемі піраміди, тобто l. Площа такої трапеції дорівнює: $S = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n}\right)\cdot l$.

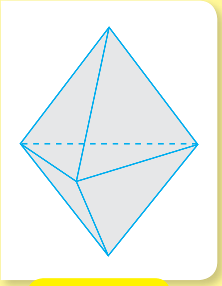
Тоді площа бічної поверхні даної піраміди дорівнює сумі всіх таких площ, тобто:

$$S_{бп} = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n}\right)\cdot l\cdot n = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot\frac{1}{n}\cdot l\cdot n = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l.$$

Дізнайтеся більше

1. Слово «піраміда» — грецьке. Але походження в нього єгипетське, означає «гробниця фараона». Пізніше цим словом стали називати будь-яке тіло схожої форми.

2. *Біпіраміда,* або *діпіраміда,* — це многогранник, утворений із двох пірамід, одна з яких є дзеркальним відображенням іншої (мал. 114). Лінія їх з'єднання утворює многокутник. Проста біпіраміда утворюється з двох тетраедрів. Якщо основа піраміди — квадрат, то одержимо особливу біпіраміду — октаедр.

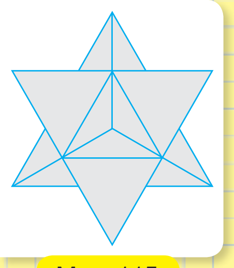


Мал. 114

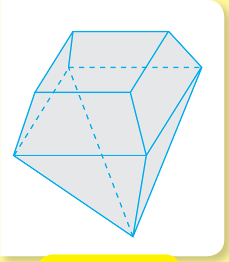
Ребрами біпіраміди є відрізки, які з'єднують її вершини. ***Грані*** біпіраміди — плоскі многокутники, утворені ребрами, — трикутники або трапеції.

Термін біпіраміда може застосовуватися і для характеристики об'єктів, які складаються з двох пірамід, незалежно від їх симетрії. Елементарні форми біпірамід застосовують для опису складних форм кристалів, наприклад, при огранці кристалів (діамантів).

З'єднання двох тетраедрів може дати й більш складну форму у вигляді тригональної зірчастої біпіраміди (мал. 115), тетрагональної зрізаної біпіраміди (мал. 116), біпіраміди — кардіоїда (мал. 117) та ін.



Мал. 115



Мал. 116

Мал. 117

3. Одним з відомих геометрів України є **Микола Іванович Кованцов** (1924–1988). Учений розробив теорію комплексів прямих і теорію лінійчастої диференціальної геометрії, які мають широке застосування. Близько 40 років професор М. І. Кованцов очолював кафедру геометрії Київського державного університету імені Тараса Шевченка. У його науковому доробку близько 200 наукових і науково-популярних праць у галузі геометрії, методики навчання математики, історії математики, філософських проблем природознавства. Серед цих праць особливе місце займають навчальні посібники для студентів класичних і педагогічних університетів: «Проективна геометрія» (1969, 1985), «Диференціальна геометрія» (1973), «Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач» (1982, 1989) (у співавторстві з Г. М. Зражевською, В. Г. Кочаровським та В. І. Михайловським).

Пригадайте головне

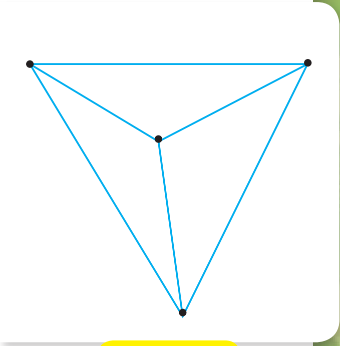
1. Поясніть, що таке піраміда.
2. Що є основою піраміди; її гранями; ребрами; вершинами?
3. Чому піраміду називають трикутною; чотирикутною; n-кутною?
4. Поясніть, що таке бічна поверхня піраміди; повна поверхня. Як їх знайти?
5. Сформулюйте означення висоти піраміди.
6. Яка піраміда називається правильною? Які її властивості?
7. Що таке апофема правильної піраміди?
8. Запишіть формулу площі бічної поверхні правильної піраміди.
9. Сформулюйте й доведіть теорему про перетин піраміди площиною, паралельною основі.
10. Яка піраміда називається зрізаною; правильною зрізаною?
11. Що таке апофема правильної зрізаної піраміди?
12. Сформулюйте й доведіть теорему про бічну поверхню правильної зрізаної піраміди.

Розв'яжіть задачі

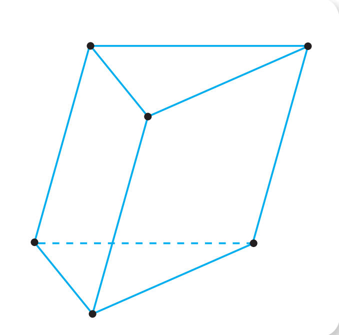
205'. На якому з малюнків 118–121 зображено піраміду?

206'. На якому з малюнків 118–121 зображено:
1) трикутну піраміду;
2) чотирикутну піраміду?

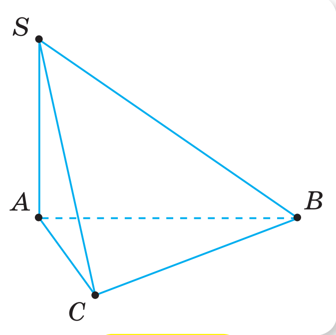
207'. На малюнку 121 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$. Назвіть:
1) основу піраміди;
2) бічні грані піраміди;
3) діагональ основи піраміди;
4) діагональний переріз піраміди;
5) апофему піраміди.



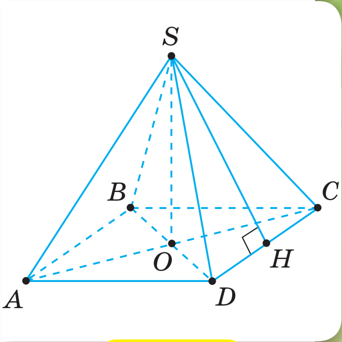
Мал. 118



Мал. 119



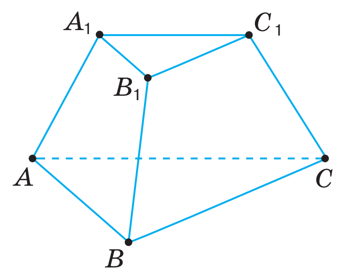
Мал. 120



Мал. 121

208'. Скільки граней, вершин, ребер має:
1) трикутна піраміда;
2) чотирикутна піраміда;
3) n-кутна піраміда.

209'. На малюнку 122 зображено зрізану піраміду. Назвіть:
1) основи піраміди;
2) бічні грані піраміди;
3) подібні многокутники.



Мал. 122

210'. У довільній піраміді провели січну площину через середини її бічних ребер. Чи будуть подібними многокутник, який отримали в перерізі, та основа піраміди?

211°. Основа піраміди — ромб, сторона якого a, а одна з діагоналей — d. Її висота проходить через точку перетину діагоналей ромба й дорівнює h. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо:
1) $a = 5$ см, $d = 8$ см, $h = 7$ см;
2) $a = 13$ см, $d = 10$ см, $h = 12$ см;
3) $a = 8$ см, $d = 4\sqrt{3}$ см, $h = 4$ см.

212°. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а бічне ребро — b. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $a = 3\sqrt{3}$ см, $b = 5$ см;
2) $a = 6\sqrt{3}$ см, $b = 10$ см;
3) $a = 12\sqrt{3}$ см, $b = 13$ см.

213°. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює b й нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $b = 8$ см, $\alpha = 30°$;
2) $b = 6\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
3) $b = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

214°. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а апофема — c. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $a = 10\sqrt{3}$ см, $c = 13$ см;
2) $a = 6\sqrt{3}$ см, $c = 5$ см;
3) $a = 20\sqrt{3}$ см, $c = 26$ см.

215°. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює c, а висота — h. Знайдіть сторону основи піраміди, якщо:
1) $c = 4$ см, $h = \sqrt{13}$ см;
2) $c = \sqrt{37}$ см, $h = 5$ см;
3) $c = 4\sqrt{3}$ см, $h = 6$ см.

216°. Бічна грань правильної трикутної піраміди — правильний трикутник, периметр якого дорівнює P. Знайдіть висоту піраміди, якщо: 1) $P = 36$ см; 2) $P = 18$ см; 3) $P = 9$ см.

217°. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює h, а сторона основи — a. Знайдіть бічне ребро піраміди, якщо:
1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $h = 12$ см;
2) $a = 2\sqrt{2}$ см, $h = 14$ см;
3) $a = 8$ см, $h = 7$ см.

218°. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b й нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $b = 12$ см, $\alpha = 30°$;
2) $b = 5\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
3) $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

219°. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює c і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть сторону основи піраміди, якщо:
1) $c = 8$ см, $\alpha = 30°$;
2) $c = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
3) $c = 6\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

220°. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює a і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть апофему піраміди, якщо: 1) $a = 10$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 2\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

221°. Основа піраміди — правильний n-кутник зі стороною 15 см. Висота піраміди дорівнює 20 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

222°. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною a, а її бічними гранями є рівні рівнобедрені трикутники з площею S. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, якщо: 1) $a = 3$ см, $S = 12$ см^2; 2) $a = 4$ см, $S = 20$ см^2; 3) $a = 6$ см, $S = 24$ см^2.

223°. За стороною основи a і висотою h знайдіть повну поверхню правильної піраміди: 1) чотирикутної; 2) шестикутної.

224°. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 см і 4 см, а бічне ребро — 2 см. Знайдіть висоту й апофему піраміди.

225°. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторона нижньої основи дорівнює b, верхньої основи — $0{,}25b$, бічне ребро — c. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо:
1) $b = 16$ см, $c = 10$ см; 2) $b = 32$ см, $c = 13$ см;
3) $b = \dfrac{16}{3}$ см, $c = 2\sqrt{5}$ см.

226°. У правильній n-кутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють a і b, а апофема — l. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди. Заповніть таблицю 4.

Таблиця 4

n	3	3	4	4	6	6
a	2 см	3 см	2 см	5 см	2 см	3 см
b	3 см	6 см	5 см	8 см	3 см	4 см
l	4 см	5 см	10 см	12 см	3 см	4 см
$S_{бп}$						
$S_{пп}$						

227°. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ відносяться, як 1 : 2. Площа верхньої основи дорівнює S, а апофема — l. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, якщо:
1) $S = 4\sqrt{3}$ см², $l = 10$ см; 2) $S = 16\sqrt{3}$ см², $l = 6$ см;
3) $S = 25\sqrt{3}$ см², $l = 8$ см.

228°. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ відносяться, як 1 : 4. Периметр верхньої основи дорівнює P, а апофема — l. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, якщо:
1) $P = 48$ см, $l = 5$ см; 2) $P = 12$ см, $l = 6$ см; 3) $P = 24$ см, $l = 10$ см.

229°. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ відносяться, як 1 : 3. Площа верхньої основи дорівнює S, а апофема — l. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, якщо:
1) $S = 4$ см², $l = 3$ см; 2) $S = 9$ см², $l = 6$ см; 3) $S = 16$ см², $l = 5$ см.

230°. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ відносяться, як 1 : 5. Периметр верхньої основи дорівнює P, а апофема — l. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, якщо:
1) $P = 20$ см, $l = 3$ см; 2) $P = 40$ см, $l = 4$ см; 3) $P = 60$ см, $l = 3$ см.

231°. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами a і b. Кожне ребро піраміди дорівнює c. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 13$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $c = 10\sqrt{2}$ см.

232. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами a і b. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і дорівнює h. Знайдіть бічне ребро піраміди, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $h = 12$ см; 2) $a = 8$ см, $b = 4$ см, $h = 4$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $h = 14$ см.

233. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами a і b. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють α. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60°$;
2) $a = 2$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 30°$;
3) $a = 4$ см, $b = 2\sqrt{5}$ см, $\alpha = 60°$.

234. Основа піраміди — прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює a. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює c, а її висота — h. Знайдіть другий катет трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $c = 13$ см, $h = 12$ см;
2) $a = 6$ см, $c = 4\sqrt{2}$ см, $h = 4$ см;
3) $a = 4$ см, $c = 6$ см, $h = 2\sqrt{5}$ см.

235. Площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди дорівнює S, а периметр основи — P. Знайдіть апофему піраміди, якщо:
1) $S = 48$ см^2, $P = 12$ см; 2) $S = 24$ см^2, $P = 24$ см; 3) $S = 54$ см^2, $P = 36$ см.

236. За стороною основи a та бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

237. За стороною основи a і висотою h знайдіть апофему правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

238. Основа піраміди $SABC$ — рівнобедрений трикутник зі сторонами $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см. Ребро SA піраміди перпендикулярне до площини основи й дорівнює 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

239. Усі ребра чотирикутної піраміди мають довжину a. Знайдіть площі бічної й повної поверхонь, якщо: 1) $a = 2$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 1$ см.

240. Усі грані трикутної піраміди є правильними трикутниками зі стороною a. Висота піраміди дорівнює H. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди. Заповніть таблицю 5.

Таблиця 5

a	6 см	8 см	12 см	16 см
H	$2\sqrt{6}$ см	$\frac{8}{3}\sqrt{6}$ см	$4\sqrt{6}$ см	$\frac{16}{3}\sqrt{6}$ см
$S_{бп}$				
$S_{пп}$				

241. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює $\sqrt{13}$ см, а радіус кола, вписаного в основу, — $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

242. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см й утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

243. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює h, а двогранний кут при основі — 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

244. Основа піраміди — квадрат зі стороною 12 см. Висота піраміди дорівнює 35 см і проходить через вершину основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

245. Основа піраміди — ромб, площа якого 600 см^2, а сторона 25 см. Основа висоти піраміди збігається з точкою перетину діагоналей ромба. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота — 9 см.

246. Основа піраміди — прямокутник, діагональ якого дорівнює 8 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутами 30° і 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

247. Основа піраміди — паралелограм зі сторонами a і b, а одна з діагоналей — d. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і дорівнює h. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $d = 6$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 2\sqrt{13}$ см, $h = 3$ см;
3) $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 4$ см, $d = 2\sqrt{2}$ см, $h = \sqrt{6}$ см.

248. Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см, а сторона основи — $4\sqrt{3}$ см.

249. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, якщо кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює 60°, а сторона основи — 6 см.

250. Основа піраміди — рівнобічна трапеція з основами $6\sqrt{3}$ см і $4\sqrt{3}$ см і висотою 5 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

251. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h, а двогранний кут між суміжними бічними гранями — α. Знайдіть площу основи піраміди.

252. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 144 см^2. Бічну грань вписано в коло з радіусом 10 см. Знайдіть висоту піраміди.

253. Висота трикутної піраміди h однаково віддалена від сторін основи, які дорівнюють a, b, c. Знайдіть двогранні кути при основі піраміди, якщо:
1) $a = 25$ см, $b = 29$ см, $c = 36$ см, $h = 8$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $c = 13$ см, $h = 4$ см;
3) $a = 5$ см, $b = 16$ см, $c = 19$ см, $h = 1$ см.

254. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см, а її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

255. У піраміді проведено дві січні площини, паралельні основі. Різниця площ цих перерізів дорівнює 96 см^2, а відстані від вершини піраміди до площин перерізів відносяться, як 7 : 9. Знайдіть площі цих перерізів.

256. Основи зрізаної піраміди — правильні трикутники зі сторонами 3 см і 5 см. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи й дорівнює 1 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

257. **У правильної чотирикутної піраміди сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині — α. Знайдіть:**
1) бічне ребро піраміди;
2) висоту піраміди;
3) кут між бічною гранню і площиною основи;
4) двогранний кут при бічному ребрі піраміди.

258*. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Побудуйте розгортку піраміди.

259*. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 5 см, а повна поверхня — 16 см^2. Знайдіть сторону основи піраміди.

260*. Основа піраміди — ромб із гострим кутом α. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює h.

261*. Знайдіть висоту правильної чотирикутної піраміди, у якої площа основи 248 см^2, а бічне ребро дорівнює периметру основи.

262*. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди, що дорівнює c, нахилене до площини основи піраміди під кутом α. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох суміжних сторін основи паралельно до бічного ребра, яке перетинає ці сторони.

263*. **Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють S_1 і S_2. Доведіть, що площа перерізу піраміди площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, дорівнює $\left(\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$.**

264*. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 48 см^2 і 108 см^2. Бічне ребро піраміди поділено на 3 рівні частини, і через точки поділу проведено площини, паралельні основам. Знайдіть площу перерізу.

265*. Основа піраміди — квадрат, а двогранні кути при її основі відносяться, як 1 : 2 : 7 : 2. Знайдіть ці двогранні кути.

266*. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді апофема 12 см, бічне ребро 13 см, а бічна поверхня 720 см^2. Знайдіть сторони основ.

267*. **Якщо плоскі кути при вершині трикутної піраміди — прямі, то її висота проходить через точку перетину висот основи.** Доведіть.

268*. Знайдіть точку, сума квадратів відстаней від якої до всіх вершин правильної чотирикутної піраміди була б найбільшою.

269*. Усі діагональні перерізи правильної шестикутної піраміди мають рівні площі. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

Проявіть компетентність

270. З аркуша паперу виготовте розгортку правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 6 см і бічним ребром 5 см.

271. Із чотирьох кусків брезенту, які мають форму правильних трикутників зі стороною 2,5 м, пошили шатер. Скільки брезенту використали для пошиття шатра (мал. 123)?

272. Дах будинку має форму чотирикутної піраміди, усі бічні ребра якої дорівнюють 5 м, а основою є прямокутник зі сторонами 8 м і 9 м. Скільки потрібно купити фарби зеленого кольору, щоб пофарбувати цей дах, якщо на 1 м^2 витрачається 120 г фарби?

273. У рожевої піраміди фараона Снофру в Дахшурі в Єгипті кут нахилу стін 43°36′. Її основа має розміри 218,5 × 221,5 м. Висота піраміди дорівнює 104,4 м. Яка площа бічної поверхні цієї піраміди?

274. Найбільша єгипетська піраміда — це піраміда Хеопса, вона має форму правильної чотирикутної піраміди з висотою 138,8 м та довжиною сторони — 230 м. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди (мал. 124).

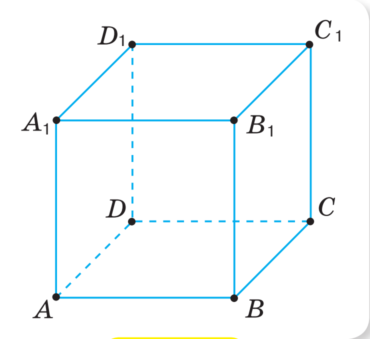
Мал. 123

Мал. 124

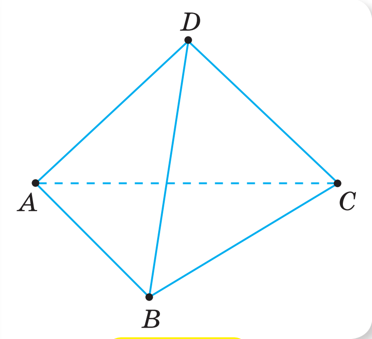
§ 6. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

1. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ, ЇХ ВИДИ

Вам траплялися деякі многогранники, у яких усі грані є рівними правильними многокутниками. Такими є, наприклад, куб (мал. 125) і правильна трикутна піраміда, бічні ребра якої дорівнюють ребрам основи (мал. 126). Ці многогранники вважають правильними. Спробуйте дати означення правильному многограннику та порівняйте його з наведеним у підручнику.



Мал. 125

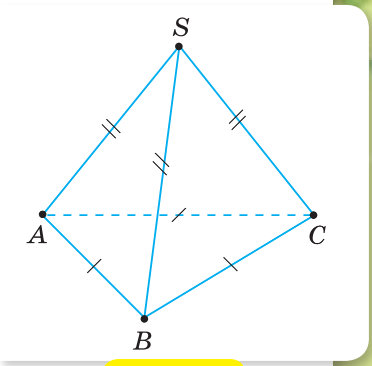


Мал. 126

Многогранник **називається** ***правильним*****, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники й у кожній вершині многогранника сходиться одна й та сама кількість ребер.**

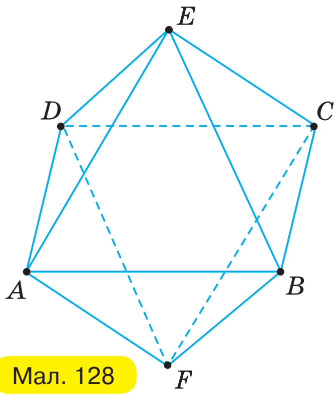
Чи кожна правильна піраміда є правильним многогранником? Ні. На малюнку 127 ви бачите правильну трикутну піраміду, яка не є правильним многогранником — у неї лише основа є правильним трикутником, а бічні грані — рівнобедрені трикутники. Отже, не виконується перша вимога означення правильного многогранника.

З означення випливає, що **у правильного многогранника рівні всі ребра, усі плоскі кути та всі двогранні кути.**



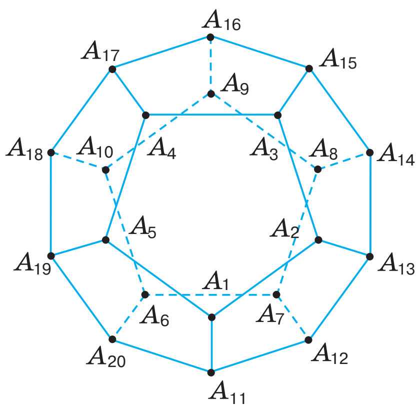
Мал. 127

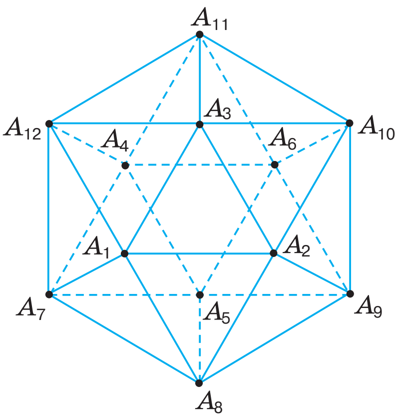
2. ВИДИ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ



Мал. 128

До правильних многогранників відносять: *тетраедр* (диа. мал. 126), *гексаедр,* або куб (див. мал. 125), *октаедр* (мал. 128), *додекаедр* (мал. 129) та *ікосаедр* (мал. 130). Свої назви правильні многогранники одержали від сполучення двох слів. Перше з них відповідає кількості граней многогранника, а слово «*hedra*» означає «опора» (зараз говоримо «грань»). Отже, тетраедр — чотиригранник, гексаедр — шестигранник, октаедр — восьмигранник, додекаедр — дванадцятигранник, ікосаедр — двадцятигранник.


Мал. 129


Мал. 130

У тетраедра грані — правильні трикутники, а в кожній його вершині сходяться по три ребра. Він має 4 грані, 4 вершини та 6 ребер.

У гексаедра (куба) грані — квадрати, а в кожній його вершині сходяться по три ребра. Він має 6 граней, 8 вершин і 12 ребер.

В октаедра грані — правильні трикутники, а в кожній його вершині сходяться по чотири ребра. Він має 8 граней, 6 вершин і 12 ребер.

У додекаедра грані — правильні п'ятикутники, а в кожній його вершині сходяться по три ребра. Він має 12 граней, 20 вершин і 30 ребер.

В ікосаедра грані — правильні трикутники, а в кожній його вершині сходяться по п'ять ребер. Він має 20 граней, 12 вершин і 30 ребер.

? Чи існують інші види правильних многогранників? Ні. Доведемо це.

ТЕОРЕМА **(про кількість видів правильних многогранників).**

Існує не більше п'ятьох різних видів правильних многогранників.

Дано: правильні многогранники (тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр).

Довести: інших правильних многогранників не існує.

Доведення. Розглянемо, якими можуть бути грані правильних многогранників, що сходяться в одній довільній вершині.

1. Нехай грані правильного многогранника — правильні трикутники. В одній вершині їх може сходитися 3, 4 або 5. Справді, менше трьох сходитися не може, бо тоді многогранник був би не обмеженим. Якби у вершині многогранника сходилося шість правильних трикутників, то сума їх плоских кутів дорівнювала б $60° \cdot 6 = 360°$, а, за властивістю многогранного кута, сума плоских кутів многогранного кута менша від 360°. Таким чином, якщо у вершині многогранного кута сходяться три рівносторонні трикутники, то маємо тетраедр, якщо чотири — октаедр, якщо п'ять — ікосаедр.

2. Нехай грані правильного многогранника — квадрати. За властивістю многогранного кута, таких квадратів може бути три, бо $90° \cdot 3 < 360°$, а для чотирьох: $90° \cdot 4 = 360°$. Такий многогранник існує — гексаедр, або куб.

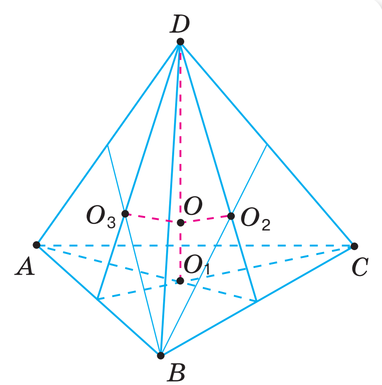
3. Нехай грані правильного многогранника — правильні п'ятикутники. За властивістю многогранного кута, їх може три, бо $108° \cdot 3 < 360°$, а для чотирьох: $108° \cdot 4 > 360°$. Такий многогранник існує — додекаедр.

Шести-, семи- й більше многокутниками грані бути не можуть, оскільки, за властивістю многогранного кута, уже для шестикутника $120° \cdot 3 = 360°$.

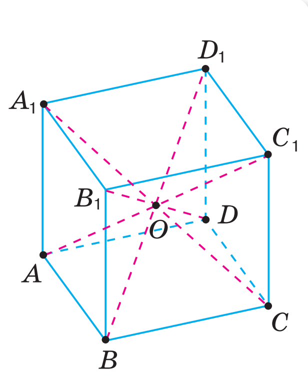
3. ВЛАСТИВОСТІ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ

У будь-якому правильному многограннику існує точка, яка рівновіддалена від усіх його вершин та всіх його граней. Ця точка називається *центром правильного многогранника*.

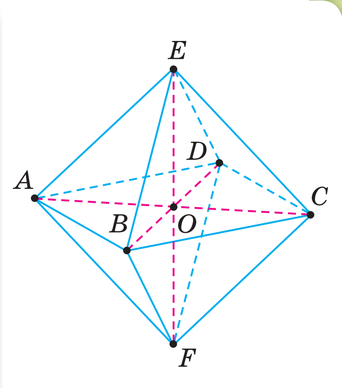
Центром тетраедра є точка перетину його висот (мал. 131). У кубі (мал. 132) та октаедрі (мал. 133) центром є точка перетину діагоналей, оскільки в цих многогранників діагоналі рівні й у точці перетину діляться навпіл. У додекаедра (мал. 134) та ікосаедра (мал. 135) є кілька видів діагоналей. У центрі додекаедра й ікосаедра перетинаються більші діагоналі (ті, що сполучають найвіддаленіші вершини).



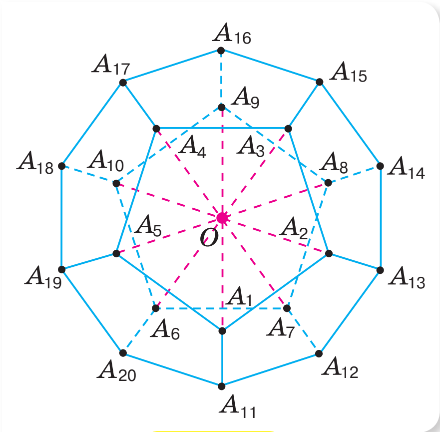
Мал. 131



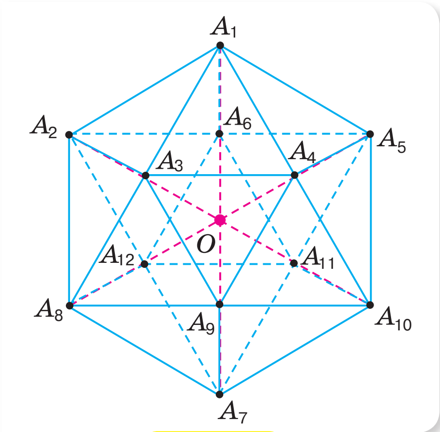
Мал. 132



Мал. 133



Мал. 134



Мал. 135

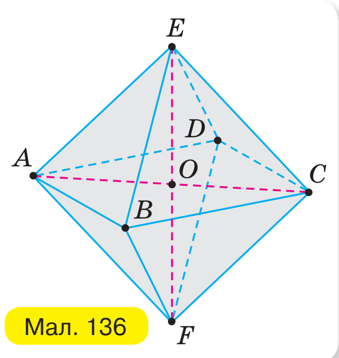
Які спільні властивості мають правильні многогранники? Поміркуємо.

Оскільки правильні многогранники є різновидами многогранника, то вони мають усі його властивості: кількість двогранних кутів така, як кількість ребер; кількість многогранних кутів така, як кількість вершин; площа поверхні дорівнює сумі площ усіх його граней. Назвемо деякі **спільні особливі властивості правильних многогранників.**

1. **У будь-якого правильного многогранника відповідно рівні: усі ребра; усі грані; усі двогранні кути; усі многогранні кути.**
2. **Площа поверхні правильного многогранника дорівнює площі його грані, помноженій на кількість граней.**
3. **Правильні многогранники одного виду є подібними.**

Задача. Знайдіть площу діагонального перерізу $AECF$ октаедра $ABCDEF$ (мал. 136), ребро якого дорівнює a.

Розв'язання. Оскільки в октаедра всі ребра рівні, то $AE = EC = CF = AF = a$. Отже, діагональний переріз $AECF$ — ромб. Оскільки в октаедрі діагоналі рівні, то $AC = EF$. Отже, ромб $AECF$ є квадратом. Тому площа діагонального перерізу $AECF$ дорівнює a^2.

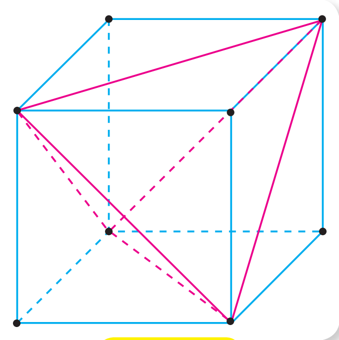


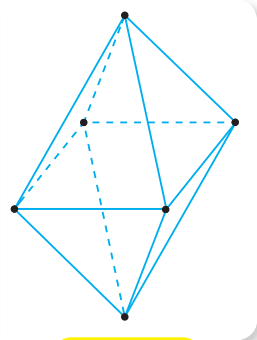
Мал. 136

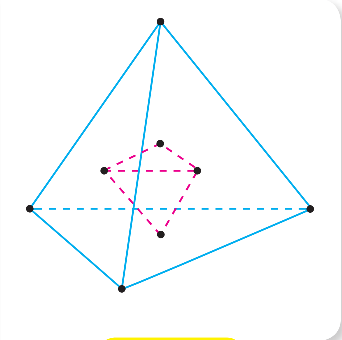
Щоб знайти елементи, периметр чи площу діагонального перерізу правильного многогранника, спочатку встановіть вид многокутника, який отримуємо в перерізі, а потім застосуйте властивості цього многокутника.

4. ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ

Ви вже знаєте, як побудувати куб і тетраедр. Виявляється, тетраедр можна отримати, використовуючи побудований куб (мал. 137).


Мал. 137


Мал. 138


Мал. 139

Октаедр можна побудувати, склавши дві правильні чотирикутні піраміди, бічними гранями яких є рівносторонні трикутники (мал. 138).

Якщо сполучити центри граней тетраедра, то який одержимо многогранник? Тетраедр, але з іншим ребром (мал. 139).

Правильні многогранники називаються *двоїстими*, якщо центри граней одного многогранника є вершинами іншого.

Приклади двоїстих многогранників: куб та октаедр, додекаедр та ікосаедр, тетраедр двоїстий сам собі. Цією властивістю зручно користуватися для побудови правильних многогранників.

Чи мають правильні многогранники елементи симетрії (центри, осі, площини)? Поміркуємо.

Матеріал про симетрію куба ви вивчили в § 4 підручника.

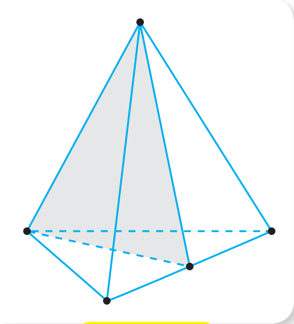
Узагальнимо відомості про тетраедр.

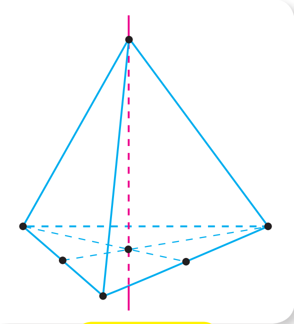
1. У тетраедра немає центра симетрії.

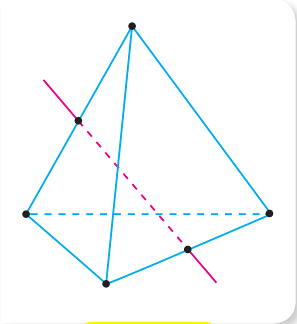
2. Тетраедр має шість площин симетрії, кожна з яких проходить через ребро й середину протилежного ребра (мал. 140).

3. Тетраедр має чотири осі симетрії, які проходять через вершини та центри протилежних їм граней, тобто через висоти тетраедра (мал. 141).

4. Тетраедр має три осі дзеркальної симетрії, які проходять через середини протилежних ребер (мал. 142).


Мал. 140


Мал. 141


Мал. 142

Оскільки додекаедр та ікосаедр — двоїсті правильні многогранники, то елементи симетрії в них однакові. А саме: 1 центр симетрії, 15 площин симетрії, 31 вісь симетрії.

? Чи має октаедр центри, осі, площини симетрії?

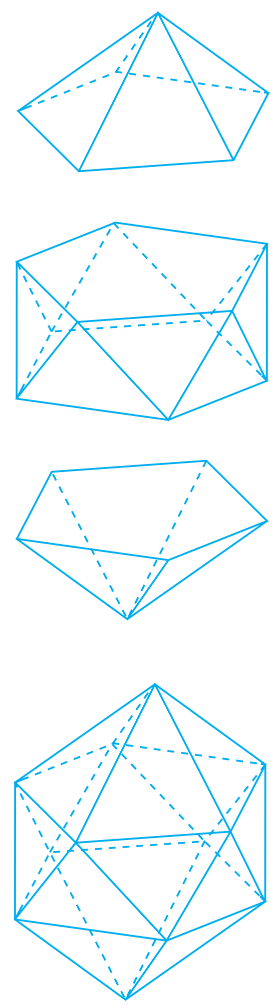
Оскільки октаедр і куб — двоїсті правильні многогранники, то елементи симетрії в октаедри такі само, як і в куба. А саме: 1 центр симетрії, 9 площин симетрії, 13 осей симетрії та 4 осі дзеркальної симетрії.

Дізнайтеся більше

1. Чотири перші види правильних многогранників було відкрито в VI ст. до н. е. науковою школою Піфагора. Три століття потому Евклід у своїх «Началах» показав, що правильних опуклих многогранників існує лише п'ять видів.

Видатний мислитель античності **Платон** (428–348 р. до н. е.) — засновник філософської школи «Академія», вважав правильні многогранники досконалими тілами. Він пов'язував їх із природними стихіями, використовував у своїх філософських роздумах, але не займався безпосередньо їх дослідженням. З тих часів правильні многогранники носять назву *Платонових тіл*.

2. Для того щоб побудувати ікосаедр, спочатку можна побудувати п'ятикутну ***антипризму***. У неї основи — правильні п'ятикутники. Бічні грані антипризми — трикутники. Можна так обрати відстань між площинами основ, щоб трикутники були правильними. Далі на основах антипризми потрібно побудувати дві правильні піраміди, бічні грані яких — правильні трикутники. Одержимо ікосаедр (мал. 143).



Мал. 143

3. Згідно з означенням, правильний многогранник має відповідати таким вимогам: усі його грані — правильні й рівні многокутники; усі його двогранні та многогранні кути — рівні. Дещо послабивши ці вимоги, вчені дійшли поняття напівправильних многогранників. *Напівправильними* називаються опуклі многогранники, у яких усі грані — правильні многокутники (але не обов'язково рівні між собою) і многогранні кути при всіх вершинах — рівні.

Приклади напівправильних многогранників: будь-яка правильна n-кутна призма, у якої бічні грані — квадрати; будь-яка правильна n-кутна антипризма.

Крім цих напівправильних многогранників, ще існує лише 14 видів напівправильних многогранників. 13 з них відкрив й описав Архімед у III ст. до н.е., тому їх і називають *архімедовими*. Це — зрізаний тетраедр, зрізаний октаедр, зрізаний ікосаедр, зрізаний куб, зрізаний додекаедр, кубооктаедр, ікосододекаедр, зрізаний кубооктаедр, зрізаний ікосододекаедр, ромбокубооктаедр, ромбоікосододекаедр, плосконосий куб, плосконосий додекаедр. Чотирнадцятий вид (псевдоромбокубооктаедр) був знайдений у 1957 р. московським математиком В. Г. Ашкінузе. Інших напівправильних многогранників немає.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Правильний многогранник	Platonic solid	Platonischer Korper
Октаедр	Octahedron	Oktaeder

Пригадайте головне

1. Що таке правильні многогранники?
2. Назвіть види правильних многогранників.
3. Що є основами правильних многогранників; їх гранями?
4. Скільки вершин, ребер, граней має кожний вид правильних многогранників?
5. Сформулюйте й доведіть теорему про кількість видів правильних многогранників.
6. Що таке центр правильного многогранника?
7. Сформулюйте властивості правильних многогранників.
8. Як побудувати правильний октаедр; ікосаедр; додекаедр?
9. Які многогранники називають двоїстими? Наведіть приклади.

Розв'яжіть задачі

275'. Чи є правильним многогранником:
1) правильна трикутна призма;
2) правильна чотирикутна призма;
3) правильна шестикутна призма? Чому?

276'. Чи існує така правильна призма, яка є правильним многогранником?

277'. Чи є правильним многогранником: 1) правильна трикутна піраміда; 2) правильна чотирикутна піраміда; 3) правильна шестикутна піраміда? Чому?

278'. Чи існує така правильна піраміда, яка є правильним многогранником?

279'. Скільки тригранних кутів має:
1) тетраедр;
2) куб;
3) додекаедр?

280'. Скільки чотиригранних кутів має октаедр?

281'. Скільки п'ятигранних кутів має ікосаедр?

282'. Які з пар многогранників не є двоїстими:
1) тетраедр і куб;
2) куб й октаедр;
3) ікосаедр і додекаедр?

283'. Чи можна отримати октаедр, склавши два тетраедри? Відповідь поясніть.

284'. У яких правильних многогранників однакові групи елементів симетрії?

285°. Ребро тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 12$ см.

286°. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 12$ см.

287°. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 12$ см.

288°. Ребро ікосаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 12$ см.

289°. Знайдіть суму плоских кутів при вершинах: 1) октаедра; 2) ікосаедра; 3) додекаедра.

290°. Як зміниться площа поверхні тетраедра, якщо його ребро: 1) збільшити у 2 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 75 %?

291°. Як зміниться площа поверхні октаедра, якщо його ребро: 1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 25 %?

292°. Як зміниться площа поверхні ікосаедра, якщо його ребро: 1) збільшити у 2 рази; 2) зменшити в 3 рази; 3) збільшити на 50 %?

293°. Як зміниться площа поверхні куба, якщо його ребро:
1) збільшити в 4 рази;
2) зменшити у 2 рази;
3) зменшити на 25 %?

294°. Скільки площин симетрії, які проходять через дану вершину, має тетраедр?

295°. Доведіть, що центри граней куба є вершинами октаедра.

296°. Доведіть, що центри граней октаедра є вершинами куба.

297°. Доведіть, що центри граней тетраедра є вершинами іншого тетраедра.

298°. Доведіть, що протилежні грані октаедра лежать у паралельних площинах.

299. Площа поверхні тетраедра дорівнює S. Знайдіть висоту його грані, якщо:
1) $S = 16\sqrt{3}$ см^2;
2) $S = 36\sqrt{3}$ см^2;
3) $S = 48\sqrt{3}$ см^2.

300. Площа поверхні тетраедра дорівнює S. Знайдіть площу круга, вписаного в його грань, якщо:
1) $S = 36\sqrt{3}$ см^2;
2) $S = 64\sqrt{3}$ см^2;
3) $S = 54\sqrt{3}$ см^2.

301. Висота грані октаедра дорівнює b. Знайдіть площу поверхні октаедра, якщо:
1) $b = 6\sqrt{3}$ см;
2) $b = 8$ см;
3) $b = 2\sqrt{6}$ см.

302. Площа поверхні октаедра дорівнює S. Знайдіть відстань між вершинами його чотиригранних кутів, якщо:
1) $S = 16\sqrt{3}$ см^2;
2) $S = 32\sqrt{3}$ см^2;
3) $S = 64$ см^2.

303. Ребро тетраедра дорівнює a. Знайдіть ребро куба, площа поверхні якого дорівнює площі поверхні тетраедра, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 6$ см;
3) $a = 8$ см.

304. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть ребро октаедра, площа поверхні якого дорівнює площі поверхні куба, якщо:
1) $a = 54$ см;
2) $a = 36$ см;
3) $a = 48$ см.

305. Ребро тетраедра дорівнює a. Знайдіть ребро куба, площа поверхні якого дорівнює площі поверхні тетраедра, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 6$ см;
3) $a = 8$ см.

306. **Якщо в тетраедра висота дорівнює стороні основи, то кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°.** Доведіть.

307. Ребро додекаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні, якщо:
1) $a = 4$ см;
2) $a = 6$ см;
3) $a = 12$ см.

308. У тетраедра $ABCD$ ребро дорівнює a. На його ребрах BC і CD відкладено відрізки $BK = DN = \frac{a}{3}$, а на ребрах AB і DA — відрізки $BM = DP = x$, причому $0 < x < a$. За якої умови чотирикутник $KMPN$ є прямокутником?

309. **У тетраедра $ABCD$ бісектор двогранного кута при ребрі CD ділить ребро AB навпіл.** Доведіть.

310. Чи можна побудувати такий переріз октаедра, щоб він був правильним n-кутником? За яких значень n це можливо?

311. Доведіть, що діагоналі октаедра перетинаються в одній точці.

312. В октаедр вписано куб так, що його вершини лежать на ребрах октаедра. Знайдіть ребро куба, якщо ребро октаедра дорівнює b.

313*. Площі поверхонь тетраедра й октаедра — рівні. Доведіть, що ребро тетраедра дорівнює діагоналі октаедра.

314*. **Якщо α — двогранний кут тетраедра, а β — двогранний кут октаедра, то $\alpha + \beta = 180°$.** Доведіть.

315*. Доведіть, що середини ребер тетраедра є вершинами октаедра.

316*. Знайдіть відстань між протилежними гранями октаедра, якщо його ребро дорівнює a.

317*. Січна площина α утворює з площинами граней тетраедра чотири двогранні кути. Доведіть, що сума квадратів косинусів цих кутів є величиною сталою, яка дорівнює $\frac{4}{3}$.

318*. Відрізок, який з'єднує середини двох мимобіжних ребер правильної трикутної піраміди, перпендикулярний до цих ребер. Доведіть, що така піраміда є тетраедром.

319*. Який многогранник одержимо, якщо від кожної вершини тетраедра з ребром 2 см відітнути тетраедр із ребром 1 см?

320*. Ребро тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань між:
1) двома його протилежними вершинами;
2) між центрами двох суміжних граней;
3) протилежними гранями.

Проявіть компетентність

321. Скільки потрібно взяти дроту, щоб виготовити тетраедр, площа однієї грані якого дорівнює 6 м^2?

322. Скільки потрібно взяти дроту, щоб виготовити октаедр, площа поверхні якого дорівнює 60 м^2?

323. Виготовте з аркуша паперу розгортку:
1) тетраедра;
2) октаедра;
3) додекаедра;
4) ікосаедра.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення многогранному куту. Що таке плоский кут многогранного кута?
2. Сформулюйте теорему косинусів для тригранного кута.
3. Сформулюйте теорему синусів для тригранного кута.
4. Наведіть приклад ознаки рівності тригранних кутів.
5. Що таке многогранник? Які його елементи?
6. Як побудувати діагональний переріз многогранника?
7. Як знайти площу поверхні многогранника?
8. Які многогранники називаються подібними?
9. Назвіть властивості подібних многогранників.
10. Поясніть, що таке призма; її елементи.
11. Яку призму називають прямою; похилою; правильною?
12. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми; площу її повної поверхні?
13. Як знайти площу бічної поверхні похилої призми; площу її повної поверхні?
14. Поясніть, що таке паралелепіпед, його елементи.
15. Який паралелепіпед називають похилим; прямим; прямокутним?
16. Поясніть, що таке піраміда, її елементи.
17. Яку піраміду називають правильною?
18. Що таке апофема правильної піраміди?
19. Як знайти площу бічної поверхні правильної піраміди; площу її повної поверхні?
20. Яку піраміду називають зрізаною? Які її властивості?
21. Як знайти площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; площу її повної поверхні?
22. Поясніть, що таке правильний многогранник. Назвіть види правильних многогранників та їхні властивості.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами основи $ABCD$ і перерізу ADC_1B_1.

А. 60°.
Б. 90°.
В. 45°.
Г. 30°.

2° Три плоскі кути зі спільною вершиною утворюють тригранний кут. Яким має бути один із них, якщо два інші дорівнюють 40° і 55°?

А. 100°.
Б. 10°.
В. 95°.
Г. 70°.

3° Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а діагональ бічної грані — 6 см. Знайдіть діагональ призми.

А. 10 см.
Б. $2\sqrt{41}$ см.
В. $2\sqrt{23}$ см.
Г. $2\sqrt{17}$ см.

4 У многогранника дві бічні грані — паралелограми з діагоналями $5\sqrt{3}$ см, 8 см і кутом між ними — 60°; дві інші бічні грані — квадрати з діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні многогранника.

А. 132 см^2.
Б. 144 см^2.
В. $80\sqrt{3}+72$ см^2.
Г. $80\sqrt{6}+12\sqrt{2}$ см^2.

5* Бічна поверхня похилої призми дорівнює 320 см^2, а її перпендикулярний переріз — квадрат. Сторона квадрата і бічне ребро призми відносяться, як 1 : 5. Знайдіть бічне ребро призми.

А. 4 см.
Б. 20 см.
В. 5 см.
Г. 25 см.

№ 2

1° У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 12 см, а висота — 2 см. Знайдіть апофему піраміди.

А. 4 см.
Б. $2\sqrt{35}$ см.
В. 10 см.
Г. 36 см.

2° Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $10\sqrt{2}$ см, апофема — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А. 240 см^2.
Б. 600 см^2.
В. 60 см^2.
Г. 120 см^2.

3° Знайдіть периметр однієї грані ікосаедра, бічна поверхня якого дорівнює $45\sqrt{3}$ см^2.

А. 18 см.
Б. 9 см.
В. $27\sqrt{3}$ см.
Г. 36 см.

4 Основа піраміди — ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені під кутами 45°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А. $25\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2.
Б. 50 см^2.
В. 100 см^2.
Г. $50\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2.

5* Ребро октаедра дорівнює 3 см. Знайдіть площу поверхні чотирикутної призми, вершинами якої є центри граней октаедра.

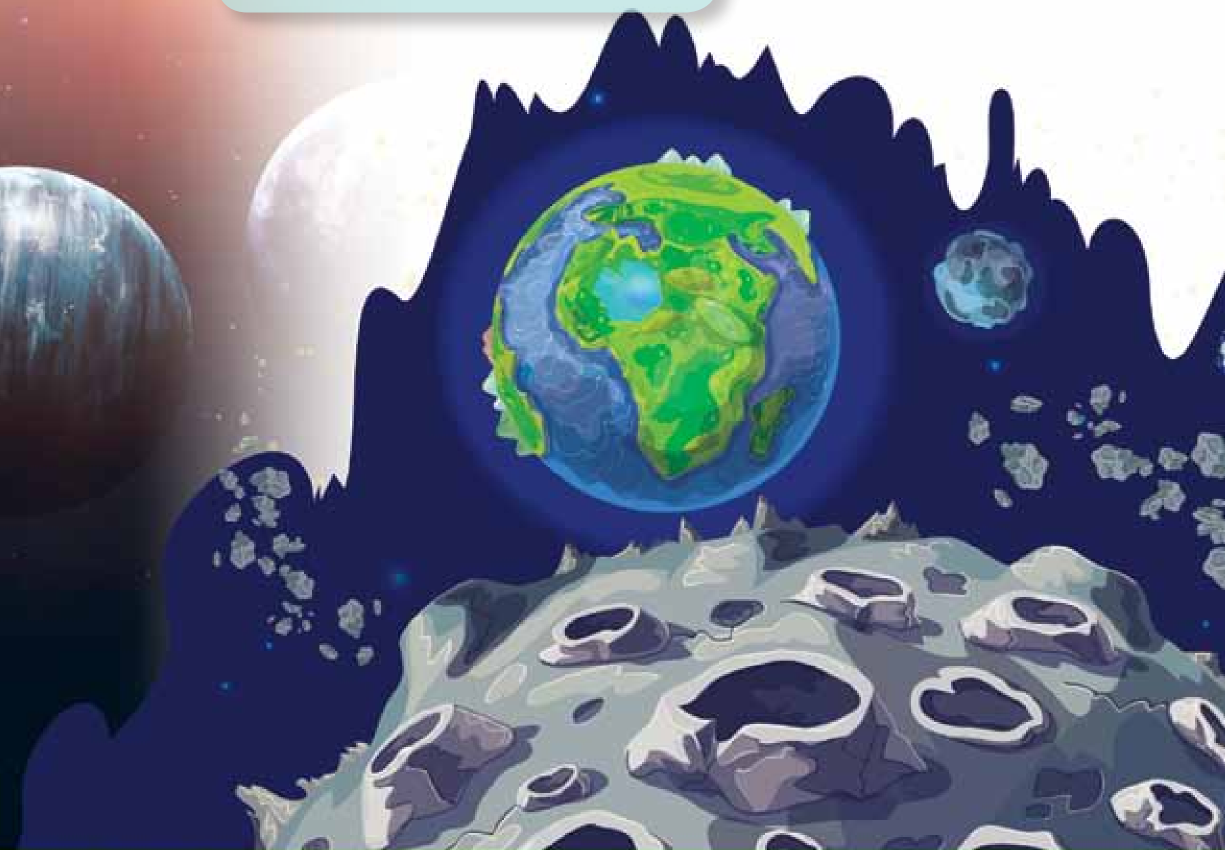
А. 12 см^2.
Б. 24 см^2.
В. 36 см^2.
Г. $24\sqrt{3}$ см^2.

Розділ 2

Тіла обертання

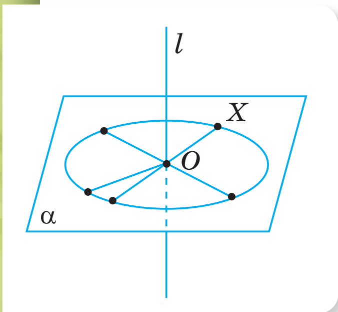
У розділі дізнаєтесь:

- що таке тіло та поверхня обертання;
- про окремі види тіл і поверхонь обертання (циліндр, конус, кулю, сферу), їхні елементи та властивості;
- про перерізи тіл обертання площинами та як їх будувати;
- про комбінацію многогранників і тіл обертання;
- як застосовувати властивості тіл і поверхонь обертання на практиці та під час розв’язування задач



§ 7. ТІЛА ТА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

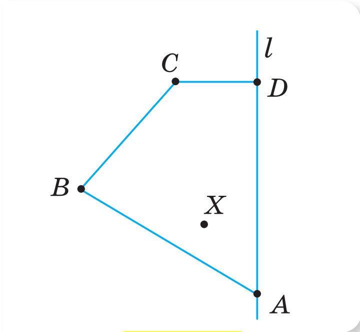
1. УТВОРЕННЯ ТІЛ І ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ



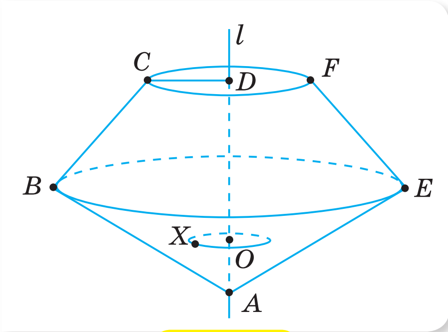
Мал. 144

На малюнку 144 зображено пряму l і точку X, що не лежить на l. Через точку X проведено площину α, перпендикулярну до прямої l. Нехай O — точка перетину площини α і прямої l. У площині α проведемо коло із центром O і радіусом OX. Кажуть, що це коло утворене обертанням точки X навколо осі l.

