Оріон

Н. А. Тарасенкова
І. М. Богатирьова
О. М. Коломієць
З. О. Сердюк

Алгебра

9

УДК 512(075.3)
А45

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 20.03.2017 р. № 417*)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

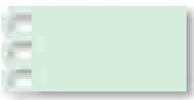
Експерти, які здійснювали експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Н. І. Медвідь, гімназія № 315 м. Києва, учитель математики, учитель-методист;

О. О. Погоріляк, державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», доцент кафедри математичного аналізу і теорії ймовірностей математичного факультету, кандидат фізико-математичних наук;

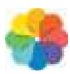
Л. В. Роміцина, комунальний заклад «Житомирський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти» Житомирської обласної ради, методист

УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

 — запам'ятайте

 — поміркуйте

 — зверніть увагу

 — типова задача

 — як записати в зошиті

 — домашнє завдання

Тарасенкова Н. А.
А45 Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 272 с.
ISBN 978-617-7485-12-3.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-617-7485-12-3

ДОРОГІ УЧНІ!

Алгебра — один з розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики та як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються в багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У 8-му класі ви навчились перетворювати числові вирази та вирази зі змінними, доводити тотожності, виконувати дії з одночленами та многочленами, дізналися, що таке функція та які властивості має функція $y = x^2$ та деякі інші функції, навчилися будувати графіки цих функцій та досліджувати їх, розв'язувати раціональні рівняння. Тепер ви продовжите розвивати свої вміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити обґрунтовані висновки. Для цього потрібно наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на три розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання виділено **жирним шрифтом**. На допомогу вам наведено поради з позначкою «Зверніть увагу». *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять. У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа і повторити його, допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», а матеріал усієї теми — контрольні запитання й тестові завдання наприкінці розділу.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх треба навчитись розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

**Бажаємо вам успіхів
у пізнанні нового і задоволення від навчання!**

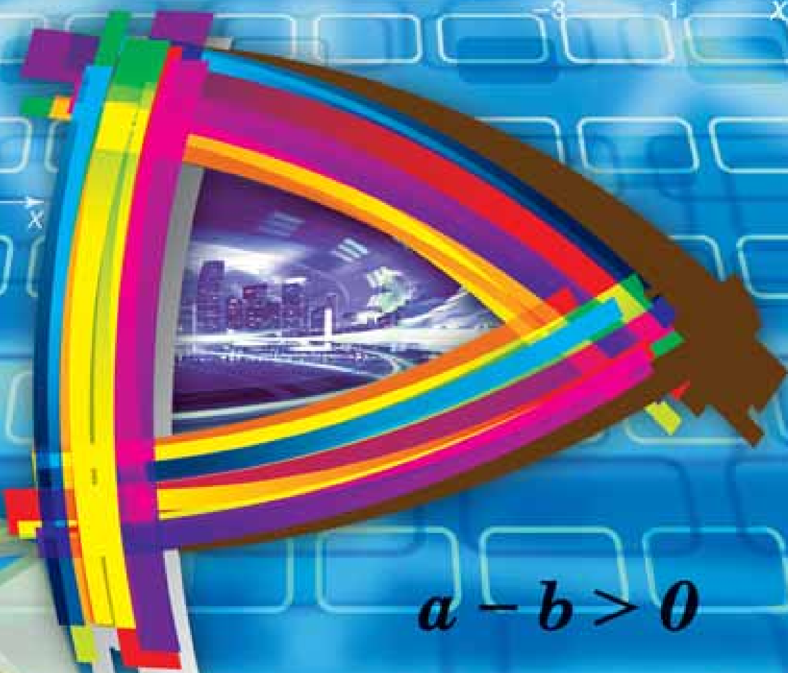
ЗМІСТ

Розділ 1

Нерівності

У розділі дізнаєтеся:

- про властивості числових нерівностей;
- що таке нерівність зі змінною та як її розв’язувати;
- що таке числовий проміжок;
- як знаходити об’єднання й переріз числових проміжків;
- що таке лінійна нерівність з однією змінною та як її розв’язувати;
- що таке система лінійних нерівностей з однією змінною та як її розв’язувати;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці



$$a - b > 0$$

§1 Числові нерівності та їх властивості

1. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

Із курсу математики 5-го класу ви знаєте, що таке *числова нерівність, подвійна нерівність, знаки нерівності*. Пригадайте відповідні означення та порівняйте їх з наведеними в підручнику.

Запис, у якому два числа, або два числові вирази, або числовий вираз і число сполучено знаком нерівності, називається *числовою нерівністю*.

Наприклад:

$$\frac{2}{9}<1,\ 2\cdot5+1<3\cdot6,\ 2+3:7>2\frac{1}{7}.$$

Нерівності записують за допомогою знаків $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Серед них розрізняють знаки *строгої нерівності* та знаки *нестрогої нерівності* (таблиця 1).

Таблиця 1

Нерівність	Знак	Як прочитати
строга	$<$	менше
	$>$	більше
нестрога	$\leq$	менше або дорівнює
	$\geq$	більше або дорівнює

Число a є *більшим* (*меншим*) за число b, якщо різниця $a-b$ є додатним (від'ємним) числом.

Справджується й обернене твердження.

Зверніть увагу:

- якщо $a-b>0$, то $a>b$;
- якщо $a-b<0$, то $a<b$;
- якщо $a-b=0$, то $a=b$.

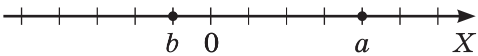
Задача 1. Порівняйте числа: $\frac{5}{12}$ і $\frac{4}{11}$.

Розв'язання. Щоб порівняти дані числа, знайдемо їх різницю й визначимо її знак:

$$\frac{5}{12}-\frac{4}{11}=\frac{5\cdot 11-4\cdot 12}{12\cdot 11}=\frac{55-48}{132}=\frac{7}{132}>0.$$

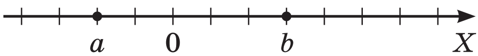
Отже, $\frac{5}{12}>\frac{4}{11}$.

На координатній прямій більше з двох чисел зображують правіше (мал. 1), а менше з двох чисел — лівіше (мал. 2).



$a > b$

Мал. 1



$a < b$

Мал. 2

Числова нерівність може бути *правильною* або *неправильною*. Наприклад, $\frac{5}{11}\geq 1$ і $2\cdot\frac{3}{7}+1<\frac{5}{7}$ — неправильні числові нерівності, а $\frac{5}{13}>0$ і $-\frac{2}{5}+1\leq 1{,}3$ — правильні числові нерівності.

Задача 2. Доведіть, що нерівність $(a+2)a<(a+1)^2$ є правильною за будь-якого значення числа a.

Розв'язання. Визначимо знак різниці лівої та правої частин даної нерівності:

$$(a+2)a-(a+1)^2=a^2+2a-a^2-2a-1=-1<0.$$

Оскільки різниця лівої та правої частин нерівності від'ємна, то, яким би не було число a, ліва частина нерівності завжди набуватиме меншого значення, ніж права, що й треба було довести.

Нерівності використовують як в алгебрі, так і в геометрії. Наприклад, із курсу геометрії 7-го класу ви знаєте, що існування трикутника з відомими довжинами сторін можна встановити, не будуючи його. Для цього достатньо застосувати нерівність трикутника.

2. ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Сформулюємо основні властивості числових нерівностей. Будемо вважати, що числа a, b і c — будь-які дійсні числа.

Суть першої властивості числових нерівностей є очевидною:

якщо $a > b$, то $b < a$.

Цю властивість числових нерівностей називають властивістю *симетричності*.

Доведемо інші властивості числових нерівностей.

ТЕОРЕМА 1 **Для будь-яких чисел a, b і c, якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.**

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $a < b$, $b < c$.
Довести: $a < c$.
Доведення. За умовою теореми:
$a < b$, звідси $a - b < 0$. Отже, $a - b$ — від'ємне число;
$b < c$, звідси $b - c < 0$. Отже, $b - c$ — від'ємне число.
Сума двох від'ємних чисел є числом від'ємним, тому:

$$(a - b) + (b - c) =$$
$$= a - b + b - c =$$
$$= a - c < 0.$$

А це означає, за означенням, що $a < c$, що й вимагалося довести.

Цю властивість числових нерівностей називають властивістю *транзитивності*.

Задача 3. Порівняйте значення числових виразів: $3b - 4$ і $3a - 4$, якщо $a > b$.

Розв'язання. За умовою задачі, $a > b$, тобто $a - b > 0$. Знайдемо різницю даних виразів:

$$(3b - 4) - (3a - 4) =$$
$$= 3b - 4 - 3a + 4 =$$
$$= 3b - 3a = 3 \cdot (b - a) =$$
$$= -3 \cdot (a - b) < 0.$$

Отже, $3b - 4 < 3a - 4$.

Ви вже знаєте, що для будь-яких чисел a, b і c, якщо $a = b$, то $a + c = b + c$.

? Чи мають аналогічну властивість числові нерівності? Так.

ТЕОРЕМА 2 **Для будь-яких чисел a, b і c, якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.**

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $a < b$.
Довести: $a + c < b + c$.
Доведення. За умовою теореми, $a < b$, тобто $a - b < 0$. Визначимо знак різниці $(a + c) - (b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b < 0.$$

Отже, $(a + c) - (b + c) < 0$. Звідси, за означенням, одержуємо: $a + c < b + c$, що й вимагалося довести.

Зверніть увагу:
знак нерівності **не зміниться**, якщо до обох її частин додати одне й те саме число.

Чи зміниться знак нерівності, якщо помножити обидві частини числової нерівності на будь-яке число? Відповідь на це запитання дають теореми 3 і 4.

ТЕОРЕМА 3 **Для будь-яких чисел a і b, якщо $a < b$ і c — будь-яке додатне число, то $a \cdot c < b \cdot c$.**

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $c > 0$, $a < b$.
Довести: $a \cdot c < b \cdot c$.
Доведення. За умовою теореми $a < b$, тобто $a - b < 0$. Добуток від'ємного й додатного чисел є числом від'ємним, тому:

$$a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c < 0$$

А це означає, за означенням, що $a \cdot c < b \cdot c$, що й вимагалося довести.

Зверніть увагу:
знак нерівності не зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число.

ТЕОРЕМА 4 **Для будь-яких чисел a і b, якщо $a < b$ і c — будь-яке від'ємне число, то $a \cdot c > b \cdot c$.**

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $c < 0$, $a < b$.
Довести: $a \cdot c > b \cdot c$.
Доведення. За умовою теореми $a < b$, тобто $a - b < 0$. Добуток двох від'ємних чисел є числом додатним, тому:

$$a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c > 0.$$

А це означає, за означенням, що $a \cdot c > b \cdot c$, що й вимагалося довести.

Зверніть увагу:
знак нерівності зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число.

Чи можна додавати або множити числові нерівності? Так. Відповідні дії спираються на теореми 5–7.

ТЕОРЕМА 5 **Для будь-яких чисел a, b, c і d, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.**

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $d \in R$, $a < b$, $c < d$.
Довести: $a + c < b + d$.
Доведення. За умовою теореми $a < b$, $c < d$.
Тоді за теоремою 2:

$$a + c < b + c,$$
$$c + b < d + b$$
або $b + c < b + d$.

Звідси за теоремою 1: $a + c < b + d$, що й вимагалося довести.

Зверніть увагу:
можна додавати правильні нерівності одного знака.

ТЕОРЕМА 6 **Для будь-яких додатних чисел a, b, c і d, якщо $a < b$ і $c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$.**

Дано: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $a < b$, $c < d$.
Довести: $a \cdot c < b \cdot d$.
Доведення. За умовою теореми $a < b$, $c < d$.
Тоді за теоремою 3:

$$a \cdot c < b \cdot c,$$
$$c \cdot b < d \cdot b$$
або $b \cdot c < b \cdot d$.

Звідси за теоремою 1: $a \cdot c < b \cdot d$, що й вимагалося довести.

Зверніть увагу:
можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні числа.

ТЕОРЕМА 7 **Для будь-яких додатних чисел a і b, якщо $a < b$, то $a^n < b^n$, де n — будь-яке натуральне число.**

Дано: $a > 0$, $b > 0$, $n \in N$, $a < b$.
Довести: $a^n < b^n$.
Доведення. За умовою теореми $a < b$.

Тоді за теоремою 6:

$$a \cdot a < b \cdot b,$$

тобто $a^2 < b^2$.

Аналогічно множимо ще раз:

$$a^2 \cdot a < b^2 \cdot b,$$

тобто $a^3 < b^3$

і т. д.

На n–му кроці одержимо: $a^n < b^n$, що й вимагалося довести.

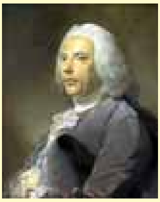
Зверніть увагу:
можна **підносити до того самого степеня з натуральним показником** обидві частини правильної нерівності, членами якої є **додатні** числа.

Дізнайтеся більше

1. Томас Херріот (англ. Thomas Harriot) (1560–1621) — англійський астроном, математик, етнограф та перекладач; закінчив Оксфордський університет. Відомий завдяки тому, що удосконалив алгебраїчну символіку, а також придумав загальноприйняті нині знаки для операцій порівняння: «>» (більше) та «<» (менше).

Томас Херріот

2. Знаки «≥» (більше або дорівнює) та «≤» (менше або дорівнює) придумав та почав використовувати **П'єр Бугер** (Bouguer) (1698–1758) — французький математик та астроном. Разом із Савері винайшов геліометр — прилад для вимірювання діаметрів сонця, місяця та інших планет.



П'єр Бугер

Пригадайте головне

1. Що таке числова нерівність? Наведіть приклади.
2. У якому випадку число a називають більшим за число b; меншим від числа b?

3. Яка числова нерівність є правильною; неправильною?
4. Сформулюйте властивість транзитивності числових нерівностей.
5. Сформулюйте теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин числової нерівності.
6. Сформулюйте теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме додатне число.
7. Сформулюйте теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме від'ємне число.
8. Сформулюйте теорему про додавання числових нерівностей.
9. Сформулюйте теорему про множення числових нерівностей.

Розв'яжіть задачі

1'. Чи є правильною дана числова нерівність:

1) $3>\frac{20}{7}$; 3) $\frac{5}{2}\geq 2{,}5$; 5) $\frac{18}{7}\geq 3$;

2) $\frac{5}{3}>2$; 4) $4\leq\frac{41}{8}$; 6) $\frac{18}{7}\geq 2$?

2'. Відомо, що $a<b$, а $b<c$. Яке з чисел більше: a чи c?

3'. Відомо, що $a>b$, а $b>c$. Яке з чисел більше: a чи c?

4'. Укажіть правильне твердження:
1) знак нерівності зміниться, якщо до обох її частин додати одне й те саме число;
2) знак нерівності зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число;
3) знак нерівності зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число;
4) знак нерівності не зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме додатне число;
5) знак нерівності не зміниться, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число;
6) знак нерівності не зміниться, якщо до обох її частин додати одне й те саме число.

5'. Укажіть правильне твердження:
1) можна додавати правильні нерівності різних знаків;
2) можна додавати правильні нерівності одного знака;
3) можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні числа;

4) можна множити правильні нерівності різних знаків, членами яких є додатні числа;
5) можна множити правильні нерівності одного знака, членами яких є додатні й від'ємні числа.

6°. Чи є дана нерівність правильною:

1) $\frac{3}{8} > -1$; 3) $1\frac{6}{7} \le \frac{13}{7}$; 5) $-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5}$;

2) $\frac{4}{3} < \frac{4}{5}$; 4) $-\frac{3}{8} > -\frac{8}{3}$; 6) $1\frac{2}{7} \ge \frac{11}{7}$?

Відповідь поясніть.

7°. Чи є дана нерівність правильною:

1) $\frac{5}{6} > \frac{6}{5}$; 2) $-\frac{5}{6} > -\frac{6}{5}$; 3) $2\frac{2}{3} \le \frac{8}{3}$?

Відповідь поясніть.

8°. Розмістіть у порядку зростання числа:
0; 0,001; 0,01; 0,0001; 0,0011; 1,00001; 0,011; 0,1; 0,11.

9°. Розмістіть у порядку спадання числа:
0,9; 0,099; 0,09; 0,99; 0,009; 0,0099; 1.

10°. Яке з чисел найбільше, а яке — найменше:
2,23; 2,233; 2,223; 2,33; 2,32; 3,22; 3,23; 3,32; 2,323?

11°. Розмістіть у порядку зростання числа:
1; 1,001; 1,01; 1,0001; 0,1; 1,0011; 1,011; 1,1; 1,11.

12°. Дано нерівність $\frac{3}{5} < \frac{7}{3}$. Виконайте вказану дію:

1) обидві частини нерівності помножте на 2;
2) обидві частини нерівності помножте на −3;
3) до обох частини нерівності додайте 2;
4) до обох частини нерівності додайте −3;
5) обидві частини нерівності піднесіть до квадрата.

13°. Яке з чисел більше — *a* чи *c*, якщо:

1) $a - c = 1{,}2$; 4) $c - a = 1{,}8$; 7) $c - a = (-1)^3$;

2) $a - c = -2{,}5$; 5) $c - a = -0{,}5$; 8) $a - c = (-0{,}5)^2$;

3) $a - c = 0$; 6) $c - a = 0$; 9) $c - a = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$?

14°. Яке з чисел більше — *a* чи *b*, якщо:

1) $a - b = 0{,}99$; 3) $b - a = (-2)^3$;

2) $b - a = 0$; 4) $a - b = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{17}\right)$?

15°. Відомо, що $a < b$. Чи може значення виразу $a - b$ дорівнювати:

1) $4,4$;
2) -3;
3) 0;
4) 11^2;
5) $(-12)^2$;
6) $(-0,1)^3$?

16°. Відомо, що $x > y$. Чи може значення виразу $x - y$ дорівнювати:

1) $3,1$;
2) 0;
3) $(-5)^3$;
4) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$;
5) $-9 \cdot 0,1$;
6) $\sqrt{9}$?