На малюнку 145. зображено плоский многокутник $ABCD$ у площині, яка проходить через пряму l. При обертанні цього многокутника навколо прямої l кожна його точка X, що не лежить на l, описує коло із центром O на цій прямій і радіусом OX (мал. 146). А многокутник $ABCD$ описує *тіло обертання* F. Пряма l — *вісь обертання*.



Мал. 145

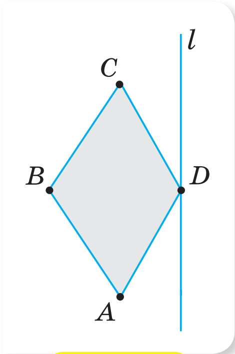


Мал. 146

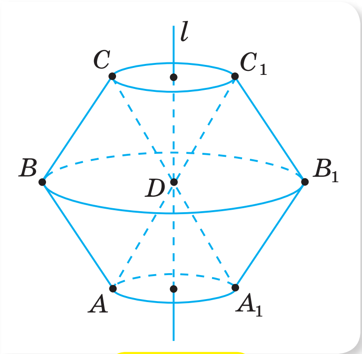
Кажуть, що тіло F дістали обертанням многокутника $ABCD$ навколо осі l або навколо його сторони AD. Під час обертання ламана $ABCD$, що складається зі сторін многокутника, які не лежать на осі l, утворюють *поверхню тіла обертання*. Зрозуміло, що обертанням плоскої фігури дістанемо тіло обертання, а обертанням лінії — поверхню обертання.

? Чи дістанемо тіло обертанням кола навколо його дотичної? Ні, бо коло не плоска фігура. Обертаючись, коло утворить поверхню обертання.

Щоб зобразити тіло, утворене обертанням многокутника навколо осі l (мал. 147): 1) для точок, що не лежать на осі обертання, позначте точки, симетричні відносно осі обертання l вершинам ламаної, яка утворює многокутник (мал. 148); 2) проведіть еліпси через вершини ламаної і відповідні симетричні їм точки; потрібні точки сполучіть відрізками.



Мал. 147



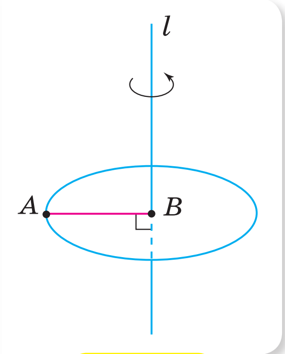
Мал. 148

? Які тіла можуть утворюватися в результаті обертання відрізка навколо осі?

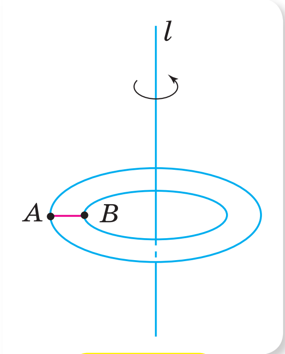
Поміркуємо. Нехай відрізок AB обертається навколо осі l і лежить з нею в одній площині. Залежно від розміщення відрізка AB відносно осі l, дістанемо різні тіла обертання (табл. 6).

Таблиця 6

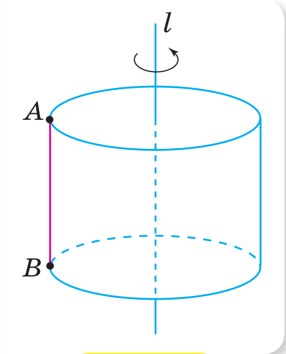
Розміщення відрізка AB відносно осі l	Отримане тіло обертання
1. $AB \perp l$ і має з l спільну точку B	Круг із центром в точці B і радіусом BA (мал. 149)
2. $AB \perp l$ і не має з l спільних точок	Плоске кільце, ширина якого дорівнює AB (мал. 150)
3. $AB \parallel l$	Поверхня циліндра, твірна якого дорівнює AB (мал. 151)
4. Відрізок AB має з віссю l спільну точку A і нахилений до неї під деяким кутом	Бічна поверхня конуса, твірна якого дорівнює AB (мал. 152)
5. Відрізок AB не має з віссю l спільних точок і нахилений до неї під деяким кутом	Бічна поверхня зрізаного конуса, твірна якого дорівнює AB (мал. 153)



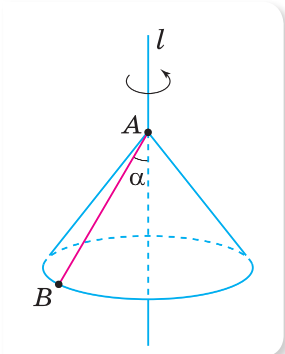
Мал. 149



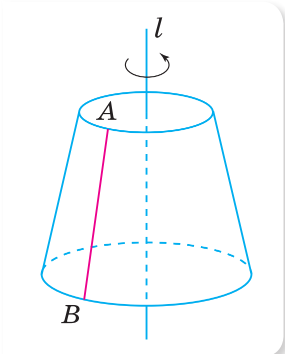
Мал. 150



Мал. 151



Мал. 152

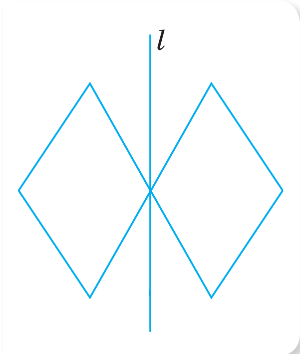


Мал. 153

2. ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ

Переріз тіла обертання площиною, що проходить через його вісь, називається *осьовим перерізом*. На малюнку 154 подано осьовий переріз тіла обертання, зображеного на малюнку 148.

З моделями тіл обертання часто мають справу на практиці. Це багато предметів ужитку, архітектурні споруди, деталі, виточені на токарному верстаті, тощо (мал. 155).



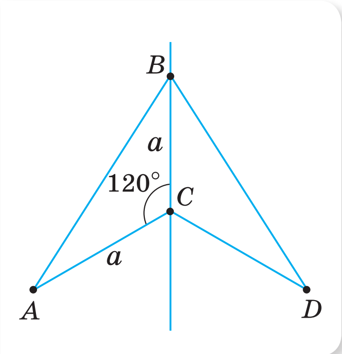
Мал. 154

Мал. 155

Скільки осьових перерізів має тіло обертання? Безліч.

Задача. Рівнобедрений трикутник із кутом 120° обертається навколо бічної сторони a. Знайдіть площу осьового перерізу тіла обертання.

Розв'язання. Осьовий переріз $ABCD$ тіла, утвореного обертанням даного трикутника ABC навколо сторони BC, складається з двох трикутників ABC і DBC (мал. 156). Ці трикутники рівні як симетричні відносно прямої BC, а тому мають рівні площі. Тоді площа осьового перерізу $ABCD$ дорівнює подвійній площі трикутника ABC або DBC. Ураху-



Мал. 156

вавши, що площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними, дістанемо:

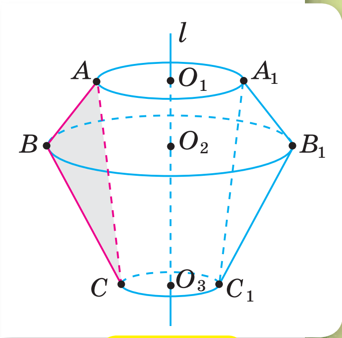
$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin 120° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. од.).}$$

Розв'язуючи задачі, пам'ятайте, що іноді замість тіла обертання достатньо зобразити його осьовий переріз.

ТЕОРЕМА (про вісь тіла обертання).

Вісь обертання є віссю симетрії тіла обертання.

Дано: тіло, отримане обертанням фігури F навколо прямої l.
Довести: l — вісь симетрії.
Доведення. Фігура F обертається навколо прямої l. При цьому кожна точка даної фігури описує коло із центром на прямій l і відповідним радіусом, довжина якого є найкоротшою відстанню від даної точки до прямої l (мал. 157). Нехай при повороті на 180° точка A перейшла в точку A_1. Якщо $AO_1 = O_1A_1$, то точки A і A_1 симетричні відносно прямої l. Отже, l — вісь симетрії.



Мал. 157

НАСЛІДОК. **Осьовий переріз тіла обертання має вісь симетрії.**

Властивості тіла обертання:

1) будь-які дві внутрішні точки тіла обертання можна з'єднати відрізком, який складається із внутрішніх точок цього тіла;

2) тіло обертання має свою границю, яка називається *поверхнею тіла*;

3) для кожної точки, яка розміщена зовні тіла обертання, є найближча точка тіла, яка лежить на його поверхні.

Дізнайтеся більше

1. Розглянемо перерізи поверхонь обертання.

Лінії перетину поверхні обертання площинами, що проходять через її вісь, називають *меридіанами* (мал. 158). Усі меридіани рівні між собою.

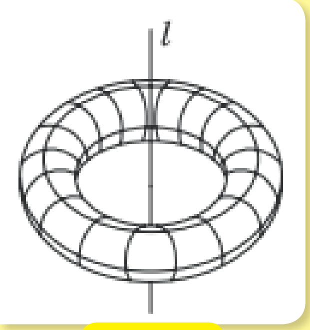
Лінії перетину поверхні обертання площинами, перпендикулярними до осі обертання, називають *паралелями* (мал. 158). Кожна паралель є колом із центром на осі обертання.

2. Нехай вісь l лежить у площині кола і не перетинає його. Поверхня, утворена обертанням цього кола


Мал. 158

навколо осі l, називається *тором* (мал. 159). Меридіанами тора є рівні кола, а паралелями — кола, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання.

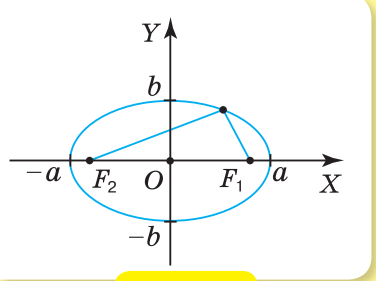
Можна сказати, що *поверхня обертання є геометричним місцем меридіанів або геометричним місцем паралелей*.



Мал. 159

Еліпс — один із конічних перерізів. Канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2=a^2-c^2$ (мал. 160). Відрізок $2a$ називають великою віссю еліпса, відрізок $2b$ — малою його віссю, $2c$ — фокусною відстанню.

З рівняння еліпса випливає, що $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ і $\frac{y^2}{b^2}\le 1$. Звідси випливає, що координати точок еліпса задовольняють умови: $|x|\le a$ і $|y|\le b$, тобто еліпс розміщено всередині прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$. Із рівняння еліпса також слідує, що еліпс має центр і дві осі симетрії.



Мал. 160

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Тіло обертання	Solid of revolution	Rotationskörper

Пригадайте головне

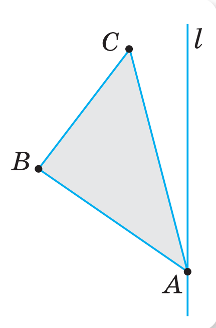
1. Що таке тіло обертання?
2. Що таке поверхня обертання?
3. Поясніть, як зобразити тіло, утворене обертанням многокутника навколо осі.
4. Що таке осьовий переріз тіла обертання?
5. Сформулюйте властивості тіл обертання.
6. Що можна сказати про вісь обертання?

Розв'яжіть задачі

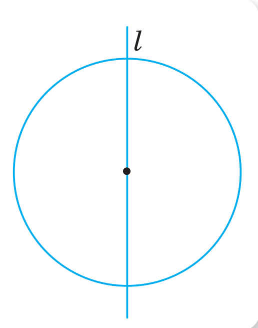
325'. Чи може круг утворити тіло обертання?

326'. Чи може коло утворити тіло обертання? А поверхню обертання?

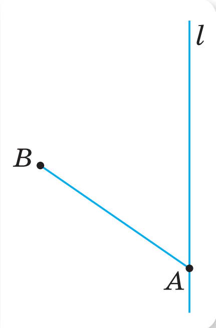
327'. Які з геометричних фігур, зображених на малюнках 161–164, при обертанні навколо осі l утворюють:
1) тіло обертання; 2) поверхню обертання?



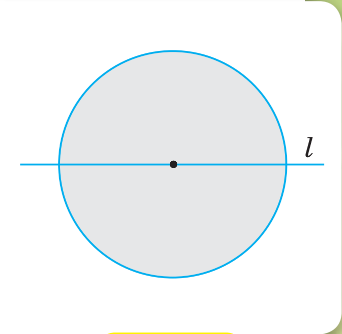
Мал. 161



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

328'. Обертання якої із зображених на малюнках 165–168 фігур навколо осі l утворює тіло, осьовий переріз якого є: 1) рівнобічною трапецією; 2) рівнобедреним трикутником; 3) прямокутником?

329°. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника навколо його: 1) сторони; 2) висоти.

330°. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника навколо його:
1) катета; 2) гіпотенузи.

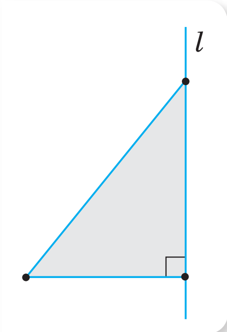
331°. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням трикутника навколо його більшої сторони, якщо трикутник:
1) гострокутний; 2) тупокутний.

332°. Скільки площин симетрії має тіло обертання?

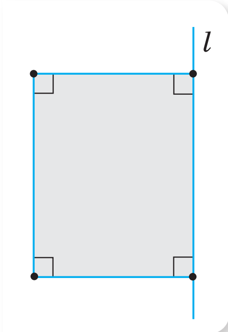
333°. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням:
1) прямокутника навколо його сторони;
2) прямокутної трапеції навколо її меншої бічної сторони;
3) квадрата навколо його діагоналі.

334°. Назвіть фігури обертання, які не є тілами обертання.

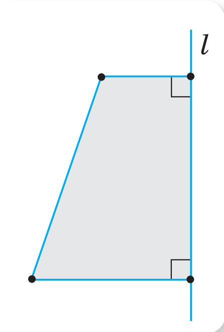
335. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю d навколо його сторони, якщо:
1) $d = 4$ см; 2) $d = 8$ см.



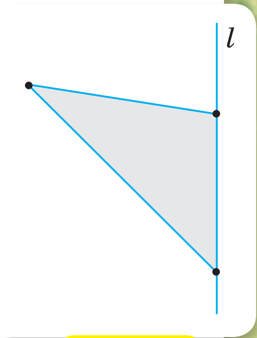
Мал. 165



Мал. 166



Мал. 167



Мал. 168

336. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з кутом при основі α навколо основи a, якщо: 1) $a = 2$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 4$ см, $\alpha = 45°$.

337. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням квадрата навколо його: 1) сторони; 2) діагоналі.

338. Ромб $ABCD$ з гострим кутом α обертається навколо сторони $CD = a$. Знайдіть діаметр кіл, утворених обертанням точок A і B, якщо:
1) $a = 4$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 8\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

339. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням ромба навколо його: 1) сторони; 2) діагоналі.

340. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка лежить у площині квадрата зовні нього і паралельна його стороні.

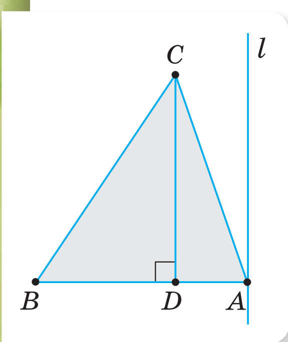
341. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням прямокутної трапеції навколо: 1) більшої бічної сторони; 2) меншої основи.

342. Трикутник ABC із висотою $CD = h$ і площею S обертається навколо осі, яка лежить у площині трикутника, проходить через вершину A і паралельна висоті CD (мал. 169). Знайдіть площу круга, утвореного обертанням сторони AB трикутника, якщо:
1) $h = 12$ см, $S = 84$ см^2; 2) $h = 8$ см, $S = 36$ см^2.

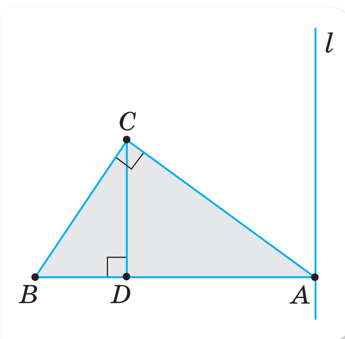
343. Побудуйте зображення тіла, утвореного обертанням паралелограма навколо: 1) меншої бічної сторони; 2) більшої діагоналі.

344*. Паралелограм зі сторонами 4 см і 5 см і кутом 30° між ними обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу осьового перерізу утвореного тіла обертання.

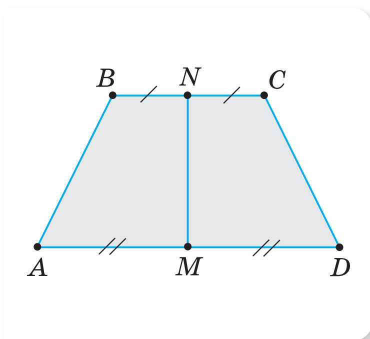
345*. Прямокутний трикутник ABC із катетами $AB = 15$ см і $AC = 20$ см обертається навколо осі, яка лежить у площині трикутника, проходить через вершину A і паралельна висоті CD (мал. 170). Знайдіть:
1) площу круга, утвореного обертанням проєкції катета AC на гіпотенузу; 2) довжину кола, утвореного обертанням вершини B;
3) площу кільця, утвореного обертанням проєкції катета BC на гіпотенузу.



Мал. 169



Мал. 170



Мал. 171

346*. Прямокутна трапеція з основами a і b ($a < b$) і кутом α при більшій основі обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть площу осьового перерізу утвореного тіла.

347*. На малюнку 171 рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами a, b і гострим кутом α є осьовим перерізом тіла, утвореного обертанням деякої фігури навколо відрізка MN, що сполучає середини основ трапеції. Знайдіть площу фігури, яка утворює це тіло обертання, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ см, $b = 1$ см, $\alpha = 45°$.

Проявіть компетентність

348. Наведіть приклади тіл обертання на предметах довкілля.

349. Зробіть схематичний малюнок осьового перерізу чашок на малюнку 172.

Мал. 172

350. Склянка циліндричної форми наповнена доверху водою. Як відлити рівно пів склянки води, не користуючись вимірювальними приладами?

351. На малюнку 173 стакан з нержавіючої сталі. Уявімо, що його макет розробили внаслідок обертання прямокутної трапеції з основами 3 см і 2,5 см навколо меншої бічної сторони, довжина якої дорівнює 15 см.

Мал. 173

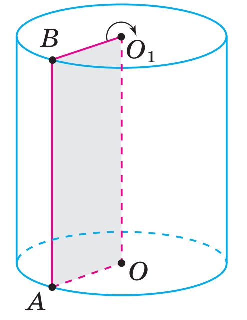
1) Побудуйте осьовий переріз стакана, не враховуючи товщину його стінок.
2) Розробіть власний дизайн-проєкт стакана.

§ 8. ЦИЛІНДР

1. ЦИЛІНДР І ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Тіла обертання, як і многогранники, поділяють на види. Циліндр — один із видів тіл обертання.

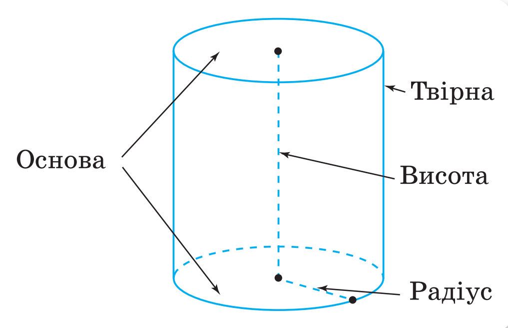
Користуючись малюнком 174, дайте означення циліндру та порівняйте його з наведеним у підручнику.



Мал. 174

Циліндром **називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, що містить його сторону.**

На малюнку 174 циліндр утворено обертанням прямокутника ABO_1O навколо осі, що містить сторону OO_1. Ламана, що складається зі сторін цього прямокутника, які не лежать на осі обертання, утворює *повну поверхню циліндра*. Пряма OO_1, що є віссю обертання, називається *віссю циліндра*.



Мал. 175

Сторона AB прямокутника, паралельна осі циліндра, описує поверхню, яку називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні, утворений обертанням сторони AB, є *твірною циліндра* (мал. 175). Усі твірні циліндра рівні й паралельні. Сторони OA і O_1B прямокутника описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах. Ці круги називають *основами циліндра*, а їх радіус — *радіусом циліндра*. ***Повна поверхня циліндра*** **складається з основ і бічної поверхні.**

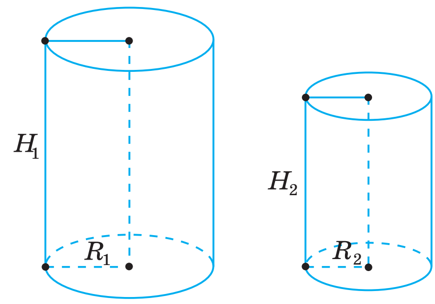
Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до площини іншої, називають *висотою циліндра*. **Кожна твірна циліндра дорівнює його висоті.**

Зображення циліндра вважається повним, якщо на ньому зображено основи й дві твірні, які відокремлюють видиму частину циліндра від невидимої. Такі твірні називають *контурними твірними циліндра*.

На зображенні циліндра видимі лінії проводимо суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

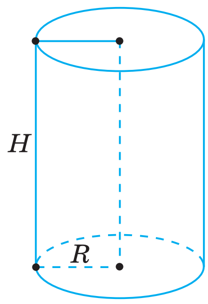
Циліндри називаються *подібними*, якщо в них відповідні твірні й радіуси основ — пропорційні (176). Площі основ таких циліндрів відносяться, як квадрати їх висот.

? Чи отримаємо подібні циліндри, якщо обертатимемо подібні прямокутники? Так, якщо обертання здійснювати навколо відповідних сторін даних прямокутників.

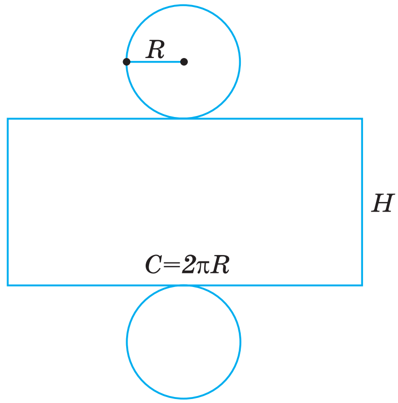


Мал. 176

На малюнку 177 зображено циліндр. Щоб отримати його *розгортку* (мал. 178), від поверхні циліндра відокремили основи, а його бічну поверхню розрізали по твірній і розгорнули на площині. Бічна поверхня розгорнулась у прямокутник, одна сторона якого дорівнює твірній (або висоті), друга — довжині кола основи. Розгортка циліндра складається із цього прямокутника і двох кругів основ.



Мал. 177



Мал. 178

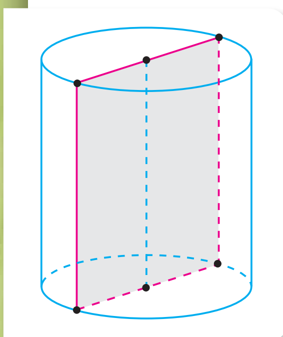
Циліндричну форму мають численні деталі машин і механізмів, наприклад, поршні двигунів, барабани лебідок, шліфувальні круги, сальники, гідравлічні системи тощо. На практиці широко використовують колони, труби, балки, які мають циліндричну форму (мал. 179).

Мал. 179

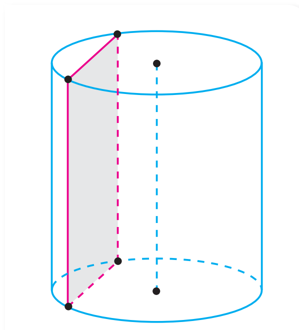
2. ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА

Площина, яка перетинає циліндр, називається *січною площиною*. Унаслідок такого перетину отримують різні перерізи.

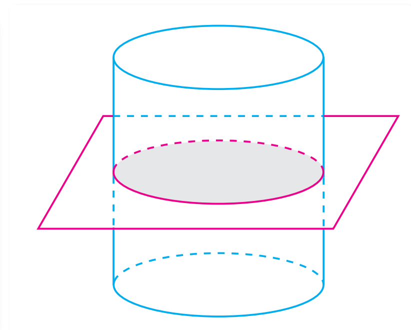
На малюнках 180–182 зображено перерізи циліндра площинами.



Мал. 180



Мал. 181

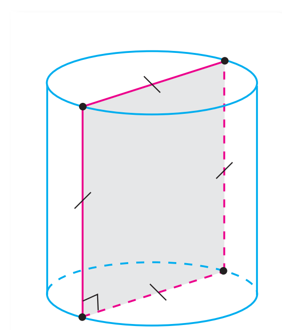


Мал. 182

Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називається *осьовим перерізом циліндра* (мал. 180). Цей переріз є прямокутником, дві сторони якого є твірними циліндра, а дві інші — діаметрами його основ. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є також прямокутником, дві сторони якого — твірні, а дві інші — відповідно рівні хорди основ (мал. 181). Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по кругу, який дорівнює основі (мал. 182).

? Чи може перерізом циліндра (осьовим або паралельним осі) бути квадрат? Так, бо квадрат є окремим видом прямокутника.

Якщо осьовий переріз циліндра є квадратом, то такий циліндр називають *рівностороннім* (мал. 183).

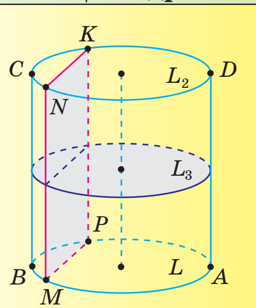


Мал. 183

Щоб зобразити осьовий переріз циліндра, проведіть два паралельні діаметри його основ і сполучіть їхні кінці твірними.

Властивості циліндра подано в таблиці 7.

Таблиця 7

Циліндр	Властивості
	1. Основи рівні й паралельні: $L = L_1$ і $L \parallel L_1$
	2. Твірні рівні й паралельні: $AD = MN = BC = PK$ і $AD \parallel MN \parallel BC \parallel PK$
	3. Висота дорівнює твірній: $AD = MN = BC = PK = H$
	4. Переріз (осьовий або паралельний осі) — прямокутник: $MNKP$ — прямокутник
	5. Переріз, перпендикулярний до осі, — круг, рівний і паралельний основі: L_3 — круг, $L_3 = L_1 = L_2$, $L_3 \parallel L_1$, $L_3 \parallel L_2$

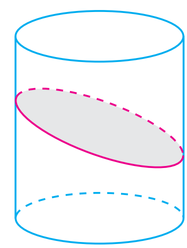
Задача. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого 36 см². Знайдіть площу основи циліндра.

Розв'язання. Оскільки переріз циліндра — осьовий, то сторона квадрата є діаметром кола основи. Нехай x — діаметр кола основи. Тоді $x^2 = 36$ см².

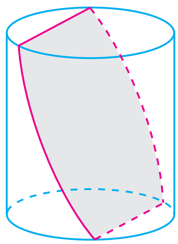
Площа основи циліндра $S = \frac{\pi x^2}{4} = \frac{36\pi}{4} = 9\pi$ (см²).

Які перерізи одержимо, якщо січна площина перетинає вісь циліндра під деяким кутом? Можливі два випадки.

1. Якщо січна площина перетинає вісь циліндра під гострим кутом і не перетинає його основ, то перерізом буде еліпс (мал. 184).



Мал. 184

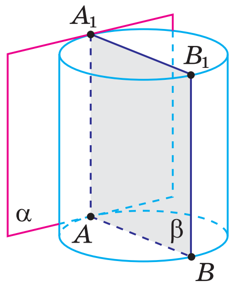


Мал. 185

2. Якщо січна площина перетинає вісь циліндра під гострим кутом і перетинає його основи— то перерізом буде фігура $ABCD$, у якої сторони AD і BC — паралельні відрізки, а сторони AB і CD — частини кривих ліній, які лежать на поверхні циліндра (мал. 185).

3. ЦИЛІНДР І ПЛОЩИНА, ПАРАЛЕЛЬНА ЙОГО ОСІ

Які існують випадки взаємного розміщення циліндра і площини, що паралельна його осі? Існують три випадки: циліндр і площина не мають спільних точок, площина перетинає циліндр, площина дотикається до циліндра.



Мал. 186

Площина, яка має із циліндром спільну твірну і не має з його поверхнею інших спільних точок, називається *дотичною площиною до циліндра*. Спільна пряма називається *твірною дотику*. На малюнку 186 площина α — дотична площина, а відрізок AA_1 — твірна дотику. **Дотична площина до циліндра є перпендикулярною до його осьового перерізу, проведеного через твірну дотику.**

ТЕОРЕМА

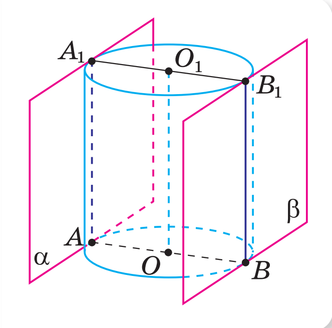
(про дві дотичні площини до циліндра).

Дві дотичні площини до циліндра або паралельні, або перетинаються по прямій, паралельній осі циліндра.

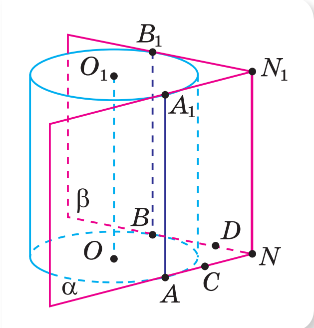
Дано: циліндр із віссю OO_1, α і β — дотичні площини, AA_1 — твірна дотику площини α, BB_1 — твірна дотику площини β.

Довести: 1) або α || β; 2) або α і β перетинаються по прямій CC_1 і $CC_1 \parallel OO_1$.

Доведення. 1. Нехай твірні дотику AA_1 і BB_1 є сторонами осьового перерізу ABB_1A_1 (мал. 187). Оскільки осьовий переріз циліндра, що проходить через твірну дотику, є перпендикулярним до дотичної площини, то осьовий переріз ABB_1A_1 є перпендикулярним і до α, і до β. Отже, $\alpha \parallel \beta$.



Мал. 187



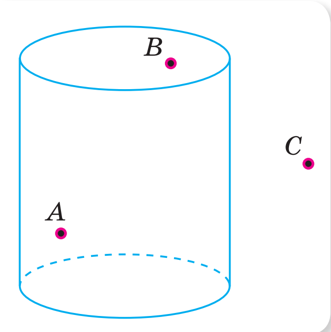
Мал. 188

2. Нехай твірні дотику AA_1 і BB_1 не є сторонами осьового перерізу (мал. 188). Тоді дотичні площини α і β перетинаються, бо перетинаються прямі AC і BD, які лежать у цих площинах і дотикаються до кола основи циліндра відповідно в точках A і B. Нехай площини α і β перетинаються по прямій NN_1. Тоді $NN_1 \parallel AA_1$ і $NN_1 \parallel BB_1$. Оскільки $AA_1 \parallel OO_1$, то $NN_1 \parallel OO_1$.

4. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ ЦИЛІНДРА

Для побудови перерізів циліндра найчастіше використовують *метод слідів*. Базовою задачею для даного методу вважають задачу на побудову точки перетину з площиною.

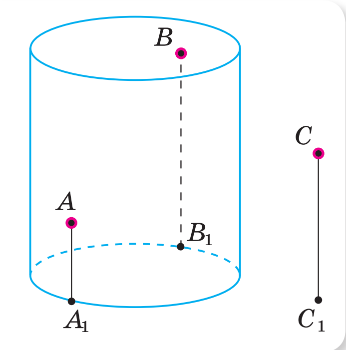
Задача. Побудуйте переріз циліндра площиною, заданої трьома точками A, B і C, якщо точки A і B лежать на бічній поверхні циліндра, а точка C розміщена поза його поверхнею (мал. 189).



Мал. 189

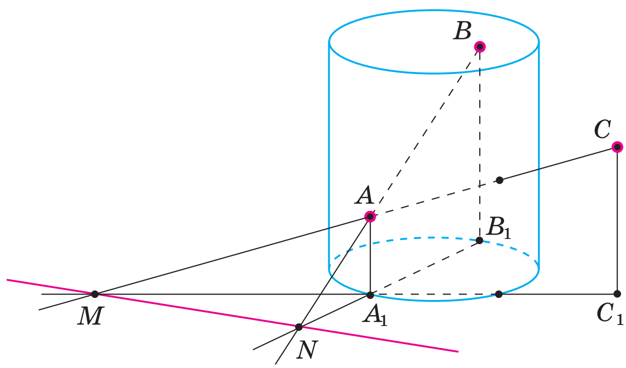
Розв'язання. Скористаємося методом слідів.

1. Ортогонально проєктуємо на площину нижньої основи циліндра точки A, B і C (мал. 190).
2. Будуємо точку M перетину прямих AC і A_1C_1. Вона лежить у площині нижньої основи циліндра (мал. 191).
3. Будуємо точку N перетину прямої AB і A_1B_1. Вона лежить у площині нижньої основи циліндра (мал. 191).
4. Будуємо пряму MN — слід січної площини у площині нижньої основи циліндра (мал. 191).

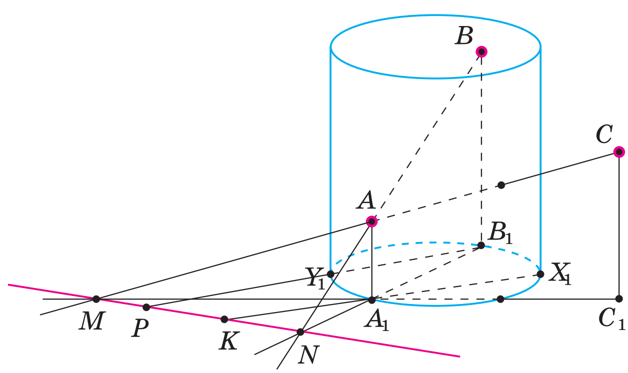


Мал. 190

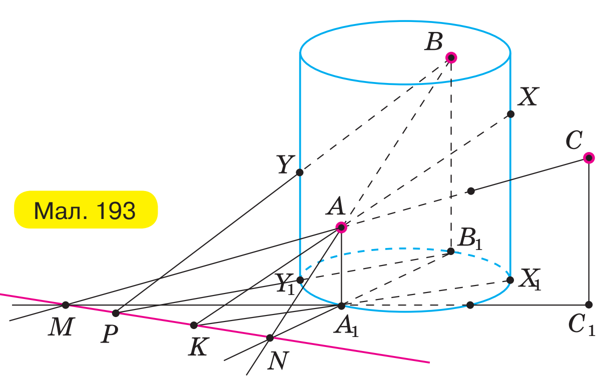
5. Через кінці контурних твірних — точки X_1 і Y_1, що лежать у площині нижньої основи, проводимо відповідно прямі X_1A_1 і Y_1B_1. Вони перетинають слід MN відповідно в точках K і P (мал. 192).
6. Будуємо прямі KA і PB, які перетинають твірні відповідно у шуканих точках X і Y (мал. 193).
7. Сполучаємо плавною лінією точки A, B, X і Y та отримуємо на поверхні циліндра лінію, яка обмежує шуканий переріз. Вона є еліпсом (мал. 194).



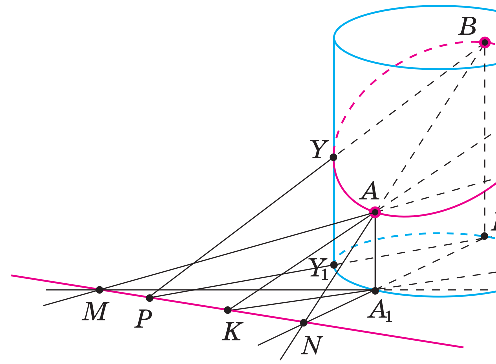
Мал. 191



Мал. 192



Мал. 193



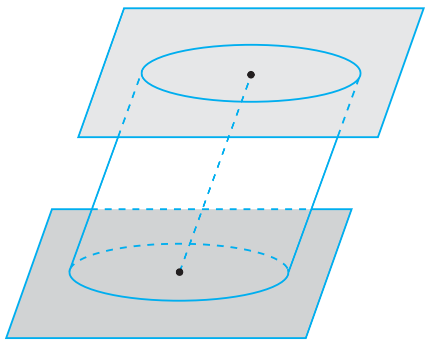
Мал. 194

Дізнайтеся більше

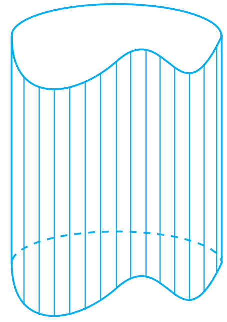
1. У книзі «Начал» Евклід дає означення прямого кругового циліндра, виходячи з обертання прямокутника навколо однієї з його сторін. Поняття циліндричної поверхні з'являється в Серена з Антіної (Египет) у IV ст. Серен розглядає і похилі циліндри, на відміну від Евкліда. Загальне поняття циліндричної поверхні, яку отримують унаслідок руху твірної, що перетинає всі точки деякої напрямної, уперше ввів Б. Кавальєрі (XVII ст.).

2. Слово «циліндр» походить від грецького «килíндрос», що означає вал, каток.

3. У параграфі ви ознайомилися з прямим круговим циліндром. Його основами є круги, а твірні перпендикулярні до площин основ. Проте круговий циліндр може й не бути прямим (мал. 195). У більш широкому розумінні циліндром називають тіло, що складається з двох плоских фігур, обмежених кривими лініями, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих фігур (мал. 196).



Мал. 195



Мал. 196

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

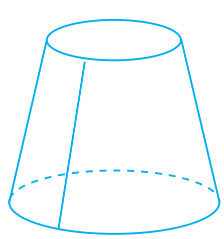
Українська	Англійська	Німецька
Циліндр	Cylinder	Zylinder
Радіус	Radius	Radius

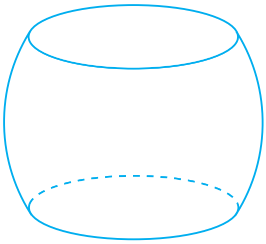
Пригадайте головне

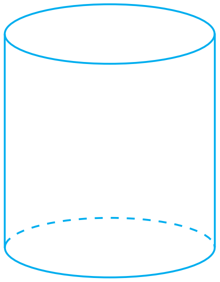
1. Що таке циліндр?
2. Що таке бічна поверхня циліндра; повна поверхня циліндра?
3. Що таке основа циліндра; радіус основи циліндра; висота циліндра; твірна циліндра; вісь циліндра?
4. Які циліндри називаються подібними?
5. Дайте означення осьовому перерізу циліндра.
6. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною осі; перпендикулярною до осі?
7. Назвіть властивості циліндра.
8. Що таке дотична площина до циліндра?
9. Сформулюйте й доведіть теорему про дві дотичні площини до циліндра.
10. Поясніть, як побудувати переріз циліндра.

Розв'яжіть задачі

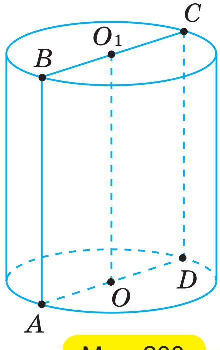
352'. На якому з малюнків 197–199 зображено циліндр?


Мал. 197


Мал. 198


Мал. 199

353'. За малюнком 200 назвіть: 1) висоту циліндра; 2) твірну циліндра; 3) радіус циліндра; 4) вісь циліндра; 5) осьовий переріз циліндра.



Мал. 200

354'. Чи одержимо циліндр обертанням:
1) паралелограма навколо його сторони;
2) квадрата навколо його сторони;
3) трапеції навколо бічної сторони?

355'. Чи правильно, що перерізом циліндра площиною, перпендикулярною до осі, є:
1) прямокутник; 2) коло; 3) круг?

356'. Чи належать прямому круговому циліндру всі точки простору, які віддалені від відрізка AB на відстань, не більшу за 2 см? Відповідь поясніть.

357'. Чи лежать на поверхні прямого кругового циліндра всі відрізки, які паралельні відрізку AB, дорівнюють йому й віддалені від нього на 2 см?

358°. Циліндр утворений обертанням прямокутника зі сторонами m і n навколо однієї зі сторін. Знайдіть твірну й діаметр циліндра. Скільки випадків треба розглянути?

359°. Радіус основи циліндра R, висота H. Знайдіть діагональ осьового перерізу, якщо:
1) $R = 4$ см, $H = 6$ см; 2) $R = 2$ см, $H = 3$ см; 3) $R = 6$ см, $H = 5$ см.

360°. Діагональ осьового перерізу циліндра d, а радіус основи — R. Знайдіть твірну циліндра, якщо:
1) $d = 20$ см, $R = 6$ см; 2) $d = 13$ см, $R = 2,5$ см; 3) $d = 26$ см, $R = 5$ см.

361°. Висота циліндра H, радіус основи R, діагональ осьового перерізу d. Заповніть таблицю 8.

Таблиця 8

R	4	6		$4,5a$	$6a$
H	$4\sqrt{3}$		15		$12a$
d		15	17	$15a$	

362°. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого $a\sqrt{2}$. Знайдіть висоту циліндра та площу його основи, якщо:
1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 2$ см.

363°. Циліндр отримано обертанням квадрата зі стороною a навколо однієї з його сторін. Знайдіть:
1) радіус циліндра; 2) висоту циліндра; 3) площу осьового перерізу.

364°. Циліндр отримано обертанням прямокутника зі сторонами a і b навколо сторони a. Знайдіть:
1) радіус циліндра; 2) висоту циліндра; 3) площу осьового перерізу.

365°. Побудуйте циліндр, якщо:
1) $R = 4$ см, $H = 5$ см; 2) $R = 2$ см, $H = 3$ см; 3) $R = 3$ см, $H = 4$ см.

366°. Побудуйте рівносторонній циліндр, площа осьового перерізу якого дорівнює:
1) 9 см^2; 2) 16 см^2; 3) 925 см^2.

367°. Чи правильно, що висоти двох циліндрів рівні, якщо рівні їхні осьові перерізи?

368°. Радіус основи циліндра R, висота H. Знайдіть діагональ осьового перерізу, якщо:
1) $R = 4$ см, $H = 6$ см;
2) $R = 2$ см, $H = 3$ см;
3) $R = m$ см, $H = n$ см.

369°. Знайдіть твірну циліндра, у якого діагональ осьового перерізу дорівнює m см, а радіус основи — n см.

370°. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 24 см². Знайдіть радіус основи й твірну циліндра, якщо: 1) твірна на 4 см більша за радіус; 2) радіус у 3 рази менший від твірної; 3) радіус і твірна відносяться, як 1 : 4.

371°. Діагональ осьового перерізу циліндр — 24 см. Кут між цією діагоналлю і твірною циліндра дорівнює 60°. Знайдіть:
1) висоту циліндра; 2) радіус циліндра; 3) площу основи циліндра.

372°. Осьовим перерізом циліндра є квадрат із діагоналлю $b\sqrt{2}$ см. Знайдіть висоту циліндра та площу його основи.

373. Площа перерізу циліндра, перпендикулярного до його осі, дорівнює $m\pi$ см². Знайдіть радіус основи циліндра, якщо:
1) $m = 16$ см;
2) $m = 25$ см;
3) $m = 4$ см.

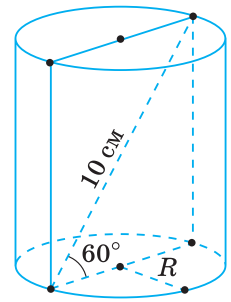
374. За даними на малюнках 201–204 знайдіть невідомі елементи циліндра x, y, R.

375. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q, а радіус основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо:
1) $Q = 8$ см²;
2) $Q = 18$ см²;
3) $Q = 50$ см².

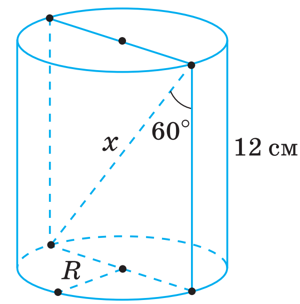
376. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q, а площа основи — S. Виразіть S через Q, якщо:
1) $Q = 8$ см²;
2) $Q = 18$ см²;
3) $Q = 9$ см².

377. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 30 см, а його твірна в 4 рази більша за радіус основи. Знайдіть:
1) твірну циліндра; 2) радіус основи циліндра.

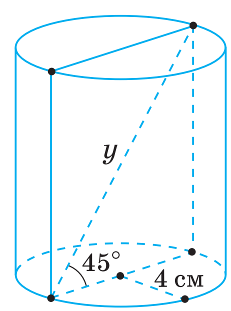
378. Площа основи циліндра дорівнює S, а діагональ осьового перерізу — d. Знайдіть висоту циліндра, якщо:
1) $S = 4\pi$ см², $d = 5$ см; 2) $S = 9\pi$ см², $d = 10$ см.



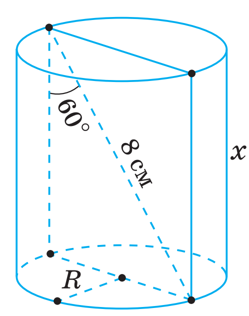
Мал. 201



Мал. 202



Мал. 203



Мал. 204

379. У циліндрі радіуса R паралельно його осі й на відстані m від неї проведено переріз, площа якого S. Знайдіть висоту циліндра, якщо:
1) $R = 10$ см, $m = 8$ см, $S = 120$ см^2;
2) $R = 5$ см, $m = 3$ см, $S = 72$ см^2.

380. Висота циліндра H, радіус основи R. У циліндрі проведено переріз паралельно його осі на відстані m від неї. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $H = 7$ см, $R = 5$ см, $m = 3$ см;
2) $H = 4$ см, $R = 10$ см, $m = 6$ см.

381. Висота циліндра H, радіус основи R. У циліндрі проведено площину паралельно його осі, яка відтинає від кола основи дугу α. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо:
1) $H = 8$ см, $R = 4$ см, $\alpha = 60°$;
2) $H = 10$ см, $R = 6$ см, $\alpha = 120°$.

382. Твірна циліндра H, радіус основи R. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, — квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі, якщо:
1) $H = 12$ см, $R = 10$ см;
2) $H = 6$ см, $R = 5$ см.

383. Відрізок завдовжки 20 см сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи й утворює з площиною нижньої основи кут 60°. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) радіус основи циліндра;
3) площу осьового перерізу.

384. Радіус основи циліндра R, висота H. Побудуйте зображення цього циліндра, якщо:
1) $R = 2$ см, $H = 4$ см;
2) $R = 3$ см, $H = 3$ см.

385. Радіус циліндра 20 см, твірна 24 см. На якій відстані від осі циліндра розміщений переріз, що має форму квадрата?

386. Радіус циліндра R. Знайдіть відстань між осьовим перерізом циліндра й паралельним йому перерізом удвічі меншої площі.

387. Площа осьового перерізу циліндра S. Знайдіть площу перерізу, паралельного осі циліндра й віддаленого від неї:
1) на половину радіуса основи; 2) на чверть радіуса основи.

388. У нижній основі циліндра проведено хорду b, яка стягує дугу β. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою проведеної хорди, утворює з площиною основи кут α. Знайдіть висоту та радіус циліндра.

389. Висоти двох циліндрів, основи яких лежать в одній площині, рівні, а відстань між їхніми осями дорівнює 10 см. Яке взаємне розміщення даних циліндрів, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 3 см і 7 см; 2) 5 см і 6 см; 3) 2 см і 3 см?

390. Висота циліндра 10 см, радіус основи 5 см. На якій відстані від осі треба провести паралельний їй переріз, щоб площа перерізу дорівнювала 80 см^2?

391. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q, а площа основи — S. Знайдіть висоту циліндра, якщо:
1) $Q = 6$ см^2, $S = 4\pi$ см^2;
2) $Q = 10$ см^2, $S = 25\pi$ см^2.

392. Площа основи циліндра відноситься до площі його осьового перерізу, як $\sqrt{3}\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналлю осьового перерізу і площиною основи.

393. Доведіть, що коли січна площина паралельна осі циліндра й відстань між цією площиною та віссю циліндра є меншою від його радіуса, то перерізом циліндра є прямокутник, дві протилежні сторони якого — твірні циліндра.

394. Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 120°. Знайдіть площу перерізу, якщо висота циліндра дорівнює H, а відстань між віссю циліндра й січною площиною дорівнює b.

395. Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60°. Твірна циліндра дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а відстань між віссю циліндра й січною площиною дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу.

396. Розгорткою бічної поверхні циліндра є квадрат. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра.

397. Бічна поверхня циліндра в розгортці є прямокутником, діагональ якого дорівнює d й утворює з основою кут β. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) радіус основи циліндра.

398. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра утворює зі стороною основи розгортки кут γ. Знайдіть кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра та площиною основи.

399. Осьовий переріз рівностороннього циліндра дорівнює S см^2. Площа основи циліндра, подібного даному, дорівнює $b\pi$ см^2. Знайдіть відношення радіусів цих циліндрів.

400. Якщо площина паралельна осі циліндра й відстань між цією площиною та віссю дорівнює радіусу основи, то площина містить лише одну твірну циліндра. Доведіть.

401. Паралельно основам циліндра проведено площину, яка ділить даний циліндр на два циліндри. Чи будуть отримані циліндри подібними? Відповідь поясніть.

402. Побудуйте точки перетину прямої AB з основами циліндра, якщо точка A розміщена на бічній поверхні циліндра, а точка B — поза поверхнею циліндра.

403. Побудуйте переріз циліндра площиною, яка задана слідом a в площині нижньої основи циліндра й точкою A на видимій частині бічної поверхні циліндра.

404. На бічній поверхні циліндра позначено точки A, B і C. Побудуйте переріз циліндра площиною, яка проходить через ці точки.

405*. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут β, а його площа дорівнює S. Знайдіть площу основи циліндра.

406*. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює a й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу.

407*. Висота циліндра H, радіус основи R. Кінці відрізка завдовжки l лежать на колах обох основ. Знайдіть відстань від цього відрізка до осі циліндра, якщо:
1) $H = 15$ см, $R = 5$ см, $l = 17$ см;
2) $H = 6$ см, $R = 5$ см, $l = 10$ см.

408*. Висота циліндра дорівнює H, а площа осьового перерізу S. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, паралельною його осі, якщо відстань між віссю циліндра і площиною перерізу дорівнює a.

409*. Кінці відрізка AB лежать на колах різних основ циліндра. Радіус циліндра дорівнює R, його висота — H, а відстань між прямою AB і віссю циліндра — d. Знайдіть:
1) H, якщо $R = 10$ см, $d = 8$ см, $AB = 13$ см;
2) d, якщо $H = 6$ дм, $R = 5$ дм, $AB = 10$ дм.

410*. Вершини A і B прямокутника $ABCD$ лежать на колі однієї з основ циліндра, а вершини C і D — на колі іншої основи. Знайдіть радіус циліндра, якщо його твірна дорівнює a, $AB = b$, а кут між прямою BC і площиною основи дорівнює α.

411*. Через твірну AA_1 циліндра проведено дві січні площини, одна з яких проходить через вісь циліндра. Знайдіть відношення площ перерізів циліндра цими площинами, якщо кут між ними дорівнює α.

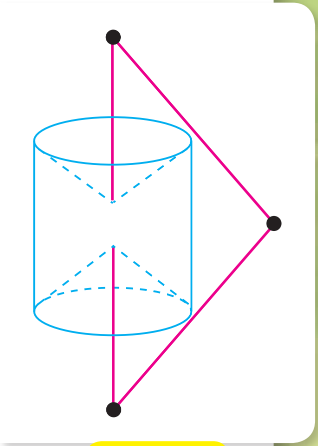
412*. Через твірну циліндра проведено дві взаємно перпендикулярні площини. Площа кожного з утворених перерізів дорівнює S. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Проявіть компетентність

413. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають форму циліндра.

414. Чи вистачить аркуша паперу формату А4, щоб зробити розгортку циліндра, у якого:
1) діаметр основи дорівнює його висоті;
2) радіус основи 3 см, а осьовим перерізом є квадрат?

415. Столяру потрібні розміри деталі у вигляді циліндра із заглибинами на основах (мал. 205). Коли він почав вимірювати деталь за допомогою кронциркуля, то виникли труднощі: щоб визначити відстань між найглибшими точками заглибин уздовж осі циліндра, потрібно зняти кронциркуль з деталі й прикласти його до масштабної лінійки. Але при цьому доводиться розхиляти його ніжки й втрачати шуканий розмір. Запропонуйте власний спосіб вимірювання.

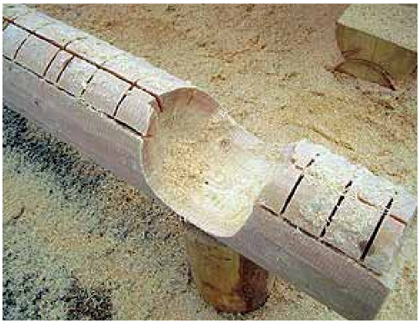


Мал. 205

416. При будівництві дерев'яних споруд виникає необхідність вибрати прямокутний або овальний паз у колоді. Для роботи взяли циліндричну колоду, діаметр основи якої 10 см, а довжина 2 м.

1) Потрібно випиляти паз, паралельний осі циліндра, дно якого повинно бути квадратом зі стороною 8 см (мал. 206). Яким має бути глибина запилу?

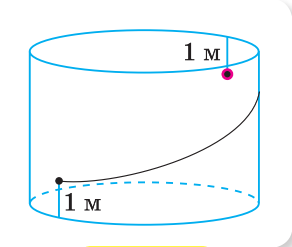
2) Скільки таких запилів можна зробити на колоді на відстані 20 см один від одного?



Мал. 206

417. На внутрішній стінці відкритого зверху циліндричного бункера, висота якого 5 м і довжина кола основи 8 м, міститься електрична лампочка на відстані 1 м від верхнього краю бункера (мал. 207). Вимикач розміщено навпроти лампочки зовні бункера на висоті 1 м від підлоги. Якої найменшої довжини дріт потрібен для проведення стінної проводки між вимикачем і лампочкою, не пробиваючи стінку бункера?

418. Дріт, намотаний спіраллю на циліндричну трубку, утворює 10 витків (мал. 208). Довжина трубки 9 см, довжина її зовнішнього кола — 4 см. Кінці спіралі лежать на одній твірній циліндра. Знайдіть довжину дроту.



Мал. 207

Мал. 208

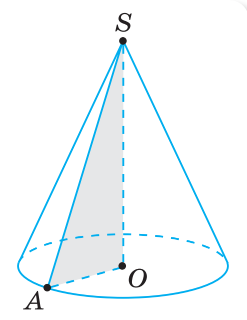
§ 9. КОНУС

1. КОНУС І ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Конус, як і циліндр, є тілом обертання. Користуючись малюнком 209, дайте означення конусу та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Конусом **називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.**

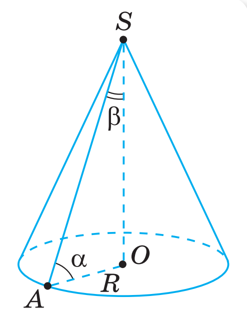
На малюнку 209 конус утворений обертанням прямокутного трикутника AOS навколо катета OS. Гіпотенуза AS цього трикутника утворює *бічну поверхню конуса*, а катет AO — *основу конуса*, що є кругом. Радіус цього круга називають *радіусом конуса*. *Повна поверхня конуса* складається з основи й бічної поверхні. Точку S називають *вершиною конуса*. Відрізки, що сполучають вершину S із точками кола основи, називають *твірними конуса*. Усі твірні конуса — рівні. Пряму SO, яка проходить через центр основи й вершину, називають *віссю конуса*. Відрізок SO — *висотою конуса*.



Мал. 209

Зображення конуса вважають повним, якщо на ньому зображено основу конуса, його вершину, дві твірні, які відокремлюють видиму частину від невидимої (*контурні твірні конуса*), та ще одну твірну, яку називають додатковою.

Найпростіші задачі на знаходження елементів конуса (висоти h, твірної l, радіуса основи R, кута α нахилу твірної до площини основи й кута β між твірною та висотою) зводяться до розв'язування прямокутного трикутника OSA (мал. 210). У таблиці 9 уміщено деякі задачі та їх розв'язання.



Мал. 210

Таблиця 9

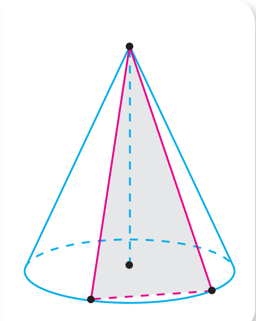
Дано	Знайти	Розв'язання
1) R і h	l, α, β	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h^2}{R}$, $\beta = 90° - \alpha$, $l = \frac{h}{\sin\alpha}$
2) R і l	h, α, β	$\cos\alpha = \frac{R}{l}$, $\beta = 90° - \alpha$, $h = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$

Дано	Знайти	Розв'язання
3) R і α	h, l, β	$h = R\,\text{tg}\,\alpha$, $l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, $\beta = 90° - \alpha$
4) $C_{осн}$ і l	h, α, β	$C = 2\pi R$, $R = \dfrac{C}{2\pi}$. Задача зводиться до задачі 2
5) $S_{осн}$ і α	h, l, β	$S = \pi R^2$, $R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. Задача зводиться до задачі 3

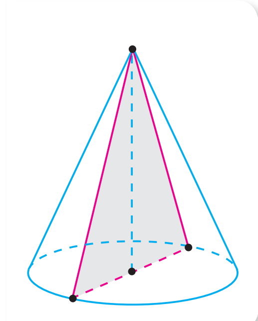
Перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедрений трикутник, бічними сторонами якого є твірні конуса, а основою — хорда кола основи (мал. 211).

Перерізом конуса площиною, що проходить через його вісь (*осьовий переріз*), є також рівнобедрений трикутник. Бічними сторонами цього трикутника є твірні конуса, а основою — діаметр основи конуса (мал. 212).

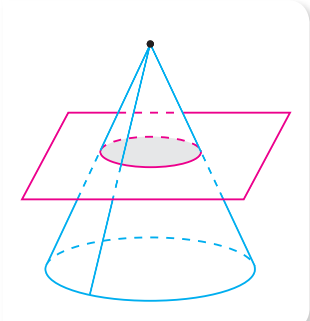
Перерізом конуса площиною, паралельною площині його основи, є круг (мал. 213).



Мал. 211



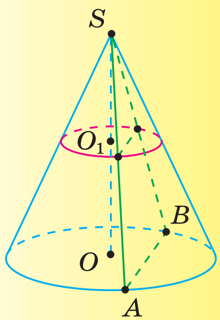
Мал. 212



Мал. 213

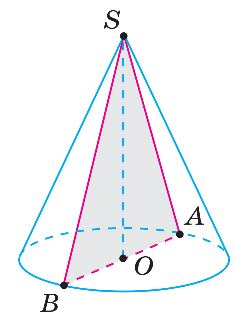
Властивості конуса подано в таблиці 10.

Таблиця 10

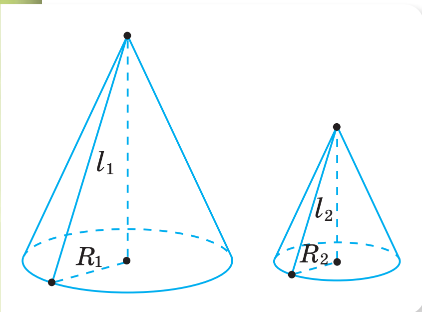
Конус	Властивості
	1. Твірні рівні: $AS = BS$
	2. Основа висоти збігається із центром кола основи: SO — висота
	3. Переріз площиною, що проходить через його вершину, — рівнобедрений трикутник: у ΔABS $AS = BS$
	4. Переріз, перпендикулярний до осі, — круг із центром O_1

Задача 1. Радіус основи конуса R. Осьовим перерізом є рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть його площу.

Розв'язання. За умовою, осьовим перерізом даного конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого — діаметр основи конуса, що дорівнює $2R$ (мал. 214). Нехай $AS = BS = x$. За теоремою Піфагора, $x^2 + x^2 = 4R^2$, або $x^2 = 2R^2$. Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів. Отже, $S = \frac{x^2}{2} = \frac{2R^2}{2} = 2R^2$ (кв. од.).



Мал. 214

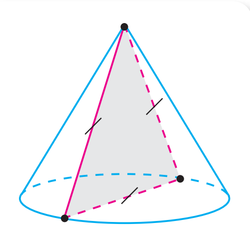


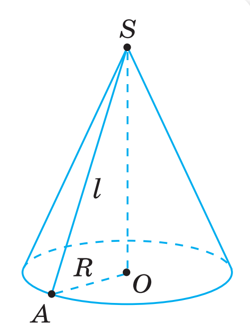
Мал. 215

Два конуси називають *подібними*, якщо в них відповідні твірні й радіуси основ пропорційні (мал. 215). Площина, паралельна основі конуса, відтинає від нього подібний конус. Твердження безпосередньо випливає з означення — доведеної теореми.

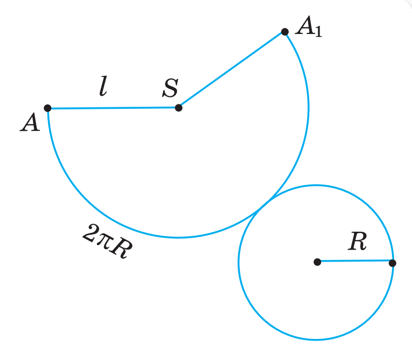
Якщо осьовий переріз конуса — рівносторонній трикутник, то конус називають *рівностороннім* (мал. 216).

На малюнку 217 зображено конус із радіусом R і твірною l. Щоб отримати його розгортку (мал. 218), треба зробити розріз уздовж кола основи, а бічну поверхню розрізати по твірній SA і розгорнути на площині. Бічна поверхня розгортається в сектор ASA_1 із центром S і радіусом SA. Розгортка конуса складається із цього сектора та круга основи конуса.


Мал. 216



Мал. 217



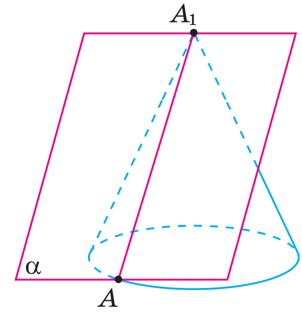
Мал. 218

2. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ КОНУСА І ПЛОЩИНИ

Існують чотири випадки взаємного розміщення конуса і площини: конус і площина не мають спільних точок, конус і площина мають одну спільну точку, площина перетинає конус, площина дотикається до конуса.

Площина, яка має з конусом одну спільну твірну і не має з поверхнею конуса інших спільних точок, називається *дотичною площиною до конуса*.

Спільна твірна називається *твірною дотику*. На малюнку 219 площина α — дотична площина, а відрізок AA_1 — твірна дотику.



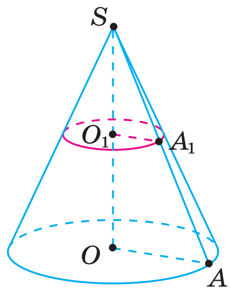
Мал. 219

ТЕОРЕМА **(про переріз конуса площиною, паралельною основі).**

Якщо в конусі проведено січну площину, паралельну основі конуса, то площі основи й перерізу відносяться, як квадрати відстаней від вершини до відповідних площин.

Дано: конус із вершиною S, круг L із центром O — основа конуса, круг L_1 із центром O_1 — переріз конуса площиною, паралельною основі (мал. 220).

Довести: $\frac{S_L}{S_{L_1}} = \frac{OS^2}{O_1S^2}$.



Мал. 220

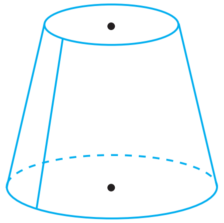
Доведення. Нехай твірна SA конуса перетинає коло перерізу L_1 у точці A_1. Проведемо радіуси OA і O_1A_1 основи й перерізу. Трикутники ASO і A_1SO_1 подібні. У них $\angle SOA = \angle SO_1A_1 = 90°$, $\angle ASO = \angle A_1SO_1$ як спільні кути.

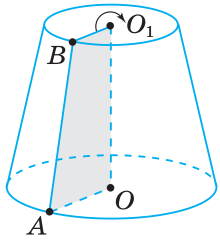
З подібності трикутників випливає: $\frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OS}{O_1S}$. Оскільки площі подібних кругів відносяться, як квадрати їх радіусів, то $\frac{S_L}{S_{L_1}} = \frac{OA^2}{O_1A_1^2} = \frac{OS^2}{O_1S^2}$.

3. ЗРІЗАНИЙ КОНУС

На малюнку 221 зображено *зрізаний конус*. Це частина конуса, що міститься між його основою та січною площиною, паралельною основі.

Зрізаний конус можна розглядати і як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції ABO_1O навколо меншої її бічної сторони OO_1 (мал. 222). Сторона AB трапеції описує *бічну поверхню зрізаного конуса*. Кожний відрізок цієї поверхні, утвореної обертанням сторони AB, — *твірна зрізаного конуса*. Усі твірні зрізаного конуса рівні. Основи AO і BO тра-


Мал. 221



Мал. 222

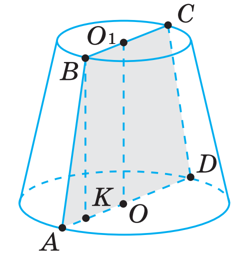
пеції описують круги, які називають *основами зрізаного конуса*. *Повна поверхня зрізаного конуса* складається з основ і бічної поверхні.

Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки площини однієї основи до площини іншої, називають *висотою зрізаного конуса*.

Задача 2. Висота зрізаного конуса дорівнює 6 см, радіуси основ — 10 см і 2 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса.

Розв'язання. Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція $ABCD$, оскільки $AB = CD$ як твірні (мал. 223). Проведемо висоту BK зрізаного конуса. Тоді $AK = AO - BO_1 = 10 - 2 = 8$ (см). Твірну зрізаного конуса знаходимо з прямокутного трикутника ABK:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}.$$



Мал. 223

Простіші задачі на знаходження елементів зрізаного конуса (твірної, висоти, радіусів основ, кута нахилу твірної до площини основи, кута між твірною і висотою) зводяться до знаходження елементів осьового перерізу — рівнобічної трапеції.

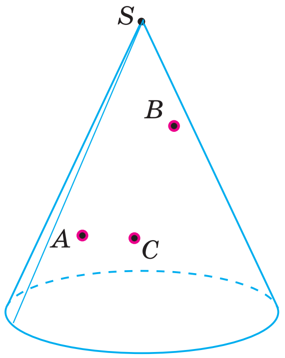
4. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ КОНУСА

Перерізи конусів будують за тими само правилами, що й перерізи циліндрів.

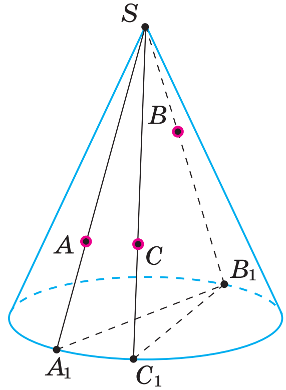
Задача 3. Побудуйте переріз конуса площиною, заданою трьома точками, які лежать на його бічній поверхні (мал. 224).

Розв'язання. Скористаємося методом слідів.

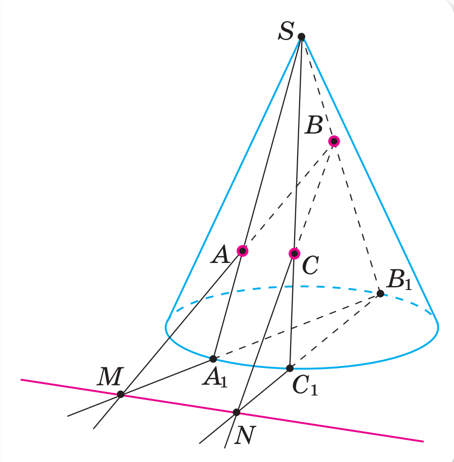
1. З вершини S проєктуємо на площину основи конуса точки A, B і C (мал. 225).
2. Будуємо точку M перетину прямих AB і A_1B_1. Вона лежить у площині основи конуса.
3. Будуємо точку N перетину прямих AC і A_1C_1. Вона лежить у площині основи конуса.
4. Будуємо пряму MN — слід січної площини у площині основи конуса (мал. 226).
5. Через кінці контурних твірних — точки X_1 і Y_1, що лежать у площині основи, проводимо відповідно прямі X_1A_1 і Y_1C_1. Вони перетинають слід MN відповідно в точках K і P (мал. 2.27).
6. Будуємо прямі KA і PC, які перетинають твірні відповідно в шуканих точках X і Y (мал. 228).
7. Сполучаємо плавною лінією точки A, C, Y, B і X та отримуємо на поверхні конуса лінію, яка обмежує шуканий переріз. Вона є еліпсом (мал. 229).



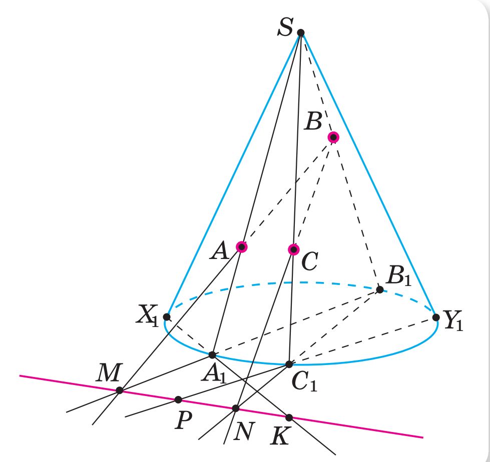
Мал. 224



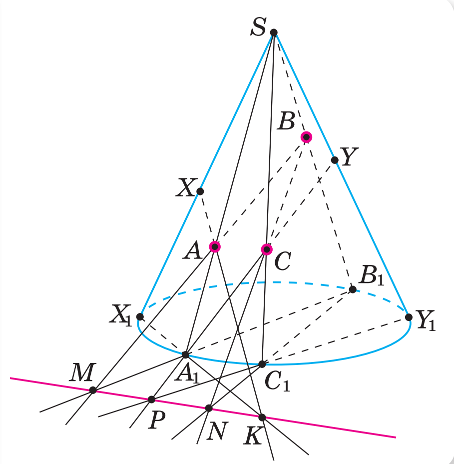
Мал. 225



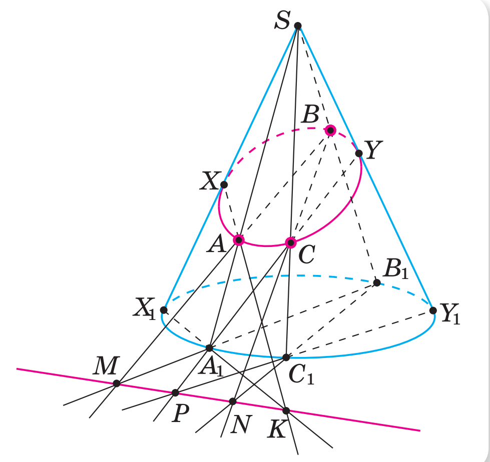
Мал. 226



Мал. 227



Мал. 228



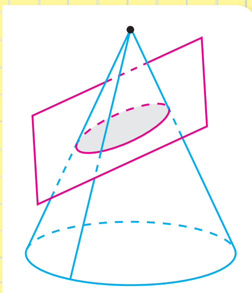
Мал. 229

Якщо пряма, що проходить через дві точки на поверхні конуса, та її проєкція на площину основи паралельні, то метод слідів застосувати не можна.

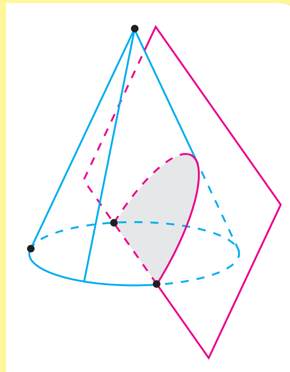
Дізнайтеся більше

1. Слово «конус» походить від грецького «конос», що означає соснова шишка, загострений предмет.

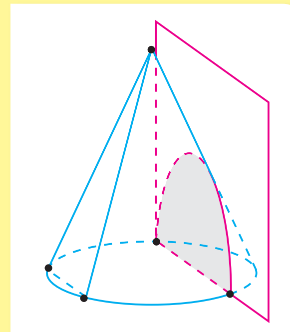
2. Переріз поверхні конуса площиною, яка перетинає всі твірні конуса, є еліпсом (мал. 230). Зокрема, якщо січна площина паралельна площині основи конуса, то в перерізі одержимо коло (окремий випадок еліпса). Якщо січна площина паралельна тільки одній твірній конуса, то в перерізі одержимо частину параболи (мал. 231). Якщо січна площина паралельна двом твірним конуса, то в перерізі одержимо частину однієї вітки гіперболи (мал. 232).



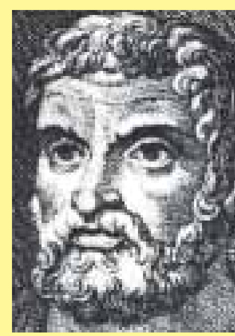
Мал. 230



Мал. 231



Мал. 232



Конічні перерізи відіграють значну роль у природі: планети Сонячної системи рухаються за еліпсоподібними орбітами, комети — за параболічними та гіперболічними орбітами (закони І. Кеплера). Властивості конічних перерізів часто використовують у науці й техніці. Наприклад, під час виготовлення деяких оптичних приладів використовують параболічні дзеркала.

3. Найповніше дослідження конічних перерізів було проведено **Аполлонієм Пергським** (262 до н. е. – 190 до н. е.). Його праця «Конічні перерізи» вплинула на розвиток математики, астрономії, механіки, оптики.

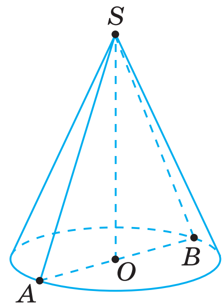
Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

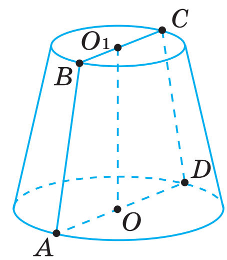
Українська	Англійська	Німецька
Конус	Cone	Kegel
Висота	Height	Höhe

Пригадайте головне

1. Що таке конус?
2. Що таке бічна поверхня конуса; повна поверхня конуса?
3. Що таке основа конуса; твірна конуса; висота конуса; вісь конуса?
4. Дайте означення осьовому перерізу конуса.
5. Якою фігурою є переріз конуса площиною, перпендикулярною до осі?
6. Що таке зрізаний конус?
7. Якою фігурою є осьовий переріз зрізаного конуса?
8. Якими фігурами можуть бути перерізи конуса?
9. Сформулюйте й доведіть теорему про переріз конуса площиною, паралельною основі.
10. Поясніть, як побудувати переріз конуса методом слідів.



Мал. 233



Мал. 234

Розв'яжіть задачі

419'. Назвіть висоту, твірну та осьовий переріз:
1) конуса на малюнку 233;
2) зрізаного конуса на малюнку 234.

420'. Чи одержимо конус обертанням:
1) рівнобедреного трикутника навколо його бічної сторони;
2) прямокутного трикутника навколо його катета;
3) правильного трикутника навколо його сторони?

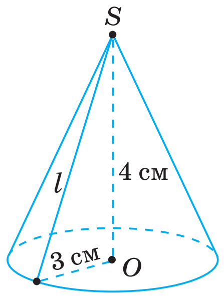
421'. Осьовий переріз конуса — рівносторонній трикутник зі стороною 10 см. Знайдіть:
1) радіус основи конуса;
2) твірну конуса;
3) площу основи конуса.

422'. Чи дістанемо зрізаний конус обертанням: 1) ромба навколо його сторони; 2) прямокутного трикутника навколо гіпотенузи; 3) прямокутної трапеції навколо її меншої бічної сторони?

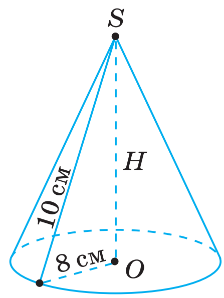
423'. Побудуйте конус із радіусом 3 см й висотою 4 см.

424'. Побудуйте рівносторонній конус із радіусом 4 см.

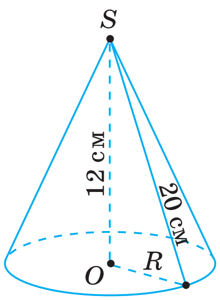
425°. За даними на малюнках 235–238 знайдіть невідомі елементи конуса H, R, l.



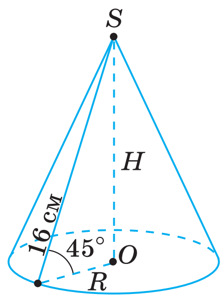
Мал. 235



Мал. 236



Мал. 237



Мал. 238

426°. Знайдіть твірну конуса з висотою H і діаметром основи D, якщо: 1) $H = 4$ см, $D = 6$ см; 2) $H = 12$ см, $D = 10$ см; 3) $H = 8$ см, $D = 12$ см.

427°. Твірна конуса, яка дорівнює 10 см, нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу основи конуса, якщо:
1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 60°$.

428°. Твірна конуса 20 см утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть: 1) радіус основи конуса; 2) висоту конуса; 3) площу основи конуса.

429°. Радіус основи конуса R, висота H. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса, якщо:
1) $R = 6$ см, $H = 8$ см; 2) $R = 9$ см, $H = 12$ см; 3) $R = 8$ см, $H = 8\sqrt{3}$ см.

430°. Площа основи конуса S, твірна l. Знайдіть висоту конуса, якщо:
1) $S = 16\pi$ см^2, $l = 5$ см;
2) $S = 64\pi$ см^2, $l = 10$ см;
3) $S = 144\pi$ см^2, $l = 13$ см.

431°. Висота конуса H, радіус R, твірна l, площа основи S. Заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

R	9 см			7 см		
H	12 см	15 см			20 см	$12a$
l		17 см	15 см			$13a$
S			81π см^2	49π см^2	225π см^2	

432°. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо:
1) висота конуса дорівнює радіусу основи;
2) радіус основи дорівнює половині твірної.

433°. Довжина кола основи конуса C, твірна l. Знайдіть висоту конуса, якщо: 1) $C = 10\pi$ см, $l = 13$ см; 2) $C = 16\pi$ см, $l = 10$ см; 3) $C = 24\pi$ см, $l = 20$ см.

434°. Площа основи конуса Q, твірна утворює з площиною основи кут α. Знайдіть твірну й висоту конуса, якщо:
1) $Q = 36\,\pi$ см^2, $\alpha = 45°$; 2) $Q = 100\pi$ см^2, $\alpha = 60°$; 3) $Q = \pi$ см^2, $\alpha = 30°$.

435°. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом 45°. Площа його осьового перерізу дорівнює S. Знайдіть:
1) радіус основи конуса; 2) висоту конуса; 3) твірну конуса.

436°. Радіуси основ зрізаного конуса R і r, висота H. Знайдіть твірну конуса, якщо:
1) $R = 6$ см, $r = 3$ см, $H = 4$ см;
2) $R = 13$ см, $r = 8$ см, $H = 12$ см;
3) $R = 20$ см, $r = 12$ см, $H = 8\sqrt{3}$ см.

437°. Радіуси основ зрізаного конуса 18 см і 8 см, твірна утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть:
1) висоту зрізаного конуса;
2) твірну зрізаного конуса.

438°. Побудуйте конус, який утворено обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою $3\sqrt{2}$ см навколо катета.

439°. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса, у якого радіус основи R, а висота H.

440°. Твірна конуса l, кут при вершині осьового перерізу α. Знайдіть: 1) висоту конуса; 2) площу основи.

441°. Радіуси основ зрізаного конуса R і r, твірна утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть:
1) висоту зрізаного конуса; 2) твірну зрізаного конуса.

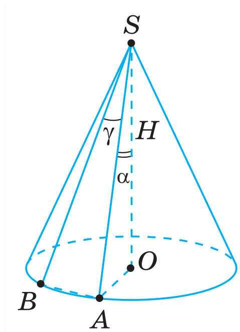
442. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, висота якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть: 1) довжину кола основи конуса; 2) твірну; 3) площу осьового перерізу.

443. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, площа якого $9\sqrt{3}$ см². Знайдіть: 1) твірну конуса; 2) радіус основи.

444. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник зі стороною $2R$. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

445. Радіус основи конуса дорівнює його висоті. Знайдіть найбільшийз можливих кутів між твірними конуса.

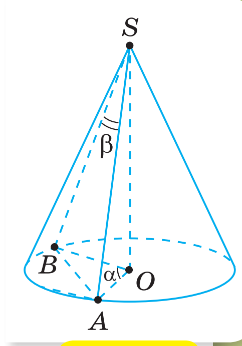
446. Висота конуса H утворює з його твірною кут α. Через дві твірні конуса, кут між якими γ, проведено переріз (мал. 239). Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $H = 6$ см, $\alpha = 60°$, $\gamma = 30°$;
2) $H = 8$ см, $\alpha = 45°$, $\gamma = 30°$.



Мал. 239

447. Через дві твірні конуса, кут між якими α, проведено переріз. Радіус основи конуса R, а твірна утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо: 1) $R = 10$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$; 2) $R = 12$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.

448. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β (мал. 240). Знайдіть:
1) твірну конуса, якщо радіус основи R;
2) радіус основи конуса, якщо твірна l.



Мал. 240

449. Висота конуса дорівнює радіусу його основи R. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $R = 2$ см, $\alpha = 60°$; 2) $R = 4$ см, $\alpha = 90°$.

450. Відстань від центра основи конуса до його твірної 4 см, а кут при вершині осьового перерізу $120°$. Знайдіть:
1) висоту конуса; 2) радіус основи конуса;
3) площу осьового перерізу.

451. Радіус основи конуса R, висота H. Конус перетинає площина, паралельна основі, на відстані m від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $R = 6$ см, $H = 12$ см, $m = 2$ см; 2) $R = 8$ см, $H = 4$ см, $m = 2$ см.

452. Висота конуса H. На якій відстані від вершини конуса треба провести площину паралельно основі, щоб площа перерізу була:
1) удвічі меншою від площі основи;
2) у 4 рази меншою від площі основи?

453. Радіуси основ зрізаного конуса R і r, твірна l. Знайдіть площу осьового перерізу, якщо:
1) $R = 7$ см, $r = 3$ см, $l = 5$ см;
2) $R = 20$ см, $r = 14$ см, $l = 10$ см.

454. Площі основ зрізаного конуса S_1 і S_2. Через середину висоти проведено площину, паралельну основам. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо:
1) $S_1 = 36\pi$ см^2, $S_2 = 16\pi$ см^2; 2) $S_1 = 9\pi$ см^2, $S_2 = \pi$ см^2.

455. Площа осьового перерізу рівностороннього конуса дорівнює $S\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу основи.

456. Радіус основи конуса R, висота H. Побудуйте розгортку цього конуса, якщо:
1) $R = 2$ см, $H = 4$ см; 2) $R = 3$ см, $H = 3$ см.

457. Сторона осьового перерізу рівностороннього конуса дорівнює a см. Знайдіть:
1) висоту конуса;
2) твірну;
3) довжину кола основи конуса;
4) площу основи.

458. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює m см.

459. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, у якого твірна дорівнює a, а сума радіуса основи й висоти дорівнює b.

460. У конуса з радіусом основи 16 см площа осьового перерізу відноситься до площі основи, як $2 : \pi$. Знайдіть:
1) висоту конуса;
2) площу осьового перерізу.

461. Виведіть формулу для знаходження площі осьового перерізу конуса з висотою H і радіусом основи R.

462. Радіус основи конуса дорівнює $b\sqrt{2}$ см. Через вершину конуса проведено площину під кутом $60°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом $90°$. Знайдіть:
1) довжину твірної конуса;
2) площу перерізу.

463. Площі основ зрізаного конуса Q_1 і Q_2. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середину висоти паралельно основам даного конуса.

464. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з дугою α. Знайдіть α, якщо висота конуса дорівнює 8 см, а радіус основи 6 см.

465. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор із дугою β. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо:
1) $\beta = 60°$;
2) $\beta = 90°$;
3) $\beta = 180°$.

466. Четверту частину круга згорнули в конічну поверхню. Доведіть, що твірна конуса в 4 рази більша за радіус основи.

467. Точки A і B розміщено поза поверхнею конуса. Побудуйте точки перетину прямої AB з бічною поверхнею конуса.

468. Побудуйте переріз конуса площиною, заданою слідом a і точкою A на видимій частині бічної поверхні конуса.

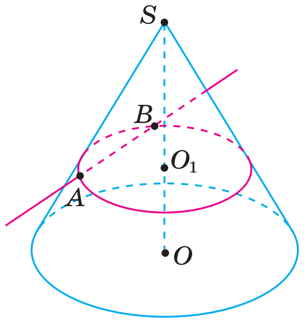
469. Побудуйте переріз конуса площиною, заданою трьома точками на його бічній поверхні.

470. Висота конуса 20 см, радіус основи 25 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину, якщо відстань від нього до центра основи конуса дорівнює 12 см.

471*. Через середину висоти конуса проведено пряму паралельно твірній l. Знайдіть довжину відрізка прямої, який міститься всередині конуса.

472*. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P, а кут між твірною і висотою α. Знайдіть:
1) радіус основи конуса;
2) висоту конуса;
3) площу осьового перерізу.

473*. Твірна конуса 13 см, висота 12 см. Конус перетинає пряма, що паралельна основі. Відстань від прямої до основи дорівнює 6 см, а до висоти — 2 см. Знайдіть відрізок цієї прямої, який міститься всередині конуса (мал. 241).



Мал. 241

474*. Твірна зрізаного конуса дорівнює 29 см, висота — 21 см, а радіуси основ відносяться, як 5 : 3. Знайдіть діаметри основ.

475*. Площа більшої основи зрізаного конуса дорівнює Q. Відрізок, що сполучає її центр із точкою кола меншої основи, дорівнює l і паралельний одній із твірних. Знайдіть площу осьового перерізу, якщо:
1) $Q = 144\,\pi$ см², $l = 10$ см; 2) $Q = 100\,\pi$ см², $l = 13$ см.

476*. Твірна зрізаного конуса дорівнює 12 см, радіуси основ відносяться, як 1 : 3, кут між твірною і площиною основи дорівнює 60°. Знайдіть відповідні хорди основ, які віддалені від центра на 3 см.

477*. Через вершину конуса й хорду основи, яка стягує дугу в 120°, проведено переріз під кутом 45° до основи конуса. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи дорівнює a.

478*. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено площину. Площа перерізу дорівнює S. Знайдіть висоту конуса, якщо твірна нахилена до площини основи під кутом β.

479*. Доведіть, що циліндр і конус, осі яких лежать на одній прямій, перетинаються по кругу, паралельному їхнім основам.

480*. Два конуси з радіусами основ 10 см і 15 см мають спільну висоту. Знайдіть довжину кола, по якому перетинаються поверхні цих конусів, якщо їхні основи лежать у різних площинах.

Проявіть компетентність

481. Наведіть приклади конуса на предметах довкілля.

482. Чи вистачить аркуша паперу формату А4, щоб виготовити розгортку конуса, у якого:
1) радіус основи 4 см, а осьовим перерізом є рівносторонній трикутник;
2) радіус основи 4 см, а висота вдвічі довша за радіус?

483. Виготовте макет конуса з аркуша паперу формату А4 так, щоб радіус його основи дорівнював його висоті.

484. Щебінь — неорганічний зернистий сипучий матеріал із зернами крупністю понад 5 мм, який можна отримати шляхом дроблення гірських порід, гравію і валунів. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого 4 м (мал. 242). Знайдіть:

Мал. 242

1) висоту купи, якщо кут природного укосу для щебеню 30°;
2) площу основи цієї купи.

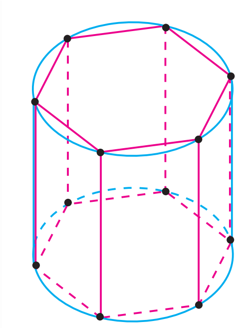
485. Який діаметр терикону, якщо його висота 80 м, а кут укосу — 45° (терикон — конусоподібний насип порожньої породи біля шахти)?

§ 10. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ПРИЗМИ ТА ПІРАМІДИ

У курсі планіметрії ви ознайомилися із вписаними та описаними фігурами. Наприклад, трикутник, вписаний у коло, і трикутник, описаний навколо нього. У курсі стереометрії ми будемо розглядати вписані й описані тіла.

1. ПРИЗМА І ЦИЛІНДР

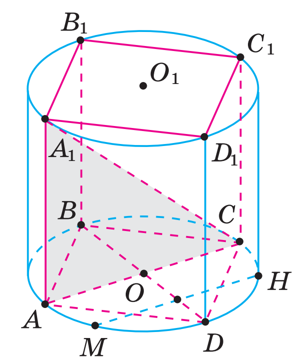
***Призма* називається *вписаною в циліндр*, якщо її основи вписані в основи циліндра** (мал. 243).



Мал. 243

? Основа прямого паралелепіпеда — ромб. Чи може даний паралелепіпед бути вписаним у циліндр? Ні, бо навколо ромба не можна описати коло.

Задача 1. У циліндр вписано правильну чотирикутну призму. Знайдіть висоту циліндра, якщо сторона основи призми дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 60°.



Мал. 244

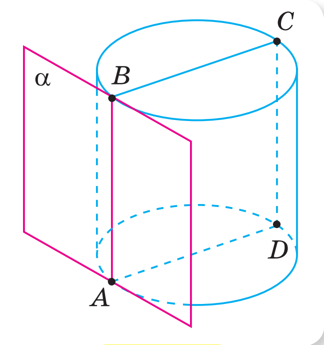
Розв'язання. 1. Виконаємо малюнок за умовою задачі. Будуємо зображення нижньої основи циліндра (мал. 244). Зображаючи квадрат, вписаний у коло основи, враховуємо, що його діагоналі перпендикулярні та є діаметрами кола основи. Проводимо довільний діаметр AC. Паралельна проєкція перпендикулярного до нього діаметра проходить через середини хорд, паралельних діаметру AC. Тому через середину будь-якої хорди $MH \parallel AC$ і центр O основи проводимо діаметр BD. Точки A, B, C і D — вершини зображення квадрата. Через ці точки проводимо твірні циліндра й послідовно сполучаємо їхні кінці A_1, B_1, C_1 і D_1. Будуємо еліпс верхньої основи циліндра.

2. Осьовий переріз циліндра — прямокутник AA_1C_1C. За умовою, $\angle ACA_1 = 60°$ і $AB = BC = CD = DA = 3\sqrt{2}$ (см). Оскільки $ABCD$ — квадрат, то радіус основи циліндра $R = OC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$ (см).

Із прямокутного трикутника ACA_1:

$$H = AA_1 = AC \cdot \mathrm{tg}60° = 2 \cdot OC \cdot \mathrm{tg}60° = 6\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

Якщо призму можна вписати в циліндр, то:
1) основа призми є многокутником, навколо якого можна описати коло;
2) радіус циліндра дорівнює радіусу цього кола;
3) вісь циліндра збігається з висотою призми, що з'єднує центри кіл, описаних навколо основ призми.



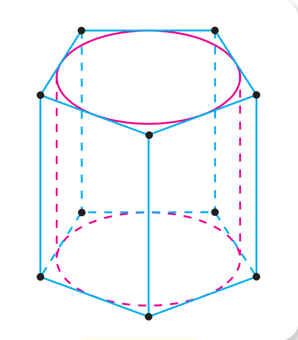
Мал. 245

Подивіться на малюнок 245. Площина α проходить через твірну AB циліндра й перпендикулярна до площини осьового перерізу $ABCD$, що містить цю твірну. Площина α — дотична площина до циліндра.

Призма **називається** ***описаною навколо циліндра*****, якщо її основи описані навколо основ циліндра** (мал. 246).

У призми, описаної навколо циліндра, бічні грані дотикаються до циліндра.

Чи може прямокутний паралелепіпед бути описаним навколо циліндра? Не завжди. Якщо його основи — прямокутники, які не є квадратами, то в них не можна вписати коло.


Мал. 246

Якщо циліндр можна вписати в призму, то:
1) основа призми є многокутником, у який можна вписати коло;
2) радіус циліндра дорівнює радіусу цього кола;
3) вісь циліндра збігається з висотою призми, що з'єднує центри кіл, вписаних в основи призми.

2. ПІРАМІДА І КОНУС

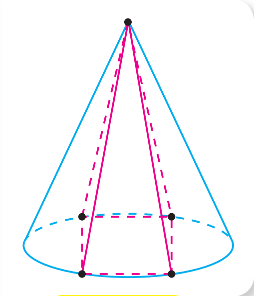
Піраміда **називається** ***вписаною в конус*****, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в основу конуса** (мал. 247).

Задача 2. У конус вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть твірну конуса.

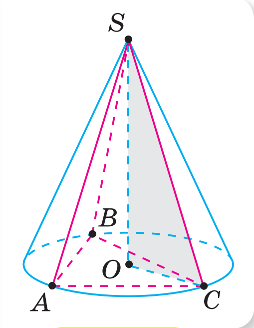
Розв'язання. За умовою, $AB = BC = CA = 6\sqrt{3}$ (см), $\angle OCS = 60°$ (мал. 248).

Радіус основи конуса $R = OC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ (см).

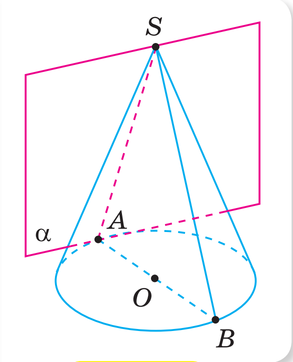
Оскільки бічні ребра піраміди є твірними конуса, то з прямокутного трикутника COS: $CS = \dfrac{OC}{\cos 60°} = \dfrac{6}{\frac{1}{2}} = 12$ (см).



Мал. 247



Мал. 248

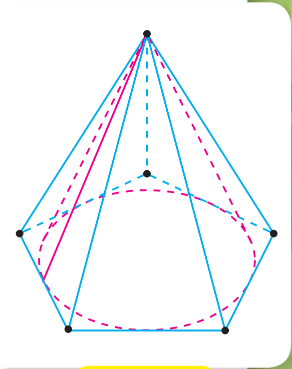


Мал. 249

Якщо піраміда вписана в конус, то:
1) основа піраміди є многокутником, навколо якого можна описати коло;
2) вершина піраміди проєктується в центр цього кола;
3) радіус конуса дорівнює радіусу цього кола;
4) висоти піраміди й конуса збігаються;
5) бічні ребра піраміди є твірними конуса.

Подивіться на малюнок 249. Площина α проходить через твірну SA конуса і перпендикулярна до осьового перерізу ASB, що містить цю твірну. Площина α — дотична площина до конуса.

Піраміда **називається** ***описаною навколо конуса*****, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди описана навколо основи конуса** (мал. 250).



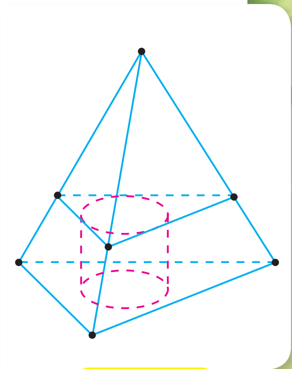
Мал. 250

У піраміди, описаної навколо конуса, бічні грані дотикаються до конуса.

Якщо піраміда описана навколо конуса, то:
1) основа піраміди є многокутником, у який можна вписати коло;
2) вершина піраміди проєктується в центр цього кола;
3) радіус конуса дорівнює радіусу цього кола;
4) висоти піраміди й конуса збігаються.

3. ЦИЛІНДР І ПІРАМІДА

Циліндр **називається** ***вписаним у піраміду*****, якщо одна з його основ дотикається до всіх бічних граней піраміди, а друга основа лежить у внутрішній області основи піраміди** (мал. 251).



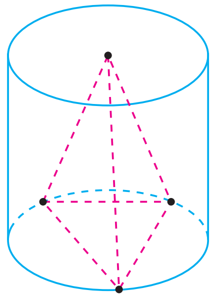
Мал. 251

Якщо циліндр уписаний у піраміду, то в її основу можна вписати коло.

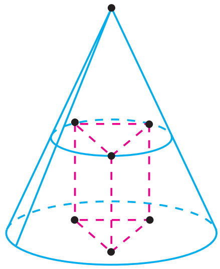
Для розв'язування задач іноді доцільно побудувати переріз піраміди площиною, яка містить верхню основу циліндра. Побудований переріз є трикутником, описаним навколо кола верхньої основи циліндра. Ця площина відтинає від піраміди частину (меншу піраміду), яка є подібною даній піраміді.

Піраміда **називається** ***вписаною в циліндр*****, якщо основа піраміди вписана в нижню основу циліндра, а вершина лежить у верхній його основі** (мал. 252).

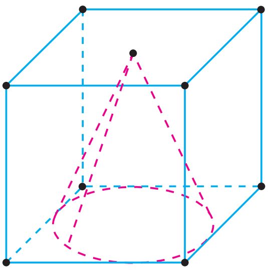
У даній комбінації тіла мають однакові висоти. Вершина піраміди не обов'язково проєктується в центр кола, описаного навколо її основи.



Мал. 252



Мал. 253



Мал. 254

4. ПРИЗМА І КОНУС

Призма **називається** ***вписаною в конус*****, якщо всі вершини верхньої основи призми лежать на бічній поверхні конуса, а нижня основа лежить у внутрішній області кола основи конуса** (мал. 253).

При цьому навколо основи призми можна описати коло (хоча нижня основа призми не є вписаною в основу конуса).

Для розв'язування задач іноді доцільно побудувати переріз конуса площиною, що містить верхню основу призми. Побудований переріз є кругом, у коло якого вписано верхню основу призми. Ця площина відтинає від конуса частину (менший конус), що є подібною даному конусу.

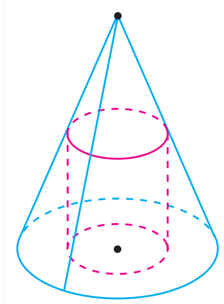
Конус **називається** ***вписаним у призму*****, якщо його вершина лежить у верхній її основі, а основа вписана в нижню основу призми** (мал. 254).

При цьому призма не обов'язково має бути прямою.

У даній комбінації тіла мають однакові висоти.

5. ЦИЛІНДР І КОНУС

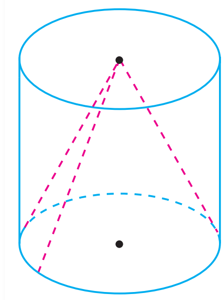
Циліндр **називається *вписаним у конус*, якщо одна з його основ дотикається до всіх твірних конуса, а друга основа лежить у внутрішній області кола основи конуса** (мал. 255).


Мал. 255

При цьому основа конуса й нижня основа циліндра не збігаються.

Для розв'язування задач іноді доцільно розглядати верхню основу циліндра як переріз конуса площиною, яка відтинає від конуса частину (менший конус), що є подібною даному конусу.

Конус **називається *вписаним у циліндр*, якщо основа конуса збігається з основою циліндра, а вершина конуса лежить у верхній основі циліндра** (мал. 256).

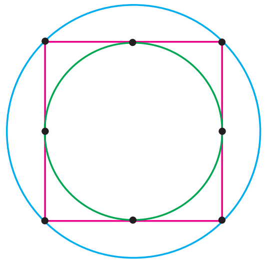

Мал. 256

У даній комбінації тіла мають однакові висоти та радіуси основ.

Існує багато інших комбінацій тіл. У кожній з них доводиться уточнювати, як розміщені тіла. Також можливі комбінації, які складаються з трьох і більше тіл. У таких задачах можна не виконувати повні зображення комбінації тіл, а зображати лише комбінацію окремих елементів цих тіл, зокрема перерізів (діагональних, осьових тощо).

Задача 3. У куб вписано циліндр і навколо куба описано циліндр. Як відносяться радіуси основ цих циліндрів?

Розв'язання. Якщо куб вписано в циліндр, то в коло основи циліндра вписано квадрат, який є основою куба. Якщо в куб вписано циліндр, то у квадрат основи куба вписано коло основи цього циліндра. Отже, у розв'язуванні задачі треба розглянути комбінацію: коло радіуса R — квадрат зі стороною a — коло радіуса r (мал. 257). Виразимо радіуси описаного і вписаного кіл через сторону квадрата: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, r = \frac{a}{2}$. Знайдемо відношення радіусів: $\frac{R}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$.


Мал. 257

Дізнайтеся більше

1. Боголюбов Микола Миколайович (1909 – 1992) — видатний математик і фізик-теоретик.

Народився в м. Нижній Новгород (Росія). З 1916 до 1950 р. навчався та працював у Київському університеті. У п'ятнадцять років М. М. Боголюбов написав першу наукову працю, а в 20-річному віці отримав ступінь доктора математичних наук. М. М. Боголюбов — почесний член багатьох іноземних академій наук. Президією НАН України засновано премію ім. М. Боголюбова, його ім'я присвоєно Інституту теоретичної фізики НАН України.

2. У 1914 р. Одеське книговидання наукових і науково-популярних видань у галузі фізико-математичних наук «Матезисъ» випустило книгу Павла Григоровича Дзика «Збірник стереометричних задач на комбінації геометричних тіл» за редакцією приват-доцента Санкт-Петербурзького університету Я. В. Успенського. Збірник містив такі розділи: 1) комбінації многогранників; 2) комбінації куль із прямими, площинами та многокутниками; 3) комбінації циліндра з прямими, площинами, многокутниками та кулями; 4) комбінації конуса з прямими, площинами, многокутниками та кулями. У цьому збірнику, крім звичних, пропонуються також інші можливі варіанти комбінацій тіл.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Дотична площина	Tangent plane	Tangentialebene

Пригадайте головне

1. Яку призму називають вписаною в циліндр; описаною навколо циліндра?
2. Що таке дотична площина до циліндра?
3. Яку піраміду називають вписаною в конус; описаною навколо конуса?
4. Що таке дотична площина до конуса?
5. Який циліндр називають вписаним у піраміду? Які особливості такої комбінації тіл?
6. Який циліндр називають описаним навколо піраміди? Які особливості такої комбінації тіл?
7. Який конус називають вписаним у призму? Які особливості такої комбінації тіл?
8. Який конус називають описаним навколо призми? Які особливості такої комбінації тіл?
9. Який циліндр називають вписаним у конус? Які особливості такої комбінації тіл?
10. Який циліндр називають описаним навколо конуса? Які особливості такої комбінації тіл?

Розв'яжіть задачі

486'. На якому з малюнків 258–261 зображено:
1) призму, вписану в циліндр;
2) призму, описану навколо циліндра;
3) піраміду, вписану в конус;
4) піраміду, описану навколо конуса?

487'. Призму вписано в циліндр. Чи правильно, що:
1) радіус основи циліндра дорівнює радіусу кола, описаного навколо основи призми;
2) основа призми — правильний многокутник;
3) призма й циліндр мають рівні висоти?

488'. Циліндр вписано в призму. Чи правильно, що:
1) радіус основи циліндра дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми;
2) основа призми — правильний многокутник;
3) призма й циліндр мають рівні висоти?

489'. Піраміду вписано в конус. Чи правильно, що:
1) висоти піраміди й конуса збігаються;
2) основа піраміди — правильний многокутник;
3) бічні ребра піраміди є твірними конуса?

490'. Правильна чотирикутна призма описана навколо циліндра. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо сторона основи призми дорівнює:
1) 6 см; 2) 4 см; 3) 8 см.

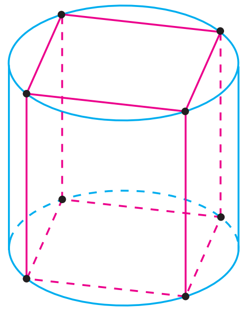
491'. У циліндр вписано пряму призму, основа якої — прямокутний трикутник. Яке взаємне розміщення осі циліндра і граней прямої призми? Чи можна стверджувати, що дві грані призми взаємно перпендикулярні?

492'. Висота конуса 15 см. Знайдіть висоту піраміди:
1) вписаної в конус;
2) описаної навколо конуса.

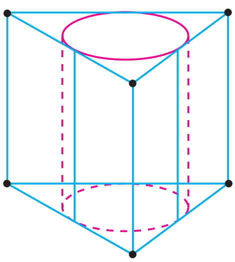
493'. У конус вписана піраміда, основа якої — прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайдіть радіус конуса.

494°. Чи може прямокутний паралелепіпед бути:
1) вписаним у циліндр;
2) описаним навколо циліндра?

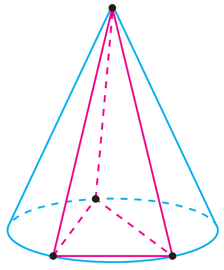
495°. Основа піраміди — ромб. Чи може дана піраміда бути:
1) вписаною в конус;
2) описаною навколо конуса?



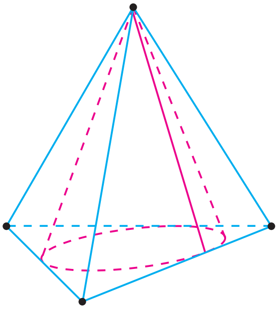
Мал. 258



Мал. 259



Мал. 260



Мал. 261

496°. У циліндр вписано правильну чотирикутну призму, сторона основи якої a, висота H. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо:
1) $H = 4$ см, $a = 5\sqrt{2}$ см;
2) $H = 8$ см, $a = 4\sqrt{2}$ см;
3) $H = 1$ см, $a = \sqrt{2}$ см.