17°. Відомо, що $d > c$. Чи може значення виразу $c - d$, дорівнювати:

1) 1;
2) 0;
3) $(-4)^3$;
4) $4,1 \cdot (-0,1)$;
5) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$;
6) $-\dfrac{3}{5} \cdot 1\dfrac{2}{3}$?

18°. Яка з точок — $A(x)$ чи $B(y)$ на координатній прямій розміщена лівіше, якщо:

1) $x = 3$, $y = -3$;
2) $x = -3$, $y = 3$;
3) $x = 3$, $y = 0$;
4) $x = 0$, $y = -3$;
5) $x = 0,01$, $y = 0,99$;
6) $x = -0,1$, $y = -0,9$?

19°. Яка з точок — $M(x)$ чи $N(y)$ на координатній прямій розміщена правіше, якщо:

1) $x = -5$, $y = 0$;
2) $x = -5$, $y = 5$;
3) $x = 0$, $y = 5$;
4) $x = 5$, $y = -5$;
5) $x = 0,5$, $y = 0,55$;
6) $x = -0,5$, $y = -0,55$?

20°. Яка з точок — $C(x)$ чи $D(y)$ на координатній прямій розміщена правіше, якщо:

1) $x = -9$, $y = 9$;
2) $x = 9$, $y = 0$;
3) $x = 0$, $y = -9$;
4) $x = 0,9$, $y = -0,9$;
5) $x = 0,99$, $y = 0,9$;
6) $x = -0,99$, $y = -0,9$?

21°. Відомо, що $a > b$. Порівняйте вирази:

1) $3a$ і $3b$;
2) $-5a$ і $-5b$;
3) $0,1b$ і $0,1a$;
4) $\dfrac{2a}{3}$ і $\dfrac{2b}{3}$;
5) $-\dfrac{4}{7}b$ і $-\dfrac{4}{7}a$;
6) $\sqrt{3}a$ і $\sqrt{3}b$.

22°. Відомо, що $m < n$. Порівняйте вирази:

1) $m + 2$ і $2 + n$;
2) $m - 5$ і $n - 5$;
3) $2m + 1$ і $2n + 1$;
4) $-5m + 7$ і $7 - 5n$.

23°. Відомо, що $x<y$. Порівняйте вирази:
1) $3x-1$ і $-1+3y$; 2) $-4y+5$ і $5-4x$.

24. Назвіть три які-небудь цілі числа, позначені буквою m, за яких нерівність буде правильною:
1) $m-4>m+3$;
2) $3m-1<3m+1$;
3) $3m<2m$.

25. Порівняйте значення виразів:
1) $2m-1$ і $2m+3$; 3) $2(0,5-2m)$ і $1-4m$;
2) $3m-5$ і $4+3m$; 4) $3(0,2m-1)$ і $2(0,3m-1,6)$.

26. Порівняйте значення виразів $4m+1$ і $5m-1$, якщо:
1) $m=3$; 3) $3m=4$; 5) $-2m=0,4$;
2) $m=0$; 4) $6m=7$; 6) $-0,1m=-0,7$.

27. Порівняйте значення виразів:
1) $1-2n$ і $-2n+0,5$; 2) $3(2m-1)$ і $2(2+3m)$.

28. Доведіть, що за будь-якого значення a нерівність є правильною:
1) $a(a-2)<(a-1)^2$; 4) $a(a-1)(a+1)>-1-a(1-a^2)$;
2) $(a-1)(a+2)<a(a+1)$; 5) $36a-6a^2\le 54$;
3) $(a+5)(a-1)<(a+2)^2$; 6) $24a-5a^2\le 20+4a$.

29. Доведіть, що за будь-яких значень m і n нерівність є правильною:
1) $m^2+3mn+n^2\ge mn$; 3) $m^2+9n^2\ge 6mn$;
2) $m^2-2mn+2n^2\ge 2mn-2n^2$; 4) $4m^2+25n^2\ge 20mn$.

30. Доведіть, що за будь-яких значень m і n нерівність є правильною:
1) $(1+m)^2>(m+6)(m-4)$; 2) $30mn\le 9m^2+25n^2$.

31*. Відомо, що $a<b$. Порівняйте вирази:
1) a^2 і ab;
2) $(a+1)^3$ і $(b+1)^3$;
3) $(a+2)(b-1)$ і $(a-2)(b+1)$.

32*. Доведіть нерівності, не користуючись калькулятором:
1) $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$;
2) $\sqrt{20}-\sqrt{6}<\sqrt{21}-\sqrt{5}$;
3) $\sqrt{38}-\sqrt{15}>6-\sqrt{14}$;
4) $\sqrt{140}-\sqrt{170}<-1$.

33*. Між якими цілими числами розташоване число:

1) $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{1-\sqrt{39}}{4}$; 3) $2+\sqrt{17}$?

34*. Доведіть, що за будь-яких значень a і b нерівність є правильною:

1) $a^2+b^2+9\geq ab+3a+3b$;
2) $a^3+8>(a+2)(a-1)^2$;
3) $2a^2+2b^2+2ab+2a-2b+2\geq 0$;
4) $5a^2+5b^2-2ab+4a-4b+2\geq 0$;
5) $8a^2+2a^3\leq a^4+16$.

Проявіть компетентність

35. Незалежна Україна брала участь у п'яти літніх і чотирьох зимових Паралімпійських іграх. Уперше країна виступала на іграх 1996 р. й відтоді не пропустила жодної Паралімпіади. Досягнення Незалежної України на літніх Паралімпійських іграх подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Медалі української команди на літніх Паралімпійських іграх

Ігри	Золото	Срібло	Бронза	Загалом	Місце
1996, Атланта	1	4	2		44
2000, Сідней	3	20	14		35
2004, Афіни	24	12	19		6
2008, Пекін	24	18	32		4
2012, Лондон	32	24	28		4
2016, Ріо-де-Жанейро	41	37	39		3
Загалом					

1. Порахуйте загальну кількість медалей кожного ґатунку та порівняйте, яких медалей Україна здобула найбільше, а яких — найменше. Запишіть ці числа в порядку зростання; запишіть відповідні числові нерівності.

2. Порахуйте загальну кількість медалей за кожний рік проведення олімпіади та порівняйте, у якому році Україна здобула найбільше медалей, а в якому — найменше. Запишіть усі числа в порядку спадання; запишіть відповідні числові нерівності.

3. Порахуйте, на скільки позицій Україна піднялась у командному рахунку в 2016 р. порівняно з 1996 р.; з 2004 р.

4. Знайдіть суму всіх здобутих Україною медалей у 1996 р., 2004 р., 2012 р., а потім у 2000 р., 2008 р., 2016 р. Порівняйте, яка сума більша, і на скільки більша.

Задачі на повторення

36. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{-3}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{3x-5}{7}$; 3) $y=1-(x-1)^2$.

37. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-1)^2-4x^2=0$; 3) $8x^3-12x^2+6x-1=0$.

2) $3x^3-2x^2-x=0$;

§ 2 Нерівності зі змінною. Рівносильні нерівності

1. НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННОЮ

Ви вже знаєте, що таке числова нерівність та які її властивості. Проте на практиці нерідко доводиться складати та розв'язувати не лише числові нерівності, а й нерівності з однією чи кількома змінними. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Шкільній їдальні потрібно закупити на тиждень 12 кг гречки. Для покупки виділено 400 грн. Як визначити найбільшу ціну гречки, за якою можна придбати потрібну масу крупи?

Ви знаєте, що ціна гречки коливається залежно від виробника й націнок, які встановлює торговельна установа. У термінах математики це означає, що ціна 1 кг гречки є *змінною*. Позначимо її x. Тоді вартість гречки, яку необхідно придбати для їдальні на тиждень, дорівнює $12x$. Отже, математичною моделлю ситуації, яку ми розглядаємо, є нерівність:

$$12x \le 400.$$

В одержаній нерівності x — змінна, тому таку нерівність називають *нерівністю зі змінною*. Якщо замість x підставити, наприклад, число 30, то одержимо правильну числову нерівність: $12 \cdot 30 < 400$, оскільки $360 < 400$. Тому число 30 є *розв'язком даної нерівності*. Якщо ж замість x ми підставимо число 40, то одержимо неправильну числову нерівність: $12 \cdot 40 > 400$, оскільки $480 > 400$. Тому число 40 не є розв'язком даної нерівності. Інакше можна сказати: число 30 *задовольняє нерівність* $12x \le 400$, а число 40 — не задовольняє її.

Розв'язком нерівності з однією змінною **називається таке значення змінної, яке задовольняє дану нерівність.**

Як ви вже здогадалися, нерівність $12x \le 400$ задовольняє не лише число 30, а й багато інших чисел. Серед них, наприклад: 0,01; 1; 2; 3; 33; 33,3; 33,33 тощо. Кожне із цих чисел є розв'язком даної нерівності, а всі розв'язки утворюють *множину розв'язків* цієї *нерівності*. У нерівності $12x \le 400$ множина її розв'язків містить усі дійсні числа, які менші або дорівнюють $\frac{400}{12}$, тобто $x \le 33\frac{1}{3}$.

Розв'язати нерівність **— означає знайти множину її розв'язків або ж показати, що розв'язків немає.**

Наприклад, нерівність $x^2 < -5$ не має розв'язків. Справді, яке б число ми не підставили замість змінної x, завжди одержимо неправильну числову нерівність, оскільки квадрат будь-якого числа є числом невід'ємним.

Повернемося до ситуації з покупкою гречки для шкільної їдальні. Знайшовши множину розв'язків нерівності $12x \le 400$, можемо визначити найбільшу ціну гречки, за якою можна придбати потрібну масу крупи, а саме: ціна 1 кг гречки має не перевищувати 33 грн 33 к.

? Як же знайти множину розв'язків нерівності зі змінною? Поміркуємо.

Ви знаєте, що корені деяких рівнянь можна було знайти шляхом добору. Для нерівностей зі змінною такий спосіб навряд чи придатний. Справді, тоді довелось би перебирати всі дійсні числа чи будь-яку підмножину дійсних чисел. А це неможливо, бо таких чисел — безліч. Отже, для розв'язування нерівностей потрібний спеціальний підхід.

2. РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Під час розв'язування рівнянь застосовують їх рівносильні перетворення. За їхньою допомогою від заданого рівняння переходять до рівносильного йому рівняння, але більш простого, від одержаного рівняння — до ще більш простого і т.д., допоки не одержать корінь рівняння.

? Чи існують аналогічні рівносильні перетворення для нерівностей зі змінною? Так. Але ці перетворення мають свої особливості.

Дві нерівності називаються *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки або обидві не мають розв'язків.

Наприклад, нерівності $x - 4 > 0$ і $x - 3 > 1$ є рівносильними, оскільки кожну з них задовольняють усі числа, більші від числа 4, і не задовольняє будь-яке інше число. Тобто в цих нерівностей одні й ті самі розв'язки. Нерівності $x^2 + 5 < 0$ і $x^2 < -5$ також є рівносильними. Вони обидві не мають розв'язків.

Сформулюємо основні властивості рівносильності нерівностей.

Властивості рівносильності нерівностей.

1. Якщо до (від) обох частин нерівності додати (відняти) одне й те саме число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Наслідок. Якщо в нерівності перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Усі перетворення нерівностей, які здійснюються на основі властивостей рівносильності, вважають *рівносильними перетвореннями нерівностей*.

Задача 1. Чи є рівносильними дані нерівності:

1) $\dfrac{3x+4}{5}>1$ і $x>\dfrac{1}{3}$;

2) $x^2+y^2<0$ і $(x+y)^2\le 0$?

Розв'язання.

1. Спростимо першу нерівність, використовуючи рівносильні перетворення нерівностей:

$$\frac{3x+4}{5}>1 \;\Big|\cdot 5 \text{ (властивість 2)},$$

$$3x+4>5 \;\Big|-4 \text{ (властивість 1)},$$

$$3x>1 \;\Big|\cdot\frac{1}{3} \text{ (властивість 2)},$$

$$x>\frac{1}{3}.$$

Як бачимо, застосувавши рівносильні перетворення, ми звели першу нерівність до другої, а значить, дані нерівності мають ті самі розв'язки. Отже, дані нерівності є рівносильними.

2. Нерівність $x^2+y^2<0$ не має розв'язків, оскільки $x^2\ge 0$ і $y^2\ge 0$ за будь-яких значень x і y. Нерівність $(x+y)^2\le 0$ має безліч розв'язків. Справді, будь-яка пара протилежних чисел задовольняє цю нерівність. Отже, дані нерівності не є рівносильними за означенням.

Зверніть увагу:
рівносильними є нерівності:

- $a+b>c$ і $a>c-b$;
- $a>c$ і $a\cdot b>c\cdot b$, де $b>0$;
- $a>c$ і $a\cdot b<c\cdot b$, де $b<0$.

? Чи існують пари рівносильних нерівностей зі знаком «<»? Так. Вони аналогічні наведеним. Запишіть їх самостійно.

Крім звичайних нерівностей зі змінними, при розв'язуванні деяких завдань використовують *подвійні нерівності*. Розглянемо приклад.

Задача 2. Для закупівлі 10 м^2 плитки сім'я може виділити зі свого бюджету від 500 грн до 1000 грн. За якою ціною сім'я зможе купити плитку, не виходячи за межі виділеної суми?

Розв'язання. Умову задачі можна записати так: $500 \le 10x \le 1000$, де x — ціна 1 м^2 плитки. Це подвійна нерівність. Застосувавши рівносильні перетворення до цієї нерівності, одержимо:

$$500 \le 10x \le 1000 \;\big|\; :10,$$
$$50 \le x \le 100.$$

Отже, сім'я зможе купити плитку, ціна якої становить від 50 грн до 100 грн за 1 м^2.

Задача 3. Оцініть з точністю до одиниць площу прямокутного трикутника з катетами $\sqrt{2}$ і $\sqrt{5}$.

Розв'язання. Площу прямокутного трикутника знаходимо за формулою: $S = \frac{ab}{2}$. За умовою задачі, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, тому $S = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Очевидно, що $3 < \sqrt{10} < 4$, тоді $\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{4}{2}$, $1{,}5 < \frac{\sqrt{10}}{2} < 2$. З точністю до одиниць одержимо: $1 < \frac{\sqrt{10}}{2} < 2$.

Задачі, аналогічні до задач 2 і 3, ще називають задачами на *оцінювання значення якоїсь величини*.

Зверніть увагу:
рівносильні перетворення подвійних нерівностей здійснюють так само, як і звичайних нерівностей — застосовуючи властивості рівносильності нерівностей.

Дізнайтеся більше

Глускін Лазар Матвійович (20 березня 1923 р. — 15 квітня 1985 р.) — український математик-алгебраїст; професор, доктор фізико-математичних наук з 1955 р. Автор понад 50 наукових робіт у галузі сучасної алгебри. Результати його досліджень суттєво вплинули на становлення теорії алгебри напівгруп та перетворення її на самостійну область сучасної алгебри. Працював у Харківському університеті, Комунарському гірничо-металургійному інституті, Харківському інституті радіоелектроніки. Л. М. Глускін брав участь у написанні чотиритомної «Історії вітчизняної математики». Про високий міжнародний авторитет Л. М. Глускіна свідчить той факт, що багато років він був членом редколегій різних міжнародних журналів.

Глускін Л. М.

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
2. Що називається розв'язком нерівності зі змінною?
3. Що означає розв'язати нерівність зі змінною?
4. Які нерівності називають рівносильними?
5. Сформулюйте властивості рівносильності нерівностей.
6. Наведіть приклади подвійних нерівностей.

Розв'яжіть задачі

38'. Оберіть правильне твердження:

1) якщо від обох частин нерівності віднімемо одне й те саме число, а знак нерівності змінимо на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній;
2) якщо в нерівності перенесемо доданок з однієї частини в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній;
3) якщо обидві частини нерівності помножимо на одне й те саме від'ємне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній;
4) якщо обидві частини нерівності поділимо на одне й те саме додатне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній;
5) якщо обидві частини нерівності помножимо на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

39'. Назвіть будь-які три числа, що є розв'язками нерівності:

1) $x<5$; 3) $x^2>1$;

2) $x\le -0{,}1$; 4) $x^3\ge -\frac{1}{2}$.

40'. Яка з нерівностей є рівносильною нерівності $x^2+1\le 2$:

1) $x^2\le 3$; 3) $x^2<1$; 5) $x^2\le -1$?

2) $x^2\ge 1$; 4) $x^2\le 1$;

41'. Яка з нерівностей є рівносильною нерівності $1\le x-1\le 2$:

1) $1\le x\le 2$; 3) $0\le x\le 1$;

2) $2\le x\le 3$; 4) $-2\le x\le -1$?

42°. Дано нерівність $x^2-5x+4\le 0$. Чи є число a розв'язком цієї нерівності, якщо:

1) $a=0$; 3) $a=1$; 5) $a=2$;

2) $a=-1$; 4) $a=5$; 6) $a=4$?

43°. Чи є число -1 розв'язком нерівності:

1) $x>-1$; 3) $x\ge 5$; 5) $x^2+2>0$;

2) $x<2$; 4) $x-3\le 0$; 6) $x^3-1>1$?

44°. Чи має розв'язки за будь-яких значень змінної x нерівність:

1) $x^2<-3$; 3) $x^2\ge -5$; 5) $x^2+2<0$;

2) $x^2<2$; 4) $x^3\le 0$; 6) $0x^2+1<1$?

45°. Чи є число -2 розв'язком нерівності:

1) $x<5$; 3) $x\ge 0$; 5) $x^2+1>0$?

2) $x>-2$; 4) $x+1\le 0$;

46°. Чи є рівносильними нерівності:

1) $\frac{x}{3}<-2$ і $x>-6$; 4) $1-\frac{x}{2}<1$ і $\frac{x}{2}<0$;

2) $\frac{x+1}{-2}<1$ і $x+1>-2$; 5) $3x^2-5<1$ і $x^2<3$;

3) $\frac{5x^3}{-3}\le 1$ і $x^3\ge -0{,}6$; 6) $-4x^2+1\le -5$ і $-4x^2\ge 6$?

47°. Чи є рівносильними нерівності:

1) $2x-1<-1$ і $x>0$; 3) $\frac{2x^4}{-3}\le 1$ і $x^4\ge -1{,}5$?