497°. Площа осьового перерізу циліндра — квадрат зі стороною a. Знайдіть висоту і сторону основи правильної трикутної призми, вписаної в циліндр, якщо: 1) $a = 16\sqrt{3}$ см; 2) $a = 8\sqrt{3}$ см; 3) $a = 12\sqrt{3}$ см.

498°. Циліндр вписано в правильну чотирикутну призму, сторона основи якої a, а бічне ребро b. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 8$ см, $b = 10$ см; 3) $a = 3$ см, $b = 9$ см.

499'. Знайдіть сторону основи правильної трикутної призми, описаної навколо циліндра з радіусом основи R, якщо:
1) $R = \sqrt{3}$ см; 2) $R = 10\sqrt{3}$ см; 3) $R = 5$ см.

500°. Чи може чотирикутна піраміда $SABCD$ бути вписаною в конус, якщо в піраміди: 1) протилежні кути основи $40°$ і $140°$; 2) $AB = 1$ см, $BC = 3$ см, $CD = 5$ см, $AD = 2$ см? Відповідь поясніть.

501°. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть висоту конуса, описаного навколо піраміди, якщо:
1) $b = 14$ см, $\alpha = 30°$; 2) $b = 12$ см, $\alpha = 45°$; 3) $b = 16$ см, $\alpha = 60°$.

502°. Радіус основи конуса R, твірна l. Знайдіть висоту та сторону основи правильної чотирикутної піраміди, вписаної в конус, якщо:
1) $R = 3$ см, $l = 5$ см; 2) $R = 6$ см, $l = 10$ см; 3) $R = 5$ см, $l = 13$ см.

503°. Висота правильної трикутної піраміди H, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу основи конуса, вписаного в піраміду, якщо:
1) $H = 5$ см, $\alpha = 30°$; 2) $H = 18$ см, $\alpha = 60°$; 3) $H = 10$ см, $\alpha = 45°$.

504°. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту конуса, вписаного в піраміду, якщо:
1) $a = 12$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 6$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 8\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

505°. У циліндр, радіус основи якого 12 см, вписано правильну n-кутну призму. Знайдіть радіус циліндра, вписаного в дану призму, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

506°. У конус, радіус основи якого $2\sqrt{6}$ см, вписано правильну n-кутну піраміду. Знайдіть радіус конуса, вписаного в дану піраміду, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

507. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а висота — 10 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

508. Правильну чотирикутну призму вписано в циліндр, радіус основи якого R, а висота H. Знайдіть діагональ бічної грані призми, якщо 1) $H = 3$ см, $R = 2\sqrt{2}$ см; 2) $H = 5$ см, $R = 6\sqrt{2}$ см.

509. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту і сторону основи правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр, якщо:
1) $d = 18$ см, $\alpha = 45°$; 2) $d = 12$ см, $\alpha = 60°$.

510. Навколо циліндра, радіус основи якого R, а висота H, описано правильну чотирикутну призму. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через два несусідні бічні ребра, якщо:
1) $R = 5$ см, $H = 8$ см; 2) $R = 7$ см, $H = 10$ см.

511. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу рівнобедреного трикутника, утворює з площиною основи призми кут β. Знайдіть твірну і площу основи циліндра, вписаного в призму.

512. Усі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що її можна вписати в деякий конус.

513. Висота конуса H, а кут при вершині осьового перерізу α. У конус вписано правильну чотирикутну піраміду. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, що проходить через два несусідні бічні ребра, якщо: 1) $H = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $H = 10$ см, $\alpha = 90°$.

514. Висота піраміди дорівнює H, а бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди, якщо: 1) $H = 3$ см, $\alpha = 60°$; 2) $H = 8$ см, $\alpha = 45°$.

515. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см, а висота призми — 24 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

516. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

517. У конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α, вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Знайдіть радіус основи й висоту конуса, якщо:
1) $a = 24$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 30°$.

518. Чи можна вписати в конус чотирикутну піраміду, кути основи якої, взяті послідовно, відносяться, як: 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

519. Навколо конуса, твірна якого l, а радіус основи R, описано правильну трикутну піраміду. Знайдіть висоту та сторону основи піраміди, якщо: 1) $l = 10$ см, $R = 6$ см; 2) $l = 13$ см, $R = 5$ см.

520. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a см, висота — b см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.

521. Твірна циліндра дорівнює a см, а радіус основи — b см. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, вписаної в циліндр, якщо: 1) $a = 8$ см, $b = 4$ см; 2) $a = 3\sqrt{2}$ см, $b = 6$ см.

522. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть радіус основи і висоту циліндра:
1) описаного навколо призми; 2) вписаного в призму.

523. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює b, а бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть радіус основи й твірну конуса:
1) описаного навколо піраміди; 2) вписаного в піраміду.

524. У рівносторонній конус, висота якого H, вписано рівносторонній циліндр. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

525. Розгляньте всі можливі комбінації многогранників. Зробіть відповідні малюнки.

526. Розгляньте всі можливі комбінації зрізаного конуса з многогранниками й тілами обертання. Зробіть відповідні малюнки.

527. У зрізаний конус вписано правильні зрізані трикутна, чотирикутна, шестикутна піраміди. Чи можна стверджувати, що в цих пірамідах рівні:
1) кути нахилу бічних ребер до площини основи;
2) кути нахилу бічних граней до площини основи?
Відповідь поясніть.

528. У правильну чотирикутну зрізану піраміду вписано зрізаний конус. Сторони основ піраміди дорівнюють 4 см і 8 см, а кут між бічним ребром піраміди та площиною її нижньої основи дорівнюю 45°. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

529. Діагональ куба, вписаного в правильну чотирикутну піраміду, дорівнює d. Осьовий переріз піраміди — прямокутний трикутник. Знайдіть: 1) висоту піраміди; 2) площу основи піраміди.

530*. Основа прямої призми — прямокутний трикутник із гострим кутом α. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, дорівнює d і утворює з площиною основи кут β. Знайдіть твірну і площу основи циліндра, вписаного в дану призму.

531*. Основою прямої призми є прямокутник, діагональ якого утворює з більшою стороною кут α. Діагональ бічної грані призми, що містить меншу сторону прямокутника, дорівнює d й утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.

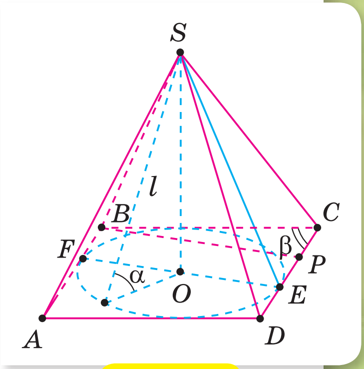
532*. Основа піраміди — ромб із гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Відрізок, що сполучає основу висоти піраміди із серединою сторони ромба, дорівнює a. Знайдіть висоту й радіус основи конуса, вписаного в піраміду.

533*. У чотирикутну піраміду, кожне ребро якої дорівнює a, вписано рівносторонній циліндр. Знайдіть радіус основи та висоту циліндра.

534*. Навколо циліндра описано чотирикутну призму. Доведіть, що суми площ її протилежних бічних граней рівні.

535*. Навколо конуса описано чотирикутну піраміду $SABCD$. Доведіть, що $\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle ASD$.

536*. Твірна l конуса утворює з площиною основи кут α (мал. 262). Знайдіть площу основи описаної навколо конуса піраміди, основою якої є ромб із гострим кутом β.



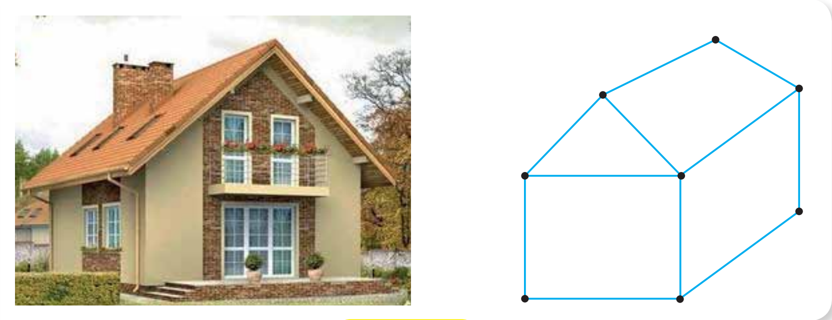
Мал. 262

Проявіть компетентність

537. У столяра є дошки розміром 10 × 45 × 3 см.
1) Скільки отворів круглої форми радіуса 1 см можна зробити на одній дошці (мал. 263), якщо відстань між центрами отворів має становити 3 см (відстань від краю дошки має становити 2 см)?
2) Яку форму мають отвори? Назвіть розміри даної фігури.

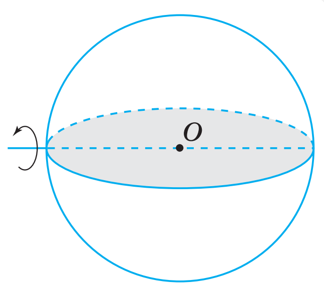

Мал. 263

538. За планом будинку розміри фундаменту становлять 20 × 20 м (мал. 264). Якої висоти має бути дах, якщо господар планує побудувати на горищі кімнату розмірами 10 × 20 × 2,5 м?


Мал. 264

§ 11. КУЛЯ

1. КУЛЯ ТА ЇЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ



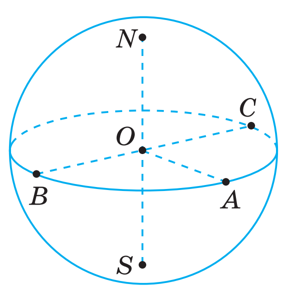
Мал. 265

Куля, так само, як циліндр і конус, є тілом обертання. Користуючись малюнком 265, дайте означення кулі й поверхні кулі та порівняйте їх із наведеними в підручнику.

Кулею **називається тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра. Поверхня, утворена при цьому колом, називається** ***кульовою поверхнею,*** **або** ***сферою*****.**

Центр півкруга, що обертається, є *центром кулі*.

Відрізок прямої, що сполучає центр із якою-небудь точкою кульової поверхні, називається *радіусом* (наприклад, відрізок OA на малюнку 266), а відрізок, що сполучає дві точки кульової поверхні й проходить через центр, називається *діаметром кулі* (наприклад, відрізок BC на малюнку 266). Усі радіуси однієї кулі рівні між собою. Вертикальний діаметр кулі вважають *віссю кулі*.



Мал. 266

Які існують випадки взаємного розміщення кулі та площини? Існують три випадки: площина перетинає кулю, площина дотикається до кулі, куля і площина не мають спільних точок.

Розглянемо більш детально перші два випадки. Третій випадок проаналізуйте самостійно.

2. ПЕРЕРІЗ КУЛІ ПЛОЩИНОЮ

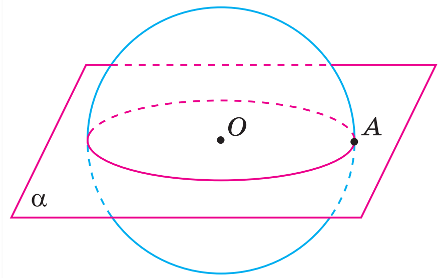
Площину, яка перетинає кулю, називають *січною площиною*, а фігуру, що містить усі спільні точки цієї площини й кулі, називають *перерізом кулі*.

ТЕОРЕМА **(про переріз кулі площиною).**

Будь-який переріз кулі площиною — круг.

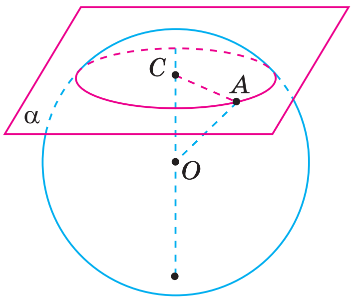
Дано: куля із центром у точці O, α — січна площина.
Довести: переріз кулі є кругом.

Доведення. Припустимо, що січна площина α проходить через точку O кулі (мал. 267). Усі точки лінії перетину кульової поверхні з площиною α однаково віддалені від точки O, що лежить у цій площині. Отже, лінія перерізу є колом із центром у точці O, а переріз — кругом.



Мал. 267

Нехай тепер січна площина α не проходить через центр кулі (мал. 268). Проведемо до неї із центра кулі перпендикуляр OC. Візьмемо будь-яку точку A на лінії перетину кульової поверхні з площиною α. Сполучимо її з точками O і C. З прямокутного трикутника AOC одержимо: $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$. Довжини відрізків OA й OC не змінюються при зміні положення точки A на лінії перерізу. Тому відстань AC є величиною, сталою для даного перерізу. А це означає, що лінія перерізу є колом із центром у точці C. Отже, всякий переріз кулі площиною — круг. Центр цього круга є кінцем перпендикуляра, проведеного із центра кулі до січної площини.

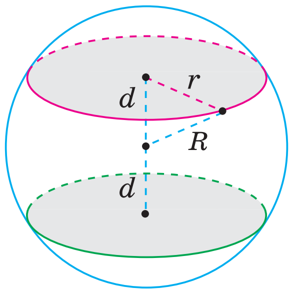


Мал. 268

НАСЛІДОК 1. **Радіус кулі R, радіус перерізу r і відстань від центра кулі до перерізу d пов'язані співвідношенням: $d = \sqrt{R^2 - r^2}$** (мал. 269).

НАСЛІДОК 2. **Перерізи кулі площинами, рівновіддаленими від її центра, є рівними.**

Справді, для двох перерізів із радіусами r_1 і r_2 можна зробити висновок: якщо $d_1 = d_2$ і R — радіус кулі, то і $r_1 = r_2$.

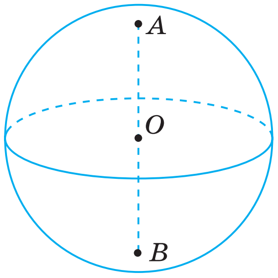


Мал. 269

НАСЛІДОК 3. **Переріз кулі площиною тим більший, що ближче він розміщений до центра кулі.**

Справді, що більше r, то менше d. Отже, якщо $d = 0$, то $R = r$, і січна площина проходить через центр кулі.

Площину, яка проходить через центр кулі, називають *діаметральною площиною*. Переріз кулі діаметральною площиною називають ***великим кругом кулі***, а переріз сфери — ***великим колом кулі***. Кінці осі кулі називають її *полюсами*.

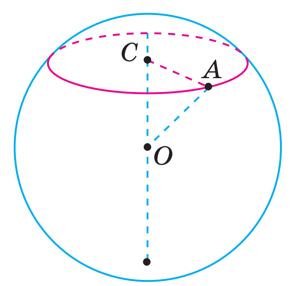


Мал. 270

Зображаючи кулю:
1) проведіть її контур — коло із центром O (мал. 270);
2) зобразіть горизонтально велике коло кулі у вигляді еліпса;

3) якщо потрібно, проведіть відрізок AB — вісь кулі; його будуємо перпендикулярно до горизонтального діаметра контуру кулі й дещо коротшим від діаметра кулі, розміщуючи його кінці всередині контуру кулі на однаковій невеличкій відстані від нього.

Зображення кулі вважається повним, якщо на ньому зображено контур кулі, вісь кулі та один з її перерізів (як правило, це — зображення її великого кола).



Мал. 271

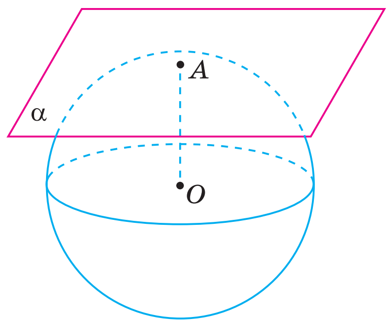
Задача. Радіус кулі 13 см. Знайдіть площу перерізу, якщо він віддалений від центра кулі на 5 см.

Розв'язання. Переріз кулі площиною — круг радіуса AC (мал. 271). Сполучаємо центр O кулі з точками A і C. Тоді $OC = 5$ см, $OA = 13$ см. Із прямокутного трикутника AOC:

$AC^2 = OA^2 - OC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ (см²).

Отже, $S = \pi AC^2 = 144\pi$ (см²).

Простіші задачі на переріз кулі площиною зводяться до розв'язування прямокутного трикутника ACO ($\angle ACO = 90°$, мал. 271), де AO — радіус кулі, AC — радіус перерізу кулі площиною, довжина відрізка CO — відстань від центра кулі до площини перерізу.



Мал. 272

3. КУЛЯ І ДОТИЧНА ПЛОЩИНА

Площину, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною площиною*. Спільну точку дотичної площини й кулі називають *точкою дотику дотичної площини*. На малюнку 272 площина α — дотична до кулі, A — точка дотику.

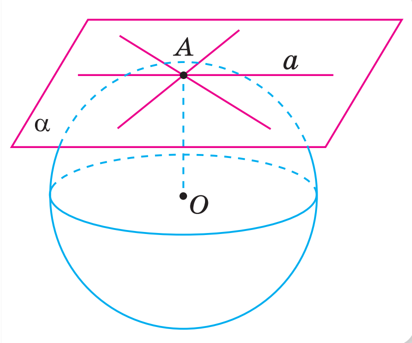
ТЕОРЕМА (про площину, дотичну до кулі).

Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Дано: куля із центром O, OA — радіус кулі, α — дотична площина, A — точка дотику.

Довести: $OA \perp \alpha$.

Доведення. За означенням дотичної площини, точка дотику A є єдиною спільною точкою площини α з кулею (мал. 272). Будь-яка інша точка площини α лежить поза кулею й, отже, міститься від центра на більшій відстані, ніж A. Тому відрізок OA — найкоротша відстань від точки O до площини α, тобто $OA \perp \alpha$.



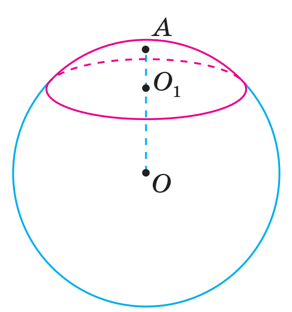
Мал. 273

Пряму, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною до кулі*. Спільну точку називають *точкою дотику дотичної*. На малюнку 273 пряма a — дотична до кулі, A — точка дотику.

? Чи можна провести дві прямі, дотичні до кулі в даній точці? Так, бо будь-яка пряма b (мал. 273), що лежить у дотичній площині й проходить через точку дотику, є дотичною до кулі в цій точці.

4. ЧАСТИНИ КУЛІ

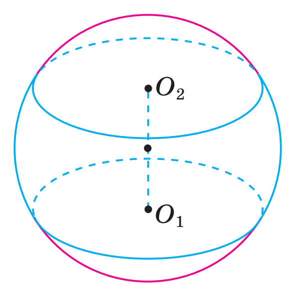
Кульовим сегментом називають частину кулі, яку відтинає від неї січна площина (мал. 274). *Поверхня кульового сегмента* складається зі сферичного сегмента і круга — основи кульового сегмента. Відрізок AO_1, що є частиною радіуса кулі, перпендикулярного до основи кульового сегмента, називають *висотою сегмента*, а радіус кулі — *радіусом сегмента*. Якщо висота сегмента дорівнює радіусу кулі, то сегмент називають *півкулею*. Сегменти з висотою, більшою за радіус кулі, не розглядаються.



Мал. 274

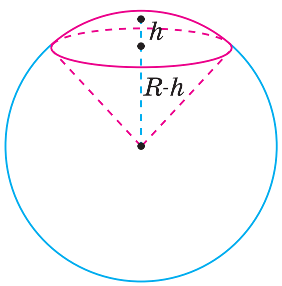
? Чи можна розглядати кульовий сегмент як поверхню обертання? Так. Кульовий сегмент утворюється обертанням кругового сегмента навколо його осі симетрії.

Кульовим шаром називають частину кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами (мал. 275). Відповідну частину сфери називають *кульовим поясом*. Можна сказати, що кульовий пояс є бічною поверхнею кульового шару. Круги з центрами в точках O_1 і O_2, отримані в паралельних перерізах кулі, називають *основами кульового шару*, а відрізок $O_1O_2 = h$, перпендикулярний до його основ, — *висотою шару*.



Мал. 275

Якщо вершина конуса міститься в центрі кулі, а основа збігається з основою кульового сегмента, то тіло, утворене конусом і сег-

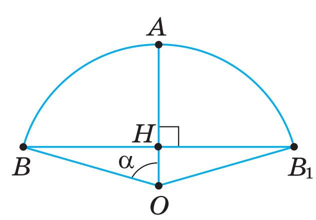


Мал. 276

ментом (мал. 276), називається *кульовим сектором*. Отже, кульовий сектор складається з двох тіл: кульового сегмента з висотою h і конуса з висотою $R-h$, де R — радіус кулі, який водночас є *радіусом кульового сектора*. Радіуси, що з'єднують вершину кульового сектора з точками кола основи сегмента, називають *крайніми радіусами кульового сектора*.

? Чи можна розглядати кульовий сектор як поверхню обертання? Так. Кульовий сектор утворюється обертанням кругового сектора навколо його осі симетрії.

Задача. Радіус кругового сектора дорівнює 4 см, а дуга — 60°. Сектор обертається навколо прямої, що містить крайній радіус. Знайдіть висоту сегмента отриманого кульового сектора.



Мал. 277

Розв'язання. Позначимо OA крайній радіус кругового сектора, навколо якого здійснюється обертання, а його дугу — AB. Унаслідок обертання утворюється кульовий сектор, осьовий переріз якого зображено на малюнку 277. Висотою кульового сегмента одержаного кульового сектора є відрізок AH.

Із прямокутного $\Delta\, OBH$ знаходимо:

$$OH = OB \cdot \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

$$AH = OA - OH = 4 - 2 = 2 \text{ (см)}.$$

5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ СФЕР

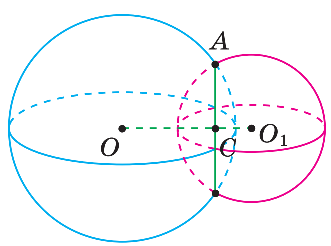
ТЕОРЕМА

(про перетин двох сфер).

Лінія перетину двох сфер є колом.

Дано: сфери з центрами в точках O і O_1, які перетинаються (мал. 278).

Довести: лінія перетину — коло.



Мал. 278

Доведення. Нехай точка A — точка перетину даних сфер (мал. 2.5.14). Через точку A проведемо площину α перпендикулярно до прямої OO_1. Пряма OO_1 перетинає площину α в точці C. За теоремою про переріз кулі площиною, площина α перетинає обидві сфери по колу із центром у точці C і радіусом CA. Отже, дане коло є лінією перетину двох даних сфер.

Доведемо, що сфери окрім цього кола не мають інших точок перетину. Припустимо супротивне. Тоді існує точка перетину сфер M, яка не лежить на колі з центром C і радіусом CA. Проведемо площину β через точку M і пряму OO_1, яка перетинатиме дані сфери по колах із центрами в точках O і O_1. Ці кола окрім двох точок перетину A і B, будуть перетинатися ще в точці M. Але два кола не можуть мати більше, ніж дві точки перетину. Отже, дані сфери не мають інших точок перетину.

Одержали, що лінія перетину двох даних сфер є колом.

Розглянемо можливі випадки взаємного розміщення двох сфер із радіусами r і R та відстанню між їх центрами d (табл. 12).

Таблиця 12

Співвідношення між d, r, R	Взаємне розміщення двох сфер
$d > r + R$	Сфери лежать одна поза одною й не мають спільних точок
$d = r + R$	Сфери дотикаються зовні
$r - R < d < r + R$	Сфери перетинаються
$d = r - R$	Сфери дотикаються внутрішньо
$d < r - R$	Одна сфера розміщена всередині іншої, спільних точок немає
$d = 0$	Сфери є концентричними

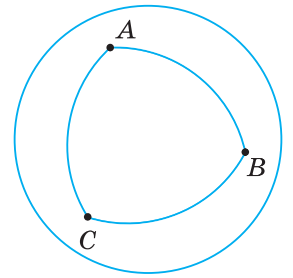
Дізнайтеся більше

1. Велике коло кулі, перпендикулярне до її осі, називають *екватором*, кола перерізів кулі, паралельних екватору, називають *паралелями*, а перпендикулярних до нього — *меридіанами*.

2. Слова «куля» і «сфера», не зважаючи на різний зміст і звучання, походять від грецького «сфайра», що означає куля, м'яч.

Слово «полюс» походить від грецького «полос», що означає вісь. До Евкліда це слово трапляється у працях давньогрецького вченого Платона як «вісь сфери». У проєктивну геометрію термін «полюс» був уведений французьким математиком Франсуа-Жозефом Сервуа (1810).

3. Відкриття кулястості Землі, поява уявлення про небесну сферу дали поштовх до розвитку спеціальної науки — *сферичної геометрії*, яка вивчає фігури, розміщені на сфері. Основними фігурами сферичної геометрії є сферичні многокутники. На малюнку 279 зображено сферичний трикутник. Він складається з трьох точок сфери й трьох дуг її великих кіл, кожна з яких менша від півкола і має кінці в цих точках. Дуги AB, BC і AC — сторони сферичного трикутника, точки A, B і C — його вершини. Сума внутрішніх кутів у сферичному трикутнику завжди більша за 180°.



Мал. 279

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Куля	Ball	Die Kugel
Діаметр	Diameter	Durchmesser

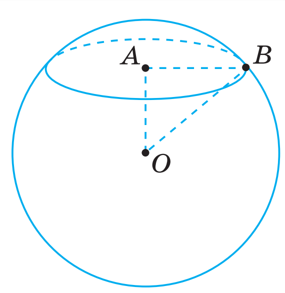
Пригадайте головне

1. Що таке куля; кульова поверхня або сфера?
2. Що таке радіус кулі; діаметр кулі?
3. Що є перерізом кулі площиною?
4. Яку площину називають діаметральною площиною кулі?
5. Що таке великий круг кулі; велике коло сфери?
6. Дайте означення дотичній площині до кулі.
7. Яка пряма називається дотичною до кулі?
8. Що таке кульовий сегмент; кульовий шар; кульовий сектор?
9. Що є лінією перетину двох сфер?
10. Яким може бути взаємне розміщення двох сфер?

Розв'яжіть задачі

539'. Чи одержимо кулю обертанням навколо діаметра: 1) кола; 2) півкруга; 3) півкола?

540'. На малюнку 280 зображено кулю та її переріз площиною. Назвіть:
1) радіус кулі; 2) радіус перерізу;
3) відрізок, довжина якого дорівнює відстані від центра кулі до площини перерізу;
4) вид кута OAB.



Мал. 280

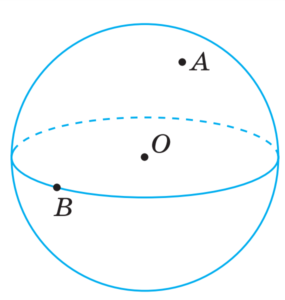
541'. Чи правильно, що перерізом кулі площиною є: 1) коло; 2) сфера; 3) круг?

542'. Радіус кулі 20 см, а відстань від центра кулі до площини — 19 см. Чи правильно, що площина:
1) перетинає кулю; 2) дотикається до кулі; 3) лежить поза кулею?

543'. Дві сфери дотикаються зовні. Скільки вони мають спільних дотичних площин, які дотикаються до них в одній точці; у двох точках?

544°. Радіус кулі R. Знайдіть площу її великого круга, якщо:
1) $R = 1$ см; 2) $R = 4$ см; 3) $R = 2$ см.

545°. Точки A і B лежать на сфері з центром O, $OA = 12$ см (мал. 281). Знайдіть:
1) OB; 2) радіус кулі; 3) довжину великого кола кулі.



Мал. 281

546°. Як взаємно розміщені дві сфери, довжини радіусів яких і відстань між їхніми центрами відповідно дорівнюють:
1) 4, 5, 6; 2) 1, 5, 3; 3) 5, 7, 17; 4) 3, 5, 2?

547°. Довжина великого кола кулі дорівнює C. Знайдіть радіус кулі, якщо: 1) $C = 30\pi$ см; 2) $C = 2\pi$ см; 3) $C = 20\pi$ см.

548°. Площа великого круга кулі дорівнює S. Знайдіть діаметр кулі, якщо:
1) $S = 36\pi$ см^2; 2) $S = 16\pi$ см^2; 3) $S = 49\pi$ см^2.

549°. Точки A і B лежать на кулі радіуса R. Знайдіть відстань від центра кулі до середини відрізка AB, якщо:
1) $R = 5$ см, $AB = 8$ см;
2) $R = 10$ см, $AB = 12$ см;
3) $R = 13$ см, $AB = 10$ см.

550°. Кулю перетинає площина на відстані m від центра. Радіус перерізу — R. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $R = 9$ дм, $m = 12$ дм;
2) $R = 12$ см, $m = 5$ см;
3) $R = 8$ см, $m = 8\sqrt{3}$ см.

551°. Кулю радіуса R перетинає площина. Площа утвореного перерізу — Q. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо:
1) $R = 25$ см, $Q = 49\pi$ см^2;
2) $R = 10$ см, $Q = 36\pi$ см^2;
3) $R = 13$ см, $Q = 144\pi$ см^2.

552°. Кулю, радіус якої R, перетинає площина на відстані m від центра. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $R = 5$ см, $m = 3$ см;
2) $R = 17$ см, $m = 15$ см;
3) $R = 15$ см, $m = 9$ см.

553°. Переріз кулі має площу Q і віддалений від центра кулі на n. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $Q = 64\pi$ см^2, $n = 6$ см;
2) $Q = 25\pi$ см^2, $n = 12$ см;
3) $Q = 64\pi$ см^2, $n = 8\sqrt{3}$ см.

554°. Радіус кулі R, радіус перерізу r, довжина кола перерізу C, площа перерізу S, відстань від центра кулі до площини перерізу — d. Заповніть таблицю 13.

Таблиця 13

R		$10a$		$13m$	
r	4	$6a$			n
C	8π				
S			9π	$25m^2\pi$	
d			4		n

555°. Довжина великого кола кулі дорівнює C, а площа перерізу — S. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо:
1) $C = 26\pi$ см, $S = 144\pi$ см^2;
2) $C = 10\pi$ см, $S = 16\pi$ см^2;
3) $C = 40\pi$ см, $S = 256\pi$ см^2.

556°. Кулю радіуса R перетинає площина на відстані m від центра. Знайдіть довжину лінії, по якій площина перетинає поверхню кулі, якщо:
1) $R = 26$ см, $m = 24$ см;
2) $R = 10a$ см, $m = 8a$ см;
3) $R = 15$ см, $m = 12$ см.

557°. Знайдіть відстань між паралельними площинами, які дотикаються до кулі радіуса R, якщо: 1) $R = 0{,}5$ дм; 2) $R = 10$ дм; 3) $R = 6$ дм.

558°. Радіус кулі дорівнює R, а висота кульового сегмента — h. Знайдіть площу основи кульового сегмента, якщо:
1) $R = 10$ см, $h = 2$ см;
2) $R = 13$ см, $h = 8$ см;
3) $R = 17$ см, $h = 9$ см.

559°. Радіус кулі дорівнює R, а площі основ кульового шару дорівнюють відповідно S_1 і S_2. Знайдіть висоту кульового шару, якщо:
1) $R = 10$ см, $S_1 = 36\pi$ см^2, $S_2 = 64\pi$ см^2;
2) $R = 17$ см, $S_1 = 64\pi$ см^2, $S_2 = 225\pi$ см^2;
3) $R = 13$ см, $S_1 = S_2 = 25\pi$ см^2.

560°. Діаметр кулі поділено двома точками у відношенні 2 : 4 : 2. Через ці точки проведено перерізи перпендикулярно до даного діаметра. Доведіть, що основи утвореного кульового шару мають рівні площі.

561°. Круговий сектор із кутом α і радіусом R обертається навколо одного з крайніх радіусів. Знайдіть висоту утвореного кульового сегмента, якщо:
1) $R = 6$ см, $\alpha = 60°$;
2) $R = 8$ см, $\alpha = 30°$;
3) $R = 12$ см, $\alpha = 45°$.

562. **Доведіть, що з двох перерізів кулі більший радіус має той переріз, площина якого ближча до центра кулі.**

563. Радіус кулі дорівнює R. Через кінець радіуса проведено площину під кутом α до нього. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $R = 4$ см, $\alpha = 30°$;
2) $R = 6$ см, $\alpha = 45°$;
3) $R = 8$ см, $\alpha = 60°$.

564. Діаметр кулі дорівнює D. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань d, якщо:
1) $D = 10$ см, $d = 3$ см;
2) $D = 5$ см, $d = 1{,}5$ см.

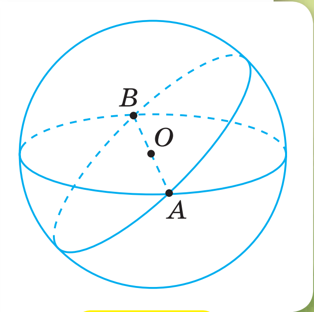
565. Куля дотикається до всіх сторін ромба, діагоналі якого 15 см і 20 см. Відстань від центра кулі до площини ромба — 8 см. Знайдіть радіус кулі.

566. Сфера проходить через вершини рівностороннього трикутника зі стороною a. Відстань від центра сфери до площини трикутника дорівнює m. Знайдіть радіус сфери, якщо:
1) $a = 3\sqrt{3}$ см, $m = 4$ см; 2) $a = 6\sqrt{3}$ см, $m = 8$ см.

567. Куля радіуса $6\sqrt{2}$ дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника з катетами 18 см і 24 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

568. Через дві точки сфери, що не є кінцями одного діаметра, можна провести коло великого круга кулі й тільки одне. Доведіть.

569. Доведіть, що кола двох великих кругів кулі при перетині діляться навпіл (мал. 282).



Мал. 282

570. **Доведіть, що перерізи кулі, рівновіддалені від її центра, мають рівні радіуси.**

571. Кулю перетинають дві площини, відстань між якими дорівнює d. Площі отриманих перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) центр кулі лежить між перерізами, $d = 17$ см, $S_1 = 144\pi$ см^2, $S_2 = 25\pi$ см^2;
2) центри перерізів лежать на одному радіусі кулі, $d = 7$ см, $S_1 = 144\pi$ см^2, $S_2 = 25\pi$ см^2.

572. Через точку на поверхні кулі проведено дві взаємно перпендикулярні площини, які перетинають кулю по кругах радіусів R_1 і R_2. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $R_1 = 7$ дм, $R_2 = 24$ дм; 2) $R_1 = 10$ дм, $R_2 = 24$ дм.

573. Куля радіуса R дотикається до граней двогранного кута, який дорівнює α. Зайдіть відстань від центра кулі до ребра двогранного кута, якщо:
1) $R = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $R = 16$ см, $\alpha = 90°$.

574. З точки A сфери радіуса 35 см проведено дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC завдовжки 20 см і 15 см. Чи проходить площина ABC через центр сфери? Відповідь поясніть.

575. Вершини прямокутника, діагональ якого 16 см, лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника.

576. Вершини трикутника зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см лежать на сфері радіуса 4 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

577. Відстань від центра кулі радіуса R до січної площини дорівнює d. Знайдіть площу перерізу.

578. Відстань від центра кулі до січної площини дорівнює d. Знайдіть радіус кулі, якщо площа перерізу дорівнює S.

579. Через середину радіуса R кулі перпендикулярно до нього проведено площину. Для утвореного кульового сегмента знайдіть:
1) висоту;
2) радіус основи.

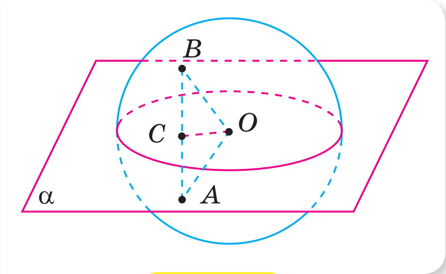
580. Висота кульового шару дорівнює 7 см, а різниця радіусів його основ — 17 см. Знайдіть площі основ даного кульового шару, якщо радіус кулі дорівнює 65 см.

581. Круговий сектор із кутом 30° і радіусом R обертається навколо одного з крайніх радіусів. Знайдіть відношення висоти кульового сектора до його радіуса.

582. Діаметр кулі розділений двома точками у відношенні 1 : 2 : 3. Знайдіть відношення площ перерізів, проведених через ці точки перпендикулярно до даного діаметра.

583. Через середину радіуса R кулі перпендикулярно до нього проведено площину. Знайдіть:
1) площу перерізу;
2) відношення площі перерізу до площі великого круга кулі.

584. Доведіть, що будь-яка діаметральна площина кулі ділить її поверхню на дві симетричні частини (мал. 283).



Мал. 283

585. Яким може бути перетин:
1) двох кульових сегментів з рівними радіусами;
2) двох кульових секторів з рівними радіусами?

586. Доведіть, що дотичні, проведені до кулі з точки, що лежить поза кулею, рівні. Яку фігуру вони утворюють? Які залежності пов'язують елементи цієї фігури з радіусом кулі?

587*. Радіуси куль дорівнюють R_1 і R_2, а відстань між їх центрами — m. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні, якщо:
1) $R_1 = 17$ см, $R_2 = 10$ см, $m = 21$ см;
2) $R_1 = 13$ см, $R_2 = 15$ см, $m = 14$ см.

588*. У кулі радіуса 18 см проведено два взаємно перпендикулярні перерізи, радіуси яких відносяться, як 2 : 3. Знайдіть радіуси перерізів, якщо спільна хорда цих перерізів дорівнює 2 см.

589*. Із точки на поверхні кулі проведено три взаємно перпендикулярні хорди завдовжки 6 см, 13 см і 18 см. Знайдіть радіус кулі.

590*. Сторони трикутника — 13 см, 14 см і 15 см. Відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, дорівнює 3 см. Знайдіть радіус кулі.

591*. Куля радіуса 15 см дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 36 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції.

592*. У кулі проведено два взаємно перпендикулярні перерізи, площі яких дорівнюють 320π см^2 і 185π см^2. Довжина спільної хорди цих перерізів дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кулі.

Проявіть компетентність

593. Які властивості кулі та сфери використовуються в побуті?

594. Наведіть приклади кульового сегмента й кульового сектора на предметах довкілля.

595. У вас є масштабна лінійка й косинець. Запропонуйте спосіб наближеного визначення діаметра невеликого м'яча.

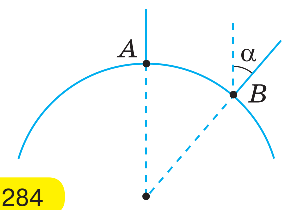
596. Уперше довжину радіуса Землі знайшов давньогрецький учений Ератосфен. Він помітив, що коли в місті A сонце перебуває в зеніті, то в місті B, яке розташоване з містом A на одному меридіані, сонячні промені утворюють з вертикальною прямою кут $\alpha = 7°12'$ (мал. 284). Оцінивши за часом рух каравану від A до B (відстань між містами 800 км), Ератосфен обчислив радіус Землі. Яке значення він одержав?

597. Радіус Землі наближено дорівнює 6400 км. Знайдіть довжину: 1) полярного круга Землі; 2) земної паралелі, якщо її широта — 60°.

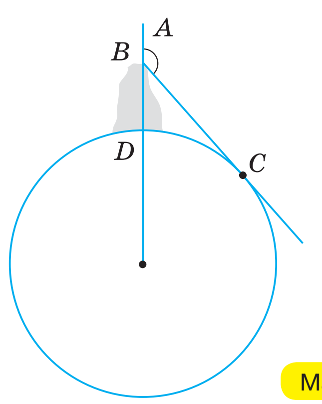
598. Спостерігач, перебуваючи на вершині B гори (мал. 285), виміряв кут $ABC = \alpha$ між променем зору BC, що йде до горизонту, і вертикальною прямою AD. Знаючи радіус Землі R ($R \approx 6400$ км), він визначив висоту гори.
1) Як спостерігач це зробив?
2) Визначте висоту гори, якщо кут ABC становив близько 120°.

599. Як далеко видно з маяка заввишки 72 км над рівнем моря?

600. На скільки метрів зміщується за добу населений пункт, у якому ви живете, внаслідок обертання Землі?



Мал. 284



Мал. 285

§ 12. ОПИСАНІ ТА ВПИСАНІ КУЛІ

Ви вже знаєте властивості деяких комбінацій геометричних тіл — призми й циліндра, піраміди й конуса. З'ясуємо особливості комбінацій кулі з призмами, пірамідами, циліндрами та конусами.

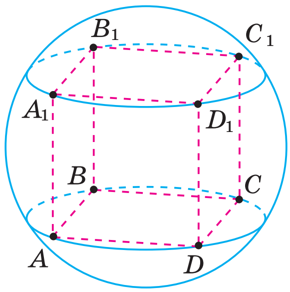
1. КУЛЯ І ПРИЗМА

Куля **називається** ***описаною навколо призми*****, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі** (мал. 286).

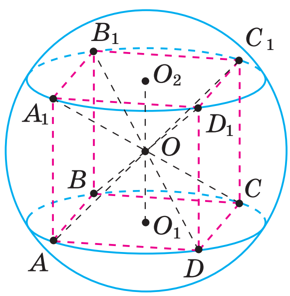
Чи навколо будь-якої призми можна описати кулю? Поміркуємо.

Перерізом кулі площиною кожної грані вписаної призми є коло, описане навколо грані. Навколо похилої призми кулю описати не можна, бо її бічні грані — паралелограми. А навколо паралелограма не можна описати коло. У прямої призми навколо бічних граней — прямокутників — можна описати кола. Якщо і навколо многокутника основи прямої призми можна описати коло, то навколо такої призми можна описати кулю. Отже, **кулю можна описати лише навколо такої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло**.

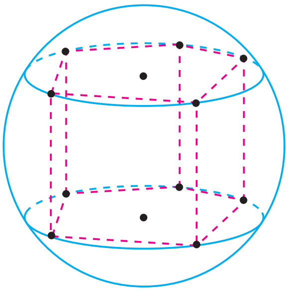
Центр кулі, описаної навколо прямої призми, збігається із серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми. На малюнку 287 середина O відрізка O_1O_2 є центром описаної кулі, $OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ — радіуси кулі.



Мал. 286



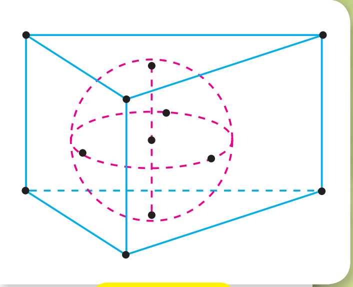
Мал. 287


Мал. 288

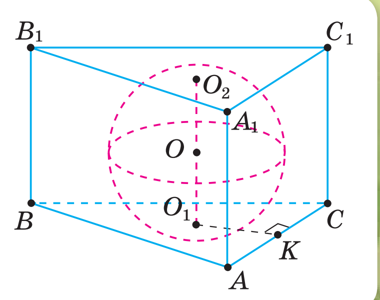
Щоб вписати в кулю призму (мал. 288):
1) побудуйте зображення двох рівних паралельних перерізів поверхні кулі у вигляді еліпсів;
2) упишіть у перерізи основи призми та сполучіть відрізками відповідні вершини її нижньої і верхньої основ.

***Куля* називається *вписаною в призму*, якщо всі грані призми дотикаються до кулі** (мал. 289).

Чи в будь-яку пряму призму можна вписати кулю? Ні. Кулю можна вписати лише в таку призму, в основу якої можна вписати коло й діаметр цього кола дорівнює висоті призми.


Мал. 289

Центр кулі, вписаної в пряму призму, збігається із серединою відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми. На малюнку 290 середина O відрізка O_1O_2 є центром вписаної кулі, радіус кулі $OO_1 = O_1K = \frac{1}{2}AA_1$.



Мал. 290

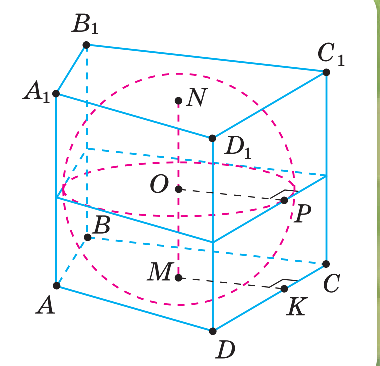
За певних умов кулю можна вписати і в похилу призму. Якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

Задача. Кулю радіуса R вписано в правильну трикутну призму. Знайдіть сторону основи призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — описана навколо кулі правильна трикутна призма (мал. 290). Центр O кулі — середина відрізка O_1O_2, який сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Радіус R кулі дорівнює радіусу O_1K кола, вписаного в основу призми. Оскільки основа призми — правильний трикутник, то

$$R = O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Звідси $a = \frac{6R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}R$.

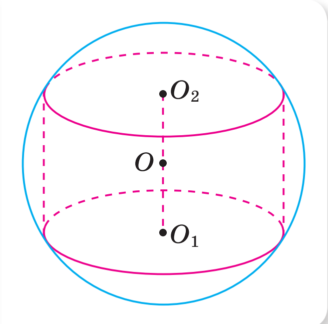


Мал. 291

Щоб описати пряму призму навколо кулі (мал. 291):
1) проведіть коло великого круга (екватор) кулі та її вісь MN;
2) опишіть навколо кола екватора многокутник, рівний основі призми, і через його вершини проведіть прямі, паралельні прямій MN;
3) на цих прямих відкладіть від вершини многокутника в обидва боки відрізки, що дорівнюють радіусу ON кулі. Одержали вершини шуканої призми.

2. КУЛЯ І ЦИЛІНДР

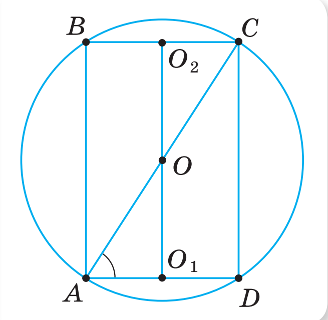
***Куля* називається *описаною навколо циліндра*, якщо кола його основ лежать на поверхні кулі** (мал. 2.6.7).



Мал. 292

Чи навколо будь-якого циліндра можна описати кулю? Так. Центр такої кулі збігається із серединою осі циліндра.

Щоб вписати циліндр у кулю (мал. 292):
1) побудуйте зображення кулі;
2) побудуйте два рівні перерізи кулі — основи циліндра;
3) проведіть твірні циліндра та позначте центри його основ і центр кулі.



Мал. 293

Задача. Кулю радіуса R описано навколо циліндра. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут α. Знайдіть висоту й радіус основи циліндра.

Розв'язання. Зобразимо осьовий переріз циліндра з описаною навколо нього кулею (мал. 293). За умовою задачі, $\angle O_1AC = \alpha$, $AO = OC = R$. Із прямокутного трикутника ACD знайдемо висоту циліндра: $CD = 2R\sin\alpha$. Радіус основи циліндра визначимо з прямокутного трикутника AOO_1: $AO_1 = R\cos\alpha$.

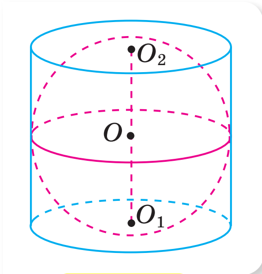
Розв'язуючи задачі на вписану й описану кулі, корисно провести осьовий переріз заданих в умові тіл і розглянути властивості утворених плоских фігур.

***Куля* називається *вписаною в циліндр*, якщо поверхня кулі дотикається до основ циліндра і всіх його твірних** (мал. 294).

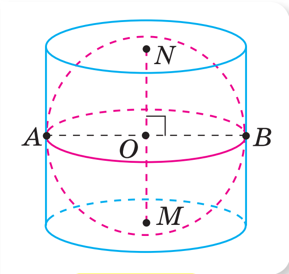
Центр кулі, вписаної в циліндр, збігається із серединою осі циліндра.

Чи в будь-який циліндр можна вписати кулю? Ні. У циліндр можна вписати кулю, якщо діаметр основи циліндра дорівнює його висоті.

Щоб вписати кулю в циліндр (мал. 295):
1) проведіть коло великого круга (екватор) кулі та її вісь MN;
2) побудуйте зображення основ циліндра у вигляді еліпсів, які паралельні й рівні екватору кулі, а центри основ містяться в кінцях осі кулі — точках M і N;
3) проведіть твірні циліндра.



Мал. 294



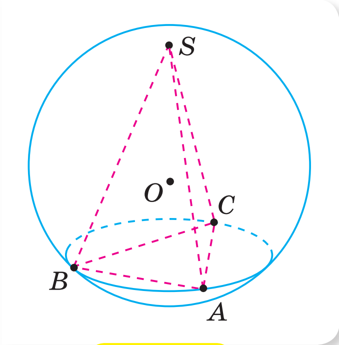
Мал. 295

3. КУЛЯ І ПІРАМІДА

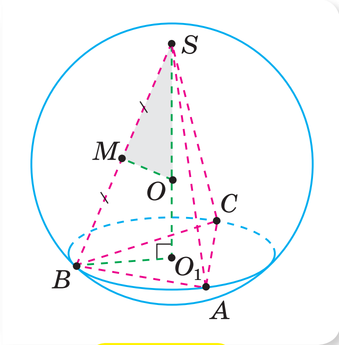
Куля **називається** ***описаною навколо піраміди*****, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі** (мал. 296).

Чи навколо будь-якої піраміди можна описати кулю? Ні. Наприклад, не можна описати кулю навколо піраміди, основа якої не є вписаною в коло.

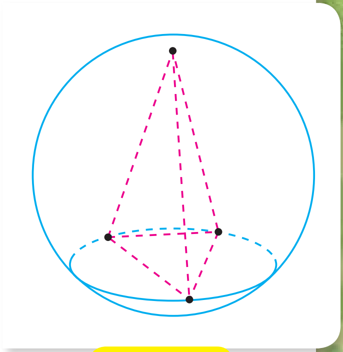
Якщо кулю описано навколо піраміди, в якої основа висоти збігається із центром описаного навколо основи кола, то центр кулі є точкою перетину висоти піраміди й серединного перпендикуляра до її бічного ребра. На малюнку 297 точка O перетину висоти SO_1 піраміди та серединного перпендикуляра OM до бічного ребра є центром описаної кулі, OS — радіус кулі.



Мал. 296



Мал. 297



Мал. 298

Щоб вписати піраміду в кулю (мал. 298):
1) побудуйте переріз кулі, паралельний екватору;
2) впишіть у коло перерізу многокутник (основу піраміди);
3) розмістіть у полюсі кулі вершину піраміди та проведіть її бічні ребра.

Задача. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α.

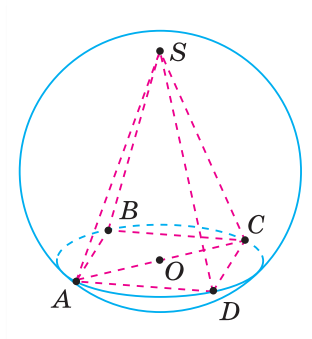
Розв'язання. За умовою, $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle SAO = \alpha$ (мал. 299).

Радіус R кулі дорівнює радіусу великого кола кулі, описаного навколо ΔASC.

У ΔASC $\angle SAO = \angle SCO = \alpha$, $\angle ASC = 180° - 2\alpha$.

За теоремою синусів, $\frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)} = 2R$, звідси $R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$.

Оскільки $ABCD$ — квадрат зі стороною a, то $AC = a\sqrt{2}$. Тоді $R = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$.

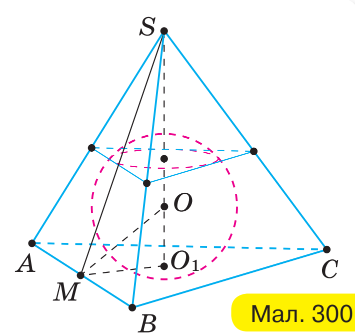


Мал. 299

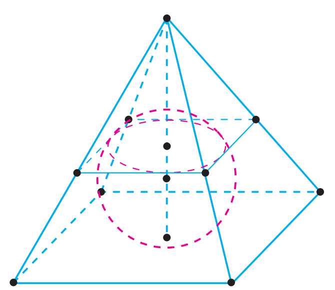
***Куля** називається **вписаною в піраміду**, якщо всі грані піраміди дотикаються до кулі* (мал. 300).

? Чи в будь-яку піраміду можна вписати кулю? Ні. Наприклад, не можна вписати кулю в піраміду з прямокутником в основі, висота якої проходить через точку перетину діагоналей основи.

Якщо вершина піраміди проєктується в центр вписаного в основу кола, то центр вписаної кулі є точкою перетину висоти піраміди й бісектриси лінійного кута двогранного кута при ребрі основи піраміди. На малюнку 300 SO_1 — висота піраміди (O_1 — центр кола, вписаного в основу), $\angle SMO_1$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AB ($O_1M \perp AB$, $SM \perp AB$), MO — бісектриса кута SMO_1. Точка O перетину SO_1 і MO є центром вписаної кулі, OO_1 — радіус кулі.



Мал. 300



Мал. 301

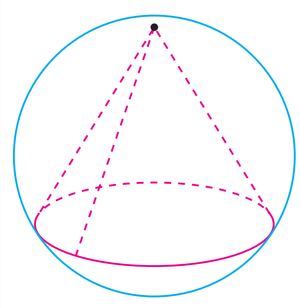
Щоб вписати кулю в піраміду (мал. 301):
1) побудуйте піраміду та проведіть її висоту;
2) на висоті позначте центр O кулі, як точку перетину висоти піраміди з бісектром двогранного кута при основі;
3) проведіть контур кулі так, щоб її полюс збігався з основою висоти;
4) побудуйте переріз піраміди, якому належать точки дотику кулі з бічними гранями піраміди;
5) зобразіть коло, вписане в переріз.

4. КУЛЯ І КОНУС

Куля **називається** ***описаною навколо конуса*****, якщо вершина й коло основи конуса лежать на поверхні кулі** (мал. 302).

Куля **називається** ***описаною навколо зрізаного конуса*****, якщо кола його основ лежать на поверхні кулі** (мал. 303).

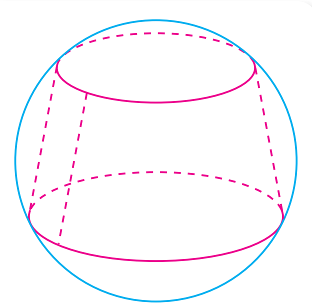
Чи навколо будь-якого конуса або зрізаного конуса можна описати кулю? Так. Центр такої кулі лежить на прямій, що проходить у конусі — через вершину й центр основи, а в зрізаному конусі — через центри основ.



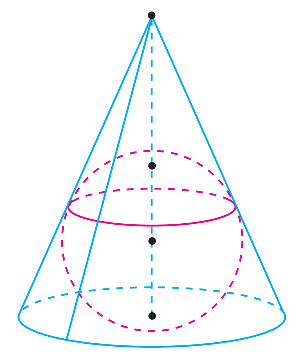
Мал. 302

Щоб описати кулю навколо конуса (мал. 302):
1) побудуйте переріз кулі — основу конуса;
2) у полюсі кулі розмістіть вершину конуса;
3) з вершини конуса проведіть контурні та додаткову твірні.

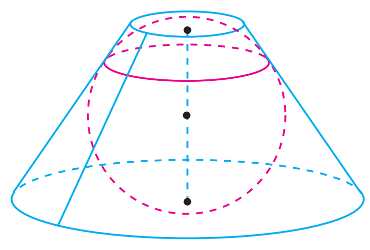
Якщо описуєте кулю навколо зрізаного конуса (мал. 303), то спочатку зобразіть два паралельні й нерівні перерізи кулі, а потім проведіть твірні.



Мал. 303



Мал. 304



Мал. 305

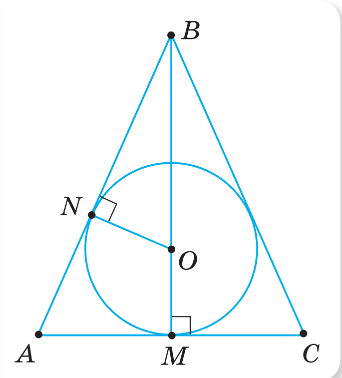
Куля **називається** ***вписаною в конус*****, якщо поверхня кулі дотикається до основи конуса й усіх його твірних** (мал. 304).

Куля **називається** ***вписаною в зрізаний конус*****, якщо поверхня кулі дотикається до основ конуса й усіх його твірних** (мал. 305).

Чи в будь-який конус або зрізаний конус можна вписати кулю? У конус можна вписати кулю завжди, а в зрізаний конус — лише за умови, що його твірна дорівнює сумі радіусів основ (обґрунтуйте це, скориставшись властивістю сторін описаного чотирикутника).

Щоб вписати кулю в конус (мал. 304):
1) побудуйте зображення кулі та її вісь;
2) побудуйте зображення основи конуса, центр якої розмістіть у полюсі кулі;
3) проведіть спільні зовнішні дотичні до основи конуса й контуру кулі, перетин яких визначить вершину конуса;
4) проведіть додаткову твірну конуса.

Задача. Висота конуса 8 см, твірна 10 см. Знайдіть радіус вписаної кулі.



Мал. 306

Розв'язання. Зобразимо осьовий переріз конуса із вписаною в нього кулею (мал. 306). За умовою задачі, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см.

Позначимо на висоті BM конуса центр O кулі й сполучимо його з точкою N дотику кулі до твірної AB. Тоді $OM = ON$ — радіуси кулі.

З прямокутного трикутника ABM знайдемо радіус основи конуса:

$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

За властивістю дотичних до кола, $ON \perp AB$.

Тоді трикутники ABM й OBN подібні за двома кутами ($\angle ABM$ — спільний, $\angle ABM = \angle OBN = 90°$).

З подібності трикутників дістанемо: $\dfrac{AM}{ON} = \dfrac{AB}{OB}$, або $\dfrac{6}{R} = \dfrac{10}{8-R}$.

Звідси $R = 3$ см.

Передбачити всі можливі комбінації кулі з іншими геометричними тілами практично неможливо. Часто доводиться обґрунтовувати їх взаємне розміщення, враховуючи дані умови задачі. При цьому зображати кулю буває зайвим — достатньо вказати її центр і точки дотику з різними площинами та прямими.

Дізнайтеся більше

Відомий математик **Віктор Якович Буняковський** (1804–1889) народився в м. Бар на Поділлі. Після навчання в Парижі (1820–1826) працював професором різних вищих шкіл у Петербурзі. Академік (з 1830 р.) і віце-президент (з 1864 р.) Петербурзької Академії наук. В. Я. Буняковський є автором понад 100 праць з математичного аналізу, теорії чисел, геометрії, теорії ймовірностей та її застосувань до демографії, статистики, страхової справи, теорії похибок тощо. Винайшов планіметр, пантограф, прилад для додавання квадратів.

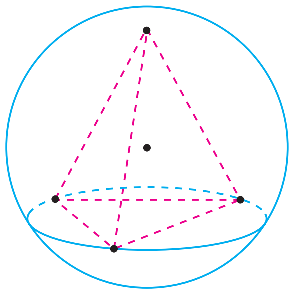
Словничок

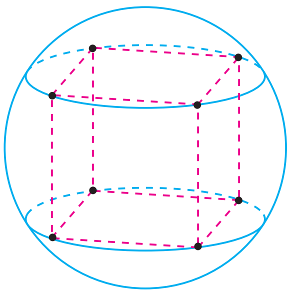
Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Сфера	Sphere	Kugel

Пригадайте головне

1. Яку кулю називають описаною навколо призми; вписаною в призму?
2. Чи навколо будь-якої призми можна описати кулю?
3. Де лежить центр кулі, описаної навколо прямої призми; вписаної у пряму призму?
4. Дайте означення кулі, описаної навколо циліндра.
5. Де лежить центр кулі, описаної навколо циліндра?
6. Яку кулю називають вписаною в циліндр?
7. Де лежить центр кулі, вписаної в циліндр?
8. Дайте означення кулі, описаної навколо піраміди; вписаної у піраміду.
9. Дайте означення кулі, описаної навколо конуса.
10. Де лежить центр кулі, описаної навколо конуса?
11. Яку кулю називають вписаною в конус?
12. Де лежить центр кулі, вписаної в конус?

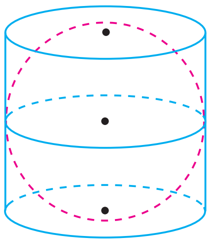

Мал. 307


Мал. 308

Розв'яжіть задачі

601'. На якому з малюнків 307–310 зображено:
1) кулю, описану навколо призми;
2) кулю, вписану в циліндр?

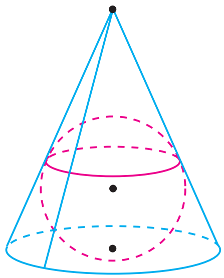
602'. Чи можна описати кулю навколо:
1) куба; 2) прямокутного паралелепіпеда;
3) похилого паралелепіпеда, основа якого — прямокутник; 4) прямого паралелепіпеда;
5) похилого паралелепіпеда, основа якого — ромб?


Мал. 309

603'. Чи можна вписати кулю в:
1) куб; 2) прямокутний паралелепіпед;
3) похилий паралелепіпед, основа якого — прямокутник; 4) прямий паралелепіпед;
5) похилий паралелепіпед, основа якого — ромб?

604'. На якому з малюнків 307–310 зображено:
1) кулю, описану навколо піраміди;
2) кулю, вписану в конус?

605'. Чи можна описати кулю навколо:
1) трикутної піраміди; 2) чотирикутної піраміди?


Мал. 310

606°. Чи можна вписати кулю у:
1) трикутну піраміду;
2) чотирикутну піраміду?

607°. Чи можна описати кулю навколо циліндра, у якого висота в 2 рази більша за радіус основи?

608°. Чи можна вписати кулю в циліндр, у якого висота в 2 рази більша за радіус основи?

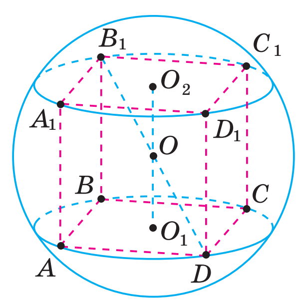
609°. У кулю вписано піраміду, бічне ребро якої перпендикулярне до основи. Де розміщується центр кулі?

610°. Чи можна описати кулю навколо:
1) конуса, у якого висота в 3 рази більша за радіус основи;
2) зрізаного конуса, у якого твірна нахилена до площини основи під кутом 45°?

611°. Чи можна вписати кулю в:
1) конус, у якого висота в 3 рази більша за радіус основи;
2) зрізаний конус, у якого твірна нахилена до площини основи під кутом 45°?

612°. Кулю описано навколо куба (мал. 311). Знайдіть:
1) радіус кулі, якщо ребро куба дорівнює 6 см;
2) ребро куба, якщо радіус кулі дорівнює 3 см.

613°. Кулю вписано в призму. Знайдіть бічне ребро призми, якщо радіус кулі дорівнює:
1) 2 см;
2) 6 см;
3) 10 см.



Мал. 311

614°. Кулю вписано в циліндр. Знайдіть радіус кулі, якщо висота циліндра дорівнює:
1) 16 см; 2) 14 см; 3) 20 см.

615°. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть радіус описаної кулі, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 8$ см;
3) $a = 10$ см.

616°. Кулю описано навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами a, b і c. Знайдіть діаметр кулі, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 6$ см;
3) $a = 1$ см, $b = c = 2$ см.

617°. Висота правильної чотирикутної призми H, а сторона основи — a. Знайдіть радіус описаної кулі, якщо:
1) $H = 2$ см, $a = 4$ см;
2) $H = 3$ см, $a = 6$ см;
3) $H = 1$ см, $a = 2$ см.

618°. Діагональ грані куба дорівнює d. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб, якщо:
1) $d = 2\sqrt{2}$ см; 2) $d = 4\sqrt{2}$ см; 3) $d = 6\sqrt{2}$ см.

619°. Кулю вписано у куб зі стороною a. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 5$ см.

620°. Кулю вписано у правильну трикутну призму, сторона основи якої — a. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $a = 6\sqrt{3}$ см; 2) $a = 12\sqrt{3}$ см; 3) $a = 4\sqrt{3}$ см.

621°. Кулю радіуса R вписано у правильну трикутну призму. Знайдіть сторони основи призми, якщо:
1) $R = \sqrt{3}$ см; 2) $R = 2\sqrt{3}$ см; 3) $R = 5$ см.

622°. Діаметр основи циліндра d. Знайдіть площу великого круга кулі, вписаної в циліндр, якщо: 1) $d = 4$ см; 2) $d = 10$ см; 3) $d = 12$ см.

623°. У кулю вписано трикутну піраміду. Знайдіть відстань від центра кулі до вершини піраміди, якщо діаметр кулі дорівнює:
1) 4 см; 2) 8 см; 3) 12 см.

624°. Кулю радіуса R описано навколо правильної чотирикутної піраміди так, що основа піраміди лежить у площині великого круга кулі. Знайдіть сторону основи й висоту піраміди, якщо:
1) $R = 4\sqrt{2}$ см; 2) $R = 5\sqrt{2}$ см; 3) $R = \sqrt{2}$ см.

625°. Дано кулю радіуса R. Знайдіть радіус основи вписаного циліндра, якщо: 1) висота циліндра дорівнює радіусу кулі; 2) діаметр кола основи циліндра дорівнює його твірній.

626°. Кулю вписано у правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Діагональний переріз піраміди — рівносторонній трикутник. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $a = 3$ см; 2) $a = 6$ см; 3) $a = 9$ см.

627°. Кулю вписано у правильну піраміду. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) висота піраміди 6 см, а двогранний кут при ребрі основи — 60°;
2) апофема піраміди 12 см утворює з площиною основи кут 30°.

628°. У конус вписано кулю. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) радіус основи конуса 9 см, а твірна утворює з площиною основи кут 60°;
2) твірна конуса 12 см й утворює з його висотою кут 30°.

629. Доведіть, що центр кулі, описаної навколо прямої призми, є серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

630. Кулю радіуса R описано навколо правильної трикутної призми. Радіус кулі, проведений у вершину призми, утворює з площиною її основи кут α. Знайдіть сторону основи і бічне ребро призми, якщо:
1) $R = 10$ см, $\alpha = 60°$;
2) $R = 12$ см, $\alpha = 30°$.

631. Кулю радіуса R описано навколо правильної n-кутної призми. Сторона основи призми дорівнює a. Знайдіть висоту призми, якщо: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

632. У циліндр радіуса R вписано кулю. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо:
1) $R = 8$ см; 2) $R = 15$ см.

633. Навколо циліндра описано кулю радіуса R. Відрізок, який з'єднує центр кулі з точкою кола основи циліндра, утворює з віссю циліндра кут α. Знайдіть площу основи та площу осьового перерізу циліндра, якщо:
1) $R = 6$ см, $\alpha = 60°$;
2) $R = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$.

634. Радіус кулі дорівнює R. У кулю вписано правильну n-кутну призму з висотою h. Знайдіть сторону основи призми, якщо:
1) $n = 3$, $R = 10$ см, $h = 12$ см;
2) $n = 6$, $R = a$ см, $h = b$ см.

635. **Навколо будь-якої правильної призми можна описати кулю.** Доведіть.

636. Навколо кулі описано правильну n-кутну призму з основою a. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $n = 3$, $a = 10\sqrt{3}$ см;
2) $n = 4$, $a = 12$ см;
3) $n = 6$, $a = m$ см.

637. **Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати кулю.** Доведіть.

638. У кулю вписано правильну n-кутну піраміду з основою a й бічним ребром b. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $n = 3$, $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 5$ см;
2) $n = 4$, $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 13$ см;
3) $n = 6$, $a = m$ см, $b = p$ см.

639. **У будь-яку правильну піраміду можна вписати кулю.** Доведіть.

640. Радіус кулі дорівнює R. Навколо кулі описано правильну n-кутну піраміду з висотою h. Знайдіть сторону основи піраміди, якщо:
1) $n = 3$, $R = 10$ см, $h = 14$ см;
2) $n = 4$, $R = 13$ см, $h = 8$ см;
3) $n = 6$, $R = a$ см, $h = b$ см.

641. Усі ребра чотирикутної піраміди дорівнюють a. Знайдіть радіус описаної кулі, якщо: 1) $a = 4\sqrt{2}$ см; 2) $a = 14$ см.

642. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a. Поверхня вписаної кулі ділить висоту піраміди навпіл. Знайдіть бічне ребро піраміди, якщо:
1) $a = 8\sqrt{3}$ см; 2) $a = 12\sqrt{3}$ см.

643. Доведіть, що центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на її висоті або на продовженні висоти.

644. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди — прямий, сторона основи дорівнює a. Знайдіть радіус описаної кулі, якщо: 1) $a = 8$ см; 2) $a = 12$ см.

645. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α.

646. Доведіть, що центри куль, вписаної у правильну піраміду й описаної навколо неї, лежать на її висоті.

647. Знайдіть радіус кулі, вписаної в тетраедр, висота якого H.

648. Висота правильної чотирикутної піраміди H, двогранний кут при ребрі основи — α. Знайдіть радіус вписаної кулі.

649. Висота конуса H, твірна — l. Знайдіть радіус вписаної кулі, якщо:
1) $H = 8$ см, $l = 10$ см;
2) $H = 4$ см, $l = 5$ см.

650. У кулю радіуса R вписано конус, діаметр основи якого дорівнює твірній. Найдіть радіус основи конуса та його висоту, якщо:
1) $R = 4$ см; 2) $R = 2$ см.

651. Радіус кулі, описаної навколо конуса, дорівнює R. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α. Знайдіть площу основи конуса, якщо:
1) $R = 12\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$;
2) $R = 6\sqrt{2}$ см, $\alpha = 90°$.

652. Кулю вписано в конус, у якого радіус основи r, а твірна l. Знайдіть довжину кола, по якому поверхня кулі дотикається до бічної поверхні конуса, якщо:
1) $r = 2$ см, $l = 4$ см;
2) $r = 2$ см, $l = 8$ см.

653. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 15 см і 36 см, висота — 51 см. Знайдіть радіус описаного кола.

654. Кулю радіуса R вписано в зрізаний конус, твірна якого дорівнює l. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо:
1) $R = 6$ см, $l = 13$ см; 2) $R = 4$ см, $l = 10$ см.

655*. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда відповідно дорівнюють a, b і c. Знайдіть радіус описаної кулі.

656*. Усередині циліндра розміщено дві кулі радіуса $2r$ й одну кулю радіуса r так, що кожна куля дотикається до двох інших, до нижньої основи циліндра та його бічної поверхні. Знайдіть радіус основи циліндра.

657*. Радіус кулі, вписаної у зрізаний конус, є середнім геометричним радіусів його основ. Доведіть.

658*. Якщо в перпендикулярний переріз призми можна вписати коло, а висота призми дорівнює діаметру цього кола, то в призму можна вписати кулю. Доведіть.

659*. **Кулю можна описати навколо призми тоді й тільки тоді, коли вона є прямою й навколо її основи можна описати коло**. Доведіть.

660*. У куб вписано кулю. У тригранний кут при вершині куба вписано іншу кулю, яка дотикається до першої кулі. Знайдіть радіуси куль, якщо ребро куба дорівнює a.

661*. У піраміду можна вписати кулю, якщо її бічні грані нахилені до площини основи під однаковим кутом. Доведіть.

662*. Навколо піраміди можна описати кулю, якщо навколо її основи можна описати коло. Доведіть.

663*. Доведіть, що радіус кулі, описаної навколо піраміди, у якої висота дорівнює H, а кожне ребро b, можна обчислити за формулою $\frac{b^2}{2H}$.

664*. Якщо бічні ребра піраміди рівні, то навколо піраміди можна описати кулю. Доведіть.

665*. Навколо правильної зрізаної піраміди можна описати кулю. Доведіть.

666*. У кулю вписано піраміду, бічне ребро якої перпендикулярне до основи. Визначте розміщення центра кулі.

667*. Куля дотикається до основи правильної піраміди $DABC$ в точці B та до її ребра AD. Знайдіть радіус кулі, якщо $AB = 5$ см, $AD = 5\sqrt{2}$.

668*. Бічні ребра піраміди взаємно перпендикулярні. Доведіть, що вершина піраміди, центр кулі, описаної навколо піраміди, й точка перетину медіан основи лежать на одній прямій.

669*. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Відстань від центра вписаної кулі до твірної дорівнює d. Знайдіть радіус кулі.

670*. Хорду основи конуса, яка дорівнює a, видно з вершини конуса під кутом α. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює β. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо конуса.

Проявіть компетентність

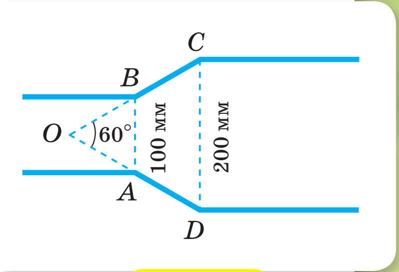
671. Наведіть приклади з довкілля, які ілюструють комбінацію:
1) кулі та призми; 2) кулі та циліндра.

672. Ваза для цукерок має форму півсфери радіуса 8 см (мал. 312). Яку найбільшу кількість цукерок можна в ній розмістити, якщо цукерки мають форму:
1) кулі радіуса 1 см;
2) прямокутного паралелепіпеда з вимірами 1,5 см, 2 см і 4 см?


Мал. 312

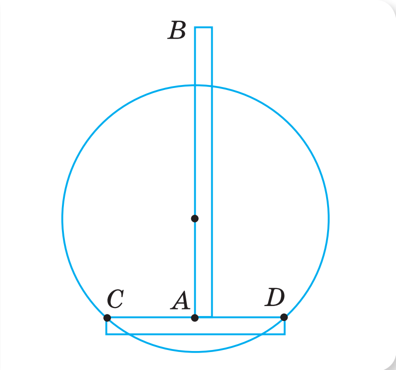
673. Яку кількість кульок морозива діаметром 4 см можна розмістити у вафельному стаканчику (за умови, що морозиво не тане), якщо стаканчик має форму:
1) конуса з висотою 12 см і радіусом основи 2,5 см;
2) зрізаного конуса з висотою 9 см і радіусами основ 1,5 см і 3 см?

674. Труба діаметром $AB = 100$ м за допомогою конусоподібного переходу з'єднана з трубою діаметром $CD = 200$ м (мал. 313). Знайдіть довжину BC конусоподібного переходу, якщо в осьовому перерізі конічної поверхні кут між твірними дорівнює 60°.

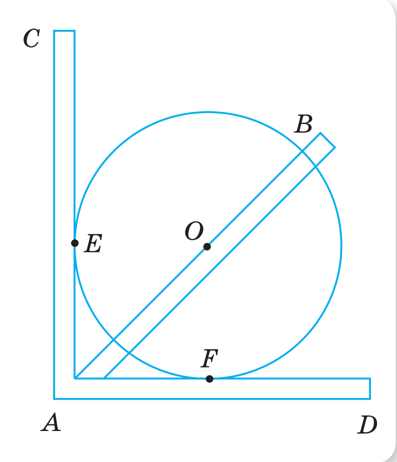


Мал. 313

675. Для закріплення циліндричної деталі в токарному верстаті необхідно позначити центр круглої основи. Із цією метою використовують центрошукачі. На малюнку 314 AB — серединний перпендикуляр до відрізка CD, а на малюнку 315 AB — бісектриса кута CAD. Обравши два положення центрошукачів (як це показано на малюнках) і провівши слід по прямій AB, у перетині цих слідів можна одержати центр кола. Доведіть, що за допомогою кожного із цих центрошукачів можна знайти розміщення центра будь-якого кола.



Мал. 314



Мал. 315

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке тіло обертання; поверхня обертання?
2. Поясніть, що таке циліндр; твірна циліндра; основи циліндра; бічна й повна поверхні циліндра.
3. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною осі; перпендикулярною до осі?
4. Що таке конус; вершина конуса; твірна конуса; основа конуса; бічна та повна поверхні конуса?
5. Якою фігурою є переріз конуса площиною, що проходить через його вершину; площиною, перпендикулярною до його осі?
6. Що таке зрізаний конус?
7. Яку призму називають вписаною в циліндр; описаною навколо циліндра?
8. Яку піраміду називають вписаною в конус; описаною навколо конуса?
9. Що таке куля; поверхня кулі, або сфера?
10. Що є перерізом кулі площиною?
11. Яку кулю називають описаною навколо призми; вписаною в призму?
12. Яку кулю називають описаною навколо циліндра; вписаною в циліндр?
13. Який циліндр називають вписаним у піраміду; описаним навколо піраміди?
14. Який конус називають вписаним у призму; описаним навколо призми?
15. Який циліндр називають вписаним у конус; описаним навколо конуса?
16. Яку кулю називають описаною навколо піраміди; вписаною в піраміду?
17. Яку кулю називають вписаною в конус; у зрізаний конус?
18. Яку кулю називають описаною навколо конуса; навколо зрізаного конуса?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі й знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Радіус основи циліндра 3 см, висота 8 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу.

А. 12 см. **Б.** 6 см. **В.** 10 см. **Г.** 9 см.

2° Діаметр основи конуса 10 см, твірна 13 см. Знайдіть висоту конуса.

А. 10 см. **Б.** 11 см. **В.** 5 см. **Г.** 12 см.

3° Діаметри основ зрізаного конуса 26 см і 10 см, твірна 17 см. Знайдіть висоту даного конуса.

А. 13 см. **Б.** 16 см. **В.** 20 см. **Г.** 26 см.

4 У правильну трикутну призму вписано циліндр із діаметром основи $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону основи призми.

А. 24 см. **Б.** $4\sqrt{3}$ см. **В.** $12\sqrt{3}$ см. **Г.** 12 см.

5* У конус вписано правильну чотирикутну піраміду. Бічне ребро піраміди дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу основи конуса.

А. 16 см^2. **Б.** $4\sqrt{2}$ см^2. **В.** 8 см^2. **Г.** 2 см^2.

№ 2

1° Діаметр кулі 18 см. Знайдіть площу великого круга кулі.

А. 9π см^2. **Б.** 18π см^2. **В.** 36π см^2. **Г.** 81π см^2.

1° Радіус кулі 10 см. Знайдіть площу перерізу, якщо він віддалений від центра кулі на 6 см.

А. 16 см^2. **Б.** 36 см^2. **В.** 16π см^2. **Г.** 36π см^2.

1° Куля радіуса 17 см дотикається до всіх сторін квадрата зі стороною 16 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини квадрата.

А. 12 см. **Б.** 15 см. **В.** 16 см. **Г.** $\sqrt{34}$ см.

4 У циліндр вписано кулю з радіусом 4 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

А. 8 см^2. **Б.** 16 см^2. **В.** 64 см^2. **Г.** $16\sqrt{2}$ см^2.

5* Кулю вписано в правильну трикутну призму зі стороною основи 6 см. Знайдіть бічне ребро призми.

А. $\sqrt{3}$ см. **Б.** $2\sqrt{3}$ см. **В.** 12 см. **Г.** $3\sqrt{3}$ см.

Розділ 3

Об'єми многогранників

У розділі дізнаєтесь:

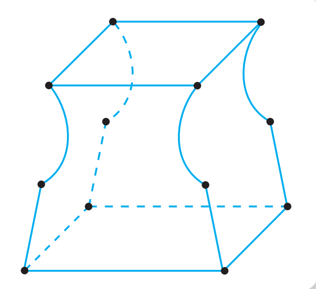
- що таке об'єм тіла та які його властивості;
- як виводити формули об'ємів многогранників (призми, піраміди, зрізаної піраміди);
- як застосовувати формули об'ємів многогранників на практиці та під час розв'язування задач

§ 13. ПОНЯТТЯ ПРО ОБ'ЄМ ТІЛА. ОБ'ЄМ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

1. ПОНЯТТЯ ПРО ОБ'ЄМ ТІЛА

Як для фігур на площині вводиться поняття площі, так для тіл у просторі вводиться поняття об'єму.

Частину простору, яку займає геометричне тіло (мал. 316), характеризує геометрична величина — *об'єм* цього тіла.



Мал. 316

Коротко записуємо: V_F — об'єм тіла F.

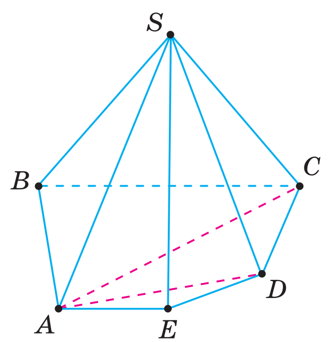
Ми ставимо завдання — виміряти цю величину, тобто знайти її числове значення. При цьому будемо спиратися на *властивості об'єму*.

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.

2. Об'єм будь-якого тіла, що складається із частин, дорівнює сумі об'ємів цих частин.

Так, якщо в п'ятикутній піраміді $SABCDE$ (мал. 317) грань $ABCDE$ розіб'ємо на три трикутники, то трикутні піраміди, для яких основами є ці трикутники, а спільною вершиною — точка S, дають розбиття п'ятикутної піраміди на трикутні. Має місце рівність:

$$V_{SABCDE} = V_{SABC} + V_{SACD} + V_{SADE}.$$



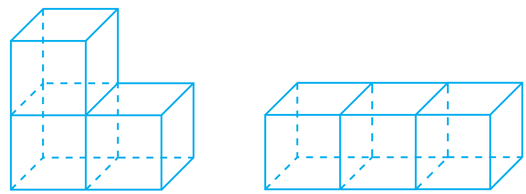
Мал. 317

3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці об'єму.

Одиницями об'єму можуть бути кубічні сантиметри (см^3), кубічні метри (м^3) тощо.

Чи можуть два нерівні тіла мати рівні об'єми? Можуть. Наприклад, такі тіла, які складено з рівних кубиків, зображено на малюнку 318.

Два тіла, що мають рівні об'єми, називають *рівновеликими*.



Мал. 318

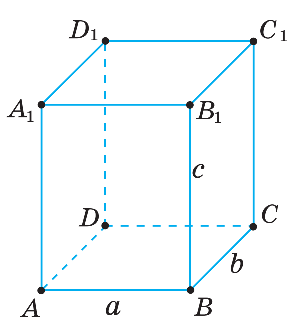
2. ОБ’ЄМ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

ТЕОРЕМА (про об’єм прямокутного паралелепіпеда).

Об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.

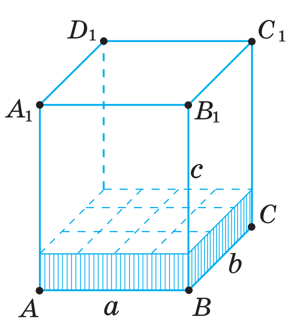
Дано: прямокутний паралелепіпед з вимірами a, b, c (мал. 319).
Довести: $V = abc$.
Доведення. Розглянемо такі випадки.

1. Виміри паралелепіпеда — цілі числа a, b, c. Нехай сторони основи даного паралелепіпеда дорівнюють a і b. Тоді основу паралелепіпеда можна розбити на ab квадратів. На кожному із цих квадратів можна вмістити куб в одну кубічну одиницю. Дістанемо шар (мал. 320), що складається з ab кубічних одиниць. Оскільки висота цього шару дорівнює одній лінійній одиниці, а висота паралелепіпеда містить c таких одиниць, то всередині паралелепіпеда можна вмістити c таких шарів. Отже, об’єм прямокутного паралелепіпеда $V = abc$.



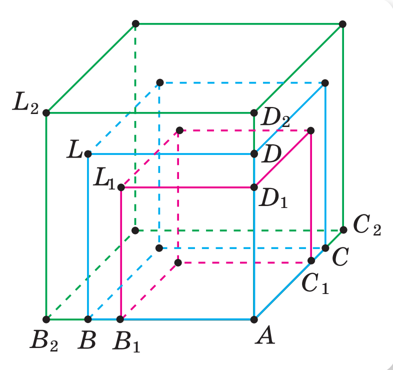
Мал. 319

2. Виміри паралелепіпеда — додатні дробові числа a, b, c. Нехай, звівши дроби до спільного знаменника, дістанемо: $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{g}{n}$, $c = \frac{r}{n}$. Візьмемо за нову лінійну одиницю $\frac{1}{n}$ частину попередньої. Через нову лінійну одиницю виміри паралелепіпеда виражатимуться цілими числами p, g і r. Тоді об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнюватиме pgr, якщо виміряти цей об’єм новою кубічною одиницею (що відповідає новій лінійній одиниці). Таких кубічних одиниць в одній кубічній одиниці, що відповідає попередній лінійній одиниці, міститься n^3. Отже, нова кубічна одиниця становить $\frac{1}{n^3}$ попередньої.



Мал. 320

Тоді об’єм прямокутного паралелепіпеда, виражений у попередніх одиницях, дорівнюватиме: $\frac{pgr}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{g}{n} \cdot \frac{r}{n}$. Оскільки $\frac{p}{n} = a$, $\frac{g}{n} = b$, $\frac{r}{n} = c$, то $V = abc$.



Мал. 321

3. Виміри паралелепіпеда — додатні ірраціональні числа a, b, c. Нехай у паралелепіпеда, який позначимо L: $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ (мал. 321). Кожне із цих чисел можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Візьмемо наближені значення цих дробів з n десятковими знаками з недостачею та надлишком. Значення з недостачею позначимо an, bn, cn, а з надлишком — an', bn', cn'. Відкладемо на ребрі AB, починаючи від точки A, два відрізки: $AB_1 = an$ і $AB_2 = an'$. Так само відкладемо на ребрах AC і AD відрізки $AC_1 = bn$, $AC_2 = bn'$ і $AD_1 = cn$ і $AD_2 = cn'$. Дістанемо: $an < a < an'$, $bn < b < bn'$, $cn < c < cn'$. Побудуємо два паралелепіпеди: L_1 з вимірами an, bn, cn і L_2 з вимірами an', bn', cn'.

Тоді $V_{L_1} = a_n b_n c_n$, $V_{L_2} = a_n{}' b_n{}' c_n{}'$. При необмеженому зростанні n V_{L_1} збільшуватиметься й матиме границею границю добутку $anbncn$, а V_{L_2} зменшуватиметься та матиме границею границю добутку $an'bn'cn'$. Але обидва добутки $anbncn$ і $an'bn'cn'$ при необмеженому зростанні n мають спільну границю, яка є добутком ірраціональних чисел abc. Ця границя береться за об'єм паралелепіпеда L. Отже, $V_L = abc$.

НАСЛІДОК 1. **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

НАСЛІДОК 2. **Якщо ребро куба дорівнює a, то його об'єм $V = a^3$.**

Задача. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо площі його граней дорівнюють S_1, S_2, S_3.

Розв'язання. Позначимо виміри паралелепіпеда через x, y і z. Тоді $xy = S_1$, $xz = S_2$, $yz = S_3$. Перемноживши праві й ліві частини цих рівностей, одержимо $(xyz)^2 = S_1S_2S_3$. Звідки $V = xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

3. ВІДНОШЕННЯ ОБ'ЄМІВ ПОДІБНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ

Нехай дано два подібні прямокутні паралелепіпеди відповідно з вимірами a, b, c і a_1, b_1, c_1.

Нехай $a_1 = k\,a$, $b_1 = k\,b$, $c_1 = k\,c$. Тоді:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{a_1b_1c_1}{abc} = \frac{kakbkc}{abc} = \frac{k^3abc}{abc} = k^3.$$

Отже, **відношення об'ємів подібних паралелепіпедів дорівнює кубу коефіцієнта подібності.**

Дізнайтеся більше

1. В античній Греції всі обчислювальні операції були пов'язані з відрізками. Так, додавання чисел a і b інтерпретували як відрізок, одержаний внаслідок послідовного відкладання на прямій відрізків з довжинами a і b, множенням двох чисел a і b вважали знаходження площі прямокутника зі сторонами a і b, добутком трьох чисел a, b і c — об'єм паралелепіпеда з вимірами a, b і c. Побудови виконувалися за допомогою циркуля й лінійки. Такий метод дослідження в математиці мав досить обмежені можливості. Це привело до появи цілого класу задач, які не можна побудувати за допомогою циркуля й лінійки. Серед них — *задача про подвоєння куба*: «**Побудувати ребро куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба**».

2. Гіпатія (370–415) — народилася й жила в Александрії, була однією з найбільш ерудованих людей того часу. Гіпатія зробила значний внесок у геометрію й астрометрію, відіграла важливу роль у створенні астролябії, написала коментарі до праць Діофанта й Аполлонія. Але, на жаль, наукові праці Гіпатії не збереглися.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Об'єм	Volume	Volume
Об'єм прямокутного паралелепіда	Volume of rectangular parallelepiped	Volumen des rechteckigen Parallelepipeds

Пригадайте головне

1. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Доведіть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його лінійних вимірів.
3. Доведіть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.
4. Чому дорівнює об'єм куба?
5. Яке відношення об'ємів подібних прямокутних паралелепіпедів?

Розв'яжіть задачі

676'. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:

1) 5 см, 2 см, 4 см;
2) 6 см, 1 см, 8 см;
3) 3 см, 10 см, 7 см.

677'. Площа основи прямокутного паралелепіпеда S, висота H. знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $S = 30$ см^2, $H = 12$ см;
2) $S = 25$ дм^2, $H = 4$ дм;
3) $S = 15$ см^2, $H = 8$ см.

678'. Знайдіть об'єм куба, якщо його ребро дорівнює:
1) 3 см; 2) 2 см; 3) 4 см.

679'. Об'єми подібних прямокутних паралелепіпедів відносяться, як 1 : 8. Знайдіть відношення відповідних ребер.

680°. Об'єм прямокутного паралелепіпеда V, площа основи S. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо:
1) $V = 180$ см^3, $S = 60$ см^2;
2) $V = 120$ см^3, $S = 15$ см^2.

681°. Основа прямого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a, H — висота паралелепіпеда. Накресліть у зошиті таблицю 14 і заповніть її.

Таблиця 14

a	3 см	6 см		12 см	2,5 см
H	4 см		11 см		4 см
V		122,4 см^3	1,76 см^3	720 см^3	

682°. Знайдіть об'єм куба, якщо діагональ його грані дорівнює:
1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{2}$ см.

683°. Діагональ куба d. Знайдіть об'єм куба, якщо:
1) $d = 3\sqrt{3}$ см; 2) $d = 5\sqrt{3}$ см; 3) $d = 6\sqrt{3}$ см.

684°. Виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 7 : 14 : 22, а його діагональ дорівнює 81 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

685°. Виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 1 : 2 : 2, а його діагональ дорівнює 18 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

686°. Основа прямокутного паралелепіпеда — квадрат. Висота паралелепіпеда H, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $H = 5$ см, $\alpha = 45°$;
2) $H = 6$ см, $\alpha = 30°$;
3) $H = 3$ см, $\alpha = 60°$.

687°. Основа прямокутного паралелепіпеда — квадрат. Діагональ бічної грані d й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $d = 6$ см, $\alpha = 30°$; 2) $d = 4$ см, $\alpha = 45°$.

688°. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда — a і b, а його діагональ утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 30°$;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 45°$.

689°. У скільки разів потрібно збільшити кожний із вимірів прямокутного паралелепіпеда, щоб його об'єм збільшився: 1) удвічі; 2) утричі; 3) у n разів?

690°. Знайдіть відношення об'ємів прямокутних паралелепіпедів, які подібні з коефіцієнтом: 1) $k = 3$; 2) $k = 6$; 3) $k = 0{,}1$.

691°. Знайдіть відношення об'ємів кубів, які подібні з коефіцієнтом: 1) $k = 0{,}5$; 2) $k = 5$; 3) $k = 25$.

692°. Знайдіть відношення об'ємів подібних прямокутних паралелепіпедів, площі граней яких відносяться, як:
1) 9 : 4; 2) 100 : 1.

693. Виміри прямокутного паралелепіпеда — a, b, c. Знайдіть ребро рівновеликого йому куба, якщо:
1) $a = 15$ см, $b = 50$ см, $c = 36$ см;
2) $a = 4$ см, $b = 8$ см, $c = 16$ см.

694. Діагональ d прямого паралелепіпеда з рівними сусідніми ребрами основи утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $d = 4$ см, $\alpha = 60°$;
2) $d = 6$ см, $\alpha = 30°$.

695. У прямокутного паралелепіпеда з рівними ребрами основи висота 6 см, а його діагональ утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

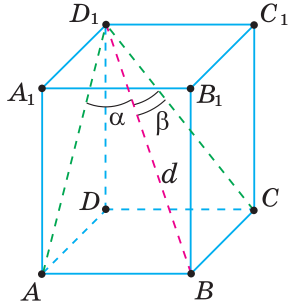
696. Основа прямокутного паралелепіпеда — квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює d й утворює з бічною гранню кут 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $d = 6$ см; 2) $d = 2$ см.

697. Основа прямокутного паралелепіпеда — квадрат. Діагональ d паралелепіпеда утворює з прилеглою стороною основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $d = 4$ см;
2) $d = 2$ см.

698. Діагональ прямого паралелепіпеда з рівними ребрами основи дорівнює d, а діагональ бічної грані — d_1. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $d = 3{,}5$ см; $d_1 = 2{,}5$ см;
2) $d = 4$ см; $d_1 = 3$ см.

699. Одне з ребер основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a. Його діагональ довжиною $2a$ утворює з площиною бічної грані, що містить дану сторону, кут 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо: 1) $a = 5$ см; 2) $a = 6$ см.

700. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d й утворює з бічними гранями кути α і β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда (мал. 322).



Мал. 322

701. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC = d$, $\angle BCA = \alpha$. Площина, яку проведено через ребро AB і діагональ BC_1, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

702. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d й утворює з площиною основи кут α, а з бічною гранню — кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

703. Діагональ d прямокутного паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом α, а гострий кут між діагоналями — β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

704. Площі граней прямокутного паралелепіпеда — Q_1, Q_2, Q_3. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $Q_1 = 2$ см^2, $Q_2 = 3$ см^2, $Q_3 = 6$ см^2;
2) $Q_1 = 6$см^2, $Q_2 = 10$ см^2, $Q_3 = 15$ см^2.

705. Ребро основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a й утворює з діагоналлю основи кут α. Через дану сторону та протилежне йому ребро іншої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

706. Дано куб і прямокутний паралелепіпед. У якого многогранника об'єм більший і на скільки, якщо в них:
1) основи рівні, а висоти відносяться, як 1 : 5;
2) висоти рівні, а сторони основ відносяться, як 1 : 1 : 2?

707. Виміри одного прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 2 : 3 : 5, а другого — як 3 : 4 : 5. Об'єм першого в 4 рази більший за об'єм другого. Знайдіть відношення площ поверхонь цих паралелепіпедів.

708. Виміри одного прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 3 : 5 : 6, а другого — як 3 : 6 : 7. Площі їхніх поверхонь відносяться, як 7 : 9. Знайдіть відношення об'ємів цих паралелепіпедів.

709. Знайдіть відношення об'ємів кубів, якщо ребро першого є діагоналлю другого куба.

710*. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см, 8 см і 9 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

711*. Діагональ основи прямокутного паралелепіпеда d, а кут між діагоналями основи — α. Діагональ меншої бічної грані утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

712*. Периметр основи прямокутного паралелепіпеда $2p$. діагональний його переріз — квадрат із площею S. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

713*. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює a. Переріз, що проходить через два ребра основ, які не лежать в одній грані, — квадрат із площею S. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

714*. Ребра основи прямокутного паралелепіпеда відносяться, як $m : n$, а діагональний переріз — квадрат із площею S. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $m : n = 1 : 2$; $S = 4$ см^2;
2) $m : n = 1 : 3$; $S = 9$ см^2.

715*. Площі граней прямокутного паралелепіпеда L_1 відносяться, як $1 : 6 : 4$, а площі граней прямокутного паралелепіпеда L_2 відносяться, як $3 : 1 : 9$. Відомо, що об'єм паралелепіпеда L_1 у 3 рази менший, ніж об'єм паралелепіпеда L_2. У скільки разів площа поверхні паралелепіпеда L_1 менша від площі поверхні паралелепіпеда L_2?

Проявіть компетентність

716. Цеглина має розміри $25 \times 12 \times 6{,}5$ см. Знайдіть:
1) об'єм цеглини;
2) густину цеглини, якщо її маса 3,51 кг.

717. Цеглина має розміри $25 \times 12 \times 6$ см. Знайдіть об'єм стіни, викладеної з 10 000 цеглин, якщо розчин для кладки цегли становить 15 % від об'єму цегли (мал. 323).

718. Три свинцеві куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавлено в один куб. Знайдіть ребро утвореного куба.

719. З 10 кг свинцю виплавлено куб. Знайдіть ребро куба. (Питома вага свинцю — 11,7.)

720. Потрібно встановити резервуар для води місткістю 10 м^3 на майданчику розмірами $2{,}5 \times 1{,}75$ м, який є для нього дном. Знайдіть висоту резервуара.

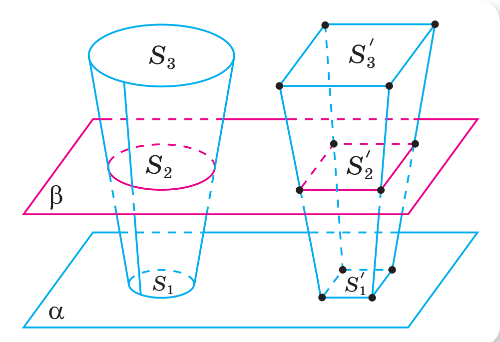
721. Пліт виготовлено із 16 балок прямокутного перерізу. Кожна балка має виміри 3,6 м, 0,2 м і 0,25 м. Який найбільший вантаж може утримати пліт, не затонувши? (Питома вага дерева — 0,84.)

Мал. 323

§ 14. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ

1. ПРИНЦИП КАВАЛЬЄРІ

Для обчислення об'єму призми використаємо принцип, розроблений італійським математиком Б. Кавальєрі (1598–1647). Принцип Кавальєрі полягає ось у чому.



Мал. 324

Нехай дано два тіла, основи яких лежать в одній площині α (мал. 324). **Якщо в перерізі двох тіл кожною площиною β, паралельною даній площині α, утворюються фігури, площі яких рівні ($S_1 = S_1'$, $S_2 = S_2'$, $S_3 = S_3'$), то об'єми цих тіл рівні.**

Це твердження може бути строго доведене, але доведення його виходить за межі елементарної математики. Тому ми обмежимося лише наочними міркуваннями.

Уявімо, що кожне із цих тіл складено з дуже тонких пластинок однакової товщини, розміщених паралельно площині α (подібно до того, як товста пачка паперу складена з окремих аркушів). Тоді об'єм кожного з тіл дорівнюватиме сумі об'ємів тонких пластинок, з яких воно складено. Об'єм же кожної пластинки можна вважати рівним площі її основи, оскільки товщиною пластинки можна знехтувати. Але дві пластинки, які належать відповідним тілам і містяться на рівних відстанях від площини α, мають рівні площі, а отже, і рівні об'єми. Тоді й об'єми даних тіл мають бути рівними.

2. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ

ТЕОРЕМА (про об'єм призми).

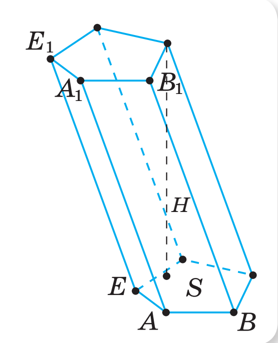
Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Дано: $AB...EA_1B_1...E_1$ — призма з площею основи S і висотою H (мал. 325).

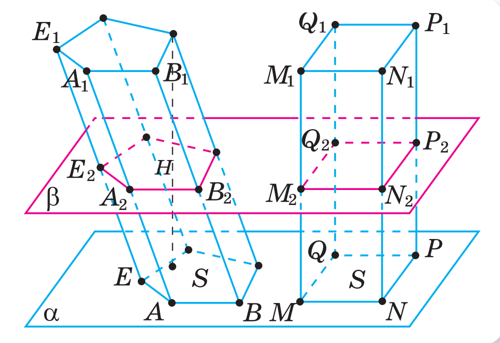
Довести: $V = S \cdot H$.

Доведення. Побудуємо прямокутний паралелепіпед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ з тією самою площею основи S і тією самою висотою H, основа якого лежить у тій само площині α, що й основа даної призми (мал. 326). Перетнемо призму і прямокутний паралелепіпед площиною β, паралельною площині α. У перерізі дістанемо многокутник $A_2B_2...E_2$ і прямокутник $M_2N_2P_2Q_2$. Площа многокутника $A_2B_2...E_2$ дорівнює площі прямокутника

$M_2N_2P_2Q_2$, оскільки площі многокутників $A_2B_2...E_2$ й $AB...E$ рівні й рівні площі прямокутників $M_2N_2P_2Q_2$ і $MNPQ$. За принципом Кавальєрі, об'єми призми і прямокутного паралелепіпеда — рівні.
Отже, об'єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту: $V = S \cdot H$.



Мал. 325

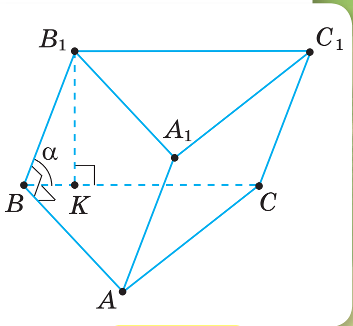


Мал. 326

НАСЛІДОК 1. **Об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.**

Задача 1. Основа призми — рівнобедрений прямокутний трикутник. Бічна грань, що містить один із катетів цього трикутника, є квадратом зі стороною a й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана трикутна призма (мал. 327), у якої $\angle ABC = 90°$, $AB = BC$ і грань ABB_1A_1 — квадрат. Тому $BB_1 = AB = BC = a$. Оскільки за умовою $BB_1 \perp AB$ і $BC \perp AB$, то $\angle B_1BC = \alpha$ (як лінійний кут двогранного кута з ребром AB) і площина грані BB_1C_1C перпендикулярна до площини основи ABC. Тоді основа висоти B_1K призми лежатиме на стороні BC (або на її продовженні). З прямокутного трикутника BB_1K дістанемо: $B_1K = a\sin\alpha$. Площа основи $S = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$. Отже, $V = \frac{a^2}{2} \cdot a\sin\alpha = \frac{a^3 \sin\alpha}{2}$.



Мал. 327

За формулою $V = SH$ також знаходимо:

1) площу основи призми за її об'ємом і висотою: $S = \frac{V}{H}$;

2) висоту призми за її об'ємом і площею основи: $H = \frac{V}{S}$.

3. ФОРМУЛА ОБ'ЄМУ ПОХИЛОЇ ПРИЗМИ

Якщо в похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до її бічних ребер (будемо його коротко називати *перпендикулярний* *переріз*), тоді об'єм цієї призми можна знайти, скориставшись такою теоремою.

ТЕОРЕМА

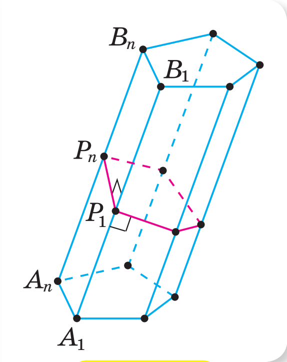
(про об'єм похилої призми).

Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі перпендикулярного перерізу на бічне ребро.

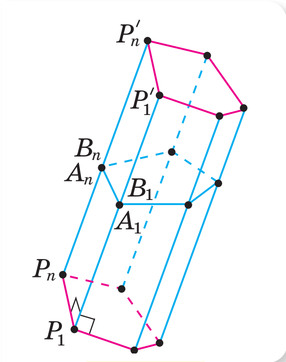
Дано: $A_1...A_nB_1...B_n$ — похила призма (мал. 328), $P_1...P_n$ — переріз призми, перпендикулярний до її бічного ребра A_1B_1.

Довести: $V_{A_1...A_nB_1...B_n} = S_{P_1...P_n} \cdot A_1B_1$.

Доведення. Площина перпендикулярного перерізу розбиває дану призму на дві призми: $A_1...A_nP_1...P_n$ і $P_1...P_nB_1...B_n$. Сумістивши основи $A_1...A_n$ і $B_1...B_n$ отриманих призм, дістанемо пряму призму $P_1...P_nP'_1...P'_n$, у якої основою є переріз $P_1...P_n$ даної призми, а висота $P_1P'_1$ дорівнює бічному ребру A_1B_1 даної призми (мал. 329). Призми $A_1...A_nB_1...B_n$ і $P_1...P_nP'_1...P'_n$ мають рівні об'єми, оскільки складені з рівних частин. Отже, $V_{A_1...A_nB_1...B_n} = V_{P_1...P_nP'_1...P'_n} = S_{P_1...P_n} \cdot P_1P'_1 = S_{P_1...P_n} \cdot A_1B_1$.



Мал. 328

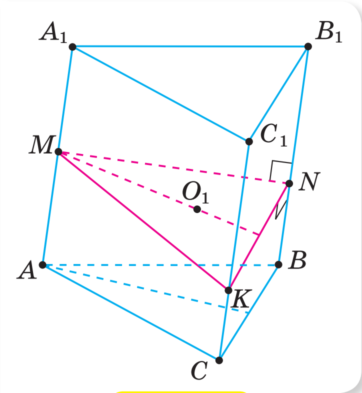


Мал. 329

Задача 2. У похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ бічне ребро дорівнює h. Переріз призми, перпендикулярний до ребра BB_1, — трикутник MNK з гострими кутами β і γ та радіусом вписаного в нього кола r. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма (мал. 330). Перпендикулярним перерізом призми є трикутник MNK, для якого r — радіус вписаного кола (мал. 331). Нехай $\angle M = \beta$, $\angle N = \gamma$. Знайдемо сторони трикутника:

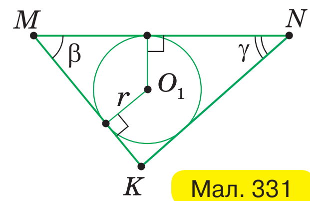
$$MN = r\left(\text{ctg}\frac{\beta}{2} + \text{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),$$



Мал. 330

$$NK = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right),$$

$$MK = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right).$$



Мал. 331

Тоді площа трикутника MNK:

$S = p \cdot r$, де $p = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right)$.