2) $\frac{x-1}{3}<-1$ і $x-1>-3$;

48°. Дано: $5\le a\le 8$. Оцініть значення виразу:

1) $2a$; 3) $a-2$;

2) $a+2$; 4) $2-a$.

49°. Дано: $3 \le b \le 5$. Оцініть значення виразу:

1) $2b$;
3) $\frac{b}{5}$;
2) $-3b$;
4) b^2.

50°. Дано: $2 \le x \le 6$. Оцініть значення виразу:

1) $3x$;
3) $-3x$;
2) $x + 3$;
4) x^2.

51. Чи має розв'язки за будь-яких значень змінної x нерівність:

1) $\frac{x}{3} > -1$;
3) $x^3 \le -5$;
5) $x^2 + 2 > 0$;
2) $\frac{x^2}{-2} < 2$;
4) $(x-3)^2 \ge 0$;
6) $(x^3 - 1)^2 > 1$?

52. Які з нерівностей не мають розв'язків, якщо $x \ge 0$:

1) $\frac{3x}{4} < -2$;
3) $x^3 > -5$;
5) $x^6 + 5 < 0$;
2) $\frac{x^2}{5} < 0$;
4) $(x-3)^2 \le 0$;
6) $(x+1)^5 < -1{,}5$?

53. Чи має розв'язки за будь-яких значень змінної x нерівність:

1) $x^2 - 1 < 0$;
3) $-5 - x^2 < 0$;
2) $3x^2 + 4 > 0$;
4) $4x^3 - 1 \le 0$?

54. Чи є рівносильними нерівності:

1) $\frac{3x-1}{3} < -1$ і $x > -\frac{2}{3}$;
3) $\frac{-5x-1}{-4} < 4$ і $x < 3$?
2) $\frac{5x+1}{-3} < 3$ і $x > -2$;

55. Чи є рівносильними нерівності:

1) $\frac{2x-1}{3} < 1$ і $x < 2$;
3) $\frac{-2x+4}{-3} < 2$ і $x > 2$?
2) $\frac{3x+1}{-2} < 4$ і $x > -3$;

56. Дано: $0{,}5 \le a \le 3{,}2$. Оцініть значення виразу:

1) $2a - 1$;
5) $3 - 2a$;
2) $3a + 2$;
6) $\frac{a-1}{2}$;
3) $5a - 2$;
7) $\frac{4a+1}{3}$;
4) $4 - 10a$;
8) $\frac{1-3a}{4}$.

57. Дано: $1,2 \le b \le 2,5$. Оцініть значення виразу:

1) $3b - 2$;
2) $2b + 1$;
3) $3 - 10b$;
4) $\frac{1-4b}{5}$.

58. Дано: $-1 \le a \le 3$, $2 \le b \le 5$. Оцініть значення виразу:

1) $2a + b$;
2) $3a + 2b$;
3) $5a - 2b$;
4) $4b - 3a$;
5) $\frac{a+b}{2}$;
6) $\frac{a-b}{2}$;
7) $\frac{b-a}{3}$;
8) $\frac{2b-3a}{5}$;
9) $a \cdot b$;
10) $3a \cdot 2b$;
11) $(4a + 2b) : 11$;
12) $(4b - 3a) : 11$.

59. Дано: $-1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 4$. Оцініть значення виразу:

1) $2y + x$;
2) $4y - 3x$;
3) $y - 2x$;
4) $\frac{x+y}{2}$;
5) $\frac{y-x}{4}$;
6) $\frac{2x-3y}{5}$;
7) $2x \cdot 3y$;
8) $(3x - 2y) : 2$.

60. Сторона квадрата a набуває значень: $3,5 \le a \le 4,5$. Оцініть периметр і площу квадрата.

61. Сторони прямокутника a і b набувають значень: $3,1 \le a \le 3,5$, $2,5 \le b \le 2,8$. Оцініть периметр і площу прямокутника.

62. Сторона куба a набуває значень: $2 \le a \le 3$. Оцініть периметр і площу однієї грані куба та його об'єм.

63*. Запишіть нерівність у вигляді подвійної нерівності:

1) $|x| \le 3$;
2) $|x-5| \le 1$;
3) $|2x+3| \le 5$;
4) $\left|\frac{x}{4}\right| \le 1$;
5) $\left|5-\frac{x}{3}\right| \le 1$;
6) $|7-3x| \le 0,5$.

64*. Доведіть, що за будь-яких a і b виконується нерівність:

1) $(a^2+9)(b^2+16)\ge 24ab$;

2) $(a^2+25)(b^2+64)\ge 80ab$;

3) $(ab+1)(4ab+9)\ge 7ab$;

4) $(8ab+5)(2ab+5)\ge 10ab$.

Проявіть компетентність

65. На пачці клею для шпалер зазначено, що ним можна поклеїти від шести до дев'яти рулонів. Скільки пачок клею потрібно купити татові, якщо для першої кімнати він придбав 5 рулонів шпалер, для другої — 7 рулонів, а для третьої — 8 рулонів?

66. Сім'я із трьох осіб зібралася на відпочинок. Добиратися до місця призначення вони планували літаком. За правилами перевезення багажу, на борт літака кожний міг узяти не більше 8 кг. У кожного члена сім'ї була своя валіза масою 2,8 кг. Мама поклала у свою валізу 3 кг речей, тато — 2,5 кг, а донька — 2,7 кг. Вони ще хотіли взяти в подарунок друзям 3 сувеніри по 0,5 кг кожний і цукерки.
1. Чи помістяться всі три сувеніри в одну валізу? Якщо так, то чия це може бути валіза — мами, тата чи доньки?
2. Якщо кожний член сім'ї покладе у свою валізу по одному сувеніру, то по скільки кілограмів цукерок вони зможуть узяти?
3. Якщо лише мама й донька покладуть у свої валізи по одному сувеніру, то скільки кілограмів цукерок зможе взяти сім'я в такому випадку?

Задачі на повторення

67. Обчисліть:

1) $(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-15$;

2) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

68. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-1|=3$;

2) $|5-3x|=4$;

3) $\left|\frac{4x-1}{5}\right|=4$.

§ 3 Числові проміжки

1. ЩО ТАКЕ ЧИСЛОВИЙ ПРОМІЖОК

Із курсу алгебри 8-го класу ви вже знаєте, що таке множина, її підмножина, елементи множини, порожня множина. Також ви знаєте основні числові множини: натуральні числа; цілі числа; раціональні числа; ірраціональні числа; дійсні числа. Розв'язуючи якусь нерівність, ми одержуємо *множину розв'язків* цієї нерівності. Така множина є числовою множиною.

Задача 1. Знайдіть множину розв'язків нерівності $|x^2-1| \le 0$.

Розв'язання. Оскільки модуль будь-якого числа є числом невід'ємним, то розв'язками даної нерівності можуть бути лише ті числа, за яких $x^2-1=0$, а саме: –1 та 1. Отже, множину розв'язків даної нерівності утворюють лише два числа –1 та 1.

Задача 2. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{5}{3}x > 1$.

Розв'язання. Застосувавши рівносильні перетворення до даної нерівності, одержимо:

$$\frac{5}{3}x > 1 \,\Big|\cdot\frac{3}{5},$$

$$x > \frac{3}{5}, \text{ тобто } x > 0{,}6.$$

Отже, множину розв'язків даної нерівності утворюють усі дійсні числа, більші за 0,6.

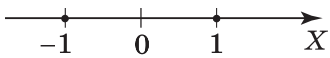
? Що спільного й відмінного мають множини розв'язків нерівностей у задачах 1 і 2? Поміркуємо.

У кожній з розглянутих задач множина розв'язків заданої нерівності є підмножиною дійсних чисел. Але в задачі 1 ця підмножина містить лише два числа. А от у задачі 2 до цієї підмножини входять усі дійсні числа, більші за 0,6. Таку підмножину дійсних чисел називають *числовим проміжком*. Одержаний у задачі 2 числовий проміжок записують так: $(0{,}6; +\infty)$ (читають: «від 0,6 до плюс нескінченності»). Іноді в записі «$+\infty$» знак «+» опускають, але мають його на увазі.

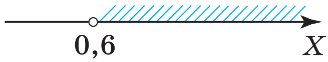
Зверніть увагу:
розв'язавши нерівність, відповідь записують так:
- $x \in (0{,}6; +\infty)$, якщо множина розв'язків є числовим проміжком;
- $x \in \{-1; 1\}$, якщо множина розв'язків містить лише окремі числа й не є проміжком;
- $\varnothing$, якщо нерівність не має розв'язків.

2. ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПРОМІЖКІВ НА КООРДИНАТНІЙ ПРЯМІЙ

Подивіться на малюнки 3 і 4. На малюнку 3 ви бачите, як на координатній прямій подано множину розв'язків нерівності $|x^2 - 1| \le 0$ (задача 1), а на малюнку 4 — числовий проміжок $(0{,}6; +\infty)$, що є множиною розв'язків нерівності $\frac{5}{3}x > 1$ (задача 2).



Мал. 3



Мал. 4

Чому на малюнку 3 числа –1 і 1 позначені зафарбованими кружечками, а на малюнку 4 число 0,6 позначено незафарбованим кружечком (так званим «виколотим» кружечком)? Поміркуємо.

На малюнку 3 кожне позначене число є розв'язком нерівності $|x^2 - 1| \le 0$, тобто задовольняє цю нерівність. На малюнку 4 число 0,6 не є розв'язком нерівності $\frac{5}{3}x > 1$, але будь-яке наступне дійсне число з проміжку $(0{,}6; +\infty)$, яке як завгодно мало відрізняється від числа 0,6, задовольняє цю нерівність. Отже, число 0,6, хоч і не є розв'язком цієї нерівності, але начебто показує «початок відліку» тих дійсних чисел (у бік зростання), що є розв'язками даної нерівності. Саме тому на координатній прямій число 0,6 позначено не зафарбованим, а «виколотим» кружечком.

Загалом, числові проміжки можуть містити свої кінці або ж не містити їх. Це позначають так:

$(1;3)$ — обидва кінці не належать проміжку (мал. 5);

$[0;2]$ — обидва кінці належать проміжку (мал. 6);

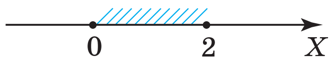
$[0;1)$ — лівий кінець належить проміжку, а правий — ні (мал. 7);

$(-1;2]$ — правий кінець належить проміжку, а лівий — ні (мал. 8).

Біля «$+\infty$» та «$-\infty$» завжди ставлять круглу дужку, наприклад: $[-3;+\infty)$, $(-\infty;5]$.

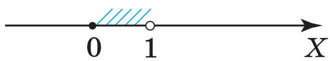
$(1;3)$

Мал. 5



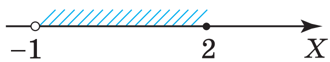
$[0;2]$

Мал. 6



$[0;1)$

Мал. 7



$(-1;2]$

Мал. 8

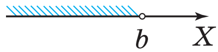
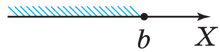
Зверніть увагу:

у записі числового проміжку ставлять:

- круглу дужку «(» або «)», якщо проміжок не містить даний його кінець (на малюнку він позначається «виколотим» кружечком);
- квадратну дужку «[» або «]», якщо проміжок містить даний його кінець (на малюнку він позначається зафарбованим кружечком).

У таблиці 3 подано всі можливі варіанти числових проміжків (a, b — будь-які дійсні числа).

Таблиця 3

Нерівність	Числовий проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x < b$	$(-\infty; b)$	
$x \leq b$	$(-\infty; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	

3. ОБ’ЄДНАННЯ ЧИСЛОВИХ ПРОМІЖКІВ

Множина розв’язків деяких нерівностей (або кількох нерівностей, які розглядають разом) може містити не один проміжок, а два й більше проміжків. Таку множину можна подати як *об’єднання* відповідних *проміжків*.

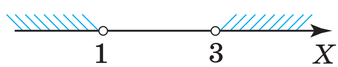
Об’єднанням числових проміжків **називається така числова множина, яка містить усі числа кожного з проміжків і не містить інших чисел.**

Об’єднання проміжків позначають знаком «$\cup$». Цьому знаку відповідає сполучник «або».

Задача 3. Знайдіть та позначте на координатній прямій об’єднання: 1) проміжків $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$; 2) проміжків $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$; 3) проміжків $(-\infty; 1]$ і $(1; +\infty)$; 4) проміжку $(-\infty; 1)$ і числа 3; 5) проміжку $(-\infty; 1)$ і числа 1; 6) проміжку $(3; +\infty)$ і порожньої множини.

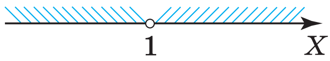
Розв’язання.

1. Об’єднанням даних числових проміжків (мал. 9) є множина: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.



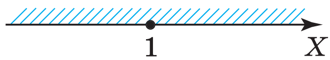
Мал. 9

2. Об'єднанням даних числових проміжків (мал. 10) є множина: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.



Мал. 10

3. Об'єднанням даних числових проміжків (мал. 11) є множина: $(-\infty; 1] \cup (1; +\infty)$.
Оскільки число 1 входить до першого проміжку, то в об'єднанні двох проміжків немає розриву в точці 1. Тому ця множина містить усі дійсні числа: $(-\infty; +\infty)$. Отже, $(-\infty; 1] \cup (1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$.

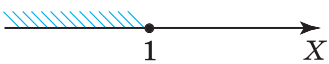


Мал. 11

4. Об'єднанням даного числового проміжку й числа 3 (мал. 12) є множина: $(-\infty; 1) \cup \{3\}$.

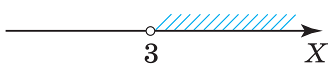
Мал. 12

5. Об'єднанням даного числового проміжку й числа 1 (мал. 13) є множина: $(-\infty; 1) \cup \{1\}$. Одержану множину можна подати як один проміжок: $(-\infty; 1]$. Отже, $(-\infty; 1) \cup \{1\} = (-\infty; 1]$.



Мал. 13

6. Оскільки порожня множина не містить елементів, то об'єднанням даного числового проміжку й порожньої множини (мал. 14) є множина $(3; +\infty)$. Отже, $(3; +\infty) \cup \varnothing = (3; +\infty)$.



Мал. 14

Зверніть увагу:

- об'єднання проміжків записують у певному порядку, починаючи з проміжку, що містить найменше з даних чисел;
- про множину $(-\infty; a) \cup (a; +\infty)$ кажуть, що вона має розрив у точці a, де a — будь-яке число;
- запис $x \in \varnothing$ не має змісту.

4. ПЕРЕРІЗ ЧИСЛОВИХ ПРОМІЖКІВ

Під час розв'язування деяких нерівностей і особливо систем нерівностей доводиться знаходити переріз числових проміжків, що відповідно є множинами розв'язків даних нерівностей.

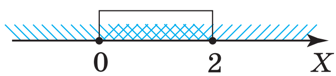
Перерізом числових проміжків **називається така числова множина, яка містить лише ті числа, що одночасно входять до кожного з проміжків, і не містить інших чисел.**

Переріз множин позначають знаком «$\cap$». Цьому знаку відповідає сполучник «та».

Задача 4. Знайдіть та позначте на координатній прямій переріз проміжків: 1) $(-\infty; 2]$ і $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$ і $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$ і $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2)$ і $[2; +\infty)$.

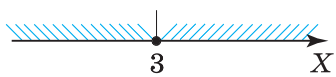
Розв'язання.

1. Одночасно до кожного з двох даних числових проміжків входять числа, які більші за число 0 або дорівнюють йому і менші від числа 2 або дорівнюють йому (мал. 15). Отже, перерізом даних числових проміжків є множина: $[0;2]$. Можемо записати: $(-\infty; 2] \cap [0; +\infty) = [0;2]$.



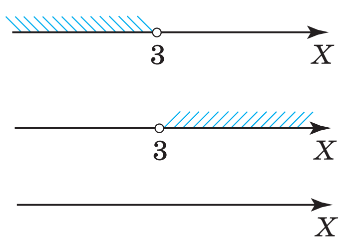
Мал. 15

2. Перерізом двох даних числових проміжків є множина, яка складається лише з одного числа 3 (мал. 16). Можемо записати: $(-\infty; 3] \cap [3; +\infty) = \{3\}$.



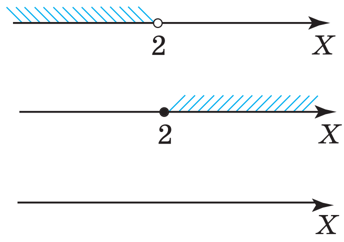
Мал. 16

3. Перерізом двох даних числових проміжків є порожня множина (мал. 17), тобто: $(-\infty; 3) \cap (3; +\infty) = \varnothing$.



Мал. 17

4. Перерізом двох даних числових проміжків є порожня множина (мал. 18), тобто: $(-\infty; 2) \cap [2; +\infty) = \varnothing$.



Мал. 18

Зверніть увагу:
- **переріз проміжків записують у певному порядку, починаючи з проміжку, що містить найменше з даних чисел;**
- **у перерізі числового проміжку та числа одержуємо:**
  — **саме це число, якщо воно належить даному проміжку;**
  — **порожню множину, якщо дане число не належить даному проміжку.**

Дізнайтеся більше

1. Крім таких операцій, як об'єднання та переріз числових множин, у теорії множин використовують ще й такі операції, як різниця множин та доповнення однієї множини до іншої.

Різницею множин A і B називають множину C, яка складається з усіх елементів, які належать множині A й не належать множині B. Позначають: $A \setminus B$.

Наприклад, знаходячи різницю множин $(-\infty; 2)$ і $\{0\}$, одержуємо: $(-\infty; 2) \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Якщо B — підмножина множини A, то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини* B до множини A. Позначають: $\overline{A}$. Отже, у розглянутому прикладі одержуємо: множина $\overline{A} = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ є доповненням множини $B = \{0\}$ до множини $A = (-\infty; 2)$.

2. Бернард Больцано (чес. *Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano*; 5 жовтня 1781 р., м. Прага — 18 грудня 1848 р.) — чеський математик, філософ і теолог, автор першої строгої теорії дійсних чисел та один із засновників теорії множин.