Тоді $S = r \cdot r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right) = r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right)$.

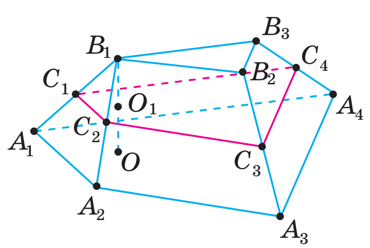
Звідси $V = r^2 h\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right)$.

Дізнайтеся більше

1. Ви знаєте, які два многогранники називають рівновеликими. У геометрії розглядають ще й таку характеристику многогранників, як рівноскладеність (див. мал. 318, с. 167). Два многогранники називають *рівноскладеними*, якщо їх можна скласти з тієї самої кількості відповідно рівних многогранників. Спираючись на властивості об'єму, можна довести, що два рівноскладені многогранники є рівновеликими. Обернене твердження справджується не завжди. Проблему про те, чи є рівновеликими рівноскладені многогранники, у 1900 р. поставив Давид Гільберт. У 1901 р. Макс Ден довів, що тетраедр не є рівноскладеним із рівновеликим йому кубом.

2. Англійський математик **Томас Симпсон** (1710–1761) вивів цікаву формулу для обчислення об'єму призматоїда.

Висотою призматоїда (мал. 332) називають відрізок, довжина якого дорівнює відстані між паралельними площинами, у яких лежать основи призматоїда. Якщо через середину висоти призматоїда провести площину, паралельну його основам, то дістанемо *серединний переріз* призматоїда. Якщо S_1 і S_2 — площі основ призматоїда, S — площа серединного перерізу, тоді справедлива така формула для обчислення об'єму призматоїда: $V = \frac{1}{6}h\left(S_1 + S_2 + 4S\right)$.



Мал. 332

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Об'єм призми	Volume of a Prism	Volumen des Prismas

Пригадайте головне

1. Поясніть, у чому полягає принцип Кавальєрі.
2. Доведіть, що об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.
3. Чому дорівнює об'єм прямого паралелепіпеда; похилого паралелепіпеда?
4. Доведіть, що об'єм похилої призми дорівнює добутку площі перерізу, перпендикулярного до бічного ребра, на бічне ребро.

Розв'яжіть задачі

722'. Основа призми з висотою h — квадрат зі стороною a. Укажіть правильний вираз для обчислення об'єму даної призми:
1) $V = ah$; 2) $V = a^2h$; 3) $V = 4ah$.

723'. Основа призми з висотою h — прямокутний трикутник з катетами a і b. Укажіть правильний вираз для обчислення об'єму даної призми:
1) $V = \frac{1}{2}abh$; 2) $V = abh$; 3) $V = a + b + h$.

724'. Площа основи призми S, а висота — H. Знайдіть об'єм призми, якщо: 1) $S = 4$ см^2, $H = 6$ см; 2) $S = 10$ см^2, $H = 6$ см.

725'. Об'єм призми V, а площа основи — S. Знайдіть висоту призми, якщо:
1) $V = 400$ см^3, $S = 40$ см^2; 2) $V = 250$ см^3, $S = 50$ см^2.

726'. Висота призми H, а об'єм — V. Знайдіть площу основи призми, якщо:
1) $H = 8$ см, $V = 240$ см^3; 2) $H = 12$ см, $V = 384$ см^3.

727°. У прямої трикутної призми всі ребра дорівнюють a. Знайдіть об'єм призми, якщо: 1) $a = 2\sqrt{3}$ см; 2) $a = 6\sqrt{3}$ см; 3) $a = 5\sqrt{3}$ см.

728°. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, бічне ребро — b. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см; 2) $a = 8\sqrt{3}$ см, $b = 5$ см.

729°. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, бічне ребро — b. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = \sqrt{3}$ см; 2) $a = b = 6$ см.

730°. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами a і b. Бічна грань призми, що містить гіпотенузу основи, — квадрат. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 3) $a = 5$ см, $b = 12$ см.

731°. Основа прямої призми — трикутник зі стороною a і висотою h, проведеною до цієї сторони. Бічне ребро призми b. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 6$ см, $h = 2$ см, $b = 5$ см;
2) $a = 4$ см, $h = 8$ см, $b = 3$ см;
3) $a = 7$ см, $h = 6$ см, $b = 10$ см.

732°. Основа прямої трикутної призми — трикутник зі сторонами a, b і c, а висота призми — h. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см, $h = 6$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $h = 8$ см.

733°. За стороною основи a й бічним ребром b знайдіть об'єм правильної трикутної призми.

734°. За стороною основи a й бічним ребром b знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми.

735°. Основою прямої призми є ромб з діагоналями d_1 і d_2, а висота призми — H. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $d_1 = 5$ см, $d_2 = 10$ см, $H = 4$ см;
2) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 5$ см, $H = 12$ см.

736°. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює d й нахилена до сторони основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $d = 2$ см, $\alpha = 30°$; 2) $d = 4$ см, $\alpha = 45°$.

737°. Діагональ грані правильної чотирикутної призми дорівнює d й нахилена до сторони основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $d = 10$ см, $\alpha = 30°$; 2) $d = 6$ см, $\alpha = 60°$.

738°. Площа основи призми S. Її бічне ребро дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $S = 20$ см², $b = 6$ см, $\alpha = 30°$;
2) $S = 30$ см², $b = 10\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
3) $S = 25$ см², $b = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

739°. Основа призми — рівносторонній трикутник, уписаний в коло радіуса R. Бічні грані призми — квадрати. Знайдіть об'єм призми, якщо: 1) $R = 2$ см; 2) $R = 4$ см.

740°. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гострим кутом 30°, уписаний у коло радіуса 5 см. Бічна грань призми, яка містить гіпотенузу, — квадрат. Знайдіть об'єм призми.

741°. Площа осьового перерізу циліндра — квадрат зі стороною a. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, уписаної в циліндр, якщо:
1) $a = 16\sqrt{3}$ см; 2) $a = 8\sqrt{3}$ см; 3) $a = 12\sqrt{3}$ см.

742°. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми з висотою h, описаної навколо циліндра з радіусом основи R, якщо:
1) $h = 5$ см, $R = \sqrt{3}$ см; 2) $h = 4$ см, $R = 10\sqrt{3}$ см.

743°. Правильну чотирикутну призму вписано в циліндр, у якого радіус основи R, а висота H. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $H = 3$ см, $R = 2\sqrt{2}$ см; 2) $H = 5$ см, $R = 6\sqrt{2}$ см.

744°. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми з висотою h, вписаної в циліндр з радіусом основи R, якщо $R = 6\sqrt{3}$ см, $h = 3$ см.

745°. Кулю вписано в правильну чотирикутну призму. Знайдіть об'єм призми, якщо радіус кулі дорівнює:
1) 2 см; 2) 6 см; 3) 10 см.

746°. Кулю радіуса R вписано у правильну трикутну призму. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $R = \sqrt{3}$ см; 2) $R = 2\sqrt{3}$ см.

747°. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює l. Сторони перерізу призми, що перпендикулярний до бічного ребра, дорівнюють a, b, c. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $l = 12$ см, $a = 6$ см, $b = c = 5$ см;
2) $l = 8$ см, $a = 9$ см, $b = 10$ см, $c = 17$ см.

748°. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює l. Сторони перерізу призми, що перпендикулярний до бічного ребра, дорівнюють a, b, c. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $l = 5$ см, $a = b = c = 6$ см;
2) $l = 3$ см, $a = 12$ см, $b = 5$ см, $c = 13$ см.

749°. Кожне ребро трикутної призми дорівнює 2 см. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм призми.

750°. Основа чотирикутної призми — квадрат. Кожне ребро призми дорівнює 6 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм призми.

751. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з площею S і гострим кутом α. Площа найбільшої бічної грані дорівнює Q. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $Q = 40$ см^2, $S = 50$ см^2, $\alpha = 15°$;
2) $Q = 24$ см^2, $S = 32$ см^2, $\alpha = 30°$.

752. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α. Діагональ грані, що містить гіпотенузу цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 2$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$; 2) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

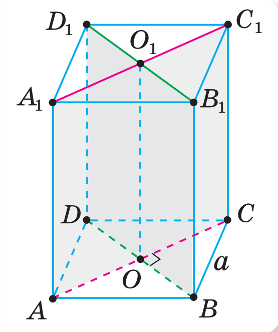
753. Основа прямої призми — рівносторонній трикутник. Площина, що проходить через одну зі сторін основи й протилежну вершину, нахилена до площини основи під кутом α. Площа перерізу дорівнює S. Знайдіть об'єм призми.

754. У правильної чотирикутної призми сторона основи дорівнює a. Через діагональ нижньої та вершину верхньої основи проведено площину, що перетинає дві суміжні бічні грані призми по прямих, кут між якими дорівнює α. Знайдіть об'єм призми.

755. Діагональ правильної чотирикутної призми нахилена до бічної грані під кутом 30° і дорівнює m. Знайдіть об'єм призми.

756. Основа прямого паралелепіпеда — ромб, площа якого S. Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

757. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною a. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S_1 і S_2 (мал. 333). Знайдіть об'єм паралелепіпеда.



Мал. 333

758. Основа призми — рівнобедрений прямокутний трикутник. Бічна грань, що містить один з катетів цього трикутника, є квадратом зі стороною a й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$;
3) $a = 2\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$.

759. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр, якщо:
1) $d = 18$ см, $\alpha = 45°$; 2) $d = 12$ см, $\alpha = 60°$.

760. У правильній шестикутній призмі площа більшого діагонального перерізу дорівнює Q, а відстань між паралельними бічними гранями дорівнює a. Знайдіть об'єм призми.

761. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Площина, яка проходить через сторону куба AB й середину сторони CC_1, відтинає від куба трикутну призму. Знайдіть об'єм трикутної призми, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt[3]{16}$ см.

762. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Площина, яка проходить через сторону куба BC й середину сторони AA_1, відтинає від куба трикутну призму. Знайдіть об'єм трикутної призми, якщо ребро куба дорівнює 2 см.

763. Кулю радіуса R описано навколо правильної трикутної призми. Радіус кулі, проведений у вершину призми, утворює з площиною її основи кут α. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $R = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $R = 12$ см, $\alpha = 30°$.

764. Кулю радіуса R описано навколо правильної n-кутної призми. Сторона основи призми дорівнює a. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

765. Радіус кулі дорівнює R. У кулю вписано правильну n-кутну призму з висотою h. Знайдіть об'єм призми, якщо:
1) $n = 3$, $R = 10$ см, $h = 12$ см; 2) $n = 4$, $R = 13$ см, $h = 10$ см;
3) $n = 6$, $R = a$ см, $h = b$ см.

766. Навколо правильної трикутної призми описано сферу радіуса 6 см. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 30°. Визначте об'єм призми.

767. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції й у шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведемо площину паралельно ребру AB. Знайдіть площину утвореного перерізу, якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3, а її висота — 8 см.

768. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, де $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см. Через бічне ребро AA_1 призми проведемо площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте об'єм призми, якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см^2.

769. Основою прямокутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник ABC, у якого $\angle B = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 10$ см. Через бічне ребро BB_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра AC. Визначте об'єм призми, якщо площа утвореного перерізу дорівнює 48 см^2.

770. Основою правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник ABC. Точка K — середина ребра BC. Площина проходить через точки A, K та B_1, утворює з площиною основи призми кут α. Визначте об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо відстань від вершини A до грані BB_1C_1C дорівнює d.

771. Основою прямокутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, у якому діагональ $AC = a$, $\angle BAC = \beta$. Площина, що проходить через вершину верхньої основи та діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут α. Визначте об'єм заданої призми.

772. У похилої трикутної призми сторони основи дорівнюють 5 см, 6 см і 9 см. Бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм призми.

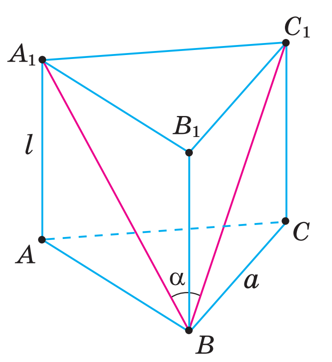
773. У похилої трикутної призми площа однієї з бічних граней дорівнює a^2, а відстань цієї грані від протилежного ребра дорівнює m. Знайдіть об'єм призми.

774. Сума об'ємів двох подібних призм дорівнює V, а відповідні ребра відносяться, як $m : n$. Знайдіть об'єми призм.

775. Сума об'ємів двох подібних призм дорівнює 76 м^3, а відповідні ребра відносяться, як 3 : 5. Знайдіть об'єми призм.

776*. Площі двох бічних граней прямої трикутної призми S_1 і S_2, а двогранний кут між ними α. Бічне ребро дорівнює a. Знайдіть об'єм призми.

777*. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V, кут між діагоналями двох граней, проведених з однієї вершини, дорівнює α (мал. 334). Знайдіть сторону основи призми.

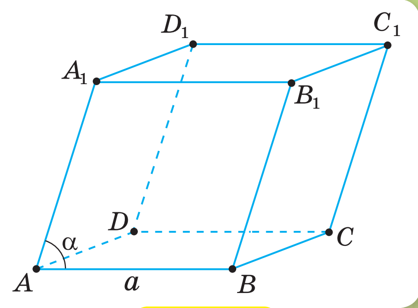


Мал. 334

778*. Площі бічних граней похилої трикутної призми відносяться, як 20 : 37 : 51, бічне ребро дорівнює 5 см, площа бічної поверхні — 1080 см^2. Знайдіть об'єм призми.

779*. Грані паралелепіпеда — рівні ромби зі стороною a й гострим кутом α (мал. 335). Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

780*. Основа похилої призми — рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, менша діагональ якого дорівнює c. Знайдіть об'єм призми.



Мал. 335

781*. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює S. Через бічне ребро проведено площину, що ділить призму на частини, об'єми яких відносяться, як 1 : 3. Знайдіть площу перерізу.

782*. У кулю радіуса r вписано правильну трикутну призму. Радіус кулі, проведений у вершину призми, нахилений до площини бічної грані під кутом α. Знайдіть об'єм призми.

Проявіть компетентність

783. Якою має бути площа підлоги кабінету математики заввишки 3,5 м для класу чисельністю 28 учнів, якщо на кожного учня потрібно 7,5 м^3 повітря?

784. Для виготовлення закритого ящика з квадратною основою потрібно 6 м^2 фанери. Які лінійні розміри повинен мати ящик, щоб його об'єм був найбільшим?

785. На малюнку 336 зображено споруду для збереження сіна, що має форму прямої призми з п'ятикутною основою; її розміри подано в метрах. Знайдіть масу сіна в сховищі, якщо маса 1 м^3 сіна дорівнює 85 кг.

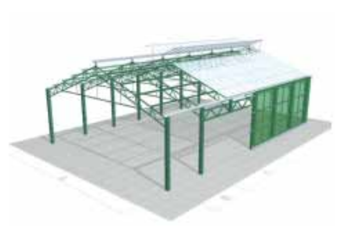
786. Розмір цеглини 25 × 12 × 6,5 см. Знайдіть масу однієї цеглини, якщо об'ємна маса цегли дорівнює $1700\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

787. За сезон машина виготовила 720 000 торф'яних брикетів розміром 356 × 140 × 97 мм, загальна маса яких дорівнює 1700 т. Знайдіть густину торф'яного брикету.

788. Скільки плит $\left(\rho = 0{,}3\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$ розміром 4,5 × 1,22 × 0,075 м можна завантажити на причіп, якщо тягач розрахований на вантаж, що не перевищує 2,5 т?

789. Як розрізати прямокутний паралелепіпед з вимірами 4 см, 6 см і 9 см на дві частини, з яких можна скласти куб?

790. Прямолінійну ділянку траси завширшки 10 м і завдовжки 100 м потрібно покрити асфальтом завтовшки 5 см. Скільки потрібно п'ятитонних вантажівок, щоб завезти асфальт для виконання робіт на ділянці, якщо в 1 м^3 міститься 2,4 т асфальту?


Мал. 336

§ 15. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

1. РІВНОВЕЛИКІ ПІРАМІДИ

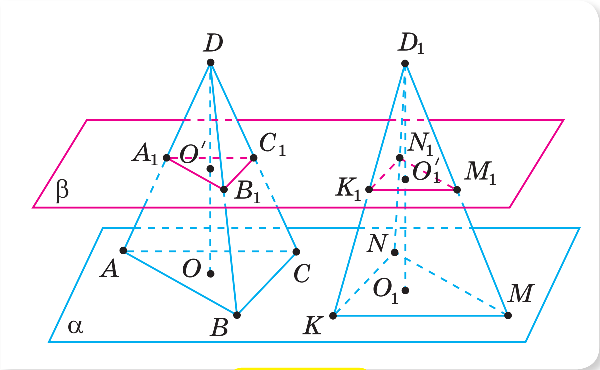
Дві піраміди, що мають рівні об'єми, називаються *рівновеликими*.

Ви знаєте, що трикутники з рівними основами й рівними висотами мають рівні площі. Схожу властивість мають і трикутні піраміди.

ТЕОРЕМА (про рівновеликість трикутних пірамід).

Трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами мають рівні об'єми.

Дано: $DABC$ і D_1KMN — трикутні піраміди з об'ємами V_1 і V_2, S і H — площа основи та висота кожної з них (мал. 337).



Мал. 337

Довести: $V_1 = V_2$.

Доведення. Розмістимо основи даних пірамід на площині α. Перетнемо ці піраміди площиною $\beta \parallel \alpha$ на відстані $DO' = D_1O_1' = h$. Позначимо S_1 і S_2 площі утворених перерізів. У піраміді $DABC$ DO — висота. Оскільки $\Delta DO'C_1 \sim \Delta DOC$, то $\frac{H}{h} = \frac{OC}{O'C_1}$, а отже, $\frac{H}{h} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Тоді $\frac{H^2}{h^2} = \frac{S}{S_1}$. Аналогічно для піраміди D_1KMN $\frac{H^2}{h^2} = \frac{S}{S_2}$. Звідси $S_1 = S_2$.

Тоді, за принципом Кавальєрі, $V_1 = V_2$.

?

Чи справджується теорема для будь-яких n-кутних пірамід? Так. **Будь-які n-кутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами мають рівні об'єми**.

2. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

ТЕОРЕМА

(про об'єм піраміди).

Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту.

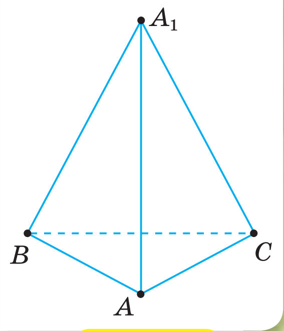
Дано: n-кутна піраміда, S — площа основи, H — висота.

Довести: $V = \frac{1}{3}SH$.

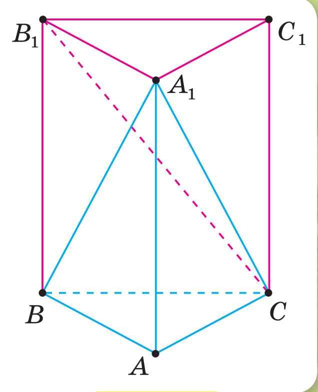
Доведення. Спочатку доведемо теорему для трикутної піраміди, а потім для будь-якої n-кутної.

1. Нехай A_1ABC– трикутна піраміда (мал. 338). Побудуємо на основі ABC призму, одне ребро якої збігається з A_1A, а висота дорівнює висоті піраміди (мал. 339). Покажемо, що об'єм піраміди становить третину об'єму цієї призми.

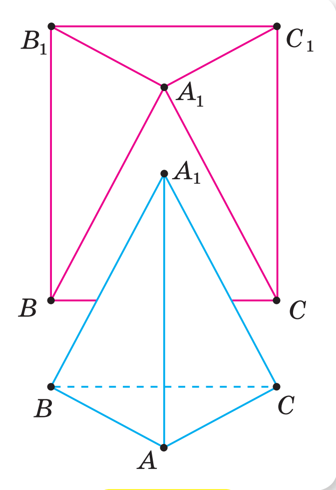
Відокремимо від призми дану піраміду (мал. 340). Розіб'ємо чотирикутну піраміду $A_1BCC_1B_1$, що залишилася, площиною, яка проходить через точки A_1, B_1, C. Тоді вся призма розділяється на три трикутні піраміди A_1ABC, A_1BB_1C, $A_1B_1C_1C$ (мал. 341). Піраміди A_1ABC і $A_1B_1C_1C$ мають рівні основи ($\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$) і рівні висоти. Тому в них рівні об'єми. Піраміди A_1BB_1C і $A_1B_1C_1C$ також мають рівні основи ($\Delta\, BB_1C = \Delta\, C_1CB_1$) і рівні висоти. Тому в них також рівні об'єми.



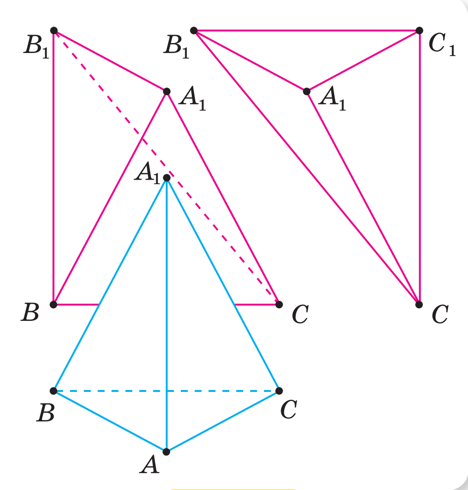
Мал. 338



Мал. 339



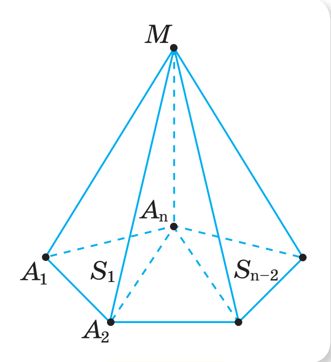
Мал. 340



Мал. 341

Отже, всі три піраміди мають один і той само об'єм. Оскільки сума цих об'ємів дорівнює об'єму призми, то об'єм кожної з трьох пірамід дорівнюють $\frac{1}{3}S \cdot H$, де S — площа основи піраміди, а H — висота.

Отже, об'єм будь-якої трикутної піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$.



Мал. 342

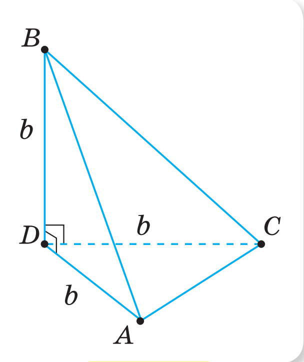
2. Нехай тепер маємо будь-яку n-кутну піраміду (мал. 342). Розіб'ємо її основу на трикутники. Піраміди, у яких основами є ці трикутники, а вершинами — вершина даної піраміди, складають дану піраміду. Об'єм даної піраміди дорівнює сумі об'ємів пірамід, які її складають. Позначимо площі основ трикутних пірамід через $S_1, \ldots S_{n-2}$, а спільну їх висоту — H. Тоді об'єм даної піраміди дорівнює: $V = \frac{1}{3}S_1H + \ldots + \frac{1}{3}S_{n-2}H = \frac{1}{3}H(S_1 + \ldots + S_{n-2}) = \frac{1}{3}S \cdot H$.

Отже, об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$.

Задача 1. Бічне ребро правильної трикутної піраміди $DABC$ дорівнює b, а плоский кут при вершині D — 90°. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання. За основу даної піраміди візьмемо трикутник DAC (мал. 343). За умовою, цей трикутник — рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом b.

Тоді $S_{DAC} = \frac{b^2}{2}$. Ребро DB — висота піраміди, тому $V = \frac{1}{3}S_{DAC}DB = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b = \frac{b^3}{6}$.



Мал. 343

За формулою $V = \frac{1}{3}SH$ також знаходимо:

1) площу основи піраміди за її об'ємом і висотою: $S = \frac{3V}{H}$;

2) висоту піраміди за її об'ємом і площею основи: $H = \frac{3V}{S}$.

Застосування поняття об'єму дає можливість іноді значно спростити розв'язування таких задач, в умовах яких це поняття не вживається. Найчастіше це можна зробити, «двічі» визначивши об'єм тіла: спочатку об'єм деякого тіла виражаємо через дані й шукані величини двома різними способами, потім прирівнюємо знайдені вирази. Дістаємо рівняння, з якого нерідко можна знайти шукану величину або залежність між шуканими величинами.

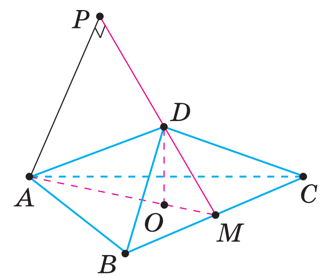
Задача 2. Знайдіть висоту AP правильної трикутної піраміди $DABC$, сторона основи AB якої дорівнює 6, а висота DO дорівнює 1.

Розв'язання. Об'єм даної трикутної піраміди $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$ (мал. 344). $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = 3\sqrt{3}$.

З іншого боку, $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AP$.

Оскільки з $\Delta\, DOM$ апофема $DM = 2$, то $S_{BCD} = 6$.

Тоді $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot AP = 2AP = 3\sqrt{3}$. Звідси одержимо $AP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

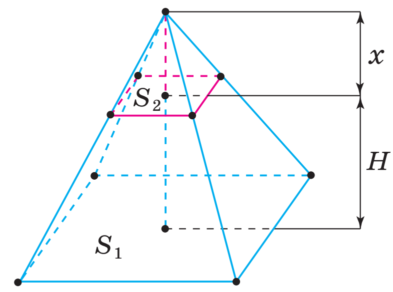


Мал. 344

3. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

Ви вже знаєте, що таке зрізана піраміда. Для обчислення її об'єму можна скористатися таким способом — спочатку обчислити об'єми повної та меншої пірамід, яка доповнює дану зрізану піраміду до повної піраміди, а потім знайти різницю цих об'ємів.

Нехай площі основ зрізаної піраміди S_1 і S_2, а висота H (мал. 345). Доповнимо дану зрізану піраміду до повної. Нехай x — висота піраміди, яка доповнює зрізану піраміду до повної. Тоді об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці двох пірамід: однієї — з площею основи S_1 і висотою $H + x$, другої — з площею основи S_2 і висотою x. Отже, одержимо:



Мал. 345

$$V = \frac{1}{3} S_1 (H + x) - \frac{1}{3} S_2 x = \frac{S_1 (H + x) - S_2 x}{3} = \frac{S_1 H + x(S_1 - S_2)}{3},$$

$$V = \frac{S_1 H + x(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})}{3}.$$

За властивістю паралельних перерізів піраміди: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H + x)^2}$.

$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x}{H + x},\quad H\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1},\quad H\sqrt{S_2} = x(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}).$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 H + H\sqrt{S_2}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})) = \frac{H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}{3}.$$

4. ВІДНОШЕННЯ ОБ'ЄМІВ ПІРАМІД ІЗ РІВНИМ ТРИГРАННИМ КУТОМ

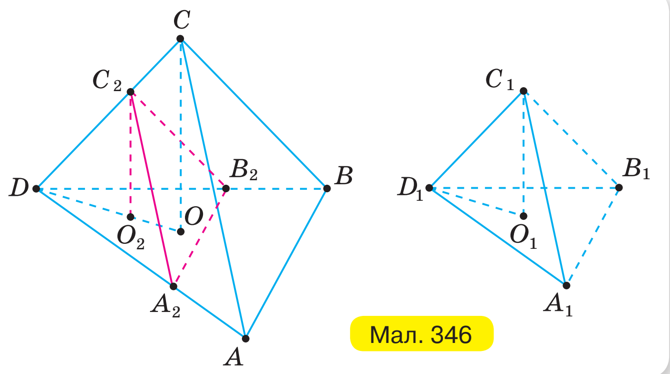
ТЕОРЕМА **(про відношення об'ємів пірамід із рівним тригранним кутом).**

Якщо тригранний кут однієї піраміди дорівнює тригранному куту другої піраміди й відношення довжин їх відповідних ребер дорівнює k_1, k_2 і k_3, то відношення об'ємів пірамід дорівнює $k_1k_2k_3$.

Дано: піраміди $DABC$ і $D_1A_1B_1C_1$, тригранний кут при вершині D дорівнює тригранному куту при вершині D_1, $D_1A_1 = k_1DA$, $D_1B_1 = k_2DB$, $D_1C_1 = k_3DC$.

Довести: $\dfrac{V_{D_1A_1B_1C_1}}{V_{DABC}} = k_1k_2k_3$.

Доведення. На ребрах DA, DB, DC піраміди $DABC$ позначимо точки A_2, B_2, C_2 так, щоб $DA_2 = D_1A_1 = k_1DA$, $DB_2 = D_1B_1 = k_2DB$, $DC_2 = D_1C_1 = k_3DC$ (мал. 346). Піраміди $DA_2B_2C_2$ і $D_1A_1B_1C_1$ — рівні за побудовою. Доведемо спочатку, що відношення об'ємів пірамід $DA_2B_2C_2$ і $DABC$ дорівнює добутку $k_1k_2k_3$.



Мал. 346

Нехай DA_2B_2 і DAB — основи пірамід $DA_2B_2C_2$ і $DABC$. C_2O_2, CO — їх висоти. Тоді

$$\frac{V_{DA_2B_2C_2}}{V_{DABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{DA_2B_2}\cdot C_2O_2}{\frac{1}{3}S_{DAB}\cdot CO} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}DA_2\cdot DB_2\sin\angle A_2DB_2\cdot C_2O_2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}DA\cdot DB\sin\angle ADB\cdot CO} = \frac{DA_2\cdot DB_2\cdot C_2O_2}{DA\cdot DB\cdot CO}.$$

Оскільки $DA_2 = k_1DA$, $DB_2 = k_2DB$, то $\dfrac{V_{DA_2B_2C_2}}{V_{DABC}} = \dfrac{DA_2\cdot DB_2\cdot C_2O_2}{DA\cdot DB\cdot CO} = k_1k_2\dfrac{C_2O_2}{CO}$.

Знайдемо відношення $\dfrac{C_2O_2}{CO}$. Оскільки $CO \perp ABD$, $C_2O_2 \perp ABD$, то трикутники DO_2C_2 і DOC — подібні. $\dfrac{C_2O_2}{CO} = \dfrac{DC_2}{DC} = k_3$. Тоді $\dfrac{V_{DA_2B_2C_2}}{V_{DABC}} = k_1k_2k_3$.

Оскільки об'єми пірамід $DA_2B_2C_2$ і $D_1A_1B_1C_1$ рівні, то $\dfrac{V_{D_1A_1B_1C_1}}{V_{DABC}} = k_1k_2k_3$.

НАСЛІДОК. **Відношення об'ємів подібних пірамід дорівнює кубу коефіцієнта подібності.**

Справді, у подібних пірамід тригранні кути рівні, а коефіцієнт подібності $k = k_1 = k_2 = k_3$. Тоді, за доведеною теоремою, відношення об'ємів подібних пірамід дорівнює k^3.

5. ОБ'ЄМИ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ

Щоб знайти об'єм многогранника, його можна розбити на піраміди. Тоді об'єм многогранника дорівнюватиме сумі об'ємів пірамід, які складають цей многогранник. Так, будь-який правильний многогранник можна скласти з пірамід. Тоді його об'єм можна знайти як суму об'ємів пірамід, що його складають. Для обчислення об'ємів правильних многогранників із ребром a корисними є відповідні формули (табл. 15). Виведіть їх самостійно.

Таблиця 15

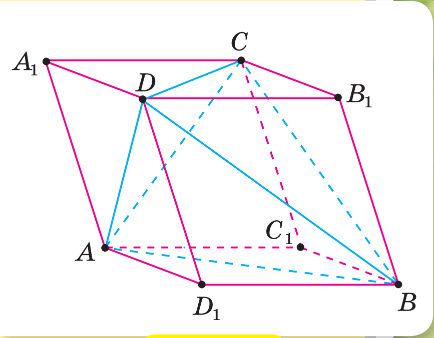
Правильний многогранник	Формула об'єму
Тетраедр	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$V = a^3$
Октаедр	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Додекаедр	$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$
Ікосаедр	$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$

Дізнайтеся більше

1. Під час розв'язування геометричних задач часто доводиться виконувати додаткові побудови. Наприклад, для обчислення об'єму піраміди її можна добудувати до паралелепіпеда.

Задача 4. Доведіть, що об'єм піраміди $ABCD$ можна обчислювати за формулою: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi$, де d — відстань між прямими AB і CD, φ — кут між ними.

Розв'язання. Через кожну пару протилежних ребер піраміди проведемо паралельні площини (мал. 347). Одержимо паралелепіпед $AD_1BC_1A_1DB_1C$. Позначимо його об'єм V_1.



Мал. 347

Тоді $V_1 = V_{AA_1DB} + V_{D_1ADC} + V_{CC_1BD} + V_{CBB_1A} + V_{ABCD}$ (1).

Площі основ пірамід AA_1DB, D_1ADC, CC_1BD, CBB_1A рівні й дорівнюють половині площі основи паралелепіпеда:

$$S_{AA_1D} = S_{D_1AD} = S_{CC_1B} = S_{CBB_1} = \frac{1}{2}S_{AA_1DD_1}.$$

Висоти цих пірамід і паралелепіпеда $AD_1BC_1A_1DB_1C$ — рівні. Тоді $V_{AA_1DB} = V_{D_1ADC} = V_{CC_1BD} = V_{CBB_1A} = \frac{1}{6}V_1$. Підставимо ці вирази в рівність (1):

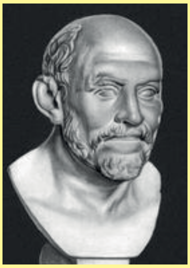
$V_1 = \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{6}V_1 + V_{ABCD}$. Звідси $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_1$. Знайдемо об'єм паралелепіпеда як добуток площі основи C_1CD_1D на висоту d паралелепіпеда, яка проведена до цієї основи:

$V_1 = S_{C_1CD_1B} \cdot d = \frac{1}{2}CD \cdot C_1D_1 \cdot \sin\varphi \cdot d$, де φ — кут між CD і C_1D_1.

Оскільки $C_1D_1 = AB$, то $V_1 = \frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi$.

Тоді $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi\right)$.

Отже, $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi$.



2. Демокріт Абдерський (бл. 460–370 рр. до н. е.) — давньогрецький філософ, який першим встановив, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми, основа й висота якої дорівнюють основі й висоті піраміди.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Об'єм піраміди	Volume of a pyramid	das Volumen der Pyramide

Пригадайте головне

1. Доведіть, що трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами мають рівні об'єми.
2. Доведіть, що об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту.
3. Виведіть формулу для знаходження об'єму зрізаної піраміди.
4. Доведіть теорему про відношення об'ємів пірамід з рівним тригранним кутом.
5. Як відносяться об'єми подібних пірамід?

Розв'яжіть задачі

791'. Основа піраміди з висотою h — квадрат зі стороною a. Укажіть правильний вираз для обчислення об'єму даної призми:

1) $V = \frac{1}{3}a^2h$; 2) $V = 3a^2h$; 3) $V = 3ah$.

792'. Площа основи піраміди S, а висота H. Знайдіть об'єм піраміди, якщо: 1) $S = 60$ см², $H = 2$ см; 2) $S = 33$ см², $H = 3$ см.

793'. Об'єм піраміди V, а площа її основи S. Знайдіть висоту піраміди, якщо:
1) $V = 120$ см³, $S = 40$ см²; 2) $V = 30$ см³, $S = 10$ см².

794'. Площі основ зрізаної піраміди S_1 і S_2, а її висота H. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, якщо:
1) $S_1 = 16$ см², $S_2 = 4$ см², $H = 9$ см; 2) $S_1 = 25$ см², $S_2 = 9$ см², $H = 6$ см.

795'. На ребрах DA, DB, DC трикутної піраміди вибрано точки A_1, B_1, C_1. Знайдіть відношення об'ємів пірамід $DA_1B_1C_1$ і $DABC$, якщо:
1) $DA = 2DA_1$, $DB = 3DB_1$, $DC = DC_1$;
2) $DA = 4DA_1$, $DB = 2DB_1$, $DC = 6DC_1$.

796'. Знайдіть відношення об'ємів подібних пірамід з коефіцієнтом подібності: 1) 2; 2) 0,2; 3) $\frac{1}{3}$.

797°. Ребро основи правильної n-кутної піраміди 4 см, а її висота — 10 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

798°. У правильної чотирикутної піраміди висота H, бічне ребро b. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $H = 3$ см; $b = 5$ см;
2) $H = 8$ см; $b = 10$ см.

799°. Основа піраміди — ромб із діагоналями d_1 і d_2, а висота піраміди — H. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 16$ см, $H = 20$ см;
2) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 10$ см, $H = 12$ см.

800°. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $b = 6$ см, $\alpha = 30°$;
2) $b = 8$ см, $\alpha = 60°$;
3) $b = 12$ см, $\alpha = 45°$.

801°. Висота правильної чотирикутної піраміди 3 см, а двогранний кут при основі — 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

802°. Основа піраміди — трапеція з основами 2 см і 4 см, і висотою 1 см. Висота піраміди — 3 см. Знайдіть об'єм піраміди.

803°. Апофема правильної трикутної піраміди l, а висота — H. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $l = 2$ см, $H = 1$ см; 2) $l = 4$ см, $H = 3$ см.

804°. Знайдіть об’єм тетраедра, усі ребра якого дорівнюють a.

805°. Знайдіть об’єм октаедра, усі ребра якого дорівнюють a.

806°. У правильної зрізаної чотирикутної піраміди ребра основ дорівнюють a, b, а висота H. Знайдіть об’єм зрізаної піраміди, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $H = 3$ см;
2) $a = 1$ см, $b = 5$ см, $H = 12$ см.

807°. Знайдіть об’єм правильної n-кутної зрізаної піраміди, сторони основ якої a, b, а бічне ребро c, якщо:
1) $n = 3$ см, $a = 6$ см, $b = 9$ см, $c = 2$ см;
2) $n = 4$ см, $a = 5$ см, $b = 13$ см, $c = 6$ см.

808°. Знайдіть об’єм правильної n-кутної зрізаної піраміди, сторони основи якої a і b, а двогранний кут при основі α, якщо:
1) $n = 4$, $a = 2$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60°$;
2) $n = 6$, $a = 5$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$.

809°. Знайдіть об’єм правильної n-кутної зрізаної піраміди, сторони основи якої a і b, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α, якщо:
1) $n = 3$, $a = 11$ см, $b = 5$ см, $\alpha = 30°$;
2) $n = 4$, $a = 5$ см, $b = 2$ см, $\alpha = 60°$.

810°. Знайдіть відношення висот подібних пірамід, якщо їх об’єми відносяться, як:
1) 8 : 27; 2) 125 : 1; 3) 64 : 27.

811°. Знайдіть відношення довжин відповідних ребер подібних пірамід, якщо їх об’єми відносяться, як:
1) 3 : 1; 2) 4 : 9; 3) 2 : 25.

812°. На ребрах DA, DB, DC трикутної піраміди позначено точки A_1, B_1, C_1. $DA = 2DA_1$, $DB = 3DB_1$. Знайдіть відношення $DC_1 : DC$, якщо:
1) $V_{DABC} = 12V_{DA_1B_1C_1}$;
2) $V_{DABC} = 8V_{DA_1B_1C_1}$.

813°. У правильної трикутної піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Відстань від середини висоти піраміди до апофеми дорівнює m. Знайдіть об’єм піраміди, якщо:
1) $m = 2$ см, $\alpha = 30°$;
2) $m = 3$ см, $\alpha = 60°$.

814. Основа піраміди — рівнобічна трапеція, основи якої a і b. Кожна бічна грань утворює з основою двогранний кут φ. Знайдіть об’єм піраміди, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 45°$.

815. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом α при основі й радіусом вписаного кола r. Знайдіть об’єм піраміди, якщо всі її бічні грані утворюють із площиною основи кут β.

816. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 17 см, 10 см і 9 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

817. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 20 см, 7 см, 15 см. Кожне бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

818. Ребро основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а її бічні ребра взаємно перпендикулярні. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $a = 12$ см;
2) $a = 6$ см.

819. Бічні ребра трикутної піраміди попарно взаємно перпендикулярні, а площі бічних граней дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайдіть об'єм піраміди.

820. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні й дорівнюють 3 см, 4 см, 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.

821. Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $a = 2$; 2) $a = 4$.

822. У сферу радіуса R вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть об'єм піраміди, якщо бічне ребро утворює з висотою кут α.

823. У сферу радіуса R вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює r.

824. Ребра основ правильної трикутної зрізаної піраміди a і b, двогранний кут при ребрі більшої основи — α. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 1$ см, $\alpha = 60°$;
2) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\alpha = 45°$.

825. У правильної шестикутної зрізаної піраміди ребра основ відносяться, як 1 : 2, а бічне ребро b утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо:
1) $b = 4$ см;
2) $b = 2$ см.

826. Об'єм правильної трикутної піраміди $DABC$ дорівнює V. Площина, яка паралельна медіані AM основи ABC, проходить через середини ребер DA і DB. Знайдіть об'єм отриманої піраміди.

827. У трикутній піраміді $SABC$ на ребрах SB і SC позначено відповідно пари точок M_1, M_2 і P_1, P_2 так, що $SB = 2SM_2 = 3SM_1$, $SP_1 = P_1P_2 = P_2C$. Знайдіть відношення об'ємів пірамід SAM_1P_1 і SAM_2P_2.

828. У трикутній піраміді $SABC$ на ребрах SB і SC позначено відповідно пари точок M_1, M_2 і P_1, P_2 так, що $SB = 3SM_2 = 4SM_1$, $SP_1 = 2P_1P_2 = P_2C$. Знайдіть відношення об'ємів пірамід SAM_1P_1 і SAM_2P_2.

829. $DA_1B_1C_1$ і $DABC$ — правильні подібні піраміди з коефіцієнтом подібності 4. Сторона основи піраміди $DABC$ дорівнює 3, висота піраміди, яку проведено з вершини D, дорівнює 6. Знайдіть об'єм піраміди $DA_1B_1C_1$.

830. Вершини тетраедра є вершинами куба. Знайдіть відношення об'ємів тетраедра та куба.

831. Знайдіть відношення об'єму паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до об'єму піраміди: 1) DA_1AB; 2) D_1ACB_1.

832. Усередині піраміди, усі ребра якої рівні, вибрано деяку точку M. Доведіть, що сума відстаней від точки M до усіх граней піраміди не залежить від вибору точки M.

833. Усі ребра трикутної піраміди дорівнюють a. Знайдіть радіус вписаної в піраміду кулі.

834. Радіус вписаної у піраміду кулі дорівнює r. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, об'єм якої дорівнює V, якщо:
1) $r = 2$ см, $V = 16$ см^3;
2) $r = 1$ см, $V = 18$ см^3.

835*. Через сторону основи й середину висоти правильної чотирикутної піраміди проведено переріз. У якому відношенні переріз ділить об'єм піраміди?

836*. Правильну n-кутну піраміду перетинає площина, яка проходить через її висоту. Чи рівні між собою об'єми утворених частин піраміди? Відповідь поясніть.

837*. Площа бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнює S, а відстань від центра основи до бічної грані — d. Знайдіть об'єм піраміди.

838*. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює m^2, бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

839*. Різниця між апофемою й висотою правильної чотирикутної піраміди дорівнює m, а кут між ними — α. Знайдіть об'єм піраміди.

840*. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо ребро її основи дорівнює a, а двогранний кут між бічними гранями — α.

841*. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює R, а плоский кут при вершині — α.

842*. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник, площа якого дорівнює S, а кут при основі β. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

843*. Основою піраміди є ромб зі стороною a і гострим кутом α. Дві грані піраміди, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи піраміди, а дві інші грані нахилені до основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

844*. У трикутної піраміди площі двох граней дорівнюють S_1 і S_2, їх спільне ребро — b, а двогранний кут між ними — 30°. Знайдіть об'єм піраміди.

845*. На ребрах SA, SB правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ позначено точки A_1, B_1 так, що $SA = 3SA_1$, $2SB_1 = B_1B$. Площина A_1B_1C ділить піраміду на два тіла. Знайдіть відношення їхніх об'ємів.

846*. У трикутній піраміді $SABC$ на ребрі SB вибрано точку M таку, що $SM : MB = 3 : 5$. Через точку A і M паралельно медіані BD трикутника ABC проведено площину. У якому відношенні ця площина ділить об'єм піраміди?

847*. Дві грані піраміди — рівносторонні трикутники із стороною $\sqrt{3}$, а дві інші — рівнобедрені прямокутні трикутники. Знайдіть радіус вписаної сфери.

848*. Усі бічні ребра правильної n-кутної піраміди дорівнюють b, а всі плоскі кути при вершині — α. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

849*. Переріз правильної трикутної піраміди з ребром основи a — квадрат зі стороною b. Знайдіть об'єм піраміди.

850*. У трикутної піраміди усі бічні ребра дорівнюють a. Знайдіть об'єм піраміди, якщо плоскі кути при її вершині дорівнюють 90°, 60°, 60°.

851*. Через сторону основи й середину висоти правильної чотирикутної піраміди проведено переріз. У якому відношенні переріз ділить об'єм піраміди?

852*. У піраміди $DABC$ $BC = AD = a$, $CA = BD = b$, $AB = CD = c$. Знайдіть об'єм піраміди.

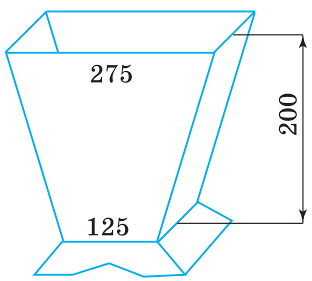
Проявіть компетентність

853. У рожевої піраміди фараона Снофру в Дахшурі в Єгипті кут нахилу стін 43°36′. Її основа має розміри 218,5 × 221,5 м. Висота піраміди дорівнює 104,4 м. Знайдіть об'єм піраміди.

854. Чи вистачить аркуша паперу формату А4, щоб виготовити розгортку правильної чотирикутної піраміди з об'ємом 128 см³, висота якої 6 см?

855. Як за розгорткою правильної піраміди знайти її об'єм?

856. На малюнку 348 зображено бункер, розміри якого подано в сантиметрах. Бункер наповнено зерном. Знайдіть масу зерна, якщо маса одного кубічного метра зерна — 800 кг.



Мал. 348

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Як знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда; куба?
3. Що таке принцип Кавальєрі?
4. За якою формулою обчислюється об'єм призми; похилої призми?
5. За якою формулою обчислюється об'єм піраміди; зрізаної піраміди?
6. Сформулюйте властивість об'ємів подібних пірамід.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі й знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 15 хв.

№ 1

1° Діагональ основи куба дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм куба.

А. 72 см³. **Б.** 36 см³. **В.** 216 см³. **Г.** 108 см³.

2° Основа призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 6 см і кутом при вершині 30°. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 9 см.

А. 162 см³. **Б.** 54 см³. **В.** 81 см³. **Г.** $162\sqrt{3}$ см³.

3° Через середню лінію основи правильної трикутної призми паралельно бічному ребру проведемо площину, яка ділить призму на дві частини. Знайдіть відношення їх об'ємів.

А. 1 : 3. **Б.** 1 : 4. **В.** 3 : 4. **Г.** 1 : 6.

4 Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 8 см. Дві сторони перерізу призми, що перпендикулярний до бічного ребра, дорівнюють 4 см і 6 см. Двогранний кут між бічними гранями дорівнює 30°. Знайдіть об'єм призми.

А. 48 см³. **Б.** 40 см³. **В.** 96 см³. **Г.** $96\sqrt{3}$ см³.

5* Основа прямої призми — трапеція, периметр якої 58 см. Площі паралельних бічних граней — 96 см² і 264 см², а площі інших бічних граней — 156 см² і 180 см². Знайдіть об'єм призми.

А. 1392 см³. **Б.** 2784 см³. **В.** 2160 см³. **Г.** 696 см³.

№ 2

1° Основа піраміди — ромб із діагоналями 6 см і 8 см, а її висота дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

А. 120 см³. **Б.** 48 см³. **В.** 80 см³. **Г.** 240 см³.

2° Знайдіть відношення апофем подібних пірамід, якщо їхні об'єми в дносяться, як 16 : 125.

А. 4 : 5. **Б.** 2 : 5. **В.** 4 : 25. **Г.** 8 : 25.

3° Ребра основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди 2 см і 6 см, двогранний кут при ребрі меншої основи дорівнює 120°. Знайдіть об'єм піраміди.

А. $56\sqrt{3}$ см³. **Б.** $28\sqrt{3}$ см³. **В.** 84 см³. **Г.** 28 см³.

4 Основою піраміди є прямокутний рівнобедрений трикутник з гіпотенузою 12 см. Дві грані піраміди, які містять катети цього трикутника, перпендикулярні до основи піраміди, а третя грань нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

А. 72 см³. **Б.** 216 см³. **В.** $216\sqrt{2}$ см³. **Г.** 96 см³.

5* Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої площа бічної поверхні $135\sqrt{3}$ см², а площа повної поверхні — $216\sqrt{3}$ см².

А. 324 см³. **Б.** $81\sqrt{3}$ см³. **В.** 972 см³. **Г.** 1080 см³.

Розділ 4

Об’єми та площі поверхонь тіл обертання

У розділі дізнаєтесь:

- як виводити формули об'ємів тіл обертання (циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі);
- як одержати формули для знаходження площ поверхонь тіл обертання;
- як застосовувати формули об'ємів і площ поверхонь на практиці та під час розв'язування задач

§ 16. ОБ'ЄМИ ЦИЛІНДРА І КОНУСА

Ви вже знаєте, як обчислити об'єм призми та піраміди. Виведемо формули для обчислення об'ємів циліндра та конуса.

1. ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА

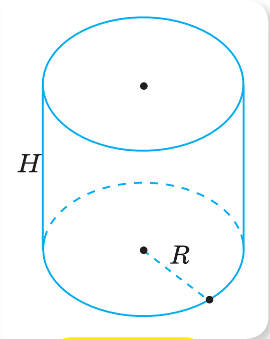
З курсу алгебри й початків аналізу ви вже знаєте, як знаходити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної на проміжку $[a;b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $y=0, x=a, x=b$. Для цього використовують формулу $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Застосуємо цю формулу для виведення формул об'ємів циліндра й конуса.

ТЕОРЕМА **(про об'єм циліндра).**

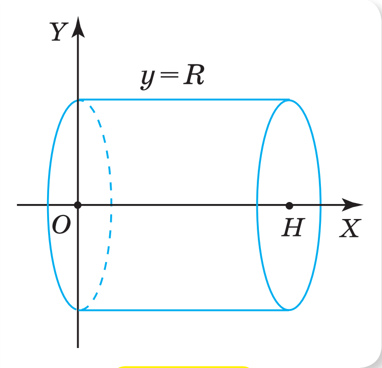
Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.

Дано: циліндр, R — радіус основи, H — висота (мал. 349).
Довести: $V=\pi R^2 H$.
Доведення. Циліндр із висотою H і радіусом основи R можна отримати в результаті обертання навколо осі OX прямокутника, обмеженого прямими $y=R, x=0, x=H, y=0$ (мал. 350). Тоді об'єм даного циліндра дорівнює:

$$V=\pi\int_0^H R^2 dx=\pi R^2 x\Big|_0^H=\pi R^2 H.$$



Мал. 349



Мал. 350

Отже, об'єм циліндра обчислюється за формулою $V=\pi R^2 H$.

2. ОБ'ЄМ КОНУСА

ТЕОРЕМА **(про об'єм конуса).**

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту.

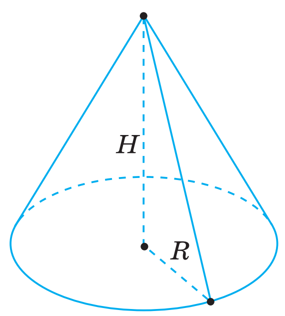
Дано: конус, R — радіус основи, H — висота (мал. 351).

Довести: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

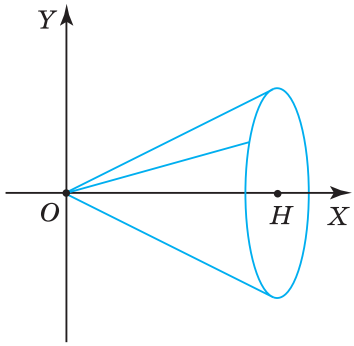
Доведення. Конус із висотою H і радіусом основи R можна отримати в результаті обертання навколо осі OX трикутника, обмеженого прямими $y=\frac{R}{H}x, x=H, y=0$ (мал. 352). Тоді об'єм даного циліндра дорівнює:

$$V=\pi\int_0^H \frac{R^2}{H^2}x^2dx=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2}x^3\Big|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Отже, об'єм конуса обчислюється за формулою $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.



Мал. 351

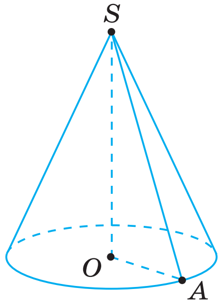


Мал. 352

Задача. Твірна конуса дорівнює 5 см, а довжина кола основи 6π см. Знайдіть об'єм конуса.

Розв'язання. Знайдемо радіус основи конуса: $2\pi R=6\pi$, звідки $R=3$ см. Із прямокутного трикутника AOS (мал. 353) дістанемо:

$H=SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ (см). Тоді $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 4=12\pi$ (см³).



Мал. 353

3. ВІДНОШЕННЯ ОБ'ЄМІВ ПОДІБНИХ ЦИЛІНДРІВ І КОНУСІВ

ТЕОРЕМА

(про відношення об'ємів подібних циліндрів).

Відношення об'ємів подібних циліндрів дорівнює кубу їх коефіцієнта подібності.

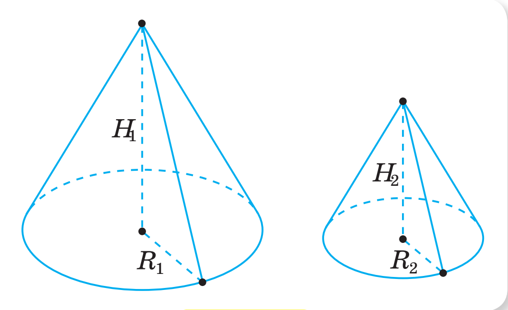
Дано: циліндри F_1 і F_2, $F_1 \sim F_2$ з коефіцієнтом подібності k, H_1 і H_2 — висоти циліндрів, R_1 і R_2 — радіуси основ (мал. 354).

Довести: $\dfrac{V_1}{V_2} = k^3$.

Доведення. Якщо циліндри подібні з коефіцієнтом подібності k, то $\dfrac{R_1}{R_2} = k$ і $\dfrac{H_1}{H_2} = k$.

Знаходимо відношення об'ємів:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1H_1}{S_2H_2} = \frac{\pi R_1^2 H_1}{\pi R_2^2 H_2} = k^2 \cdot k = k^3.$$



Мал. 354

ТЕОРЕМА

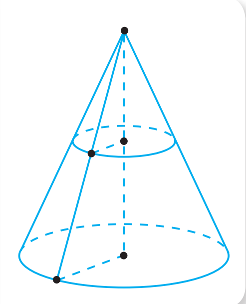
(про відношення об'ємів подібних конусів).

Відношення об'ємів подібних конусів дорівнює кубу їх коефіцієнта подібності.

Доведіть цей факт самостійно.

Задача. Через середину висоти конуса проведено площину, паралельну основі. У якому відношенні висота ділить об'єм конуса?

Розв'язання. Якщо січна площина паралельна основі конуса, то вона відтинає конус, подібний даному (мал. 355). Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню висот, тобто $\dfrac{1}{2}$. Тоді об'єми конусів відносяться, як $\dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$. Отже, січна площина ділить даний конус на частини, об'єми яких відносяться, як $\dfrac{V_1}{V_2} == \dfrac{\frac{1}{8}V}{\left(1-\frac{1}{8}\right)V} = \dfrac{1}{7}$.


Мал. 355

4. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

ТЕОРЕМА **(про об'єм зрізаного конуса).**

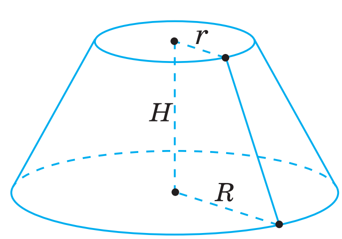
Об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою: $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, де r і R — радіуси основ, H — висота зрізаного конуса.

Дано: зрізаний конус, r і R — радіуси основ, H — висота (мал. 356).

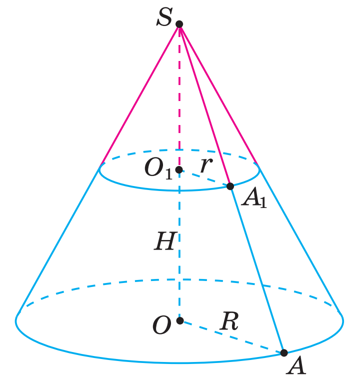
Довести: $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Доведення. Доповнимо зрізаний конус до повного (мал. 357). Трикутники SO_1A_1 і SOA — подібні, тому $\frac{SO_1}{r} = \frac{H + SO_1}{R}$, $SO_1 = \frac{rH}{R - r}$. Знайдемо об'єм зрізаного конуса як різницю об'ємів повного конуса та конуса, що доповнює зрізаний конус до повного: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{rH}{R-r}$.

Звідси дістанемо: $V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.



Мал. 356



Мал. 357

Дізнайтеся більше

Відомий швейцарський математик **Пауль Гульдін** (1577–1643) написав роботу про центри мас тіл, у якій також розглядаються питання про поверхні та об'єми тіл. З його ім'ям пов'язаний ряд теорем для знаходження об'ємів тіл обертання.

Теорема Гульдіна — Паппа про об'єм тіла обертання. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, що лежить по один бік від осі обертання, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, яку описує центр мас даної фігури при цьому обертанні.

Задача. Доведіть, що об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.

Розв'язання. Нехай циліндр отримано обертання прямокутника $ABCD$ навколо сторони AB. Відрізок AD є радіусом циліндра, а відрізок AB визначає його висоту: $AB = H$, $AD = R$. Тоді площа даного прямокутника дорівнює $H \cdot R$, а радіус кола, яке описує центр мас прямокутника, дорівнює половині сторони AD. $r = \frac{R}{2}$.

За теоремою Гульдіна — Паппа, об'єм циліндра дорівнюватиме $V = HR \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2 H$.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Об'єм циліндра	Volume of a cylinder	Volumen des Zylinders

Пригадайте головне

1. Що таке об'єм циліндра?
2. Доведіть, що об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.
3. Що таке об'єм конуса?
4. Доведіть, що об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту.
5. Сформулюйте й доведіть теорему про відношення об'ємів подібних циліндрів.
6. Сформулюйте й доведіть теорему про відношення об'ємів подібних конусів.
8. Як знайти об'єм зрізаного конуса?

Розв'яжіть задачі

857'. Радіус основи циліндра R, висота H. Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
1) $R = 4$ см, $H = 3$ см; 2) $R = 5$ см, $H = 2$ см; 3) $R = 6$ см, $H = 5$ см.

858'. Висота циліндра H, радіус основи R, об'єм V. Накресліть у зошиті таблицю 16 та заповніть її.

Таблиця 16

R	3 см	4 см	
H	5 см		4 см
V		$6{,}4\pi$ см^3	100π см^3

859'. Радіус основи конуса R, висота H. Знайдіть об'єм конуса, якщо:
1) $R = 12$ см, $H = 5$ см; 2) $R = 24$ см, $H = 4$ см; 3) $R = 18$ см, $H = 6$ см.

860°. Висота конуса H, радіус основи R, об'єм V. Накресліть у зошиті таблицю 17 та заповніть її.

Таблиця 17

R	1 см		4 см
H	3 см	2 см	
V		18π см^3	64π см^3

861°. Знайдіть об'єм тіла, яке утворюється обертанням квадрата навколо сторони a, якщо: 1) $a = 2$ см; 2) $a = 3$ см; 3) $a = 4$ см.

862°. Знайдіть об'єм тіла, яке утворюється обертанням прямокутника $ABCD$ зі сторонами $AB = 6$ см і $BC = 8$ см навколо: 1) AB; 2) BC.

863°. Осьовий переріз циліндра — прямокутник зі сторонами 5 см і 10 см. Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

864°. Осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною a. Знайдіть об'єм циліндра, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см.

865°. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d, а висота циліндра — H. Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
1) $d = 10$ см, $H = 6$ см;
2) $d = 5$ см, $H = 4$ см;
3) $d = 13$ см, $H = 5$ см.

866°. Довжина кола основи циліндра 12π см, а його висота — 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

867°. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d й утворює з площиною його основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
1) $d = 4$ см, $\alpha = 60°$;
2) $d = 8$ см, $\alpha = 30°$.

868°. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра.

869°. Площа основи циліндра дорівнює 4π см^2, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм циліндра.

870°. Об'єм циліндра V, а площа його основи S. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо:
1) $V = 32\pi$ см^3; $S = 4\pi$ см^2;
2) $V = 64\pi$ см^3; $S = 16\pi$ см^2.

871°. Знайдіть об'єм конуса, якщо:
1) твірна 14 см, висота 10 см;
2) висота 2,4 дм, радіус основи 15 см.

872°. Знайдіть об'єм тіла, яке утворюється обертанням прямокутного рівнобедреного трикутника навколо катета, довжина якого 4 см.

873°. Знайдіть об'єм тіла, яке утворюється обертанням прямокутного рівнобедреного трикутника навколо катета, якщо гіпотенуза цього трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см.

874°. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони, довжина якої 4 см. Знайдіть об'єм утвореного тіла обертання.

875°. Твірна конуса дорівнює l й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм конуса, якщо:
1) $l = 12$ см, $\alpha = 30°$;
2) $l = 6$ см, $\alpha = 60°$;
3) $l = 18$ см, $\alpha = 45°$.

876°. Радіус основи конуса 1 см, а твірна утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм конуса.

877°. Діаметр основи конуса D, а кут при вершині осьового перерізу — α. Знайдіть об'єм конуса, якщо:
1) $D = 2$ см, $\alpha = 120°$;
2) $D = 4$ см, $\alpha = 60°$.

878°. Довжина кола основи конуса C, твірна l. Знайдіть об'єм конуса.

879°. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого 9 см^2. Знайдіть об'єм конуса.

880°. Об'єм конуса V, а радіус основи R. Знайдіть площу осьового перерізу, якщо:
1) $V = 120\pi$ см^3, $R = 2$ см;
2) $V = 40\pi$ см^3, $R = 10$ см;
3) $V = 60\pi$ см^3, $R = 12$ см.

881°. Радіуси основ зрізаного конуса 6 см і 2 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо твірна утворює з площиною основи кут: 1) 30°; 2) 60°.

882°. Радіуси основ зрізаного конуса 12 см і 8 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо твірна утворює з площиною основи кут 45°.

883°. Радіуси основ зрізаного конуса 9 см і 3 см, а твірна 10 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

884°. Радіуси основ зрізаного конуса 8 см і 4 см, а твірна 5 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

885°. Радіуси основ зрізаного конуса 5 см і 3 см, а його об'єм — 98π см^3. Знайдіть висоту зрізаного конуса.

886. У циліндр вписана правильна трикутна призма, об'єм якої дорівнює V. Знайдіть об'єм циліндра, якщо: 1) $V = 3\sqrt{3}$ см^3; 2) $V = 27$ см^3.

887. У циліндр вписана правильна чотирикутна призма, об'єм якої дорівнює 36 см^3. Знайдіть об'єм циліндра.

888. Циліндр вписано у правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a. Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
1) $a = 4$ см;
2) $a = 6$ см.

889. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, — квадрат зі стороною a, який відтинає від кола основи дугу 90°. Знайдіть об'єм циліндра, якщо: 1) $a = 2$ см; 2) $a = 8$ см.

890. Хорда нижньої основи циліндра радіуса R стягує дугу α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм циліндра, якщо:
1) $R = 2$ см, $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$;
2) $R = 4$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

891. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, відтинає від кола основи хорду, яка стягує дугу α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Площа основи циліндра S. Знайдіть об'єм циліндра.

892. Об'єм циліндра V, а площа його основи S. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

893. У правильну трикутну піраміду вписано конус і навколо неї описано конус. Знайдіть відношення об'ємів цих конусів.

894. У правильну чотирикутну піраміду вписано конус і навколо неї описано конус. Знайдіть відношення об'ємів цих конусів.

895. Площа осьового перерізу конуса S, а об'єм V. Знайдіть:
1) радіус основи конуса;
2) висоту конуса.

896. Площа осьового перерізу конуса 81 см^2, а твірна утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм конуса.

897. Площа основи конуса S, а площа осьового перерізу Q. Знайдіть об'єм конуса, якщо:
1) $Q = 21$ см^2, $S = 16\pi$ см^2;
2) $Q = 27$ см^2, $S = 25\pi$ см^2.

898. Кут між твірною і висотою конуса 30°, а хорда його основи дорівнює 2 см і стягує дугу 60°. Знайдіть об'єм конуса.

899. Площина, проведена через вершину конуса під кутом 30° до його основи, перетинає основу по хорді, яка стягує дугу 60°. Відстань від вершини конуса до хорди дорівнює 3 см. Знайдіть об'єм конуса.

900. Площина, проведена через вершину конуса під кутом 60° до його основи, перетинає основу по хорді, яка стягує дугу 120°. Відстань від вершини конуса до хорди дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм конуса. Площа осьового перерізу зрізаного конуса дорівнює різниці площ основ, а радіуси основ дорівнюють R і r ($R > r$). Знайдіть об'єм зрізаного циліндра.

901. Площа осьового перерізу зрізаного конуса дорівнює різниці площ основ, а радіуси основ дорівнюють 4 см і 1 см. Знайдіть об'єм зрізаного циліндра.

902. Висота зрізаного конуса H. Радіус однієї основи удвічі більший за радіус другої, а твірна утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо: 1) $H = 1$ см; 2) $H = 3$ см.

903. Радіуси зрізаного конуса R і r ($R > r$). Знайдіть відношення об'єму зрізаного конуса до конуса, частиною якого є даний зрізаний конус.

904*. Кут між діагоналлю прямокутника й однією з його сторін дорівнює α. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів, утворених обертанням прямокутника навколо кожної з його суміжних сторін.

905*. Прямокутний трикутник з катетами a і b обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

906*. Рівнобедрений трикутник з бічною стороною b й кутом α при вершині обертається навколо бічної сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

907*. Об'єм конуса V. Через точки, що ділять висоту на три рівні частини, проведено площини, паралельні основі. Знайдіть об'єм отриманих частин.

908*. Через вершину конуса під кутом φ до основи проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Відстань від центра основи до січної площини дорівнює a. Знайдіть об'єм конуса.

909*. Круг радіуса R є спільною основою двох конусів, побудованих по один бік від площини основи. Твірна одного з цих конусів утворює з площиною основи кут α, а твірна другого — кут β. Знайдіть об'єм тіла, яке розміщується між бічними поверхнями конусів.

910*. На одній основі розміщено два конуси (один усередині другого). Кут між висотою і твірною меншого конуса α, а кут між висотою і твірною більшого конуса — β. Різниця висот конусів дорівнює h. Знайдіть об'єм тіла, яке розміщується між бічними поверхнями конусів.

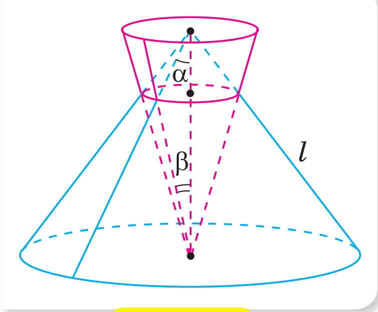
911*. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм конуса.

912*. Ромб зі стороною a і гострим кутом α обертається навколо осі, проведеної через вершину гострого кута перпендикулярно до сторони ромба. Знайдіть об'єм тіла обертання.

913*. Ромб із більшою діагоналлю d й гострим кутом α обертається навколо осі, що проходить через вершину ромба перпендикулярно до більшої його діагоналі. Знайдіть об'єм тіла обертання.

914*. У зрізаний конус вписано кулю радіуса R. Його твірна утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

915*. Два конуса мають спільну висоту, але їх вершини розміщуються в різних кінцях висоти (мал. 358). Твірна одного конуса дорівнює l, а кут при вершині його осьового перерізу — 2α. Кут при вершині осьового перерізу іншого конуса дорівнює 2β. Знайдіть об'єм спільної частини конусів.



Мал. 358

916*. У трапеції одна з бічних сторін дорівнює b й утворює кут α з більшою основою, яка дорівнює $2a$. Менша основа трапеції дорівнює a. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції навколо даної бічної сторони.

Проявіть компетентність

917. Стіг сіна має форму циліндра з конічним верхом. Радіус його основи 2,5 м, висота 4 м. Висота циліндричної частини стогу — 2,2 м. Знайдіть масу стогу сіна, якщо густина сіна — 0,03 г/см³.

918. З жерсті вирізали сектор радіуса 20 см із центральним кутом 250° і згорнули його в конус. Знайдіть об'єм отриманого конуса.

919. Купа щебеню має конічну форму, діаметр основи якої 8 м, а твірна — 5 м. Знайдіть об'єм купи щебеню.

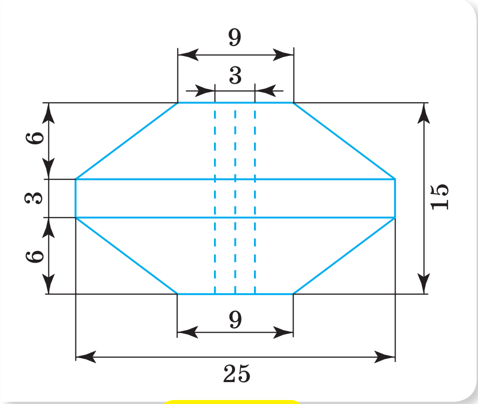
920. Свинцева труба (густина свинцю 11,4 г/см³) з товщиною стінок 4 мм має внутрішній діаметр 13 мм. Яка маса 25 м цієї труби?

921. Знайдіть місткість (у літрах) бідона, якщо діаметр його основи 24 см, висота циліндричної частини 28 см, а конічна частина — 15 см.

922. Одна кружка у два рази нижча від другої, зате в півтора рази ширша. Яка з двох кружок має більшу місткість?

923. Як за допомогою однієї лише лінійки з поділками визначити повну місткість круглої пляшки, яка частково наповнена рідиною?

924. Визначте масу стального шліфувального круга (густина сталі — 7,8 г/см³), розміри осьового перерізу якого (у сантиметрах) дано на малюнку 359.



Мал. 359

§ 17. ПЛОЩІ БІЧНОЇ І ПОВНОЇ ПОВЕРХОНЬ ЦИЛІНДРА Й КОНУСА

Ви вже знаєте, як знаходити площі поверхонь призми та піраміди. Виведемо формули для обчислення площ поверхонь циліндра й конуса.

1. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ЦИЛІНДРА

ТЕОРЕМА **(про площу бічної поверхні циліндра).**

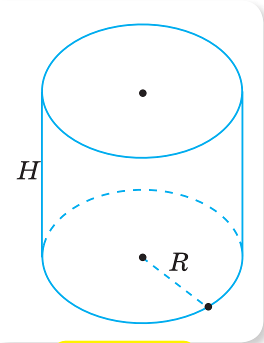
Площа бічної поверхні циліндра дорівнює добутку довжини кола основи на висоту.

Дано: циліндр, R — радіус основи, H — висота (мал. 360).
Довести: $S_{бп} = CH = 2\pi RH$.
Доведення. Розгорткою бічної поверхні циліндра з висотою H й радіусом основи R є прямокутник зі сторонами H і $2\pi R$ (мал. 361). Тому площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі цієї розгортки, тобто площі прямокутника зі сторонами H і $2\pi R$. Звідси $S_{бп} = 2\pi RH$. Ураховуючи, що довжина кола основи циліндра $C = 2\pi R$, одержуємо: $S_{бп} = CH$.
Отже, площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою:

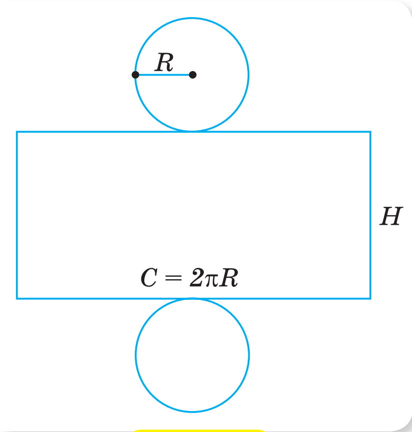
$$S_{бп} = 2\pi RH.$$

Щоб одержати *площу повної поверхні циліндра*, достатньо додати до площі його бічної поверхні суму площ двох його основ. Тоді площа повної поверхні циліндра обчислюється за формулою:

$$S_{пп} = 2\pi RH + 2\pi R2 = 2\pi R\,(R + H).$$



Мал. 360



Мал. 361

Задача. Об'єми двох подібних циліндрів відносяться, як 64 : 125. Як відносяться площі повних поверхонь цих циліндрів?

Розв'язання. Відношення об'ємів подібних циліндрів дорівнює кубу їх коефіцієнта подібності. Звідси $\frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{4}{5}$ і $\frac{R_1 + H_1}{R_2 + H_2} = \frac{4}{5}$.

Знаходимо відношення площ повних поверхонь циліндрів:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R_1 (R_1 + H_1)}{2\pi R_2 (R_2 + H_2)} = \frac{16}{25}.$$

Відношення площ поверхонь (бічних чи повних) подібних циліндрів дорівнює квадрату їх коефіцієнта подібності.

2. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ КОНУСА

ТЕОРЕМА

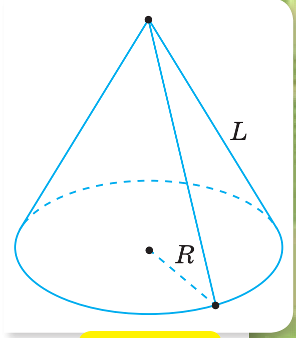
(про площу бічної поверхні конуса).

Площа бічної поверхні конуса дорівнює добутку довжини кола основи на половину твірної.

Дано: конус, R — радіус основи, L — твірна (мал. 362).

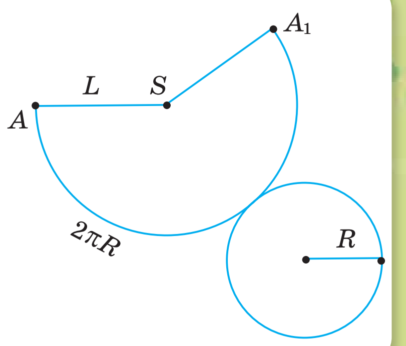
Довести: $S_{бп} = \frac{1}{2}CL = \pi RL$.

Доведення. Розгорткою бічної поверхні конуса з твірною L і радіусом основи R є сектор, радіус якого дорівнює L, а кут — α (мал. 363). Довжину дуги сектора можна обчислити двома способами: $l_{дуги} = \frac{\pi L\alpha}{180^\circ}$ і $l_{дуги} = 2\pi R$. Тоді $\frac{\pi L}{180^\circ} \cdot \alpha = 2\pi R$, звідси $\alpha = \frac{360^\circ R}{L}$.



Мал. 362

Площа бічної поверхні конуса дорівнює площі розгортки цієї поверхні, тобто площі сектора: $S_{бп} = \frac{\pi L^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi L^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ R}{L} = \pi RL$. Ураховуючи, що довжина кола основи конуса $C = 2\pi R$, одержуємо: $S_{бп} = \frac{1}{2}CL$.



Мал. 363

Отже, площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою:

$$S_{бп} = \pi RL.$$

Площу повної поверхні конуса одержимо, якщо до площі його бічної поверхні додамо площу його основи. Матимемо формулу:

$$S_{пп} = \pi RL + \pi R2 = \pi R(R + L).$$

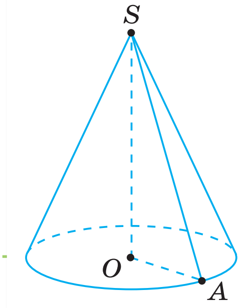
Задача. Діаметр основи конуса 10 см, висота — 12 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

Розв'язання. Радіус основи конуса: $R = \frac{10}{2} = 5$ (см).

Із прямокутного трикутника AOS (мал. 364) знаходимо твірну конуса:

$$L = AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

Тоді $S_{пп} = \pi R(R + L) = \pi \cdot (5 + 13) = 90\pi$ (см^2).



Мал. 364

Відношення площ поверхонь (бічних чи повних) подібних конусів дорівнює квадрату їх коефіцієнта подібності.

3. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

ТЕОРЕМА

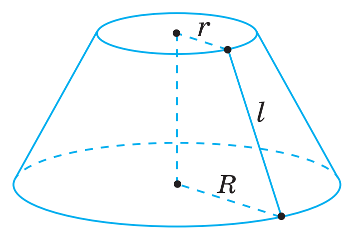
(про площу бічної поверхні зрізаного конуса).

Площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює $\pi l(r+R)$, де r і R — радіуси основ, l — твірна.

Дано: зрізаний конус, r і R — радіуси основ, l — твірна (мал. 365).

Довести: $S_{бп} = \pi l(r+R)$.

Доведення. Доповнимо зрізаний конус до повного (мал. 366). Трикутники SO_1A_1 і SOA — подібні, тому $\frac{SA_1}{r} = \frac{l + SA_1}{R}$. Звідси $SA_1 = \frac{rl}{R-r}$. $SA = \frac{rl}{R-r} + l$.



Мал. 365

Знайдемо площу бічної поверхні зрізаного конуса:

$$S_{бп} = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SA_1 = \quad R \qquad l$$

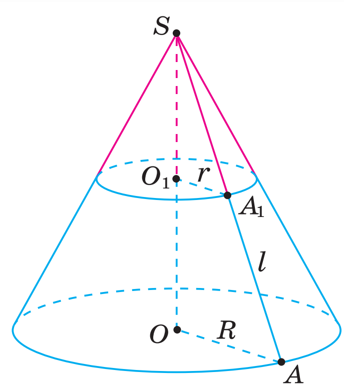
$$= \pi R\left(\frac{rl}{R-r} + l\right) - \pi r \cdot \frac{rl}{R-r} = \pi l(r+R).$$

Отже, площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою:

$$S_{бп} = \pi l(r+R).$$

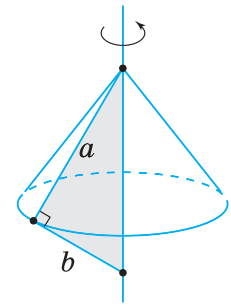
Площу повної поверхні зрізаного конуса отримаємо, якщо до площі його бічної поверхні додамо площі його основ. Одержимо формулу:

$$S_{пп} = \pi l(r+R) + \pi\left(R^2 + r^2\right).$$



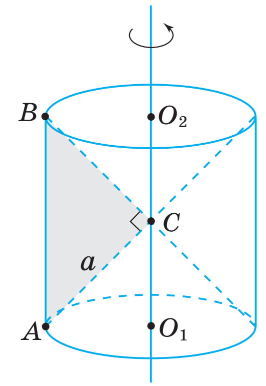
Мал. 366

Інколи внаслідок обертання плоских фігур отримують тіла обертання, бічна поверхня яких складається з кількох різних поверхонь. Наприклад, при обертанні прямокутного трикутника з катетами a і b навколо гіпотенузи (мал. 367) утворюється тіло, поверхня якого складається з бічних поверхонь двох конусів. У такому випадку для знаходження площі утвореної поверхні необхідно додати площі бічних поверхонь цих конусів.



Мал. 367

Задача. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC із катетом a і $\angle C = 90°$ обертається навколо прямої, що проходить через вершину C і паралельна AB (мал. 368). Знайдіть площу поверхні утвореного тіла.



Мал. 368

Розв'язання. Унаслідок обертання трикутника одержано тіло, поверхня якого складається з бічної поверхні циліндра та двох бічних поверхонь рівних конусів. У прямокутному трикутнику ABC: $AC = CB = a$, $AB = a\sqrt{2}$. У прямокутному трикутнику AO_1C: $O_1A = O_1C = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Бічна поверхня циліндра дорівнює:

$$S_1 = 2\pi R \cdot H = 2\pi \cdot O_1A \cdot AB = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot a\sqrt{2} = 2\pi a^2.$$

Бічна поверхня конуса дорівнює:

$$S_2 = \pi R \cdot L = \pi \cdot O_1A \cdot AC = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, можемо обчислити площу поверхні тіла обертання:

$$S = S_1 + 2S_2 = 2\pi a^2 + 2 \cdot \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} = \pi a^2(2+\sqrt{2}).$$

Якщо тіло обертання має поверхню, що складається з кількох поверхонь, то для знаходження площі такої поверхні окремо знаходять площу поверхні кожної з її частин, а потім знайдені площі додають.

Дізнайтеся більше

Видатний математик **Георгій Феодосійович Вороний** (1868–1908) народився в містечку Журавка Пирятинського повіту Полтавської губернії (нині село Варвинського р-ну Чернігівської обл.) в родині відомого освітянського діяча, професора Ф. Вороного. У 1885 р. закінчив Прилуцьку гімназію, вступив до Санкт-Петербурзького університету. У 1897 р. захистив докторську дисертацію; у 1907 р. обраний членом-кореспондентом Петербурзької академії наук. Помер у Варшаві; згідно із заповітом, похований у Журавці.

Найвизначнішими є дві останні монографії вченого (1908–1909), які поряд із розробками Г. Мінковського, заклали основу нової галузі математики — геометрії чисел. Побудовані вченим математичні об'єкти — діаграми Вороного — у наші дні широко використовують у багатьох галузях науки, зокрема в комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, конструюванні роботів, медицині, радіаційній фізиці, астрофізиці, кристалографії, археології тощо.

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Площа поверхні циліндра (конуса)	Surface area of a cylinder (cone)	der Bereich der Oberfläche des Zylinders (Kegel)

Пригадайте головне

1. Доведіть, що площа бічної поверхні циліндра дорівнює добутку довжини кола основи на висоту.
2. Чому дорівнює площа повної поверхні циліндра?
3. Доведіть, що площа бічної поверхні конуса дорівнює добутку довжини кола основи на половину твірної.
4. Чому дорівнює площа повної поверхні конуса?
5. Чому дорівнює площа бічної поверхні зрізаного конуса; площа повної поверхні зрізаного конуса?

Розв'яжіть задачі

925'. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо $R = H = 2$ см.

926'. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо $S_{бп} = 6\pi$ см^2, $S_{осн} = 4\pi$ см^2.

927'. Розгорткою циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

928'. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо $R = H = 1$ см.

929'. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо $S_{бп} = 12\pi$ см^2, $S_{осн} = 3\pi$ см^2.

930'. Розгорткою конуса є сектор з кутом $60°$ радіуса 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

931'. Чому дорівнює площа бічної поверхні зрізаного конуса, у якого радіуси основ дорівнюють 2 см і 4 см, а твірна — 3 см?

932°. Довжина кола основи циліндра дорівнює C, висота H. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо:
1) $C = 4\pi$ см, $H = 3$ см; 2) $C = 8\pi$ см, $H = 4$ см.

933°. Радіус основи циліндра R, висота H. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо: 1) $R = 4$ см, $H = 6$ см; 2) $R = 5$ см, $H = 12$ см.

934°. Висота циліндра H, радіус основи R, площі бічної і повної поверхонь $S_{бп}$ і $S_{пп}$ відповідно. Накресліть у зошиті таблицю 18 та заповніть її.

Таблиця 18

H	5 см			0,5 см
R	2 см		5 см	
$S_{бп}$		6π см^2	20π см^2	
$S_{пп}$		24π см^2		36π см^2

935°. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі стороною 8 см і діагоналлю 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

936°. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі стороною 12 см і діагоналлю 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

937°. Знайдіть площу бічної поверхні тіла, яке утворюється обертанням квадрата навколо його сторони завдовжки 10 см.

938°. Знайдіть площу бічної поверхні тіла, яке утворюється обертанням прямокутника $ABCD$ зі сторонами $AB = 3$ см і $BC = 4$ см навколо сторони: 1) AB; 2) BC.

939°. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 24 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 6 см.

940°. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{2}$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

941°. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см й утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

942°. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d, а висота циліндра — H. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо:
1) $d = 10$ см, $H = 6$ см; 2) $d = 5$ см, $H = 4$ см.

943°. Довжина кола основи циліндра дорівнює C, а його висота — H. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

944°. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

945°. Радіус основи циліндра R, а площа бічної поверхні дорівнює сумі площ основ. Знайдіть висоту циліндра.

946°. Діагоналі осьових перерізів подібних циліндрів відносяться, як 3 : 6. Як відносяться площі повних поверхонь циліндрів?

947°. Довжина кола основи конуса дорівнює C, висота H. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо:
1) $C = 15\pi$ см, $H = 4$ см; 2) $C = 9\pi$ см, $H = 10$ см.

948°. Радіус основи конуса 16 см, висота 3 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

949°. Висота конуса H, твірна l, радіус основи R, $S_{бп}$ і $S_{пп}$ — площі бічної та повної поверхонь відповідно. Накресліть у зошиті таблицю 19 та заповніть її.

Таблиця 19

R	3 см	8 см		
l			13 см	
H	4 см			
$S_{бп}$		60π см^2	26π см^2	8π см^2
$S_{пп}$				12π см^2

950°. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює a. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо: 1) $a = 6\sqrt{3}$ см; 2) $a = 12\sqrt{3}$ см; 3) $a = \sqrt{3}$ см.

951°. Твірна конуса дорівнює l й утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо:
1) $l = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
2) $l = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$;
3) $l = 6\sqrt{3}$ см, $\alpha = 30°$.

952°. Діаметр основи конуса D, а кут при вершині осьового перерізу — α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо:
1) $D = 12$ см, $\alpha = 120°$; 2) $D = 4$ см, $\alpha = 60°$; 3) $D = 18\sqrt{2}$ см, $\alpha = 90°$.

953°. Знайдіть площу повної поверхні тіла, яке утворюється обертанням прямокутного рівнобедреного трикутника навколо катета, довжина якого — 8 см.

954°. Знайдіть площу повної поверхні тіла, яке утворюється обертанням прямокутного рівнобедреного трикутника навколо катета, якщо гіпотенуза цього трикутника дорівнює $\sqrt{2}$ см.

955°. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони завдовжки 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного тіла обертання.

956°. Розгорткою конуса є сектор з кутом 90° і радіусом 6 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

957°. Розгорткою конуса є сектор з кутом 120° і радіусом 8 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

958°. Твірна конуса завдовжки 6 см утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

959°. Твірна конуса завдовжки 10 см утворює з його висотою кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

960°. Периметри осьових перерізів подібних конусів відносяться, як 5 : 7. Як відносяться площі повних поверхонь конусів?

961°. Твірна зрізаного конуса l, r і R — радіуси його основ, $S_{бп}$ і $S_{пп}$ — площі бічної і повної поверхонь відповідно. Накресліть у зошиті таблицю 20 та заповніть її.

Таблиця 20

r	2 см	1 см		5 см
R	4 см	11 см	2 см	
l	6 см		10 см	8 см
$S_{бп}$		120π см^2	50π см^2	56π см^2
$S_{пп}$				

962°. Твірна конуса завдовжки 16 см утворює з площиною основи кут 45°, а радіус верхньої основи дорівнює 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

963°. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 30°, а радіуси її основ дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

964. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник з діагоналлю 13 см. Висота циліндра — 5 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

965. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, — квадрат зі стороною a, який відтинає від кола основи дугу 60°. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 8$ см.

966. Хорду нижньої основи видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо радіус основи — R.

967. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α, а із центра верхньої основи — під кутом β. Радіус основи циліндра R. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо: 1) $R = 8$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$; 2) $R = 4$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$.

968. У циліндр вписано правильну трикутну призму з висотою H, об'єм якої дорівнює V. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо:
1) $H = 4$ см, $V = 12\sqrt{3}$ см^3;
2) $H = 3$ см, $V = 27$ см^3.

969. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу повної поверхні циліндра: 1) вписаного в цей куб; 2) описаного навколо цього куба.

970. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні, а діагональ осьового перерізу дорівнює $m\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо:
1) $m = 6$ см; 2) $m = 8$ см.

971. Основа призми — прямокутник зі сторонами a і b. Діагональ призми утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми.

972. Висота циліндра на 10 см більша за радіус основи, а площа його повної поверхні дорівнює 144π см^2. Знайдіть: 1) радіус основи циліндра; 2) висоту циліндра.

973. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см^2, а площа основи — 4π см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

974. Площі поверхонь подібних циліндрів відносяться, як 5 : 9. Як відносяться об'єми циліндрів?

975. Радіус основи конуса дорівнює R. Довжина хорди, яку видно з вершини конуса під кутом α, дорівнює a. Знайдіть бічну поверхню конуса, якщо:
1) $a = 6$ см, $R = 5$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 4$ см, $R = 3$ см, $\alpha = 90°$.

976. Висота конуса відноситься до радіуса його основи, як 3 : 4, а твірна дорівнює 10 см. Знайдіть повну поверхню конуса.

977. Висота конуса дорівнює H, а об'єм — V. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо:
1) $H = 12$ см, $V = 100\pi$ см^3; 2) $H = 9$ см, $V = 432\pi$ см^3.

978. Площа бічної поверхні конуса більша за площу його основи на 4π см^2. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см.

979. Площина, що проходить через вершину конуса, перетинає його основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β. Площа перерізу дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

980. Кут між твірною і висотою конуса — β, а хорда його основи дорівнює a і стягує дугу α. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо:
1) $a = 4$ см, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$.

981. Твірна конуса дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 240π см^2.

982. Твірна конуса дорівнює 15 см. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його повної поверхні дорівнює 216π см^2.

983. Довжина кола основи конуса C, твірна l. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

984. Дано правильну трикутну піраміду. Знайдіть:
1) площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо бічне ребро b піраміди утворює з площиною основи кут β;
2) площу повної поверхні конуса, вписаного в піраміду, якщо ребро основи піраміди дорівнює a, а двогранний кут при основі — α.

985. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні цього конуса, якщо площа його основи дорівнює S.

986. Відстань від центра основи конуса до його твірної дорівнює a, а кут при вершині осьового перерізу — α. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

987. Радіус основи конуса дорівнює його висоті. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа осьового перерізу дорівнює Q.

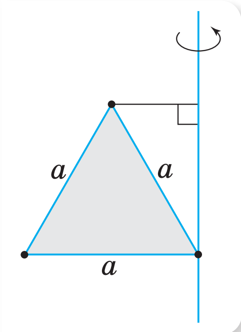
988. Радіус основи конуса дорівнює R. Через вершину конуса проведено площину під кутом α до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом β. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо: 1) довжина хорди дорівнює a; 2) висота конуса дорівнює H.

989. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β. В основу конуса вписано трикутник зі стороною a і протилежним до цієї сторони кутом α. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

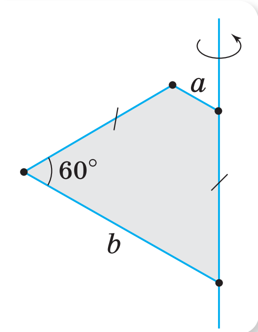
990. Площа осьового перерізу конуса дорівнює S. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо розгортка його бічної поверхні — півколо.

991. Площі повних поверхонь подібних конусів відносяться, як 2 : 3. Як відносяться об'єми конусів?

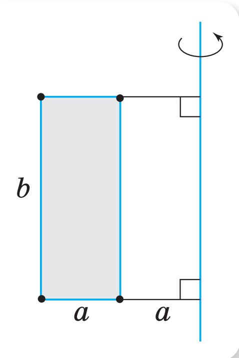
992. Знайдіть площі повної поверхні тіл, отриманих обертанням плоских фігур на малюнках 369–372.



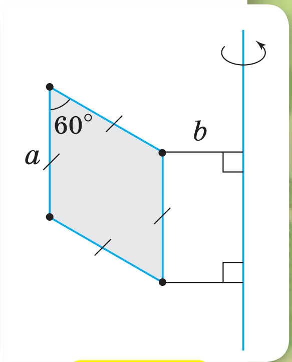
Мал. 369



Мал. 370



Мал. 371



Мал. 372

993. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 120 см². Через середину висоти конуса проведено площину перпендикулярно до висоти. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного зрізаного конуса.

994. Висота і твірна зрізаного конуса відповідно дорівнюють 12 см і 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо радіуси його основ відносяться, як 3 : 4.

995. Площі основ зрізаного конуса S_1 і S_2. Його твірна утворює з висотою кут α. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

996*. На скільки треба збільшити висоту даного циліндра, щоб площа бічної поверхні новоутвореного циліндра дорівнювала площі повної поверхні даного?

997*. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу 60°. Площа перерізу дорівнює $12\sqrt{3}$ см², а його діагональ утворює з твірною циліндра кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

998*. Знайдіть площу поверхні тіла, отриманого обертанням прямокутного трикутника з гіпотенузою c і меншим гострим кутом α навколо: 1) меншого катета; 2) більшого катета; 3) гіпотенузи.

999*. Площа основи конуса дорівнює Q, а площа бічної поверхні — S. Знайдіть об'єм конуса.

1000*. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь куба й конуса, якщо: 1) куб вписано в конус; 2) конус вписано в куб.

1001*. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь конуса й циліндра, якщо: 1) рівносторонній конус вписано в циліндр; 2) рівносторонній циліндр вписано в конус, висота якого удвічі більша за висоту циліндра.

1002*. Осьовий переріз зрізаного конуса — трапеція з гострим кутом α, в яку вписано коло радіуса R. Знайдіть площу повної поверхні цього конуса.

1003*. Знайдіть об'єм конуса, якщо в розгортки його бічної поверхні центральний кут дорівнює α, а хорда, на яку він спирається, дорівнює a.

Проявіть компетентність

1004. Скільки квадратних метрів тканини знадобиться, щоб пошити конусоподібну палатку заввишки 3 м й діаметром 4 м (мал. 373)?

1005. Конічний дах силосної башти має діаметр 6 м і висоту 2 м. Скільки листів заліза потрібно для покриття цього даху, якщо розміри листа $0{,}7 \times 1{,}4$ м, а на шви й відходи витрачають 10 % від площі даху?

1006. Скільки квадратних метрів жерсті витратять на виготовлення 1 млн консервних бляшанок діаметром 10 см і висотою 5 см, якщо на шви та відходи потрібно додати 15 % матеріалу?

1007. Товщина бічної стінки й дна склянки циліндричної форми дорівнює 1 см, висота склянки — 16 см, а внутрішній радіус — 5 см. Обчисліть площу повної поверхні склянки.

Мал. 373

§ 18. ОБ'ЄМ І ПОВЕРХНЯ КУЛІ

1. ОБ'ЄМ КУЛІ

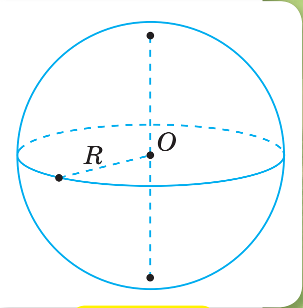
Ви вже знаєте, що таке куля і сфера, циліндр і конус, які властивості їх комбінацій; як обчислити об'єм і площу поверхні циліндра й конуса; що таке принцип Кавальєрі та як його застосовувати. Виведемо формули для обчислення об'єму та площі поверхні кулі.

ТЕОРЕМА **(про об'єм кулі).**

Об'єм кулі радіуса R обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

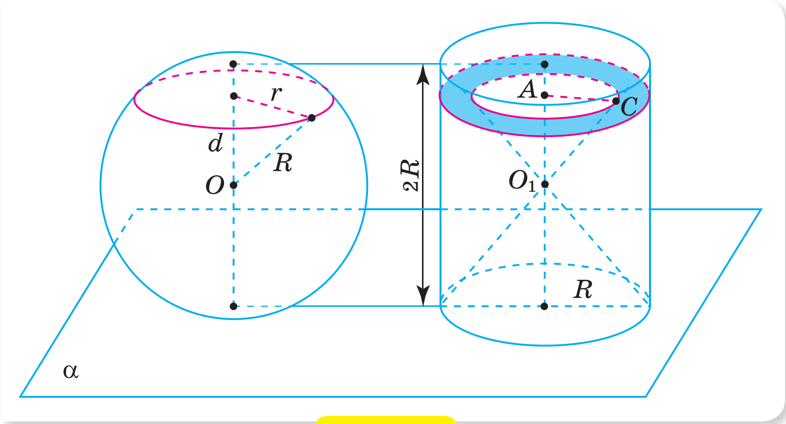
Дано: куля, O – центр, R — радіус (мал. 374).

Довести: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Мал. 374

Доведення. Скористаємося принципом Кавальєрі. Нехай на площині α (мал. 375) розміщено кулю радіуса R і циліндр, радіус основи якого R, а висота $2R$. Уявімо, що із циліндра вирізано й видалено два конуси, що мають спільну вершину в середині O_1 осі циліндра, а основи — в одного верхня основа циліндра, у другого — нижня. Від циліндра залишиться тоді деяке тіло. Покажемо, що об'єм цього тіла дорівнює об'єму кулі. Для цього проведемо січну площину, яка паралельна площині α й перетинається з обома тілами.
Нехай відстань від січної площини до центра кулі дорівнює d, а радіус круга, утвореного внаслідок перетину кулі площиною, r. Тоді $r^2 = R^2 - d^2$,



Мал. 375

а площа цього круга дорівнює $\pi r^2 = \pi\left(R^2 - d^2\right)$. Та само січна площина дасть у перерізі з тілом, що залишається від циліндра, кругове кільце. На малюнку 4.3.2 воно зафарбоване. Радіус зовнішнього кола цього кільця дорівнює R, а внутрішнього — d. Останнє випливає з того, що прямокутний трикутник ACO_1 — рівнобедрений ($\angle AO_1C = \angle ACO_1 = 45°$) і $AC = AO_1 = d$. Тоді площа цього кільця дорівнює $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi\left(R^2 - d^2\right)$.

Ми бачимо, що січна площина, паралельна площині α, дає в перерізі з кулею і тілом, що лишилося від циліндра, фігури однакової площі. Отже, згідно з принципом Кавальєрі, об'єми цих тіл рівні.

Але об'єм тіла, що залишилося від циліндра, дорівнює об'єму циліндра без подвоєного об'єму конуса. Тобто він дорівнює:

$\pi R^2 \cdot 2R - 2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Це й буде об'єм кулі.

Отже, об'єм кулі обчислюється за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

2. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ КУЛІ

ТЕОРЕМА **(про площу поверхні кулі).**

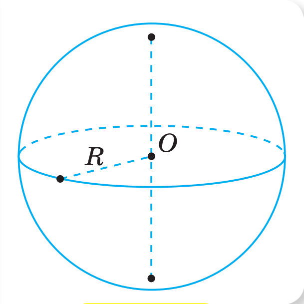
Площа поверхні кулі дорівнює почетвереній площі великого круга.

Дано: куля, O – центр, R — радіус (мал. 376).

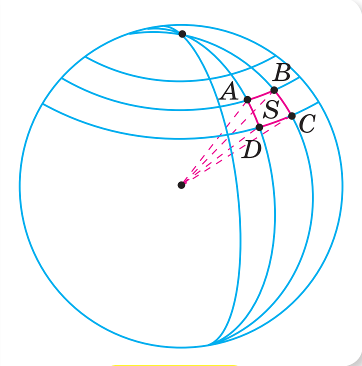
Довести: $S = 4\pi R^2$.

Доведення. Розіб'ємо поверхню кулі на n чотирикутників досить малих розмірів (мал. 377). Їх можна умовно вважати плоскими.

Сполучаємо вершини чотирикутників із центром кулі. Тоді куля розіб'ється на n маленьких пірамід з вершинами в центрі кулі й висотами, що дорівнюють радіусу кулі. Позначимо площі чотирикутників як S_1, S_2,.., S_n, об'єми утворених пірамід — V_1, V_2,.., Vn, об'єм кулі — V. Знайдемо об'єми пірамід розбиття:



Мал. 376



Мал. 377

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1R, \quad V_2 = \frac{1}{3}S_2R, \quad .., \quad V_n = \frac{1}{3}S_nR.$$

Об'єм кулі наближено дорівнює сумі об'ємів пірамід розбиття. Маємо:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2 + \ldots + \frac{1}{3}S_n = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

Сума площ чотирикутників дорівнює площі поверхні кулі, тобто $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S$. Тоді $V = \frac{1}{3}RS$, або $S = \frac{3V}{R}$. Оскільки $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, то площа поверхні дорівнює $4\pi R^2$.

Отже, площа поверхні кулі обчислюється за формулою:

$$S = 4\pi R^2.$$

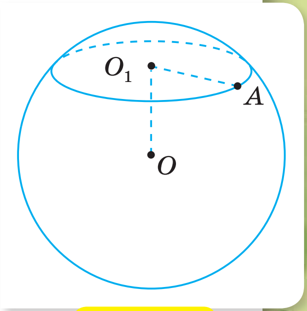
Задача. Переріз кулі площиною на відстані 4 см від її центра має площу 9π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання. Знайдемо радіус AO_1 перерізу кулі (мал. 378): $\pi AO_1^2 = 9\pi$, $AO_1 = 3$ см.

З прямокутного трикутника AOO_1 одержимо:

$R = \sqrt{OO_1^2 + AO_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (см).

Тоді $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (см^2).



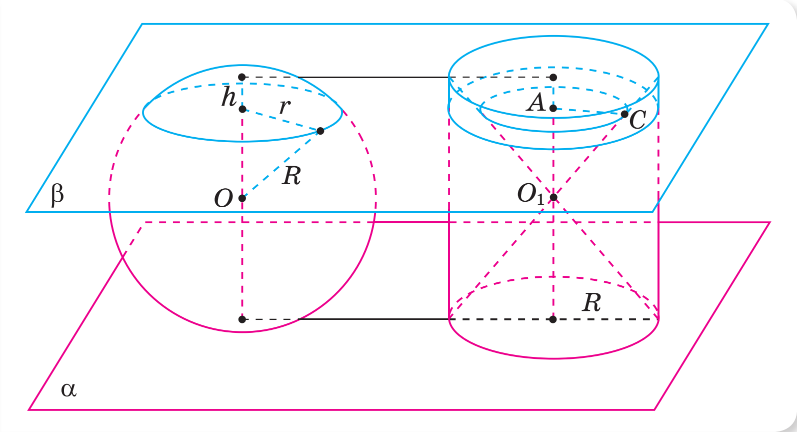
Мал. 378

Радіус кулі також знаходимо:

1) за її об'ємом: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; 2) за її площею поверхні: $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

3. ОБ'ЄМ ЧАСТИН КУЛІ

Щоб знайти *об'єм кульового сегмента*, скористаємося принципом Кавальєрі. На малюнку 379 кульовий сегмент і частина тіла, що залишилася від циліндра, розміщені над січною площиною, мають рівні об'єми.

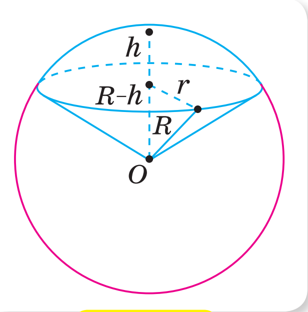


Мал. 379

Тому об'єм кульового сегмента радіуса R і висоти h дорівнює різниці об'ємів циліндра з радіусом основи R і висотою h та зрізаного конуса з висотою h і радіусами основ R і $R - h$. Отже, об'єм кульового сегмента дорівнює:

$$V = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h\left[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).$$

Щоб знайти *об'єм кульового сектора* (мал. 380) додають об'єми двох тіл, з яких він складається, — кульового сегмента з висотою h і конуса з висотою $R - h$.



Мал. 380

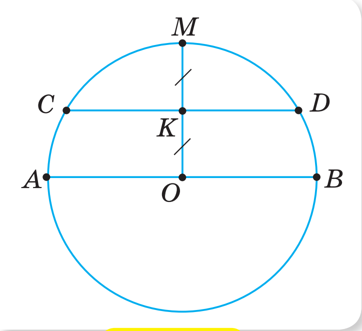
Його радіус: $r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$.

Тоді об'єм кульового сектора дорівнює:

$$V = \frac{\pi}{3}(R-h)\left(2Rh - h^2\right) + \frac{\pi h^2}{3}(3R-h) = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Об'єм кульового шару знаходимо як різницю об'ємів двох відповідних кульових сегментів, якщо його основи лежать по один бік від центра кулі або одна з основ є великим кругом кулі. Якщо основи кульового шару лежать по різні боки від центра кулі, то його об'єм знаходимо як різницю об'ємів кулі й суми об'ємів кульових сегментів.

Задача. Кулю радіуса 6 см перетинає площина, яка проходить через середину її радіуса паралельно площині великого круга. Знайдіть об'єм утвореного кульового шару.



Мал. 381

Розв'язання. Нехай AB — діаметр кулі, а CD — діаметр її перерізу (мал. 381). Оскільки січна площина проходить через середину K радіуса OM кулі, то висота OK отриманого кульового шару дорівнює 3 см. Об'єм шару висотою h можна знайти як різницю об'ємів кульових сегментів AMB і CMD.