Бернард Больцано

За життя Б. Больцано опублікував лише п'ять невеликих праць із математики. Вони значно випереджали науковий рівень того часу й не привернули увагу наукової громадськості. Тільки наприкінці XIX ст., коли ці ідеї незалежно перевідкрили Вейєрштрасс і Дедекінд, історики виявили й заслужено оцінили твори Больцано.

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади числових проміжків.
2. Як зображають числові проміжки?
3. У якому випадку в записі числового проміжку ставлять круглу дужку?
4. У якому випадку в записі числового проміжку ставлять квадратну дужку?
5. Сформулюйте означення об'єднання двох числових множин.
6. Як позначають об'єднання двох числових множин?
7. Сформулюйте означення перерізу двох числових множин.
8. Як позначають переріз двох числових множин?

Розв'яжіть задачі

69'. Прочитайте запис:

1) $x \in (1; +\infty)$;
2) $x \in [-3; 7]$;
3) $x \in (-\infty; 1,2)$;
4) $x \in (-10; -5,4)$;
5) $x \in \left[2,5; 3\frac{1}{3}\right)$.

70'. Чи правильно, що:

1) число 1 належить проміжку:
а) $(1; +\infty)$; б) $[1; +\infty)$;

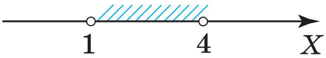
2) число -3 не належить проміжку:
а) $[-3; 7]$; б) $[-3; 7)$; в) $(-3; 7]$; г) $(-3; 7)$;

3) число 7 належить проміжку:
а) $[-3; 7]$; б) $[-3; 7)$; в) $(-3; 7]$; г) $(-3; 7)$?

71'. На якому з малюнків 19–22 зображено проміжок:

1) $[-1; 4]$; 3) $(-1; 4]$;

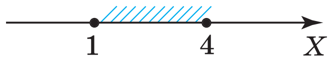
2) $[-1; 4)$; 4) $(-1; 4)$?



Мал. 19

Мал. 20

Мал. 21

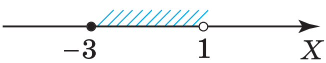


Мал. 22

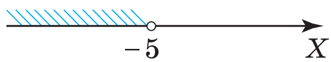
72'. Чи правильно записано дію знаходження об’єднання проміжків $(3; +\infty)$ і $(-\infty; 2]$: 1) $(3; +\infty) + (-\infty; 2]$; 2) $(3; +\infty) \cup (-\infty; 2]$; 3) $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$?

73'. Чи правильно записано дію знаходження перерізу проміжків $(-3; +\infty)$ і $(-\infty; 2]$: 1) $(-3; +\infty) - (-\infty; 2]$; 2) $(-\infty; 2] \cup (-3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2] \cap (-3; +\infty)$?

74°. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 23, 24.

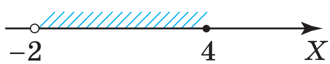


Мал. 23



Мал. 24

75°. Запишіть проміжок, зображений на малюнку 25.



Мал. 25

76°. Дано проміжки:

1) $[1; +\infty)$; 3) $(0; 5)$;

2) $(-\infty; -1]$; 4) $[-3; 2]$.

Чи належить указаному проміжку число: а) 1; б) –1; в) 0; г) 3?

77°. Чи є множиною розв’язків нерівності $x \geq -5$ числовий проміжок:

1) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$;

2) $[-5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5]$?

78°. Чи є множиною розв’язків нерівності $x < 3$ числовий проміжок:

1) $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$;

2) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 3]$?

79°. На координатній прямій позначте числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівності:

1) $x > -\frac{2}{3}$;
2) $x > 0$;
3) $x < -4,5$;
4) $0 < x < 5$;
5) $x \le -0,5$;
6) $x \ge 1,5$;
7) $-1 < x \le 3$;
8) $2 \le x \le 6$.

Запишіть одержаний числовий проміжок.

80°. На координатній прямій позначте числовий проміжок, що є множиною розв'язків нерівності:

1) $x > \frac{1}{3}$;
2) $x < 0$;
3) $x \le -2$;
4) $-2 \le x \le 2$.

Запишіть одержаний числовий проміжок.

81°. Чи належить проміжок $(0; 1)$ до множини розв'язків нерівності:

1) $0 \le x \le 1$;
2) $x > 0$;
3) $x < 1$;
4) $0 < x < 1$?

82°. Чи належить проміжок $(-2; 0)$ до множини розв'язків нерівності:

1) $-2 \le x \le 0$;
2) $x < 0$;
3) $x > -2$;
4) $-2 < x < 0$?

83°. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

1) $(-1; 3)$;
2) $[-1; 3)$;
3) $[-1; 3]$;
4) $(-1; 3]$.

84°. Запишіть найбільше та найменше ціле число, що належить проміжку:

1) $(-1; 5)$;
2) $[-1; 6)$;
3) $[-1; 5]$;
4) $(-1; 6]$.

85°. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

1) $(-2; 2)$;
2) $[-2; 2)$;
3) $[-2; 3]$;
4) $(-2; 3]$.

86°. Запишіть усі дроби виду $\frac{*}{a}$, що належать проміжку $(2; 3,5)$, якщо: 1) $a = 2$; 2) $a = 3$; 3) $a = 4$; 4) $a = 5$.

87°. Запишіть усі дроби виду $\frac{*}{b}$, що належать проміжку $(1,5; 3)$, якщо: 1) $b = 2$; 2) $b = 3$.

88°. Чи правильно, що об'єднанням проміжків $(-1;4)$ і $(2;7)$ є проміжок:

1) $(-1;2)$; 3) $(-1;7)$;
2) $(4;7)$; 4) $(2;7)$?

Відповідь поясніть.

89°. Чи правильно, що об'єднанням проміжків $[-2;3)$ і $(0;2)$ є проміжок:

1) $(-2;2)$; 3) $(0;3)$;
2) $[-2;2)$; 4) $[-2;3)$?

Відповідь поясніть.

90°. Чи правильно, що об'єднанням проміжків $[-1;1]$ і $(-2;3)$ є проміжок:

1) $(-1;3)$; 3) $(-2;1]$;
2) $[-1;3)$; 4) $(-2;3)$?

Відповідь поясніть.

91°. Чи правильно, що перерізом проміжків $(-2;5)$ і $(3;7)$ є проміжок:

1) $(-2;5)$; 3) $(-5;7)$;
2) $(3;5)$; 4) $(2;3)$?

Відповідь поясніть.

92°. Чи правильно, що перерізом проміжків $[-2;-1)$ і $(-1,5;1)$ є проміжок:

1) $(-2;1)$; 3) $(-1,5;-1)$;
2) $[-2;1)$; 4) $[-2;-1,5)$?

Відповідь поясніть.

93°. Чи правильно, що перерізом проміжків $[-1;5]$ і $(-2;0)$ є проміжок:

1) $(-1;0)$; 3) $(-2;5]$;
2) $[-2;-1)$; 4) $[-1;0)$?

Відповідь поясніть.

94. Для кожного значення a, що набуває лише цілих значень із проміжку $-1,2 < a < 2\frac{1}{5}$, запишіть числовий проміжок, який є множиною розв'язків подвійної нерівності $3a - 2 < x < 2a + 3$, та зобразьте його.

95. Для кожного значення a, що набуває лише цілих значень із проміжку $-0{,}7 < a < 2\frac{2}{3}$, запишіть числовий проміжок, який є множиною розв'язків подвійної нерівності $2a - 1 < x < 3a + 1$, та зобразьте його.

96. Дано: $a < b < c$. Виконайте дію:

1) $(a;b) \cup (a;c)$;
2) $(a;b) \cap (a;c)$;
3) $(a;c) \cup (b;c)$;
4) $(a;c) \cap (b;c)$;
5) $(a;+\infty) \cup (b;c)$;
6) $(a;+\infty) \cap (b;c)$;
7) $(a;b) \cup (c;+\infty)$;
8) $(-\infty;b) \cap (a;c)$.

97. Дано: $a < d < b < c$. Виконайте дію:

1) $(a;b) \cup (d;c)$;
2) $(a;b) \cap (d;c)$;
3) $(a;d) \cup (b;c)$;
4) $(a;d) \cap (b;c)$;
5) $(a;c) \cup (d;b)$;
6) $(a;c) \cap (d;b)$;
7) $(a;b) \cup (c;+\infty)$;
8) $(-\infty;d) \cap (a;b)$.

98. Дано: $x < t < z < y$. Виконайте дію:

1) $(x;t) \cup (z;y)$;
2) $(x;t) \cap (z;y)$;
3) $(t;y) \cap (x;z)$;
4) $(x;y) \cup (t;z)$.

99*. За якого найбільшого цілого значення a значення виразу $2a - 1$ належить проміжку:

1) $(1;3)$;
2) $[1;3]$;
3) $(-0{,}1;1{,}75)$;
4) $(-3;2{,}6]$;
5) $\left[-2\frac{1}{3};2\frac{3}{4}\right]$;
6) $\left(-\frac{5}{6};3\frac{3}{4}\right)$?

100*. За якого найменшого цілого значення a значення виразу $1 - 2a$ належить проміжку:

1) $(1;2)$;
2) $[1;2]$;
3) $(-0{,}5;1{,}75)$;
4) $(-3;4]$;
5) $\left[-1\frac{2}{3};2\frac{3}{4}\right]$;
6) $\left(-\frac{5}{6};3\frac{2}{3}\right)$?

101*. За якого найбільшого цілого значення b значення виразу $|1-5b|$ належить проміжку:

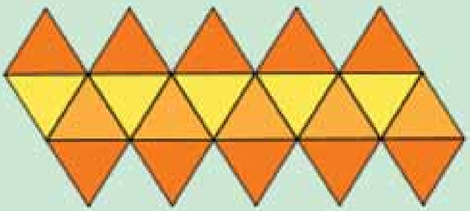
1) $(1;5)$;
2) $[1;5]$;
3) $(0;1,5)$;
4) $(0;4]$?

102*. Знайдіть усі цілі значення c такі, що значення виразу $|3c-2|$ не перевищує значення числового виразу $\sqrt{3\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{\frac{6}{31}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Проявіть компетентність

103. Порахуйте суму довжин тих сторін темно-помаранчевих трикутників, які не є сторонами жовтих трикутників (мал. 26). Якому проміжку належить це число, якщо відомо, що всі трикутники рівносторонні зі стороною завдовжки 5 см:

1) $[145;155]$;
2) $[125;135]$;
3) $[135;145]$;
4) $[120;130]$;
5) $[130;140]$?



Мал. 26

Задачі на повторення

104. Спростіть вираз: $\left(\frac{1+x}{x^2-xy}-\frac{1-y}{y^2-xy}\right)\cdot\frac{x^2y-xy^2}{x+y}$.

105. Одне число дорівнює 120, друге — становить 50 % першого, а третє — 25 % другого. Знайдіть середнє арифметичне цих чисел.

§ 4 Лінійні нерівності з однією змінною

1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Із попередніх параграфів ви вже знаєте основні відомості про нерівності, їхні властивості та особливості розв'язків. У даному параграфі ми розглянемо, як саме розв'язують один з видів нерівностей з однією змінною — лінійні нерівності.

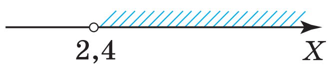
***Лінійними нерівностями з однією змінною* називаються нерівності виду: $ax > b$, $ax < b$, $ax \le b$, $ax \ge b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.**

Задача 1. Розв'яжіть нерівність $5x > 12$.

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності:

$$5x > 12,$$
$$x > 12 : 5,$$
$$x > 2{,}4.$$

Позначимо на координатній прямій проміжок, що є множиною розв'язків одержаної нерівності (мал. 27).



Мал. 27

Отже, $x \in (2{,}4; +\infty)$.

? Як же розв'язати складніші нерівності з однією змінною?

За допомогою властивостей рівносильності нерівностей такі нерівності зводять до лінійних нерівностей. Розглянемо приклади.

Задача 2. Розв'яжіть нерівність $\frac{x}{6}-\frac{x-1}{4}+\frac{x}{12}\le 2$.

Розв'язання. Позбудемося знаменників у заданій нерівності. Для цього спочатку знайдемо НСК (4; 6; 12) = 12, а потім помножимо обидві частини нерівності на число 12 (оскільки це число є додатним, то знак нерівності не змінюємо):

$$2x-3(x-1)+x\le 24.$$

Тепер у лівій частині нерівності розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$2x-3x+3+x\le 24,$$
$$2x-3x+x\le 24-3,$$
$$0\cdot x\le 21.$$

Якщо в останню нерівність замість змінної x підставити будь-яке дійсне число, то одержимо правильну числову нерівність: $0\le 21$. Тому множиною розв'язків початкової нерівності є проміжок $(-\infty;+\infty)$.

Зверніть увагу:
проміжок $(-\infty;+\infty)$ — це множина дійсних чисел R, тому відповідь до задачі 2 можна записати так: $x\in(-\infty;+\infty)$, або, що те саме, $x\in R$.

Задача 3. Розв'яжіть нерівність $5(2x-1)-2(3+5x)\le -13$.

Розв'язання. Спочатку розкриємо дужки в лівій частині нерівності, а потім зведемо подібні доданки, залишивши доданки зі змінною в лівій частині нерівності:

$$10x-5-6-10x\le -13,$$
$$10x-10x\le -13+5+6,$$
$$0\cdot x\le -2.$$

Якщо в останню нерівність замість змінної x підставити будь-яке дійсне число, то одержимо неправильну числову нерівність: $0\le -2$. Тому початкова нерівність не має розв'язків, тобто множина її розв'язків — порожня: $\varnothing$.

Зверніть увагу:
запис $x\in\varnothing$ не має змісту.

2. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

У курсі алгебри 7-го класу ви навчилися доводити тотожності. Пригадайте, які способи ви використовували для цього.

? Чи можна аналогічно доводити нерівності? Так.

Для доведення певної нерівності можна: 1) знайти різницю її правої та лівої частин і порівняти з нулем одержаний вираз; 2) рівносильними перетвореннями даної нерівності звести її до очевидної нерівності; 3) використати відому нерівність.

Розглянемо приклади.

Задача 4. Доведіть нерівність $a+\frac{1}{a}\geq 2$, якщо $a>0$.

Розв'язання. Знайдемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}.$$

Порівняємо з нулем одержаний вираз. Оскільки за умовою $a>0$, а вираз $(a-1)^2\geq 0$ за будь-яких значень змінної a, то $\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$.

Отже, нерівність $a+\frac{1}{a}\geq 2$ справджується для будь-яких $a>0$, що й треба було довести.

Задача 5. Доведіть нерівність $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$.

Розв'язання. Використаємо допоміжну нерівність $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$, яка справджується для будь-яких невід'ємних чисел a і b. Розкривши за формулою цей квадрат різниці та застосувавши рівносильні перетворення, одержимо:

$$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0,$$
$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\,\Big|:2,$$
$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Отже, нерівність $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ справджується для будь-яких $a\geq 0$ і $b\geq 0$, що й вимагалося довести.

Ви знаєте, що вираз $\frac{a+b}{2}$ є середнім арифметичним чисел a і b, а вираз $\sqrt{ab}$ — їхнім середнім геометричним. Доведена в задачі 5 нерівність указує на зв'язок цих двох величин. Цю нерівність називають *нерівністю Коші* — на честь французького математика Огюстена Луї Коші (1789–1857).

Зверніть увагу:
середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного.

Під час доведення складніших нерівностей можна використовувати раніше доведені нерівності, наприклад, нерівність Коші.

Дізнайтеся більше

1. У завданнях ДПА, ЗНО часто пропонують розв'язати різноманітні завдання з параметром. Розглянемо, як розв'язати найпростішу лінійну нерівність із параметрами.

Задача 6. Розв'яжіть нерівність $ax > b$.

Розв'язання. Розглянемо такі випадки:
1) якщо $a = 0$, $b \in R$, то одержимо нерівність: $0 \cdot x > b$. Залежно від значень, яких набуває параметр b, потрібно розглянути такі випадки:
а) $b < 0$, тоді нерівність виконується за будь-яких значень змінної x, тобто $x \in R$;
б) $b \geq 0$, тоді нерівність не має розв'язків;
2) якщо $a \neq 0$, $b \in R$, то одержимо нерівність: $a \cdot x > b$. Далі потрібно розглянути такі випадки:
а) $a > 0$, тоді поділимо обидві частини нерівності на додатне число a (при цьому знак нерівності не змінимо): $x > \frac{b}{a}$. У цьому випадку множиною розв'язків є числовий проміжок $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
б) $a < 0$, тоді поділимо обидві частини нерівності на від'ємне число a (при цьому знак нерівності змінимо): $x < \frac{b}{a}$. У цьому випадку множиною розв'язків є числовий проміжок $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.
Аналогічно розв'язують нерівності виду: $ax < b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$.

2. **Огюстен Луї Коші** (21 серпня 1789 р. — 23 травня 1857 р.) — видатний французький математик, член Паризької академії наук (1816), Петербурзької академії наук (1831). Коші закінчив Політехнічну школу (1805–1807) і Школу мостів і шляхів (1810) у Парижі. Деякий час працював інженером шляхів сполучення, а починаючи з 1813 р., зайнявся наукою та викладанням. У 1816 р. праця Коші з теорії хвиль на поверхні важкої рідини одержала першу премію на конкурсі Паризької академії наук. Після цієї перемоги Коші запрошують у Політехнічну школу, Сорбонну (фр. Sorbonne) й один з найпрестижніших вищих навчальних закладів Франціїї — Колеж де Франс (фр. Collège de France). Усього за життя він написав й опублікував понад 800 робіт з арифметики й теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики тощо. На честь Коші названо астероїд головного поясу, відкритий 29 квітня 2000 р. (*16249 Cauchy*).

Пригадайте головне

1. Які нерівності називаються лінійними нерівностями з однією змінною? Наведіть приклади.
2. Як розв'язують лінійні нерівності з однією змінною?
3. Якими способами можна доводити нерівності?

Розв'яжіть задачі

106'. Чи є число 1 розв'язком нерівності:

1) $2x > 5$;
2) $2x < 5$;
3) $2x > -5$;
4) $2x \le 2$?

107'. Чи є число -1 розв'язком нерівності:

1) $2x > 3$;
2) $2x < -3$;
3) $2x > -5$;
4) $2x \ge -2$?

108'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $x > -3$ є проміжок:
1) $(-\infty; -3)$; 3) $(-3; +\infty)$;
2) $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 3)$?

109'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $x \le 1{,}5$ є проміжок:
1) $(-\infty; -1{,}5]$; 3) $[1{,}5; +\infty)$;
2) $[-1{,}5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1{,}5]$?

110'. Чи правильно, що розв'язком нерівності $-1{,}2 \le x \le 1{,}3$ є проміжок:
1) $[-1{,}3; -1{,}2]$; 3) $[1{,}2; 1{,}3]$;
2) $[-1{,}2; 1{,}3]$; 4) $[-1{,}3; 1{,}2]$?

111°. Розв'яжіть нерівність:
1) $3x > 6$; 5) $-4x > 0$; 9) $6x < -18$;
2) $4x > 5$; 6) $-3x > 4$; 10) $5x < -12$;
3) $5x > -10$; 7) $2x < 8$; 11) $-5x < 35$;
4) $6x > -10$; 8) $4x < 7$; 12) $-3x < 13$.

112°. Розв'яжіть нерівність:
1) $3x > 15$; 3) $-4x > 13$; 5) $9x < -25$;
2) $5x > -14$; 4) $7x < 28$; 6) $-11x < 0$.

113°. Розв'яжіть нерівність:
1) $4x \ge 10$; 5) $-3x \ge 39$; 9) $5x \le -16$;
2) $8x \ge 5$; 6) $-4x \ge 19$; 10) $3x \le -19$;
3) $6x \ge -20$; 7) $3x \le 0$; 11) $-2x \le 9$;
4) $7x \ge -35$; 8) $4x \le 28$; 12) $-3x \le 14$.

114°. Розв'яжіть нерівність:
1) $5x \ge 11$; 3) $-3x \ge 23$; 5) $4x \le -26$;
2) $2x \ge -11$; 4) $3x \le 21$; 6) $-7x \le 0$.

115°. Розв'яжіть нерівність:
1) $0{,}01x \ge 1$; 5) $-1\frac{2}{7}x \ge 9$;
2) $0{,}2x \le 5$; 6) $2\frac{2}{3}x > 16$;
3) $-0{,}3x \ge -3$; 7) $2{,}5x \le 8$;
4) $0{,}7x < -14$; 8) $1\frac{5}{8}x < -26$.

116°. Розв'яжіть нерівність:
1) $0{,}1x < 3$; 3) $-2\frac{2}{7}x \le 32$;
2) $0{,}4x \ge 2$; 4) $3\frac{1}{3}x > -5$.

117°. Розв'яжіть нерівність:

1) $x+3\frac{2}{3}>0$;
2) $x-2\frac{3}{7}<0$;
3) $4\frac{5}{7}-x>0$;
4) $5{,}7-x<0$.

118°. Розв'яжіть нерівність:

1) $x+1\frac{1}{3}>3$;
2) $x-1\frac{2}{7}<3{,}5$;
3) $x+2\frac{5}{8}\le 5$;
4) $2\frac{2}{3}-x>4$;
5) $1\frac{5}{6}-x<1{,}5$;
6) $2\frac{9}{11}-x\ge 3$.

119°. Розв'яжіть нерівність:

1) $x+1{,}6>0$;
2) $3-x<1\frac{4}{7}$;
3) $x+2\frac{3}{8}>4$;
4) $3\frac{2}{9}-x\ge 0$.

120°. Чи є рівносильними нерівності:

1) $5x-2>4x+2$ і $x>4$;
2) $2x+1\le 3x-5$ і $x\le 6$;
3) $3(x-1)<4x-3$ і $x>0$;
4) $5(x-1)\ge 10$ і $x\le 3$?

121°. Розв'яжіть нерівність:

1) $3x-2>x+1$;
2) $2x-1>3x-7$;
3) $1-4x>2-3x$;
4) $1+3x>3-4x$;
5) $2x-5<4-3x$;
6) $x+5<3-2x$;
7) $6x-5<7x+11$;
8) $4-5x<3-7x$.

122°. Розв'яжіть нерівність:

1) $4x+2\le 3x+8$;
2) $3(1+x)\ge 2x+1$;
3) $5x-2\ge 3x-4$;
4) $2(1-x)\ge 3x+5$.

123°. За яких значень a набуває додатних значень вираз:

1) $2a+3(2-a)$; 2) $5a-(4a+3)$; 3) $-2a-(6-a)$?

124°. За яких значень b набуває від'ємних значень вираз:

1) $3b+2(b-2)$; 2) $4b-(4+2b)$; 3) $-b-(5-2b)$?

125. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}>1$;
2) $x-\frac{3x}{7}<2$;
3) $1{,}5x-\frac{x}{4}>8$;
4) $\frac{3x}{2}-4<\frac{5x}{4}+1$;
5) $1{,}75x-\frac{3}{4}>\frac{3x}{5}-1$;
6) $\frac{x}{6}-2<\frac{5x}{12}+1$.

126. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{2}+1\le 0{,}5x-1$;
2) $x-1<2(1-0{,}5x)$;
3) $3\left(\frac{x}{3}-1\right)+1\le x-2$;
4) $1-\frac{3x}{4}<0{,}25(4-3x)$.

127. Розв'яжіть нерівність:

1) $2,4x-\frac{x}{5}>5$;

2) $\frac{2x}{3}-3<\frac{2x}{5}+1$.

128. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{4}\le\frac{x+2}{3}-x$;

2) $x+\frac{x+3}{2}-\frac{3x}{4}\ge\frac{3+2x}{8}$;

3) $\frac{7+3x}{3}+\frac{x+1}{6}<x-\frac{7-3x}{2}+\frac{5x}{3}$;

4) $\frac{x+2}{3}-\frac{x-4}{2}>1-\frac{x}{4}$.

129. Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x+2)\le 3x+x^2-3$;

2) $2x(2-x)\ge 12-2x^2$;

3) $3x(10+5x)>5(6x+3x^2)-1$;

4) $2(1+x^2)<(2+2x)(x-1)$;

5) $(x-2)(x+3)-(x-1)(x+4)\ge 0$.

130. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{3}+\frac{x}{6}\le 8$;

2) $\frac{2x+1}{4}+2>\frac{3x+2}{3}$;

3) $(2x-1)(x+1)\ge(x-2)(3+2x)$.

131. Доведіть нерівність:

1) $4a^2+1\ge 4a$, якщо a — будь-яке число;

2) $a^2-ab+b^2\ge ab$, якщо a, b — будь-які числа;

3) $a^4+16\ge 8a+2a^3$, якщо a — будь-яке число.

132. Доведіть нерівність:

1) $a^2+\frac{1}{a^2}\ge 2$, якщо $a\ne 0$;

2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, якщо $ab>0$;

3) $\frac{a+2}{a}+\frac{a}{a+2}\ge 4$, якщо $a>0$.

133. Доведіть нерівність:

1) $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$, якщо $a+b\ge 0$;

2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$, якщо $a>0, b>0$;

3) $(a^2-b^2)^2\ge 4ab(a-b)^2$, якщо a, b — будь-які числа;

4) $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$.

134*. Доведіть нерівність:

1) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, якщо a, b, c — будь-які числа;

2) $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} \geq a+b+c$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$;

3) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$, якщо a, b, c — будь-які числа.

135*. Розв'яжіть нерівність залежно від параметра a:

1) $a+x<2-ax$;

2) $2(x-a) \leq ax-4$;

3) $a(x-1)>x-2$;

4) $\frac{x}{a}+\frac{1+3x}{2}>\frac{x+2}{4a}$.

Проявіть компетентність

136. Сім'я Семеренків — тато, мама, сини Андрій (школяр) і Юрко (дошкільник) — вирішила на вихідних здійснити прогулянку на пароплаві поблизу Запоріжжя. Вартість квитка для дорослого — 80 грн. Діти від семи до 14 років катаються за півціни, а от для малечі віком до семи років прогулянка безкоштовна. Андрієві напередодні виповнилося 14 років, тому батьки вирішили запросити на прогулянку ще й кількох його однокласників. Із сімейного бюджету на квитки для подорожі було виділено 500 грн. Скількох однокласників зможе запросити на таку прогулянку Андрій, якщо його найкращому другові вже виповнилося 14 років, а інші однокласники молодші від нього?

Задачі на повторення

137. Графік функції $y=6x-a$ проходить через точку $A(2; 18)$. Знайдіть значення a.

138. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{x^3-27}{x-3}=0$; 2) $\frac{x+2}{x^2-4}=0$.

§ 5 Системи лінійних нерівностей з однією змінною

1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

У попередніх параграфах ви навчилися розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною; також знаєте, як знайти переріз двох числових множин.

? Якщо дано кілька нерівностей з однією змінною, то як знайти ті значення змінної x, які одночасно задовольняють усі нерівності? У такому випадку кажуть, що треба розв'язати *систему* цих *нерівностей*. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Якщо на першу частину шляху завдовжки 50 км мотоцикліст витратить не більш як 2 год, то на другу його частину завдовжки 90 км, їдучи з тією самою швидкістю, він зможе витратити більш ніж 3 год. З якою швидкістю потрібно їхати мотоциклістові?

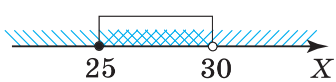
Р о з в' я з а н н я. Позначимо швидкість мотоцикліста через x. Тоді можемо скласти нерівності: $50 \le 2x$ та $90 > 3x$. Складаємо систему:

$$\begin{cases} 2x \ge 50, \\ 3x < 90. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну нерівність окремо — так, як це робили в попередньому параграфі:

$$\begin{cases} 2x \ge 50 \,\big|\, :2, \\ 3x < 90 \,\big|\, :3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 25, \\ x < 30. \end{cases}$$

Множиною спільних розв'язків одержаних нерівностей є переріз множин їхніх розв'язків, тобто проміжок: [25; 30) (мал. 28).



Мал. 28

Отже, мотоциклістові потрібно їхати зі швидкістю від 25 км/год до 30 км/год, але не набираючи швидкості 30 км/год.

Розв'язок системи нерівностей можна записати двома способами: $25 \le x < 30$ або $x \in [25; 30)$.

Розв'язком **системи двох нерівностей з однією змінною є всі ті значення змінної, які одночасно задовольняють обидві нерівності.**

Розв'язати **систему двох нерівностей з однією змінною — означає знайти всі її розв'язки або показати, що розв'язків немає.**

Зверніть увагу:
множиною розв'язків системи двох лінійних нерівностей з однією змінною є перетин множин розв'язків нерівностей, що утворюють систему.

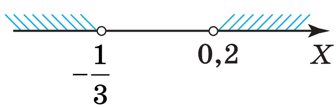
Задача 1. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1)\ \begin{cases} 5x-1>0, \\ 3x+1<0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ 3x-12\ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Спочатку виконаємо рівносильні перетворення кожної нерівності системи:

$$\begin{cases} 5x-1>0, \\ 3x+1<0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x>1 \,|:5, \\ 3x<-1 \,|:3; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0{,}2, \\ x<-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки нерівностей на координатній прямій (мал. 29).

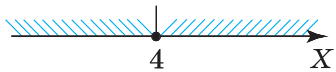


Мал. 29

Як бачимо, нерівності даної системи не мають спільних розв'язків.
Отже, відповідь запишемо так: $\varnothing$.
2. Спочатку виконаємо рівносильні перетворення кожної нерівності системи:

$$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ 3x-12\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x\ge -4 \,\big|:(-1), \\ 3x\ge 12 \,\big|:3; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 4, \\ x\ge 4. \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки нерівностей на координатній прямій (мал. 30).



Мал. 30

Як бачимо, спільним розв'язком двох нерівностей даної системи є лише одне число 4.
Отже, відповідь запишемо так: $x \in \{4\}$.

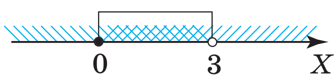
2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ, ЩО МІСТЯТЬ ЗМІННУ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Задача 2. Розв'яжіть нерівність:
1) $|x| < 3$; 2) $|2x| \geq 5$; 3) $|x| > -1$; 4) $|x| \leq -2$.

Розв'язання. 1. Використовуючи означення модуля числа, запишемо дану нерівність у вигляді двох систем:

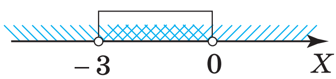
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 3; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ -x < 3. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну систему окремо:
а) множиною розв'язків першої системи є проміжок $[0; 3)$ (мал. 31);



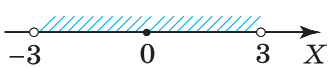
Мал. 31

б) $\begin{cases} x < 0, \\ -x < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x > -3. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $(-3; 0)$ (мал. 32).



Мал. 32

Загалом, множина розв'язків початкової нерівності $|x| < 3$ — це об'єднання проміжків, що є множинами розв'язків одержаних систем (мал. 33). Отже, $x \in (-3; 3)$.



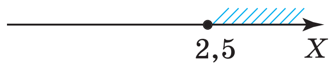
Мал. 33

2. Скориставшись означенням модуля числа, запишемо дану нерівність у вигляді двох систем:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 2x \ge 5; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ -2x \ge 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну систему окремо.

а) $\begin{cases} x \ge 0, \\ 2x \ge 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge 2{,}5. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $[2{,}5; +\infty)$ (мал. 34);

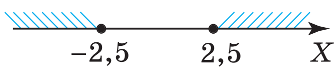


Мал. 34

б) $\begin{cases} x < 0, \\ -2x \ge 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \le -2{,}5. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $(-\infty; -2{,}5]$ (мал. 35)

Мал. 35

Загалом, множина розв'язків початкової нерівності $|2x| \ge 5$ — це об'єднання проміжків, що є множинами розв'язків одержаних систем (мал. 36). Отже, $x \in (-\infty; -2{,}5] \cup [2{,}5; +\infty)$.



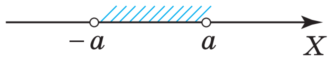
Мал. 36

3. Оскільки $|x|$ за будь-яких значень змінної x є невід'ємним числом, то нерівність $|x| > -1$ виконується за будь-яких значень змінної x. Отже, множиною розв'язків даної нерівності є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

4. Оскільки $|x|$ за будь-яких значень змінної x є невід'ємним числом, то нерівність $|x| \le -2$ не виконується за будь-яких значень змінної x. Отже, дана нерівність не має розв'язків. У відповідь записуємо: $\varnothing$.

Зверніть увагу:

1) нерівність $|f(x)| < a$, де a — додатне число, рівносильна подвійній нерівності $-a < f(x) < a$, або ж системі нерівностей $\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a; \end{cases}$ (мал. 37).



Мал. 37

2) нерівність $|f(x)| > a$, де a — додатне число, рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a; \end{array}\right.$ (мал. 38).

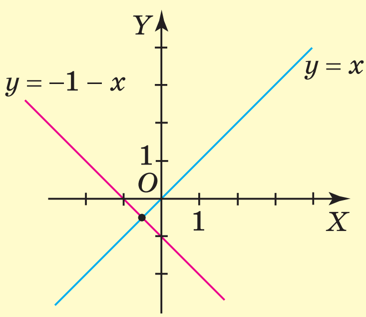
Мал. 38

Дізнайтеся більше

Системи нерівностей, й особливо нерівностей із двома змінними, застосовують для аналітичного опису частин площини (областей, смуг тощо), а також відомих вам плоских геометричних фігур. Розглянемо приклади.

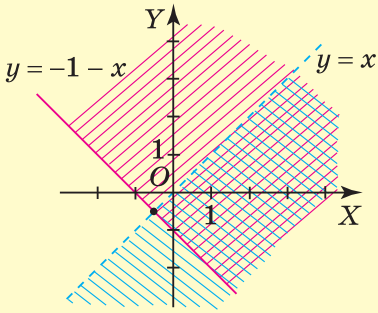
Задача 3. Знайдіть множину точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} y < x, \\ y \geq -1 - x. \end{cases}$

Розв'язання. Застосуємо графічний спосіб. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки лінійних функцій: $y = x$ і $y = -1 - x$ (мал. 39). Оскільки нерівність $y < x$ має строгий знак, то всі точки, що лежать на прямій $y = x$, не входитимуть до шуканої множини. Точки ж прямої $y = -1 - x$, навпаки, входитимуть до шуканої області, оскільки нерівність $y \geq -1 - x$ має нестрогий знак.



Мал. 39

Прямі $y = x$ та $y = -1 - x$ розділили площину на чотири області. Шукана множина точок знаходиться нижче від прямої $y = x$ та вище за пряму $y = -1 - x$. Переріз цих множин і є шуканою множиною (мал. 40).



Мал. 40

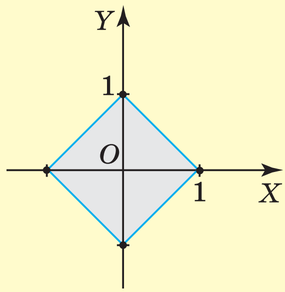
Задача 4. Знайдіть множину точок площини, координати яких задовольняють нерівність: $|x| + |y| \le 1$.

Розв'язання. Розкриємо кожний модуль за означенням та переберемо всі можливі варіанти обмежень на змінні. Одержимо чотири системи:

1) $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ x + y \le 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, y \ge 0, \\ -x + y \le 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \ge 0, y < 0, \\ x - y \le 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 0, y < 0, \\ -x - y \le 1. \end{cases}$

Розв'язавши кожну систему графічним способом (аналогічно до задачі 3), одержимо шукану область (мал. 41).



Мал. 41

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад системи двох нерівностей з однією змінною.
2. Що називають розв'язком системи двох лінійних нерівностей з однією змінною?
3. Що означає розв'язати систему двох нерівностей з однією змінною?
4. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| < a$?
5. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| > a$?