Звідси дістанемо:

$$V = \frac{4}{3}\pi OM^2 - \frac{1}{3}\pi KM^2(3OM - KM) = 144\pi - 45\pi = 99\pi \ (\text{см}^3).$$

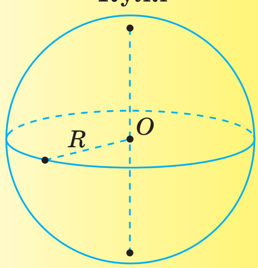
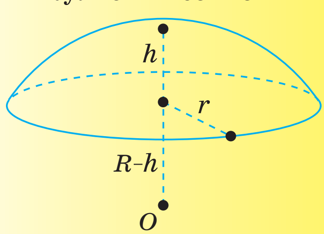
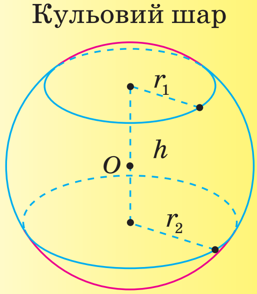
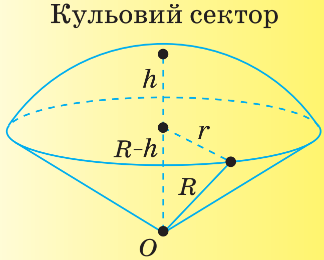
4. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ЧАСТИН КУЛІ

Міркуючи так само, як і при знаходженні площі сфери радіуса R, одержимо формулу для обчислення *площі сферичного сегмента*. Оскільки площа сферичного сегмента $S = \frac{3V}{R}$, а об'єм відповідного кульового сектора $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, то $S = 2\pi Rh$, де h — висота сегмента.

Площу кульового поясу знаходимо або як різницю площ двох сферичних сегментів (якщо кожна з їх висот менша від радіуса сфери чи одна з висот дорівнює радіусу), або як різницю площі сфери й суми площ двох сферичних сегментів (якщо одна висот сегментів більша за радіус сфери). Переконайтеся, що в обох випадках $S = 2\pi Rh$, де R — радіус сфери, h — висота кульового поясу. Самостійно виведіть формули для площ поверхонь кульового сегмента й кульового сектора.

У таблиці 21 подано формули для знаходження об'єму і площі поверхні кулі та її частин.

Таблиця 21

Тіло	Об'єм	Поверхня	Площа поверхні
Куля 	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$	Сфера	$S=4\pi R^2$
Кульовий сегмент 	$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$	Сферичний сегмент	$S=2\pi Rh$
		Поверхня кульового сегмента	$S=2\pi Rh+\pi r^2$
Кульовий шар 	$V=\frac{1}{6}\pi h^3+$ $+\frac{1}{2}\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)h$	Кульовий пояс	$S=2\pi Rh$
		Поверхня кульового шару	$S=2\pi Rh+\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$
Кульовий сектор 	$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$	Поверхня кульового сектора	$S=\pi R\Big(2h+\quad Rh$ $+\sqrt{2Rh-h^2}\Big)$

Дізнайтеся більше

Премія Філдса — міжнародна премія і медаль, які присуджуються один раз на 4 роки на міжнародному математичному конгресі двом, трьом або чотирьом молодим математикам, які не є старшими за 40 років. Премію і медаль названо на честь видатного канадського математика Джона Філдса (1863–1932), який був президентом на VII Міжнародному математичному конгресі, що проходив у 1924 р. в Торонто (Канада), і запропонував на кожному наступному конгресі нагороджувати двох математиків золотою медаллю на знак визнання їхніх видатних заслуг.

У 1990 р. золотою медаллю та премією Філдса був відзначений український математик Володимир Гермонович Дрінфельд — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України.

Філдсівська премія (і медаль) є найпрестижнішою нагородою в математиці. Через це, а також тому, що математикам Нобелівська премія не вручається, Філдсівську премію часто називають «Нобелівською премією для математиків».

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

Українська	Англійська	Німецька
Сектор	Sector	Sektor
Сегмент	Segment	Segment

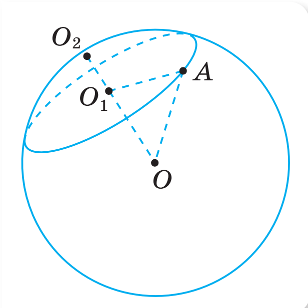
Пригадайте головне

1. Доведіть, що об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.
2. Доведіть, що площа поверхні кулі дорівнює почетвереній площі великого круга.
3. Як знайти об'єм кульового сегмента; площу його поверхні; площу сферичного сегмента?
4. Як знайти об'єм кульового шару; площу його поверхні; площу кульового поясу?
5. Як знайти об'єм кульового сектора; площу його поверхні?

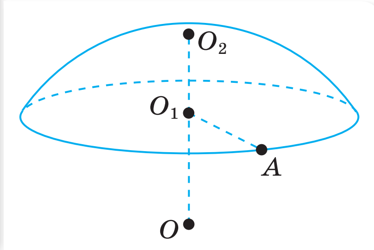
Розв'яжіть задачі

1008'. Чи правильно, що об'єм кулі на малюнку 382, дорівнює:

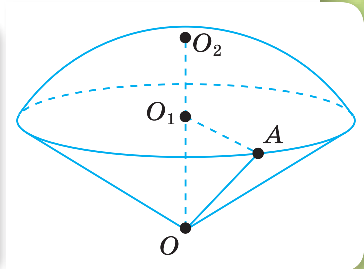
1) $\frac{4}{3}\pi OO_1^3$; 2) $\frac{4}{3}\pi OA^3$; 3) $\frac{4}{3}\pi O_1A^3$; 4) $4\pi OA^2$?



Мал. 382



Мал. 383



Мал. 384

1009'. Чи правильно, що площа поверхні кулі на малюнку 382 дорівнює:

1) $\frac{4}{3}\pi OA^2$; 3) $4\pi O_1A^2$;

2) $4\pi OO_1^2$; 4) $4\pi OA^2$?

1010'. Чи правильно, що об'єм кульового сегмента на малюнку 383 дорівнює:

1) $\frac{1}{3}\pi O_1O_2^2(OA-O_1O_2)$; 3) $\frac{1}{3}\pi O_1O_2(3O_1O_2-OA)$;

2) $\frac{1}{3}\pi O_1O_2^2(3OO_1-O_1O_2)$; 4) $\frac{1}{3}\pi O_1O_2^2(3OA-O_1O_2)$?

Чому дорівнює площа бічної поверхні даного кульового сегмента?

1011'. Чи правильно, що об'єм кульового сектора на малюнку 384 дорівнює:

1) $\frac{2}{3}\pi OO_1^2\cdot O_1O_2$; 3) $\frac{2}{3}\pi O_1O_2^2\cdot OO_1$;

2) $\frac{2}{3}\pi OO_2^2\cdot O_1O_2$; 4) $\frac{2}{3}\pi OA^2\cdot O_1O_2$?

Чому дорівнює площа бічної поверхні даного кульового сектора?

1012°. Радіус кулі R. Знайдіть об'єм та площу поверхні кулі, якщо: 1) $R = 1$ см; 2) $R = 3$ см; 3) $R = 6$ см.

1013°. Радіус кулі R, діаметр D, об'єм V, поверхня S. Накресліть у зошиті таблицю 22 та заповніть її.

Таблиця 22

R	2 см			
D		10 см		
S			64π см^3	
V				36π см^3

1014°. Об'єм кулі дорівнює V. Знайдіть радіус кулі, якщо:
1) $V = 36\pi$ см^3;
2) $V = 288\pi$ см^3;
3) $V = 72\pi$ см^3.

1015°. Радіус кулі збільшили вдвічі. Як при цьому змінилася площа її поверхні?

1016°. У скільки разів треба зменшити радіус кулі, щоб об'єм кулі зменшився в 4 рази?

1017°. Об'єм кулі збільшився у 8 разів. У скільки разів збільшилася поверхня кулі?

1018°. Радіуси двох куль відносяться, як $a : b$. Знайдіть відношення об'ємів цих куль, якщо: 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 2$, $b = 5$; 3) $a = 4$, $b = 1$.

1019°. Довжина кола перерізу, який проходить через центр кулі, дорівнює C. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $C = 8\pi$ см; 2) $C = 10\pi$ см; 3) $C = 12\pi$ см.

1020°. Площа перерізу кулі, який проходить через її центр, дорівнює S. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $S = 16\pi$ см²; 2) $S = 108\pi$ см²; 3) $S = 100\pi$ см².

1021°. На відстані a від центра кулі проведено переріз, довжина кола якого дорівнює C. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $a = 3$ см, $C = 8\pi$ см; 2) $a = 8$ см, $C = 12\pi$ см; 3) $a = 12$ см, $C = 10\pi$ см.

1022°. Кулю перетинає площина під кутом α до одного з радіусів кулі. Отриманий переріз має площу S. Знайдіть площу поверхні й об'єм кулі, якщо:
1) $\alpha = 60°$, $S = 16\pi$ см²; 2) $\alpha = 30°$, $S = 12\pi$ см²; 3) $\alpha = 45°$, $S = 2\pi$ см².

1023°. На поверхні кулі позначено точки A і B. Радіус кулі, проведений до точки A, утворює з хордою AB кут α. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $AB = 6\sqrt{3}$ см, $\alpha = 30°$;
2) $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$;
3) $AB = 4\sqrt{3}$ см, $\alpha = 60°$.

1024°. У кулі, об'єм якої V, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кола даного перерізу, утворює з площиною кут β. Знайдіть площу перерізу, якщо:
1) $V = 36\pi$ см³, $\beta = 60°$;
2) $V = 972\pi$ см³, $\beta = 45°$;
3) $V = 288\pi$ см³, $\beta = 30°$.

1025°. Довжина великого круга кулі збільшилась у 3 рази. Як змінилися об'єм і площа поверхні кулі?

1026°. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює її площі поверхні.

1027°. Площа поверхні кулі дорівнює S. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $S = 16\pi$ см²; 2) $S = 36\pi$ см²; 3) $S = 64\pi$ см².

1028°. Куля дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника з катетами a і b. Відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює d. Знайдіть об'єм і площу поверхні кулі, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 1$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см;
3) $a = 1{,}5$ см, $b = 2$ см, $d = 0{,}5$ см.

1029°. Вершини прямокутника зі сторонами a і b лежать на поверхні кулі, а відстань від центра кулі до площини прямокутника дорівнює d. Знайдіть об'єм кулі, якщо:
1) $a = \sqrt{3}$ см, $b = 1$ см, $d = \sqrt{3}$ см;
2) $a = 3$ см, $b = \sqrt{3}$ см, $d = \sqrt{6}$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $d = 6$ см.

1030°. Доведіть, що площа поверхні кулі дорівнює площі бічної поверхні циліндра, описаного навколо кулі.

1031°. Висота кульового сегмента становить $\frac{1}{3}$ радіуса кулі. Знайдіть відношення об'єму цього сегмента й об'єму кулі.

1032°. Два паралельні перерізи кулі перетинають її поверхню по колах, довжини яких дорівнюють C_1 і C_2. Відстань між площинами дорівнює d. Знайдіть площу поверхні утвореного кульового поясу, якщо:
1) $C_1 = 12\pi$ см^2, $C_2 = 16\pi$ см^2, $d = 14$ см;
2) $C_1 = 16\pi$ см^2, $C_2 = 30\pi$ см^2, $d = 7$ см;
3) $C_1 = C_2 = 12\pi$ см^2, $d = 16$ см.

1033°. Радіус кулі дорівнює 6 см. Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює α. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо:
1) $\alpha = 120°$; 2) $\alpha = 60°$; 3) $\alpha = 90°$.

1034°. Радіус кулі дорівнює R, а радіус кола основи його кульового сектора — r см. Знайдіть площу поверхні цього кульового сектора, якщо:
1) $R = 10$ см, $r = 6$ см;
2) $R = 13$ см, $r = 5$ см;
3) $R = 25$ см, $r = 20$ см.

1035. **Довжина кола великого круга кулі C. Знайдіть об'єм і площу поверхні кулі.**

1036. Площі поверхонь двох куль відносяться, як 9 : 16. Як відносяться об'єми цих куль?

1037. Об'єми двох куль відносяться, як 8 : 27. Як відносяться площі поверхонь цих куль?

1038. Через кінець радіуса кулі під кутом α до нього проведено переріз кулі. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо площа перерізу дорівнює S.

1039. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AD кут 30°, $AB = 3$ см. Даний прямокутник вписано у великий круг кулі. Знайдіть об'єм кулі.

1040. Площа квадрата, вписаного в переріз кулі, дорівнює 32 см^2, а відстань від центра кулі до площини перерізу — 3 см. Знайдіть об'єм кулі.

1041. У циліндр вписано кулю, об’єм якої дорівнює V. Знайдіть об’єм циліндра, якщо: 1) $V = 36\pi$ см^3; 2) $V = 288\pi$ см^3.

1042. Циліндр, осьовий переріз якого — квадрат, вписано в кулю. Радіус основи циліндра дорівнює r. Знайдіть об’єм кулі, якщо: 1) $r = 2\sqrt{2}$ см; 2) $r = 3\sqrt{2}$ см.

1043. Кулю вписано в куб з ребром a. Знайдіть об’єм кулі, якщо: 1) $a = 6$ см; 2) $a = 4$ см.

1044. Кулю описано навколо куба із ребром a. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо: 1) $a = 6$ см; 2) $a = 3$ см.

1045. У кулю вписано правильну чотирикутну призму. Діагональ бічної грані призми d утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть об’єм кулі.

1046. Кулю, поверхня якої дорівнює Q, вписано в правильну чотирикутну призму. Знайдіть об’єм призми.

1047. У циліндр вписано кулю, і навколо нього описано кулю. Знайдіть об’єм описаної кулі, якщо поверхня вписаної дорівнює 72π см^2.

1048. Площина, перпендикулярна до діаметра кулі, ділить його на відрізки 1 см і 3 см. Знайдіть відношення площ частин поверхні кулі, на які площина розбиває кулю.

1049. Основа прямої призми — прямокутний трикутник. Довжини катетів основи й бічного ребра відносяться, як 1 : 2 : 3. Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо призми, якщо об’єм призми дорівнює 24 см^3.

1050. У кулю вписано конус із твірною l і радіусом основи r. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо: 1) $l = 10$ см, $r = 6$ см; 2) $l = 5$ см, $r = 4$ см.

1051. У рівносторонній конус з радіусом основи r вписано кулю. Знайдіть об’єм кулі, якщо: 1) $r = \sqrt{3}$ см; 2) $r = 3\sqrt{3}$ см.

1052. У рівносторонній конус вписано кулю. Знайдіть відношення об’ємів конуса й кулі.

1053. У правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи a і плоским кутом α при вершині вписано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі.

1054. Висота правильної чотирикутної піраміди, вписаної в кулю, дорівнює h. Перпендикуляр, проведений із центра кулі до бічної грані піраміди, утворює з висотою піраміди кут α. Знайдіть об’єм кулі.

1055. Знайдіть відношення площ вписаної й описаної куль для правильної трикутної піраміди, у якої всі ребра рівні.

1056. Основа піраміди — ромб зі стороною a і гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі дорівнюють β. Знайдіть об’єм кулі, вписаної в цю піраміду.

1057. Знайдіть об'єм порожнистої кулі, якщо її зовнішній діаметр дорівнює a, а внутрішній — b.

1058. Висота кульового сегмента дорівнює половині радіуса кулі. Знайдіть відношення об'ємів кульового сегмента й кулі.

1059. Радіус кулі дорівнює R. Діаметр кулі поділено на три рівні частини. Через точки поділу проведено площини перпендикулярно до діаметра. Знайдіть об'єм утвореного кульового шару.

1060. У зрізаному конусі кут між твірною і площиною основи дорівнює α. Знайдіть відношення об'ємів цього конуса й кулі, вписаної в нього.

1061. У кулю вписано зрізаний конус, основи якого ділять кулю на частини, площі поверхонь яких дорівнюють відповідно 20π см^2, 50π см^2 і 30π см^2. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

1062. Площа осьового перерізу кульового сектора дорівнює $\frac{1}{3}$ площі великого круга кулі. Доведіть, що об'єм цього сектора дорівнює $\frac{1}{4}$ об'єму кулі.

1063*. Площина, перпендикулярна до діаметра кулі, ділить її на дві частини, площа однієї з яких дорівнює $18\sqrt{3}\,\pi$ см^2. Обчисліть довжини відрізків, на які ця площина ділить діаметр, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

1064*. У правильну чотирикутну призму вписано кулю. Знайдіть відношення площі поверхні кулі до площі повної поверхні призми.

1065*. З довільної точки поверхні кулі проведено три рівні хорди завдовжки a під кутом α одна до одної. Знайдіть об'єм кулі.

1066*. Дві кулі радіуса R розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайдіть об'єм спільної частини даних куль.

1067*. Циліндр і куля мають рівні об'єми. Діаметр основи циліндра дорівнює його висоті. Знайдіть відношення площ поверхонь циліндра і кулі.

1068*. У правильну трикутну піраміду вписано і навколо неї описано кулі. Знайдіть відношення об'ємів цих куль.

1069*. Знайдіть відношення об'ємів двох куль, одна з яких вписана в рівносторонній конус, а інша — описана навколо нього.

1070*. Площина перетинає діаметр кулі під кутом α й ділить цей діаметр на частини, відношення яких дорівнює 3. На які частини ця площина ділить поверхню кулі, якщо її радіус дорівнює R?

1071*. Навколо кулі об'ємом V описано циліндр, а навколо циліндра — конус. Основа конуса лежить в одній площині з основою циліндра, а радіус основи конуса удвічі більший за радіус основи циліндра. Знайдіть об'єм конуса.

1072*. Архімед першим відкрив формули об'єму та площі поверхні кулі. У своєму трактаті «Про кулю і циліндр» він наводить строге доведення цих формул. Доведіть теорему Архімеда: **об'єм кулі в півтора раза менший від об'єму описаного навколо неї циліндра**.

Проявіть компетентність

1073. Що краще обрати: з'їсти кавун радіуса 10 см, поділений на трьох, чи з'їсти кавун радіуса 20 см, поділений на вісьмох?

1074. Як ви вважаєте, чому 1 кг великої картоплі чистити швидше, ніж 1 кг маленької?

1075. Рідину, яка заповнювала конічну посудину з діаметром основи 20 см і висотою 18 см, перелили в циліндричну посудину з діаметром основи 10 см. На якій висоті буде рівень рідини в циліндричній посудині?

1076. Кулю радіуса 5 см просвердлено вздовж осі. Діаметр циліндричного отвору — 6 см. Знайдіть об'єм частини кулі, що залишилась.

1077. Свинцеву кулю розплавили й перелили в кульки, радіус яких у 10 разів менший від початкового. Скільки таких кульок одержали?

1078. Чи під силу дитині підняти сталеву кулю, якщо її об'єм вміщує стільки ж кубічних сантиметрів, скільки квадратних сантиметрів уміщує площа її поверхні? Густина сталі — 7,8 кг/дм^3.

1079. Більшість сучасних футбольних м'ячів складаються з 32 водонепроникних панелей. 12 із них мають п'ятикутну форму, 20 — шестикутну (мал. 385). Панелі футбольного м'яча зшивають нитками ручним або машинним способом, а також склеюють.

Мал. 385

1) Скільки шкіри піде на виготовлення футбольного м'яча радіуса 10 см (на шви необхідно додати 8 % від площі поверхні м'яча)?
2) Скільки потрібно взяти шкіри білого й чорного кольорів?

1080. Чи буде плавати у воді порожниста мідна куля, діаметр якої 10 см, а товщина стінки: 1) 2 мм, 2) 1,5 мм?

1081. У циліндричну мензурку з діаметром основи 2,5 см, наповнену водою до деякого рівня, опускають 4 однакові металеві кульки з діаметром 1 см. На скільки зміниться рівень води в мензурці?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. За якою формулою обчислюється об'єм циліндра; конуса; кулі?
2. Сформулюйте властивість об'ємів подібних тіл обертання.
3. Як знайти об'єм зрізаного конуса?
4. За якою формулою обчислюється площа бічної поверхні циліндра; повної поверхні циліндра?
5. Як знайти площу бічної поверхні конуса; повної поверхні конуса?
6. Чому дорівнює площа бічної поверхні зрізаного конуса; повної поверхні зрізаного конуса?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі й знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 15–20 хв.

№ 1

1° Радіус основи циліндра 5 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його осьовий переріз — квадрат.

А. 50π см³. **Б.** 100π см³. **В.** 200π см³. **Г.** 250π см³.

2° Діаметр основи конуса 6 см, висота 4 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

А. 9π см². **Б.** 15π см². **В.** 24π см². **Г.** 16π см².

3° Кулю радіуса 4 см вписано в циліндр. Знайдіть площу поверхні циліндра.

А. 78π см². **Б.** 40π см². **В.** 96π см². **Г.** 160π см².

4 Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

А. $4\sqrt{3}\,\pi$ см³. **Б.** 9π см³. **В.** $8\sqrt{3}\,\pi$ см³. **Г.** $4\,\pi$ см³.

5* Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють a см і b см ($a > b$), а твірна утворює з площиною більшої основи кут 45°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

А. $\dfrac{\pi\left(a^3-b^3\right)}{3}$ см³. **Б.** $8\,a^3b^3\pi$ см³. **В.** $\left(a^3-b^3\right)\pi$ см³. **Г.** $4a^3b^3\pi$ см³.

№ 2

1° Радіус кулі дорівнює 3 см. Знайдіть об’єм кулі.

А. 36π см^3. **Б.** 24π см^3. **В.** 12π см^3. **Г.** 9π см^3.

2° Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть площу поверхні кулі.

А. 12π см^2. **Б.** 36π см^2. **В.** 72π см^2. **Г.** 144π см^2.

3° Довжина кола перерізу, який проходить через центр кулі, дорівнює 6π см. Знайдіть об’єм кулі.

А. 12π см^3. **Б.** 24π см^3. **В.** 36π см^3. **Г.** 108π см^3.

4 У циліндр вписано кулю, об’єм якої дорівнює 24π см^3. Знайдіть об’єм циліндра.

А. 9π см^3. **Б.** 12π см^3. **В.** $36\,\pi$ см^3. **Г.** $54\,\pi$ см^3.

5* Знайдіть відношення площ поверхонь куль, вписаної та описаної навколо куба.

А. $\frac{1}{2}$. **Б.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **В.** $\frac{2}{3}$. **Г.** $\frac{2\sqrt{2}}{1}$.

РОЗДІЛ 1

§ 1

1. 1) 4; 2) 5; 3) 8. **2.** 1) 5 ребер і 5 кутів; 2) 10 ребер і 10 кутів; 3) n ребер і n кутів. **5.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **6.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **7.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **8.** 1) $70° < \alpha < 110°$; 2) $90° < \alpha < 150°$; 3) не існує. **9.** 1) 85° і 55°; 2) 110° і 70°; 3) 98° і 52°. **11.** 1) 50°44′; 2) 35°16′. **12.** 1) 49°30′; 2) 48°43′. **19.** $\sqrt{6}$ см. **20.** 3 см. **21.** 7 см. **22.** 45°. **23.** 1) $5\sqrt{2}$ см; 2) 12 см; 3) $4\sqrt{3}$ см. **24.**.1) 15 см; 2) 7 см; 3) 8 см. **31.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 54°44′. **33.** 70°32′. **34.** 120°. **41.** 54°44′, 125°16′, 109°28′. **42.** 26 см. **43.** 49°, 56°, 70°. **47.** 14°, 21°, 35°, 49°, 63°.

§ 2

55. 1) Так; 2) ні; 3) так. **56.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$. **59.** $6\sqrt{2}$ см². **60.** 10 см. **61.** $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ см. **62.** 1) 78 см²; 2) 136 см²; 3) 110 см². **65.** 3 см. **66.** 1) 736 см²; 2) 736 см²; 3) 1248 см². **67.** 1) 72 см² і 324 см²; 2) 254 см² і 2286 см²; 3) 994 см² і 8946 см². **68.** 1) $4\sqrt{2}$ см²; 2) $16\sqrt{2}$ см²; 3) $64\sqrt{2}$ см². **69.** 1) $2\sqrt{5}$ см²; 2) $10\sqrt{5}$ см²; 3) $32\sqrt{5}$ см². **70.** 1) $8\sqrt{2}$ см²; 2) $18\sqrt{2}$ см²; 3) $4\sqrt{2}$ см². **71.** 25 см². **72.** $20\sqrt{17}$ см². **74.** 2,16 см², 2,88 см², 3,6 см². **76.** $162+20{,}25\sqrt{3}$ см². **77.** $3\sqrt{2}S$. **79.** 21° і 147° або 22° і 154°.

§ 3

95. Ні. **6.** 1) 3; 2) 4; 3) n. **9.** Ні. **98.** Ні. **99.** 5 граней, 9 ребер, 6 вершин. **100.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **101.** 1) 1) 60 см² і 72 см²; 2) 60 см² і 108 см²; 3) 9 $48+16\sqrt{3}$ см² і $48+20\sqrt{3}$ см². **102.** 1) 156 см² і 236 см²; 2) 312 см² і 392 см²; 3) $52\sqrt{2}$ см² і $52\sqrt{2}+80$ см². **103.** 1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 3) $\frac{64\sqrt{3}}{9}$ см. **104.** 1) 24 см²; 2) 54 см²; 3) 144. **105.** 1) 40 см² і 48 см²; 2) 240 см² і 312 см²; 3) $120\sqrt{3}$ см² і $120\sqrt{3}+24$ см². **106.** 1) 1 см; 2) 1,5 см; 3) 2,25 см. **107.** 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 5 см. **108.** 1) 2 см; 2) 2 см; 3) 2 см. **110.** 1) 48 см²; 2) 96 см²; 3) 108 см². **111.** 1) $16\sqrt{2}$ см²; 2) 36 см²; 3) $24\sqrt{2}$ см². **112.** 1) 66 см²; 2) 220 см²; 3) $60+12\sqrt{6}$ см². **113.** 1) 800 см²; 2) 420 см²; 3) 240 см². **114.** 1) 160 см² і 184 см²; 2) 576 см² і 696 см²; 3) $120+60\sqrt{3}$ см² і $120+68\sqrt{3}$ см². **115.** 1) 168 см² і 336 см²; 2) 192 см² і 240 см²; 3) 336 см² і 420 см². **120.** 1) 80 см² і 112 см²; 2) 180 см² і 342 см². **123.** 13 см. **125.** 1) $2n$; 2) $3n$; 3) n + 2. **127.** $a^2\left(4+\sqrt{3}\right)$. **128.** $18+\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **129.** 2 см. **132.** $\frac{a}{2}\sqrt{3ctg^2\alpha-1}$, $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\sqrt{ctg^2\alpha-\frac{1}{3}}$. **133.** 6 см². **134.** $ab\left(1+\sqrt{2}\right)$. **137.** ≈ 39,2 м². **138.** ≈ 1320 м².

§ 4

144. Дві. **145.** Ні. **146.** Так. **147.** 1) Ні; 2) ні. **148.** 1) 82 см²; 2) $66+32\sqrt{2}$ см²; 3) $204+120\sqrt{2}$ см². **149.** 1) 64,5 см²; 2) $96+16\sqrt{2}$ см²; 3) $275\sqrt{3}$ см². **150.** 1) 100 см² і 148 см²; 2) 416 см² і 656 см²; 3) 1040 см² і 2000 см². **151.** 1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $5\sqrt{5}$ см; 3) 13 см. **152.** 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) 5 см. **153.** 1) 148 см²; 2) 250 см²; 3) $144+240\sqrt{3}$ см² **154.** 60°. **155.** 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $8\sqrt{3}$ см; 3) $6\sqrt{6}$ см. **156.** 1) 1 см; 2) 3 см; 3) $\sqrt{2}$ см. **157.** $2d^2$. **158.** $3\sqrt{2S}$. **160.** 1) 1 см; 2) 4 см; 3) 3 см. **161.** 1) 14 см і $\sqrt{276}$ см. **163.** 1) 10 см; 2) $5\sqrt{5}$ см; 3) $5\sqrt{7}$ см. **164.** 120 см², 60 см² — площі бічних граней, 360 см² — площа бічної поверхні, 840 см² — площа повної поверхні. **168.** 1) Збільшиться в 16 разів; 2) зменшиться у 4 рази; 3) збільшиться в 2,25 разів. **172.** 8 см, 10 см, 12 см. **173.** 1) 3 см. **174.** 1) 625 см², ≈ 613 см². **175.** 1) 60° і 120°. **176.** $5\sqrt{41}$ см і $\sqrt{1921}$ см. **177.** 516 см². **178.** 21 см. **179.** 58 см. **180.** 568 см². **186.** 21 см. **188.** 1) 324 см², 486 см² і 100 см², 150 см². **191.** Так. **197.** $a^2\sqrt{\frac{3}{2}}$. **201.** ≈ 19,5 т. **202.** 103,1 м. **203.** 9420 м². **204.** 233,8 м².

§ 5

208. 1) 4 грані, 4 вершини, 6 ребер; 2) 5 граней, 5 вершин, 8 ребер; 3) n + 1 граней, n + 1 вершин, $2n$ ребер. **210.** Так. **211.** 1) $\sqrt{65}$ см і $\sqrt{58}$ см; 2) 13 см і $6\sqrt{5}$ см. **212.** 1) 4 см. **213.** 1) 4 см. **214.** 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 24 см. **215.** 1) 6 см; 2) 12 см; 3) 12 см **216.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) $\sqrt{6}$ см². **217.** 1) 13 см; 2) $10\sqrt{2}$ см; 3) 9 см. **218.** 1) 6 см; 2) 5 см; 3) 3 см. **219.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{6}$ см. **220.** 1) 2,5 см; 2) 3 см; 3) $7\sqrt{2}$ см. **221.** 1) $\frac{225}{4}\left(\sqrt{67}+\sqrt{3}\right)$ см; 2) $75\left(3+\sqrt{73}\right)$ см. **222.** 1) 48 см² і 57 см²; 2) 80 см² і 96 см²; 3) 96 см² і 132 см². **223.** 1) $a\left(a+\sqrt{a^2+4h^2}\right)$; 2) $\frac{3a}{2}\left(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2}\right)$. **224.** $\sqrt{2}$ см і $\sqrt{3}$ см. **227.** 1) 90 см² і 90 + $5\sqrt{3}$ см²; 2) 108 см² і 108 + $20\sqrt{3}$ см². **228.** 1) 160 см² і 160 + $68\sqrt{3}$ см²; 3) 150 см² і 150 + $17\sqrt{3}$ см². **229.** 1) 48 см² і 88 см²; 3) 160 см² і 320 см². **230.** 1) 180 см² і 830 см²; 2) 480 см² і 3080 см²; 3) 540 см² і 6390 см². **231.** 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 14 см. **232.** 1) 13 см; 2) 6 см; 2) $10\sqrt{2}$ см. **233.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ см; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{3}$ см. **234.** 1) 8 см; 2) $2\sqrt{7}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см. **235.** 1) 32 см; 2) 8 см; 3) 12 см. **236.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **237.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$. **238.** 192 см². **239.** 1) $4\sqrt{3}$ см² і $4\left(1+\sqrt{3}\right)$ см²; 2) $25\sqrt{3}$ см² і $25\left(1+\sqrt{3}\right)$ см²; 3) $\sqrt{3}$ см² і $1+\sqrt{3}$ см². **241.** 36 см². **242.** $72\left(1+\sqrt{7}\right)$ см². **243.** $3\sqrt{3}h^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

244. 1008 см². **245.** 1500 см². **246.** $8\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ см². **247.** 1) 5 см і $\frac{\sqrt{133}}{2}$ см; 3) $2\sqrt{2}$ см і 4 см. **249.** $18\sqrt{3}$ см². **250.** 12 см. **251.** $\frac{2h^2\cos(180°-\alpha)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **252.** $12\sqrt{2}$ см. **253.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°. **254.** 84 см². **255.** 147 см² і 243 см². **256.** 16 см². **259.** $\sqrt{2}$ см. **260.** $\frac{4H^2 ctg\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi}$. **261.** 62 см. **262.** $\frac{5c^2\cos\alpha}{8}$. **265.** 15°, 30°, 105°, 30°. **266.** 10 см і 20 см. **269.** 45°. **271.** ≈ 10,8 м. **272.** ≈ 5,2 кг. **274.** ≈ 82915 м².

§ 6

278. Так. **279.** 1) 4; 2) 8; 3) 20. **280.** 6. **281.** 12. **283.** Ні. **285.** 1) $16\sqrt{3}$ см²; 2) $36\sqrt{3}$ см²; 3) $144\sqrt{3}$ см² **286.** 1) 96 см²; 2) 216 см²; 3) 864 см². **287.** 1) $32\sqrt{3}$ см²; 2) $72\sqrt{3}$ см²; 3) $288\sqrt{3}$ см². **288.** 1) $80\sqrt{3}$ см²; 2) $180\sqrt{3}$ см²; 3) $720\sqrt{3}$ см². **289.** 1) 1440°; 2) 3600°; 3) 6480°. **290.** 1) Збільшиться в 4 рази; 2) зменшиться в 16 разів; 3) збільшиться в 3,0625 разів. **291.** 1) Збільшиться в 9 разів; 2) зменшиться в 16 разів; 3) збільшиться в 1,5625 разів. **292.** 1) Збільшиться в 4 рази; 2) зменшиться в 9 разів; 3) збільшиться у 2,25 разів. **293.** 1) Збільшиться в 16 разів; 2) зменшиться в 4 рази. **299.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $12\sqrt{3}$ см; 3) 6 см. **300.** 1) 3π см²; 2) $\frac{16}{3}\pi$ см²; 3) $4{,}5\pi$ см². **301.** 1) $288\sqrt{3}$ см²; 2) $\frac{512\sqrt{3}}{3}$ см²; 3) $64\sqrt{3}$ см². 28. 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) 4 см; 3) $4\sqrt{2}$ см. **304.** 1) $54\sqrt[4]{3}$ см; 2) $36\sqrt[4]{3}$ см; 3) $48\sqrt[4]{3}$ см. **307.** 1) $4\sqrt{5+10\sqrt{5}}$ см²; 2) $9\sqrt{5+10\sqrt{5}}$ см²; 3) $36\sqrt{5+10\sqrt{5}}$ см². **312.** $b\left(2-\sqrt{2}\right)$. **319.** Октаедр. **321.** ≈ 22,3 м. **322.** ≈ 50 м.

РОЗДІЛ 2

§ 7

335. 1) 16 см²; 2) 64 см². **336**. 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) 8 см². **338**. 1) 4 см і 4 см; 2) 24 см і 24 см. **342**. 1) 196π см²; 2) 81π см². **344**. 20 см². **345**. 1) 256π см²; 2) 50π см; 3) 396π см². **346**. $\left(a^2-b^2\right)tg\alpha$. **347**. 1) $6\sqrt{3}$ см²; 2) 12 см².

§ 8

359. 1) 10 см; 2) 5 см; 3) 13 см. **360**. 1) 16 см; 2) 12 см; 3) 24 см. **362**. 1) 4 см, 4π см²; 2) 6 см, 9π см²; 3) 2 см, π см². **363**. 1) a; 2) a; 3) $2a^2$. **364**. 1) b; 2) a; 3) ab. **368**. 1) 10 см; 2) 5 см. **370**. 1) 2 см і 6 см; 2) 2 см і 6 см; 3) $\sqrt{3}$ см і $4\sqrt{3}$ см. **371**. 1) 12 см; 2) $6\sqrt{3}$ см; 3) 108 см². **373**. 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 2 см. **374**. 1) 2,5 і $5\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{3}$ і 24; 3) 8 і $8\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{3}$ і 4. **375**. 1) $\sqrt{2}$ см;

2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см; 3) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см. **376**. 1) 2π; 2) $4{,}5\pi$; 3) $2{,}25\pi$. **377**. 1) 10 см; 2) 2,5 см. **378**. 1) 3 см; 2) 4 см. **379**. 1) 10 см; 2) 9 см. **380**. 1) 56 см^2; 2) 64 см^2. **381**. 1) 32 см^2; 2) $10\sqrt{3}$ см^2. **382**. 1) 8 см; 2) 4 см. **383**. 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) $200\sqrt{3}$ см^2. **385**. $10\sqrt{3}$ см. **386**. $\frac{R}{2}$. **387**. $\frac{S}{2R}$. **388**. $\frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}$ і $\frac{b}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\alpha$.

390. 3 см. **391**. 1) 1,5 см; 2) 1 см. **392.** 30°. **394**. $2bH\sqrt{3}$. **395**. 48 см^2. **396**. 90°. **397**. 1) $d\sin\beta$; 2) $\frac{d\cos\beta}{2\pi}$. **405**. $\frac{\pi S ctg\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **406**. $a^2\sin2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **407**. 1) 3 см; 2) 3 см. **409**. 1) 5 см; 2) 3 см. **410**. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2ctg^2\alpha}$. **412**. $S\sqrt{2}$. **417**. 5 м.

§ 9

421. 1) 5 см; 2) 10 см; 3) 25π см^2. **425**. 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 4 см; 4) $8\sqrt{2}$ см. **426**. 1) 5 см; 2) 13 см; 3) 10 см. **427**. 1) 75π см^2; 2) 50π см^2; 3) 25π см^2. **428**. 1) 10 см; 2) $10\sqrt{3}$ см; 3) 10π см^2. **429**. 1) 32 см; 2) 48 см; 3) 48 см. **430**. 1) 3 см; 2) 6 см; 3) 5 см. **432**. 1) 90°; 2) 60°. **433**. 1) 12 см; 2) 6 см; 3) 16 см. **434**. 1) $6\sqrt{2}$ см і 6 см; 2) $10\sqrt{3}$ см і 20 см; 3) $\sqrt{2}$ см і 1 см. **435**. 1) $\sqrt{S}$; 2) $\sqrt{S}$; 3) $\sqrt{2S}$. **436.** 1) 5 см; 2) 13 см; 3) 16 см. **437**. 1) 10 см; 2) $10\sqrt{2}$ см. **439**. $2\sqrt{H^2+R^2}+2R$. **440**. 1) $l\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\pi l^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **441**. 1) $\sqrt{3}(R-r)$; 2) $2(R-r)$. **442**. 1) 4π см; 2) 4 см; 3) $4\sqrt{3}$ см^2. **443**. 1) 6 см; 2) 3 см. **444**. 1) R^2; 2) $R^2\sqrt{2}$; 3) $R^2\sqrt{3}$. **446**. 36 см^2; 2) 32 см^2. **447**. 1) $100\sqrt{2}$ см^2; 2) 72 см^2. **448**. 1) $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$; 2) $\frac{l\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **449**. 1) $\sqrt{7}$ см^2; 2) $8\sqrt{3}$ см^2. **450**. 1) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см; 2) 8 см; 3) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ см^2.

451. 1) π см^2; 2) 16π см^2. **452**. 1) $\frac{H\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{H}{2}$. **453**. 1) 15 см^2; 2) 136 см^2. **454**. 1) 25π см^2; 2) 4π см^2. **455**. $S\pi$. **457**. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) a; 3) $a\pi$; 4) $\frac{a^2\pi}{4}$. **458**. m^2. **459**. $\frac{a^2-b^2}{2}$. **460**. 1) 32 см; 2) 512 см^2. **462**. 1) $b\sqrt{5}$; 2) $2b^2$. **463**. $\frac{1}{4}\left(Q_1+2\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2\right)$. **464**. 120°. **470**. 500 см^2. **471**. $\frac{3l}{4}$. **472**. 1) $\frac{P\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$; 2) $\frac{P\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$; 3) $\frac{P^2\sin2\alpha}{8(1+\sin\alpha)^2}$. **473**. 3 см. **474**. 60 см і 100 см. **475**. 1) 144 см^2;

2) 180 см^2. **476**. 3 см і 9 см. **477**. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **478**. $\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\cdot\cos\beta$. **480.** 6π см. **484**. 1) 2 м; 2) 12π м^3. **485.** 160 м.

§ 10

490. 1) $3\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{2}$ см. **492**. 1) 15 см; 2) 15 см. **493**. 5 см. **496**. 1) 40 см^2; 2) 64 см^2; 3) 2 см^2. **497**. 1) $16\sqrt{3}$ см, 24 см; 2) $8\sqrt{3}$ см, 12 см; 3) $12\sqrt{3}$ см, 18 см. **498**. 1) 20 см; 2) 80 см; 3) 27 см. **499**. 1) 6 см; 2) 60 см; 3) $10\sqrt{3}$ см. **501**. 1) 7 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $8\sqrt{3}$ см. **502**. 1) 4 см, $3\sqrt{2}$ см; 2) 8 см, $6\sqrt{2}$ см; 3) 12 см, $5\sqrt{2}$ см. **503**. 1) 75π см^2; 2) 108π см^2; 3) 100π см^2. **504**. 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 3 см; 3) 12 см. **505**. 1) 6 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{3}$ см. **506**. 1) 6 см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{3}$ см. **507**. $40\sqrt{3}$ см^2. **508**. 1) 5 см; 2) 13 см. **509**. 1) $9\sqrt{2}$ см, 9 см; 2) $6\sqrt{3}$ см, 6 см. **510**. 1) $80\sqrt{2}$ см^2; 2) $140\sqrt{2}$ см^2. **511**. 1) $a\,tg\beta$; 2) $\frac{\pi a^2 tg\frac{\alpha}{2}}{2}$. **513**. 1) $12\sqrt{3}$ см^2; 2) 100 см^2. **514**. 1) $6\sqrt{3}$ см^2; 2) 128 см^2. **515**. 240 см^2. **516**. $\frac{a^2 tg\beta}{4\sin^2 8\alpha}$. **517**. 1) $8\sqrt{3}$ см, 24 см; 2) $4\sqrt{3}$ см, 4 см. **518**. 1) Так; 2) ні. **519**. 1) 8 см, $12\sqrt{3}$ см; 2) 12 см, $10\sqrt{3}$ см. **520**. $\frac{ab\sqrt{3}}{3}$. **522**. 1) $\frac{a}{3tg\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a tg\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ 1) $\frac{a}{6tg\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a tg\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **528**. $12\sqrt{2}$ см^2. **531**. $d^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta+ctg^2\alpha}$. **532**. $a\sin\alpha$ і $a\sin\alpha tg\beta$. **533**. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **537**. 1) 14. **538**. 10 м.

§ 11

544. 1) π см^2; 2) 16π см^2; 3) 4π см^2. **545**. 1) 12 см; 2) 12 см; 3) 24π см^2. **547**. 1) 15 см; 2) 1 см; 3) 10 см. **548**. 1) 12 см; 2) 8 см; 3) 14 см. **549**. 1) 3 см; 2) 8 см; 3) 12 см. **550**. 1) 15 см; 2) 13 см; 3) 16 см. **551**. 24 см; 2) 8 см; 3) 5 см. **552**. 1) 16π см^2; 2) 64π см^2; 3) 144π см^2. **553**. 1) 10 см; 2) 13 см; 3) 16 см. **555**. 1) 5 см; 2) 3 см; 12 см. **556**. 1) 20π см; 2) $6a\pi$ см; 3) 9π см. **557**. 1) 1; 2) 20; 3) 12. **558**. 1) 36π см^2; 2) 144π см^2; 3) 225π см^2. **559**. 1) 2 см; 2) 7 см; 3) 12 см. **563**. 1) $2\sqrt{3}$ см^2; 2) $3\sqrt{2}$ см^2. **564**. 1) 4; 2) 2. **565**. 10 см. **566**. 1) 5 см; 2) 10 см. **571**. 1) 13 см; 2) 13 см. **572**. 1) 25 см; 2) 26 см. **573**. 1) 20 см; 2) $16\sqrt{2}$ см. **575**. 6 см. **577**. $(R^2-d^2)\pi$. **578**. $\sqrt{d^2+\frac{S}{\pi}}$. **579**. 1) $\frac{R}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **587.** 1) 16π см; 2) 24π см. **588**. 10 см і 15 см. **589**. 11,5 см. **590**. 5 см. **591**. 9 см. **600**. $\approx$ 64000 км.

§ 12

612. 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см. **613**. 1) 4 см; 2) 12 см; 3) 20 см. **614**. 1) 8 см; 2) 7 см; 3) 10 см. **615**. 1) 1 см; 2) 4 см; 3) 5 см. **616**. 1) 14 см; 2) 7 см; 3) 3 см. **417**. 1) 3 см; 2) 4,5 см; 3) 1,5 см. **618**. 1) 1 см; 2) 2 см; 3) 3 см. **619**. 1) 2 см;

2) 3 см; 3) 2,5 см. **620**. 1) 3 см; 2) 6 см; 3) 2 см. **621**. 1) 6 см; 2) 12 см; 3) $10\sqrt{3}$ см. **622**. 1) 4π см²; 2) 25π см²; 3) 36π см². **623**. 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **624**. 1) 8 см і $4\sqrt{2}$ см; 2) 10 см і $5\sqrt{2}$ см; 3) 2 і $\sqrt{2}$ см. **625**. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **627**. 1) 2; 2) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$. **628**. 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см. **630**. 1) $5\sqrt{3}$ см і $10\sqrt{3}$ см; 2) 18 см і 12 см. **631**. 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **632**. 1) 256 см²; 2) 300 см². **633**. 1) 27π см² і $36\sqrt{3}$ см²; 2) 16π см² і 64 см². **634**. 1) $8\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$. **636**. 1) 5; 2) 6; 3) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **638**. 1) 6; 2) 24; 3) $2\sqrt{p^2-m^2}$. **641**. 1) 4 см; 2) $7\sqrt{2}$ см. **645**. $\frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}$. **647**. $\frac{2H\sqrt{3}}{3}$. **648**. $\frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. **649**. 1) 3 см; 2) 1,5 см. **650**. 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $\sqrt{3}$ см. **651**. 1) 324π см²; 2) 72π см². **652**. 1) 2π см; 2) 3π см. **653**. 39 см. **654**. 1) 4 см і 9 см; 2) 2 см і 8 см. **655**. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$. **660**. 1) $\frac{a}{2}$ і $\frac{a}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$. **672**. 1) 256; 2) 170. **673**. 1) 2; 2) 1. **674**. 100 мм.

§ 13

680. 1) 3 см; 2) 8 см. **682.** 1) 8 см³; 2) 64 см³. **683.** 1) 27 см³; 2) 125 см³. **686.** 1) 125 см³; 2) 648 см³; 3) 9 см³. **687.** 1) 81 см³. **688.** 2) 480 см³. **689.** 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{3}$. **690.** 1) 27; 2) 216. **691.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) 125. **692.** 1) 27 : 8; 2) 1000 : 1. **694.** 1) $4\sqrt{3}$ см³. **697.** 1) $8\sqrt{2}$ см³. **698.** 1) 3 см³. **700.** $d^3 \sin\alpha \sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **704.** 1) 6 см³; 2) 30 см³. **708.** 5 : 7. **710.** $48\sqrt{11}$ см³. **712.** $\frac{\sqrt{S}(p^2-S)}{2}$. **713.** $a\sqrt{S(S-a^2)}$. **714.** 1) 3,2 см³. **716.** 1)1950 см³; 2) 1,8г/см³. **718.** 6 см.

§ 14

727. 1) 18 см³; 2) 486 см³. **728.** 1) 24 см³. **729.** 2) 108 см³. **730.** 1) 30 см³; 2) 240 см³. **731.** 1) 30 см³. **732.** 1) 36 см³. **734.** a^2b. **735.** 1) 100 см³. **737.** 1) 375 см³. **739**. 1) 18 см³. **740**. 1) $125\sqrt{3}$ см³. **742**. 1) $45\sqrt{3}$ см³. **744**. $243\sqrt{3}$ см³. **748**. 1) $45\sqrt{3}$ см³. **751.** 1) 100 см³. **752.** 1) 24 см³. **756.** $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{2}}$. **759**. 1) $729\sqrt{2}$ см³. **762.** 2 см³. **763.** 562,5 см³. **765**. 1) $576\sqrt{3}$ см³. **768**. 900 см³. **774**. $\frac{m^3V}{m^3+n^3}$, $\frac{n^3V}{m^3+n^3}$. **776**. $\frac{S_1S_2\sin\alpha}{2a}$. **778**. 6120 см³. **788.** 20 плит.

§ 15

797. 1) $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ см^3; 3) $80\sqrt{3}$ см^3. **798.** 1) 32 см^3; 2) 192 см^3. **799.** 1) 640 см^3; 2) 80 см^3. **800.** 1) 54 см^3. **801.** 12 см^3. **802.** 3 см^3. **806.** 1) 28 см^3; 2) 124 см^3. **808.** 1) $84\sqrt{3}$ см^3; 2) 453 см^3. **809.** 1) $\frac{67\sqrt{3}}{2}$ см^3; 2) 39 см^3. **810.** 1) 2 : 3. **816.** 127,5 см^3. **808.** $175\sqrt{3}$ см^3. **818.** 1) $72\sqrt{2}$ см^3. **823.** $r^2\sqrt{3}(R \pm \sqrt{R^2 - 4r^2})$. **828.** 1 : 2. **834.** 1) 24 см^2. **838.** $\frac{2m^3}{3}\sqrt{ctg\alpha}$. **842.** $\frac{S\,tg\alpha}{6\sin\beta}\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\beta}}$. **843.** $\frac{a^3 tg\beta\cos^2\alpha}{3}$. **844.** $\frac{S_1S_2}{2b}$. **845.** 1) 2 : 7. **846.** 1) 9 : 65. **850.** $\frac{a^3}{6}$.

РОЗДІЛ 4

§ 18

1012. 1) 4π см^2, $\frac{4\pi}{3}$ см^3; 2) 36π см^2, 36π см^3; 3) 144π см^2, 288π см^3. **1014**. 1) 3 см; 2) 6 см; 3) $3\sqrt{2}$ см. **1018**. 1) $\frac{27}{64}$; 2) $\frac{8}{125}$; 3) 64. **1019**. 1) $\frac{256}{3}\pi$ см^3; 2) $\frac{500}{3}\pi$ см^3; 3) 288π см^3. **1020**. 1) $\frac{32}{3}\pi$ см^3; 2) 36π см^3; 3) $\frac{375}{3}\pi$ см^3. **1021**. 1) $\frac{500}{3}\pi$ см^3; 2) $\frac{4000}{3}\pi$ см^3; 3) $\frac{8788}{3}\pi$ см^3. **1022**. 1) 256π см^2, $\frac{2048}{3}\pi$ см^3; 2) 48π см^2, $64\sqrt{3}\pi$ см^3; 3) 8π см^2, $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3. **1023**. 1) 288π см^3; 2) $\frac{32}{3}\pi$ см^3; 3) $768\sqrt{3}\pi$ см^3. **1024**. 1) $\frac{9}{4}\pi$ см^2; 2) $\frac{81}{4}\pi$ см^2; 3) 27π см^2. **1026**. 3. **1027**. 1) $\frac{32}{3}\pi$ см^3; 2) 36π см^3; 3) $\frac{256}{3}\pi$ см^3. **1029**. 1) $\frac{32}{3}\pi$ см^3; 2) 36π см^3; 3) $\frac{320\sqrt{10}}{3}\pi$ см^3. **1031**. $\frac{7}{27}$. **1032**. 1) 280π см^2; 2) 128π см^2; 3) 280π см^2. **1033**. 1) 72π см^3; 2) $72\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$ см^3; 3) $72\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$ см^3. **1035**. 1) $\frac{C^2}{\pi}$; 2) $\frac{C^3}{6\pi}$. **1036**. $\frac{27}{64}$. **1037**. $\frac{4}{9}$. **1038**. $\frac{4S}{\cos\alpha}$. **1039**. 36π см^3. **1040**. $\frac{500}{3}\pi$ см^3. **1041**. 1) 54 см^3; 2) 432 см^3. **1042**. 1) $\frac{256}{3}\pi$ см^3; 2) 288π см^3. **1043**. 1) 36π см^3; 2) $\frac{32}{3}\pi$ см^3; **1044**. 1) 108π см^2; 2) 27π см^2. **1045**. $\pi d^2\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$. **1046**. $\frac{Q}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. **1047**. 432π см^3. **1048**. 1 : 3.

1050. 1) $\frac{625\pi}{4}$ см^2; 2) 25π см^2. **1051**. 1) $\frac{4}{3}\pi$ см^3; 2) 36π см^3. **1052**. $\frac{9}{4}$. **1054**. $\frac{\pi h^3}{6}\left(1+2ctg^2\alpha\right)^3$. **1056**. $\frac{1}{6}\pi a^3 \sin^3\alpha tg^3\frac{\beta}{2}$. **1057**. $\frac{1}{6}\pi\left(a^3-b^3\right)$. **1058**. $\frac{5}{32}$. **1059**. $\frac{107\pi R^3}{324}$. **1063.** 3 см, 9 см. **1069**. $\frac{1}{8}$. **1071**. $4V$. **1073.** На восьмох. **1074.** Вказівка: порівняти площі поверхні. **1075.** 24 см. **1076.** $\frac{256}{3}\pi$ см^3. **1077.** 1000. **1080.** а) Ні; б) так. **1081.** $\approx 4{,}3$ мм.