Розв'яжіть задачі

139'. Чи є число 2 розв'язком системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x > 1, \\ x \le 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > -3, \\ x < 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le 4, \\ x > 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x < 3? \end{cases}$

140'. Яке з чисел –1; 0; 1 є розв'язком системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x > -1, \\ x > -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 3, \\ x < 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le 1, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 3, \\ x \ge -1? \end{cases}$

141'. Назвіть два цілі числа, що є розв'язками системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le 2{,}5, \\ x > -1{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 0, \\ x \ge -2. \end{cases}$

142°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \le 2, \\ x \ge -3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \le 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \le 2, \\ x < -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x < 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x > 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x > -2. \end{cases}$

143°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 4 \le 0, \\ x + 4 \ge 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 2 \ge 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 1 \ge 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 1 \le 0, \\ 2 - x < 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \ge 0, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$

144°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 1 \ge 0, \\ x - 4 \le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2 - x \le 0, \\ 5 - x \ge 0. \end{cases}$

145°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x \ge 4, \\ 2x < 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \le -9, \\ -2x < 9; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x \le -7, \\ -2x > 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x \ge 3, \\ 4x < 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x \ge 0, \\ -2x > -4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x \ge 0, \\ -2x < -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x \le 1, \\ 2x \ge -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -5x \ge 0, \\ 3x > -12; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x \ge 0, \\ -4x < -8. \end{cases}$

146°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -0,1x-0,33>x, \\ 2x-0,1>x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x-0,2<5x, \\ 0,3x+1>0,4x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0,5y-2\le 4, \\ 1-0,3y\ge 0,2y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7-0,4z\le 0,3z, \\ 2z-1\ge 3. \end{cases}$

147°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 3x\ge 18, \\ 2x<11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x\ge 2, \\ 4x<6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2-3x<5, \\ 0,1-0,2x>0,4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9-0,5y\ge 0,5y, \\ 0,3y-1\ge 2. \end{cases}$

148°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 1,5x+4,5\le 0, \\ \frac{1}{3}x\ge -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{5}{6}y-10\le 0, \\ \frac{y}{9}\ge 1\frac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7x}{2}-\frac{5}{6}<\frac{1}{3}, \\ 2x<3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{3}y-2\frac{2}{3}\le 0, \\ \frac{7y}{8}\ge 1\frac{11}{24}. \end{cases}$

149°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 5x-7<3x-14, \\ 5-4x>29-2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-12y\le 3y+1, \\ 2-6y\ge 4+4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+3\le 2x+1, \\ -2+3x\le 4x+2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2+4y\ge 5y+3, \\ 2-3y<7-2y. \end{cases}$

150°. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 1,5x-7,5\ge 0, \\ -\frac{2}{3}x>-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y-10\le 5-2y, \\ 2y-9\ge 3y-11. \end{cases}$

151°. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $3\le x+1\le 8$;

2) $-3<2x+1<3$;

3) $-8\le 3x+4\le 1$;

4) $-4<\frac{2x}{3}<4$.

152. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 5(x-4)+1 \le 7x+3, \\ 43-3(7+x) \ge 1+4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x+8) \ge 4(7-x), \\ (x+2)(x-5) > (x+3)(x-4); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x+1)-x \ge 2x+2, \\ 4(1+x)-2 \le 2(2x+1)-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+2)(x-6) \le (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) > 7(2x-4). \end{cases}$

153. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4} \le 7, \\ 1-\dfrac{x}{6} \ge 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-\dfrac{x}{4} \ge 2, \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3} \ge 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-\dfrac{x}{4} \ge x, \\ x-\dfrac{x-4}{5} > 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-\dfrac{x-1}{2} > 1, \\ \dfrac{x}{3} \le 5. \end{cases}$

154. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2(x-1)+2 \le 3x+4, \\ 33-3(7+2x) \ge 2+4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-\dfrac{x}{7} \ge 12, \\ \dfrac{x-3}{2}+\dfrac{x-2}{3} \ge 5. \end{cases}$

155. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3} \le \dfrac{x-3}{4}-x, \\ 1+x \ge 0{,}5x-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12}, \\ \dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{1-4x}{3} \ge \dfrac{x}{6}-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2}-\dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2}-\dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

156. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-8}{2}\ge x-1, \\ 2-2x\le -0,5x+0,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3x-13}{4}\le\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{3-2x}{3}\le 2. \end{cases}$

157. Знайдіть усі цілі числа, що є розв'язками системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 1-0,5x\ge 0, \\ -\dfrac{x+5}{5}\le -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}<\dfrac{x}{3}, \\ \dfrac{x+1}{2}\ge\dfrac{x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2x-4}{5}\le\dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x}{3}\ge\dfrac{x+4}{7}. \end{cases}$

158. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x|\le 4$; 5) $|x|>3$;
2) $|-x|\le 2,5$; 6) $|x|\ge -1$;
3) $|x|\le -3$; 7) $|3x|>6$;
4) $|2x|<6$; 8) $-|-3x|\ge 5$.

159. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x-1|\le 3$; 4) $-2|x+1|<8$;
2) $3|x-1|<12$; 5) $2-|x|\le 3x+1$;
3) $|1-3x|\ge 7$; 6) $1+2|x|>2x-1$.

160. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x-1|\le x+1$; 3) $2|1-3x|\ge 7-6x$;
2) $3|1-x|<2-3x$; 4) $-2|1-x|<8+2x$.

161. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x|\le -1$; 3) $|2-3x|\ge 5$;
2) $|-x|\ge 3$; 4) $-3|x-1|<15$.

162. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} |x-1|\le 2, \\ |x-4|\ge 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |2x+4|\le 6, \\ 3-2x\ge -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x+5|\le 3, \\ |x-1|\ge 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |3x+1|\le 10, \\ 4x+3<11. \end{cases}$

163*. За яких значень параметра a система нерівностей: а) має розв'язки; б) не має розв'язків:

1) $\begin{cases} x \le 5, \\ x \ge a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 5, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \le 5, \\ x > a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 5, \\ x \le a? \end{cases}$

164*. Доведіть нерівність:

1) $|a+b| \le |a| + |b|$, якщо a, b — будь-які числа;

2) $\left||a| - |b|\right| \le |a-b|$, якщо a, b — будь-які числа.

Проявіть компетентність

165. У дідуся на дачі є чотири однакові бочки для води. В одну бочку вміщується менш ніж 10 відер води, а в усі чотири разом — більш ніж 34 відра води. Скільки повних відер води вміщується в одну бочку?

Задачі на повторення

166. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x-1) = 30$;

2) $2x(2x+3) = (3+x)^2$.

167. Шматок сплаву міді з оловом масою 20 кг містить 55 % олова. Скільки чистого олова потрібно додати до цього шматка, щоб новий сплав містив 60 % олова?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке числова нерівність? Наведіть приклади.
2. У якому випадку число a називають більшим за число b? А меншим від числа b?
3. Яка числова нерівність є правильною; неправильною?
4. Сформулюйте властивість транзитивності числових нерівностей.
5. Сформулюйте теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин числової нерівності.
6. Сформулюйте теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме додатне число.
7. Сформулюйте теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме від'ємне число.
8. Сформулюйте теорему про додавання числових нерівностей.
9. Сформулюйте теорему про множення числових нерівностей.
10. Наведіть приклади нерівностей зі змінними.
11. Що називається розв'язком нерівності зі змінною?
12. Що означає — розв'язати нерівність зі змінною?
13. Які нерівності називають рівносильними?
14. Сформулюйте властивості рівносильності нерівностей.
15. Наведіть приклади подвійних нерівностей.
16. Як зображають числові проміжки?
17. Сформулюйте означення об'єднання двох числових множин.
18. Сформулюйте означення перерізу двох числових множин.
19. Які нерівності називаються лінійними нерівностями з однією змінною? Наведіть приклади.
20. Як розв'язують нерівності з однією змінною?
21. Якими способами можна доводити нерівності?
22. Наведіть приклад системи двох нерівностей з однією змінною.
23. Що називають розв'язком системи двох лінійних нерівностей з однією змінною?
24. Що означає — розв'язати систему двох нерівностей з однією змінною?
25. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| < a$?
26. Як розв'язують нерівність виду $|f(x)| > a$?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Якому з наведених у відповідях чисел може дорівнювати значення виразу $a - b$, якщо $a < b$?

А. 1,01.
Б. 0.
В. 0,11.
Г. –0,1.

2° Скільки цілих чисел належать проміжку $[-1; 3)$?

А. П'ять.
Б. Чотири.
В. Три.
Г. Два.

3° Яка з наведених у відповідях нерівностей не має розв'язків?

А. $x^3 < -1$.
Б. $|x| < 2$.
В. $|x| > -1$.
Г. $x^4 < -5$.

4 Перерізом проміжків $[-1,7; 4,3)$ і $[-1,5; 4,5]$ є проміжок:

А. $[-1,5; 4,3)$.
Б. $[-1,5; 4,5]$.
В. $[-1,7; 4,3)$.
Г. $[-1,7; 4,5]$.

5* Оцініть значення виразу $1 - 6a$, якщо $-1\frac{2}{3} \le a \le 4\frac{1}{6}$.

А. [–26; 10].
Б. [–24; 11].
В. [–26; 11]
Г. [–24; 10].

№ 2

1° Множина розв'язків нерівності $4x < -20$ містить...

А. лише додатні числа.
Б. лише від'ємні числа.
В. лише число 0.
Г. і додатні, і від'ємні числа.

2° Яке з наведених у відповідях чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x < 3, \\ x \geq -2 \end{cases}$?

А. 3.
Б. –3.
В. 0,55.
Г. –2,1.

3° Розв'яжіть нерівність $x + 2\frac{1}{3} \geq 0$.

А. $\left[2\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
Б. $\left[-2\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
В. $\left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right]$
Г. $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right]$.

4 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} -2x \geq 0, \\ 3x > -5 \end{cases}$.

А. $\varnothing$.
Б. $\left[0; 1\frac{2}{3}\right)$.
В. $\left(-1\frac{2}{3}; 0\right]$.
Г. $[0; +\infty)$.

5* Розв'яжіть нерівність: $|4x - 1| \leq 4x + 1$.

А. $\varnothing$.
Б. $[0; +\infty)$.
В. $(-\infty; 0]$.
Г. $(-\infty; +\infty)$.

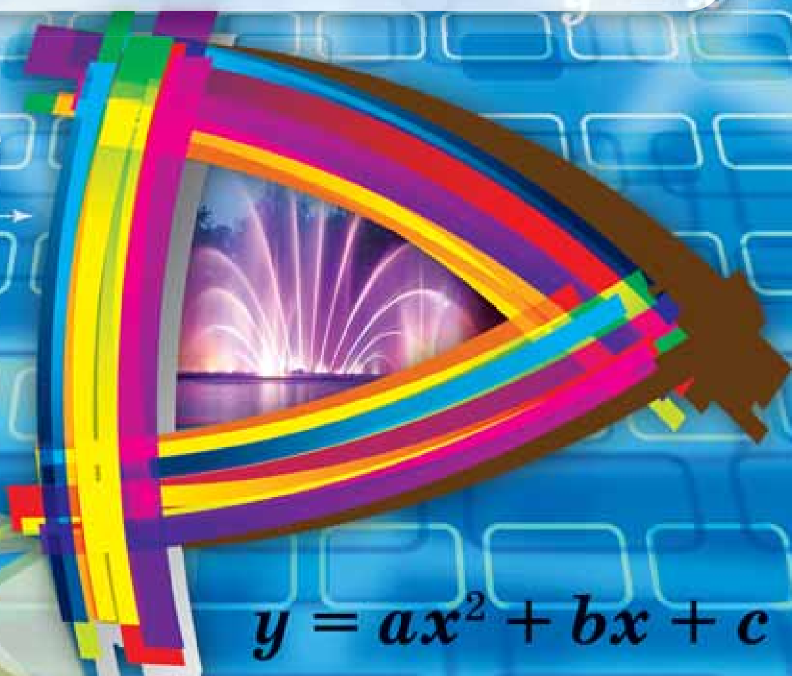
Розділ 2

Квадратична функція

У розділі дізнаєтеся:

- про властивості функцій;
- як побудувати графік функції за допомогою перетворень відомого графіка;
- що таке квадратична функція та які її властивості;
- що таке квадратна нерівність з однією змінною та як її розв’язувати;
- що таке система рівнянь із двома змінними та як її розв’язувати;
- що таке математична модель прикладної задачі;
- як розв’язувати прикладні задачі методом математичного моделювання;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці

$y = x^2$



$y = ax^2 + bx + c$

§ 6 Функція та її властивості

1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Із курсу алгебри 7-го класу ви вже знаєте, що таке функція та окремі її властивості. Пригадаємо основні відомості про функції.

Правило, згідно з яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної, називається *функцією*.

Незалежну змінну називають *аргументом функції*, а залежну змінну — *функцією*. Наприклад, для функції $y = f(x)$ змінна x — це незалежна змінна (аргумент функції), змінна y — це залежна змінна (функція).

Множину всіх допустимих значень аргументу називають *областю визначення функції*, а множину всіх відповідних значень залежної змінної називають *областю значень функції*.

Область визначення та область значень функції коротко позначають $D(f)$ і $E(f)$ відповідно.

Задача 1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^3 - x$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4x}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1}$.

Розв'язання. 1. Вираз $x^3 - x$ має зміст для всіх дійсних значень аргументу, тому $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Вираз $\sqrt{x-2}$ має зміст тільки тоді, коли підкореневий вираз набуває невід'ємних значень: $x - 2 \ge 0$, $x \ge 2$. Тому $D(f) = [2; +\infty)$.

3. Вираз $\dfrac{2}{x^2 - 4x}$ має зміст для всіх дійсних значень аргументу, крім тих, які перетворюють знаменник на нуль: $x^2 - 4x \ne 0$; $x(x - 4) \ne 0$; $x \ne 0$, $x \ne 4$. Тоді $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

4. Вираз $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+1}$ є сумою двох виразів. З'ясуємо, коли кожний з них має зміст. Вираз $\sqrt{x+1}$ має зміст тільки тоді, коли підкореневий вираз набуває невід'ємних значень. Вираз $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ має зміст тільки тоді, коли підкореневий вираз набуває додатних значень. Одержали систему: $\begin{cases} x+1\geq 0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1, \\ x>1. \end{cases}$ Отже, $D(f) = (1; +\infty)$.

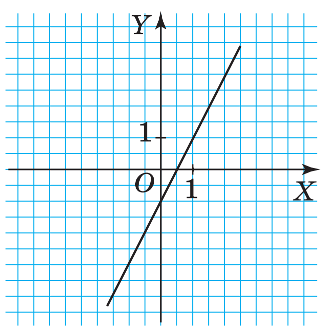
Зверніть увагу:

якщо вираз, що задає функцію:

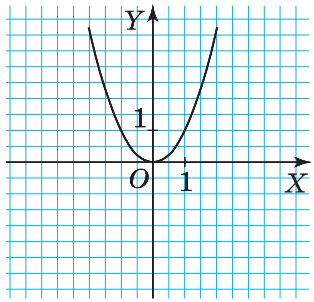
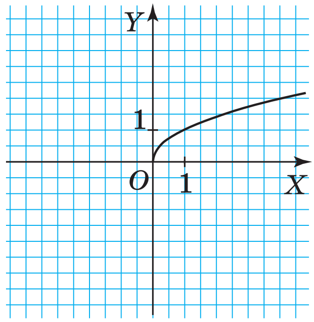
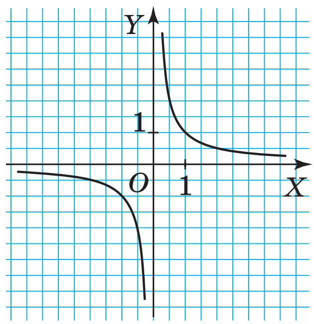
- є многочленом, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- є дробово-раціональним виразом $\frac{g(x)}{h(x)}$, то область визначення функції є множиною всіх дійсних чисел, крім тих, для яких $h(x) = 0$;
- є виразом $\sqrt{g(x)}$, то область визначення функції є множиною всіх дійсних чисел, за яких підкореневий вираз набуває невід'ємних значень: $g(x) \geq 0$.

Щоб задати функцію, використовують такі способи: описовий, аналітичний, табличний, графічний. У математиці функції задають переважно аналітично (формулою) або графічно. Наприклад, формулами задано функції $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, які ви вивчали в 7–8-х класах. Графіки цих функцій мають відповідні назви (таблиця 4).

Таблиця 4

Функція	Назва графіка функції	Графік функції
$y = kx + b$	Пряма	

Продовження таблиці 4

Функція	Назва графіка функції	Графік функції
$y = x^2$	Парабола	
$y = \sqrt{x}$	Вітка параболи	
$y = \dfrac{1}{x}$	Гіпербола	

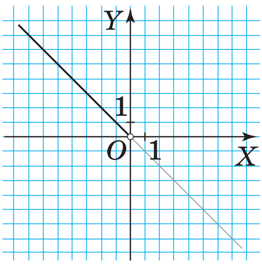
Задача 2. Функцію задано формулою $y = \lvert x \rvert$. Задайте її графічно.

Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

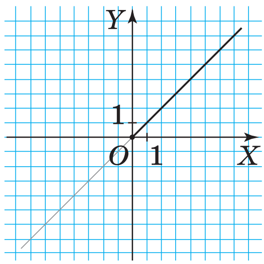
Розкриємо модуль за означенням, тоді одержимо:

$$y = \begin{cases} -x, \text{ якщо } x < 0, \\ x, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

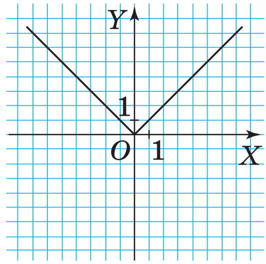
Першу частину графіка утворюють ті точки прямої $y = -x$, що побудовані для $x < 0$, тобто які розміщені ліворуч від осі ординат (мал. 42). Другу частину графіка утворюють ті точки прямої $y = x$, що побудовані для $x \geq 0$, тобто які лежать на осі ординат, і ті, що розміщені праворуч від неї (мал. 43). Остаточний графік функції $y = |x|$ зображено на малюнку 44.



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

У математиці розглядають різні функції. Кожну з них можна схарактеризувати, тобто описати її властивості. Окремі властивості функцій вивчають у школі. Зокрема, ви вже знаєте, що таке область визначення й область значень функції, яка функція є зростаючою (спадною). Зараз ви дізнаєтеся про такі властивості функції, як нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання (спадання), найбільше та найменше значення функції. Ці властивості функцій використовують під час розв'язування задач.

2. НУЛІ ФУНКЦІЇ

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називається *нулем функції*.

Як знайти нулі функції? Розглянемо приклади.

Задача 3. Знайдіть нулі функції $y = x^2 + 6x$.

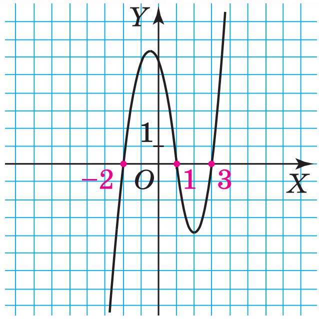
Розв'язання. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Значення функції має дорівнювати нулю, тому $y = 0$. Тоді $x^2 + 6x = 0$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$x(x + 6) = 0,$$
$$x_1 = -6 \text{ і } x_2 = 0.$$

Отже, $x_1 = -6$ і $x_2 = 0$ — нулі функції $y = x^2 + 6x$.

Зверніть увагу:
щоб знайти нулі функції, яку задано формулою $y = f(x)$, потрібно знайти корені рівняння $f(x) = 0$.

Задача 4. Знайдіть нулі функції, графік якої зображено на малюнку 45.



Мал. 45

Розв'язання. Щоб знайти нулі функції, потрібно на графіку функції знайти точки з координатами (x; 0), тобто точки перетину графіка функції з віссю абсцис. За малюнком знаходимо нулі функції (абсциси цих точок): $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Зверніть увагу:
щоб знайти нулі функції, яку задано графічно, потрібно визначити абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис.

Чи завжди функція має нулі? Ні. Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ нулів не має.

3. ПРОМІЖКИ ЗНАКОСТАЛОСТІ

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ (мал. 45).

На проміжках $(-2; 1)$ і $(3; +\infty)$ графік функції розміщений вище за вісь абсцис. Тому на цих проміжках ординати всіх точок графіка набувають лише додатних значень: $y > 0$. Кажуть: функція набуває додатних значень (зберігає додатний знак) на множині: $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$.

На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(1; 3)$ графік функції розміщений нижче від осі абсцис. Тому на цих проміжках ординати всіх точок графіка набувають лише від'ємних значень: $y < 0$. Кажуть: функція набуває від'ємних значень (зберігає від'ємний знак) на множині: $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$.

Проміжки з області визначення функції, на яких функція зберігає знак, називаються *проміжками знакосталості функції.*

Чи обов'язково потрібно будувати графік функції $y = f(x)$ для знаходження проміжків її знакосталості? Ні. Якщо функцію задано формулою, то проміжки знакосталості можна знайти, розв'язавши відповідні нерівності: $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$. Розглянемо приклад.

Задача 5. Знайдіть проміжки знакосталості функції $y = 12 - 6x$.

Розв'язання.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$.

1. Знайдемо проміжки, на яких функція набуває додатних значень, тобто $f(x) > 0$.

$$12 - 6x > 0, \text{ звідси } x < 2.$$

Отже, $f(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; 2)$.

2. Знайдемо проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень, тобто $f(x) < 0$.

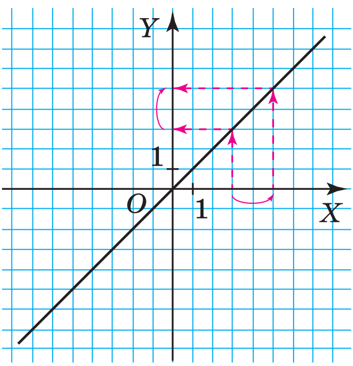
$$12 - 6x < 0, \text{ звідси } x > 2.$$

Отже, $f(x) < 0$, якщо $x \in (2; +\infty)$.

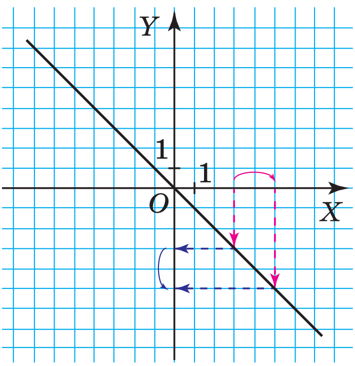
Загалом, проміжками знакосталості функції $y = 12 - 6x$ є проміжки $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$.

4. ПРОМІЖКИ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Ви вже знаєте, що функція може бути зростаючою чи спадною. Для зростаючої функції характерна така властивість: що більшими є значення аргументу, то більшими є відповідні значення функції. Наприклад, функція $y = x$ є зростаючою (мал. 46). Для спадної функції характерна інша властивість: що більшими є значення аргументу, то меншими є відповідні значення функції. Наприклад, функція $y = -x$ є спадною (мал. 47).



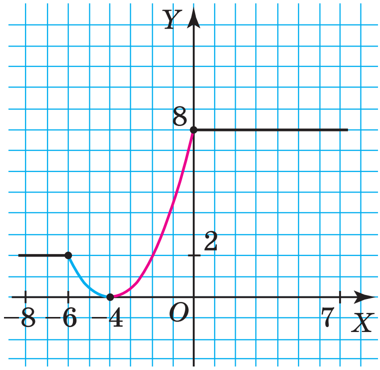
Мал. 46



Мал. 47

Існує багато функцій, які не є зростаючими чи спадними на всій області визначення. Проте на окремих її проміжках можуть мати такі властивості.

Для прикладу, проаналізуємо графік функції $y = f(x)$ (мал. 48) на проміжку $[-8; 7]$. На проміжках $[-8; -6]$ і $[0; 7]$ функція є сталою (значення функції не змінюється зі зміною аргументу). На проміжку $[-6; -4]$ що більшим є значення аргументу, то меншим є значення функції. Отже, функція спадає на проміжку $[-6; -4]$. На проміжку $[-4; 0]$ що більшим є значення аргументу, то більшим є значення функції. Отже, функція зростає на проміжку $[-4; 0]$.



Мал. 48

Зверніть увагу:

- функція $y = f(x)$ *зростає на проміжку* $[a; b]$, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать цьому проміжку, з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$;
- функція $y = f(x)$ *спадає на проміжку* $[a; b]$, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать цьому проміжку, з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Як з'ясувати, за якої умови, наприклад, лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою, а за якої є спадною? Поміркуємо.

Областю визначення лінійної функції є множина дійсних чисел: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення даної функції, для яких $x_2 > x_1$. Тоді $x_2 - x_1 > 0$.

Знайдемо для x_1 і x_2 відповідні значення функції:

$$f(x_1) = kx_1 + b,\ f(x_2) = kx_2 + b.$$

Дослідимо знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) =$$
$$= kx_2 + b - kx_1 - b = kx_2 - kx_1 =$$
$$= k(x_2 - x_1).$$

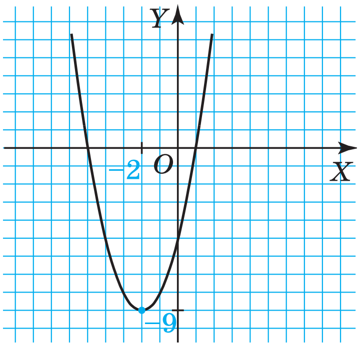
Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то:

1) $f(x_2) - f(x_1) > 0$ за умови, що $k > 0$;
2) $f(x_2) - f(x_1) < 0$ за умови, що $k < 0$.

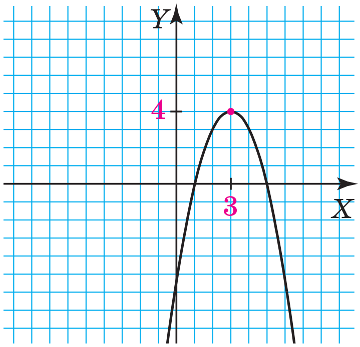
Отже, лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою, якщо $k > 0$, і є спадною, якщо $k < 0$.

5. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Задача 6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції за її графіком: 1) на малюнку 49; 2) на малюнку 50.



Мал. 49



Мал. 50

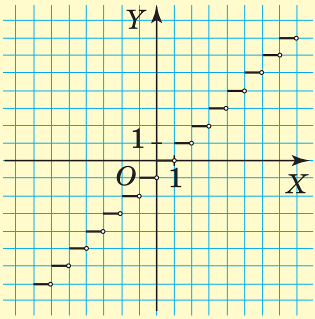
Розв'язання. 1. Проаналізуємо графік функції на малюнку 49. На області визначення дана функція не досягає свого найбільшого значення. А от свого найменшого значення $y = -9$ дана функція набуває в точці з абсцисою –2.
Можемо записати: y_{max} — не існує, $y_{min} = -9$, якщо $x = -2$.
2. Проаналізуємо графік функції на малюнку 50. На області визначення дана функція не досягає свого найменшого значення. А от свого найбільшого значення $y = 4$ дана функція набуває в точці з абсцисою 3.
Можемо записати: $y_{max} = 4$, якщо $x = 3$, y_{min} — не існує.

У старшій школі ви дізнаєтесь і про інші способи знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

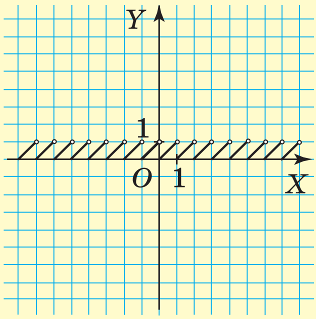
Дізнайтеся більше

Цілою частиною числа x називають найбільше ціле число, яке не перевищує дане число x. Позначають: $[x]$. Наприклад, $[3,5] = 3$, $[-3,5] = -4$. Дробовою частиною числа x називають різницю $x - [x]$. Позначають: $\{x\}$. Наприклад, $\{3,5\} = 0,5$, $\{-3,5\} = 0,5$. Відповідно розглядають функції $y = [x]$ (мал. 51) і $y = \{x\}$ (мал. 52).

Властивості функції $y = [x]$. Область визначення: $D(f) = R$. Область значень: $E(f) = Z$. Нулі функції: $x \in [0;1)$. Проміжки знакосталості: $y < 0$, якщо $x < 0$; $y > 0$, якщо $x \geq 1$.



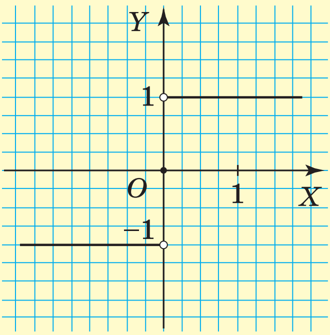
Мал. 51



Мал. 52

Властивості функції $y = \{x\}$. Область визначення: $D(f) = R$. Область значень: $E(f) = [0;1)$. Нулі функції: $x \in Z$. Проміжки знакосталості: $y > 0$ для всіх x із області визначення, крім $x \in Z$.

Signum-функція (функція знака) — функція, що визначається співвідношеннями (мал. 53):



Мал. 53

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ -1, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Властивості функції $y = \operatorname{sgn}(x)$. Область визначення: $D(f) = R$. Область значень: $E(f) = \{-1; 0; 1\}$. Нулі функції: $x = 0$. Проміжки знакосталості: $y < 0$, якщо $x < 0$; $y > 0$, якщо $x > 0$.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення функції.
2. Що називають аргументом функції?
3. Що таке область визначення функції?
4. Що таке область значень функції?
5. Назвіть способи задання функцій.
6. Наведіть приклади відомих вам функцій.
7. Побудуйте графіки відомих вам функцій.
8. Що таке нуль функції?
9. Що таке проміжки знакосталості?
10. Яка функція є спадною на деякому проміжку; зростаючою на деякому проміжку?
11. Поясніть, що таке найбільше та найменше значення функції.

Розв'яжіть задачі

168'. Прочитайте запис: 1) $y = f(x)$; 2) $s = g(t)$; 3) $z = f(j)$. Назвіть залежну й незалежну змінні.

169'. Чи правильно, що областю визначення функції є множина:
1) усіх можливих значень аргументу;
2) усіх значень залежної змінної?

170'. Чи правильно, що нулі функції є абсцисами точок перетину графіка функції з віссю абсцис?

171'. Наведіть приклад функції, заданої аналітично.

172'. Наведіть приклад функції, заданої графічно. Яка її область визначення та область значень?

173°. Чи правильно, що точка $A(-2; 4)$ належить графіку функції:
1) $y = x^2$;
2) $y = x^2 + 2x - 10$;
3) $y = \sqrt{x + 18}$;
4) $y = \dfrac{4}{x}$?

174°. Чи правильно, що точка $A(1; -1)$ належить графіку функції:
1) $y = x^2$;
2) $y = x^2 + 4x - 6$;
3) $y = \sqrt{x + 8}$;
4) $y = \dfrac{1}{x}$?

175°. Знайдіть значення функції $y = x^2 - 5x$ для:
1) $x = -2$;
2) $x = -1$;
3) $x = 0$;
4) $x = 2$;
5) $x = 4$;
6) $x = 6$.

176°. Заповніть таблицю 5, якщо $y = -2x^3 - 1$.

Таблиця 5

x	-2	-1	0	1	2
y					

177°. Заповніть таблицю 6, якщо $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Таблиця 6

x	-3	-2	0	2
$f(x)$				

178°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{x}{x-5}$;

2) $y=x^2+4x$;

3) $y=\frac{x+2}{3}$;

4) $y=-\frac{2}{3x}$;

5) $y=\frac{x+5}{x^2-100}$;

6) $y=\frac{x+10}{x^2+100}$;

7) $y=\frac{x^2-x}{x^2-1}$;

8) $y=x^3+4x^5$;

9) $y=\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-5}$;

10) $y=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-8}$.

179°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{3x}{x+6}$;

2) $y=-x^2+4x+5$;

3) $y=\frac{x+1}{x^2-25}$;

4) $y=\frac{x-5}{x^2-25}$;

5) $y=\frac{x+1}{x^2+1}$;

6) $y=\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x-4}$;

7) $y=\frac{1}{(x-8)(x+1)}$;

8) $y=\frac{x+1}{x-8}\cdot\frac{x-8}{x+1}$.

180°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2{,}2$;

2) $y = -x + 4$;

3) $y = 2x + 8$;

4) $y = -3$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції; 3) нулі функції.

181°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 5$;

2) $y = 7x$;

3) $y = -x + 5$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції; 3) нулі функції.

182°. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{2}{x}$;

2) $y=-\frac{2}{x}$;

3) $y=\frac{12}{x}$;

4) $y=-\frac{5}{x}$.

183°. Побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{9}{x}$;

2) $y=\frac{9}{x}$.

184°. Для функції $y = |x|$ знайдіть:

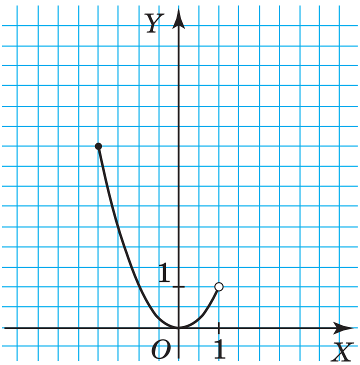
1) область визначення;
2) область значень;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.

185°. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть:

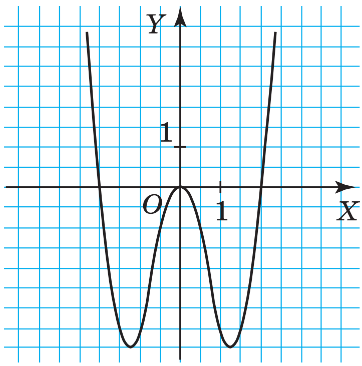
1) область визначення;
2) область значень;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.

186°. Скориставшись малюнками 54, 55, знайдіть:

1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості функції;
5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.



Мал. 54

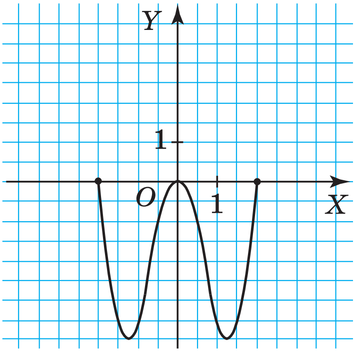


Мал. 55

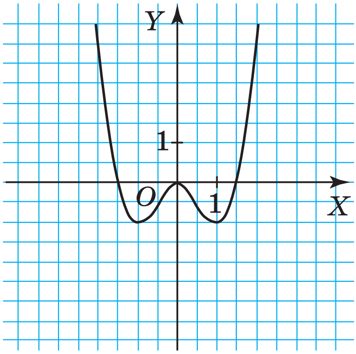
187°. Скориставшись малюнками 56, 57, знайдіть:

1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;

5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.



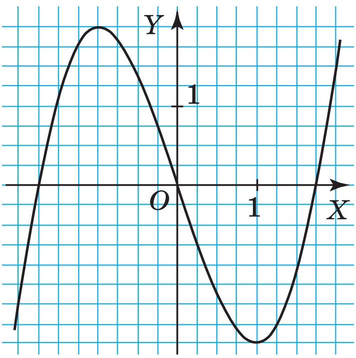
Мал. 56



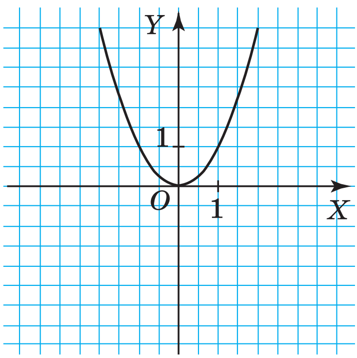
Мал. 57

188°. За малюнком 58 визначте:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; -1; 0; 1; 2;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: 0; 1,5;
3) знак значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-1{,}5$; $-0{,}8$; 0,25; 1,5; 1,3.

189°. За малюнком 59 визначте:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; -1; 0; 1; 2;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює: 0; 1;
3) знак значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: $-1{,}3$; $-0{,}5$; 0,1; 1,7.



Мал. 58



Мал. 59

190°. За малюнком 58 порівняйте значення функції:
1) для $x = -1{,}1$ і $x = -0{,}4$; 3) для $x = -0{,}3$ і $x = 1{,}4$;
2) для $x = -1{,}2$ і $x = 1{,}2$; 4) для $x = 0$ і $x = 0{,}6$.

191°. За малюнком 59 порівняйте значення функції:
1) для $x = -1{,}7$ і $x = -0{,}9$; 3) для $x = -0{,}2$ і $x = 1{,}2$;
2) для $x = -1{,}3$ і $x = 1{,}3$; 4) для $x = -1$ і $x = 2$.

192°. Зростаючою чи спадною є функція:
1) $y = 3x$; 3) $y = 5 - x$;
2) $y = -8x$; 4) $y = 10 - 9x$?
Відповідь поясніть.

193°. Зростаючою чи спадною є функція:
1) $y = x$; 3) $y = 8 - x$;
2) $y = -2x - 4$; 4) $y = 12 - 3x$?
Відповідь поясніть.

194°. Зростаючою чи спадною є функція для $x > 0$:
1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = -\frac{7}{x}$; 3) $y = \frac{10}{x}$; 4) $y = -\frac{12}{x}$?
Відповідь поясніть.

195°. Зростаючою чи спадною є функція для $x < 0$:
1) $y = -\frac{3}{x}$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = \frac{15}{x}$?
Відповідь поясніть.

196. Заповніть таблицю 7, якщо $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ x^3, & \text{якщо } x \ge 0. \end{cases}$

Таблиця 7

	−2	−1	0	1	2
y					

197. Заповніть таблицю 8, якщо $y = \begin{cases} -\frac{9}{x}, & \text{якщо } x \le -3, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ 5x, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$

Таблиця 8

x	−9	−3	−2	0	1	2	4	8
y								

198. Заповніть таблицю 9, якщо $y=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, \text{ якщо } x\le -4,\\ x+1, \text{ якщо } -4<x<4,\\ -\sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 4.\end{cases}$

Таблиця 9

x	-6	-4	-3	0	1	4	9	16
y								

199. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y=2x^2-3x$, де $-2\le x\le 2$ із кроком 0,5.

200. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$;

2) $y=x-\sqrt{x}$;

3) $y=\sqrt{x-4}$;

4) $y=-\sqrt{x-3}$;

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$;

6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$;

7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

8) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{2x-1}$;

9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6+x}}+\dfrac{5}{x+4}$;

10) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{5}{x^2-4}$;

11) $y=\sqrt{x}+4\sqrt{-x}$;

12) $y=\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-3}$;

13) $y=\sqrt{10-5x}-\sqrt{x}$;

14) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{|x|-1}}+\dfrac{3}{x^2}$.

201. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{x-7}$;

2) $y=\sqrt{x-8}+\sqrt{10-x}$;

3) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1-x}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$;

5) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}+\sqrt{5x-1}$;

6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{5}{x^2-9}$.

202. Задайте формулою деяку функцію, яка має область визначення:

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) $D(f)=(-\infty;0)$;

3) $D(f)=(-5;+\infty)$;

4) $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$;

5) $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$;

6) $D(f)=[5;8]$.

203. Задайте формулою деяку функцію, яка має область визначення:

1) $D(f) = (-\infty;+\infty)$;
2) $D(f) = (-\infty;1)$;
3) $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;
4) $D(f) = (-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

204. Побудуйте графік деякої функції, для якої:

1) $D(f) = (2;\,5)$, $E(f) = (4;\,8)$;
2) $D(f) = [-3;7]$, $E(f) = [2;5]$;
3) $D(f) = [-1;0]$, $E(f) = [-1;0]$;
4) $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;+\infty)$;
5) $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;5)$.

205. Побудуйте графік деякої функції, для якої:

1) $D(f) = (1;\,6)$, $E(f) = (2;\,10)$;
2) $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [-1;1]$;
3) $D(f) = (-\infty;+\infty)$, $E(f) = (-3;+\infty)$.

206. Знайдіть нулі функції:

1) $y = x^2 + 4x - 5$;
2) $y = x^2 + 9x + 16$;
3) $y = -x^2 + 4x + 5$;
4) $y = -x^2 + 9x$;
5) $y = 3x^2 - 12$;
6) $y = \sqrt{x-5}$;
7) $y = \sqrt{x^2 - 6}$;
8) $y = \dfrac{3-x}{x+3}$;
9) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$;
10) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$;
11) $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$;
12) $y = \dfrac{1}{(x-8)(x+1)}$.

207. Знайдіть нулі функції:

1) $y = x^2 + x - 2$;
2) $y = -x^2 + 2x - 1$;
3) $y = -x^2 + 8x$;
4) $y = \sqrt{2x-9}$;
5) $y = \dfrac{x+6}{x-6}$;
6) $y = \dfrac{x-3}{x^2-9}$;
7) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-9}$;
8) $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

208. Задайте формулою деяку функцію, яка має нулі:

1) $x = -3$;
2) $x = 0$;
3) $x = -2$, $x = 2$;
4) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

209. Задайте формулою деяку функцію, яка має нулі:

1) $x = 4$;
2) $x = 2$;
3) $x = -5$, $x = 5$;
4) $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$.

210. Побудуйте графік деякої функції, яка має нулі:

1) $x = -2$, $x = -1$;
2) $x = 0$;
3) $x = 2$, $x = 3$;
4) $x = -7$, $x = 8$;
5) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$;
6) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

211. Побудуйте графік деякої функції, яка має нулі:

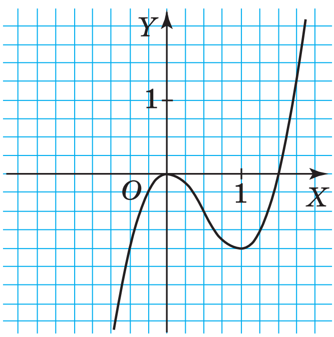
1) $x = -5$, $x = -4$;
2) $x = 1$;
3) $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$.

212. Побудуйте графік деякої функції, яка зростає на проміжку $x \in (-\infty; 3]$ і спадає на проміжку $x \in [3; +\infty)$.

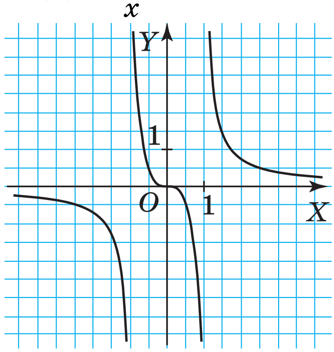
213. Побудуйте графік деякої функції, яка зростає на проміжку $x \in (-\infty; 8]$ і спадає на проміжку $x \in [8; +\infty)$.

214. На малюнку 60 дано графік функції $y = f(x)$. За графіком з'ясуйте, скільки коренів має рівняння:

1) $f(x) = -1$;
2) $f(x) = x^2$;
3) $f(x) = 0,5x$;
4) $f(x) = x + 0,5$;
5) $f(x) = -2x + 1$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
8) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$.



Мал. 60



Мал. 61

215. На малюнку 61 дано графік функції $y = f(x)$. За графіком з'ясуйте, скільки коренів має рівняння:

1) $f(x) = 3$;
2) $f(x) = 0$;
3) $f(x) = 2x$;
4) $f(x) = 1 + x$;
5) $f(x) = \sqrt{x}$;
6) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

216. Знайдіть область значень функції:

1) $y=-\sqrt{x^2}$;

2) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;

3) $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}$;

4) $y=\dfrac{x-4}{x-4}$.

217*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x<0,\\ 5x, \text{ якщо } x\ge 0;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x<1,\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x\ge 1;\end{cases}$

3) $y=\dfrac{x^2}{x^3}$;

4) $y=\dfrac{x+5}{x+5}$.

Знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.

218*. Побудуйте графік функції:

1) $y=|x-5|$;

2) $y=|x-5|-4$;

3) $y=|x-5|-x$;

4) $y=|x-5|+x$.

Знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання, проміжки спадання;
6) найбільше та найменше значення функції.

219*. Доведіть, що функція $y=-\dfrac{2}{x}$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

220*. Доведіть, що на проміжку $[0; 1]$ функція $y=-x^2-2x$ спадає.

221*. Скільки нулів має функція $y=\dfrac{x+2a}{x-1}$ залежно від значень параметра a?

222*. Скільки нулів має функція $y = x^2 - (a + 1)x + a$ залежно від значень параметра a?

Проявіть компетентність

223. Залежність відстані, яку проїхав мотоцикліст, від часу задано формулою:

$$s=\begin{cases}20t, \text{ якщо } 0\le t<1,\\ 20, \text{ якщо } 1\le t<3,\\ 50-10t, \text{ якщо } 3\le t\le 4.\end{cases}$$

Побудуйте графік даної функції та за графіком визначте її властивості.

224. Шматок льоду, температура якого становить −3 °C, нагрівали. Через 5 хв лід розтанув. А ще через 10 хв температура талої води почала змінюватися від 0 °C до 3 °C. Побудуйте графік залежності температури від часу. Визначте властивості функції.

Задачі на повторення

225. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:
1) $y = 1$, $y = 2$ і $y = 3$;
2) $y = x$, $y = x + 1$ і $y = x - 1$;
3) $y = 2x$, $y = 2x + 3$ і $y = 2x + 5$;
4) $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ і $y = -x$.

226. Запишіть у вигляді дробу:

1) $1+\dfrac{1}{x}$;
2) $2+\dfrac{1}{x-1}$;
3) $3-\dfrac{9}{x+2}$;
4) $-1-\dfrac{1}{x-2}$;
5) $6-\dfrac{1}{x+1}$;
6) $2-\dfrac{2}{x-2}$.

227. Якщо третину книжок із другої полиці перекласти на першу, то на ній стане в 3 рази менше книжок, ніж на першій. Якщо ж із першої полиці перекласти на другу 4 книжки, то книжок на полицях стане порівну. Скільки книжок на кожній полиці?

§ 7 Перетворення графіків функцій

Побудову деяких графіків функцій іноді важко виконати безпосередньо. Часто для цього виконують перетворення відомих графіків. Розглянемо основні перетворення графіків функцій.

1. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = -f(x)$.

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$. Значення цих функцій за однакових значень аргументу є протилежними числами: x^2 і $-x^2$. Тому графіком функції $y = -x^2$ є парабола.

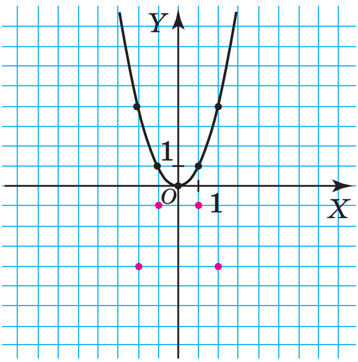
Щоб побудувати графік функції $y = -x^2$, можна діяти так:

1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок. На малюнку 62 це точки $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$;

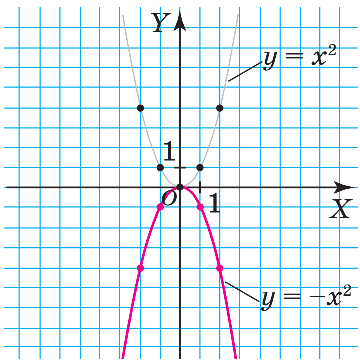
2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але протилежними ординатами: $(-2;-4)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(2; -4)$;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 63).

Одержали параболу, вітки якої напрямлені вниз.

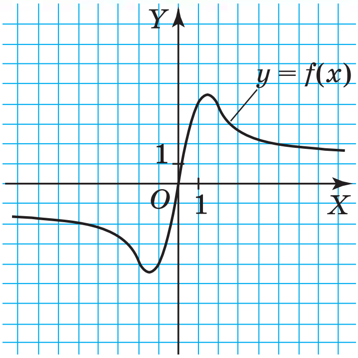


Мал. 62

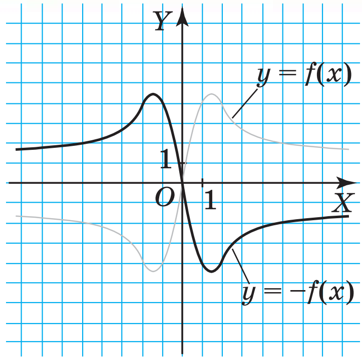


Мал. 63

Параболу $y = -x^2$ можна одержати з параболи $y = x^2$ її відображенням відносно осі OX. Так само можна побудувати графік будь-якої функції $y = -f(x)$, якщо графік функції $y = f(x)$ є побудованим (мал. 64). Справді, за однакових значень аргументу значення функцій $f(x)$ і $-f(x)$ є протилежними числами (мал. 65).



Мал. 64



Мал. 65

Графік функції $y = -f(x)$ можна одержати перетворенням відомого графіка, якщо відобразити відносно осі OX графік функції $y = f(x)$.

2. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = af(x)$ $(a \neq 0)$.

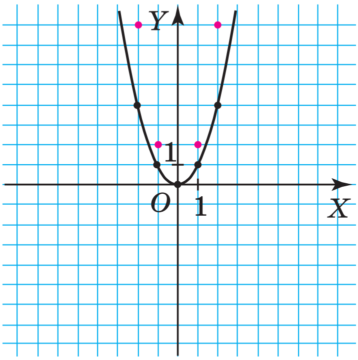
Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = 2x^2$. Значення функції $y = 2x^2$ за деякого ненульового значення x у 2 рази більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Якщо $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0^2 = 0$. Точка $(0; 0)$ належить графіку функції $y = 2x^2$.

Щоб побудувати графік функції $y = 2x^2$, можна діяти так:

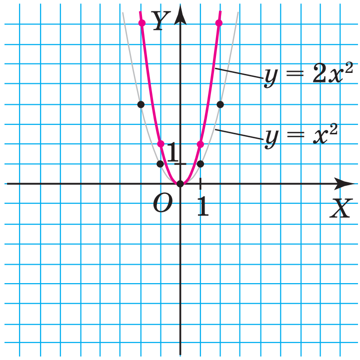
1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок. На малюнку 66 це точки $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$;

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але з більшими у 2 рази ординатами: $(-2; 8)$, $(-1; 2)$, $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 8)$;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 67).



Мал. 66



Мал. 67

Можна сказати, що графік функції $y = 2x^2$ одержали в результаті розтягу параболи $y = x^2$ уздовж осі ординат у 2 рази.

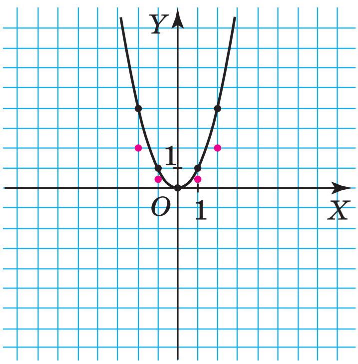
Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = \frac{1}{2}x^2$. Значення функції $y = \frac{1}{2}x^2$ за деякого ненульового значення x у 2 рази менше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$. Якщо $x = 0$, то $y = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$. Точка $(0; 0)$ належить графіку функції $y = \frac{1}{2}x^2$.

Щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$, можна діяти так:

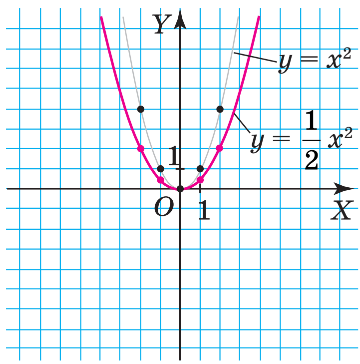
1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок. На малюнку 68 це точки $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$;

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але з меншими у 2 рази ординатами: $(-2; 2)$, $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $(0; 0)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $(2; 2)$;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 69).



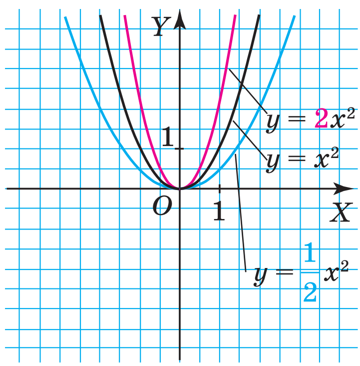
Мал. 68



Мал. 69

Можна сказати, що графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ одержали в результаті стиску параболи $y = x^2$ уздовж осі ординат у 2 рази.

На малюнку 70 зображено параболи $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.



Мал. 70

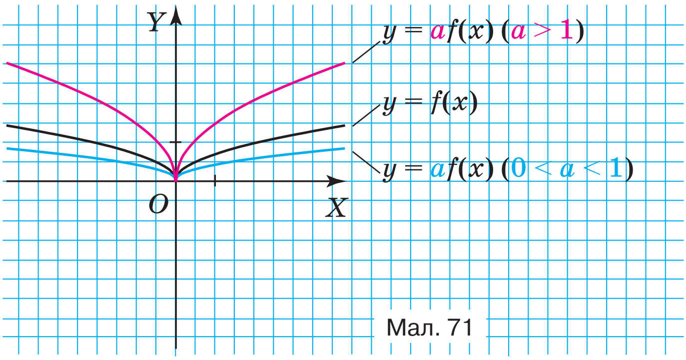
Зверніть увагу:

1) графіком функції $y = ax^2$ ($a > 0$, $a \neq 1$) є парабола, яку одержано в результаті:
- розтягу параболи $y = x^2$ в a разів уздовж осі ординат, якщо $a > 1$;
- стиску параболи $y = x^2$ в $\frac{1}{a}$ разів уздовж осі ординат, якщо $0 < a < 1$;

2) якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз;
якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору;

3) вершина параболи $y = ax^2$ — точка (0; 0).

Так само можна побудувати графік функції $y = af(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) за умови, що побудованим є графік функції $y = f(x)$ (мал. 71).



Мал. 71

Графік функції $y = af(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) можна одержати перетворенням графіка функції $y = f(x)$ у результаті:
- розтягу графіка функції $y = f(x)$ в a разів уздовж осі ординат, якщо $a > 1$;
- стиску графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ разів уздовж осі ординат, якщо $0 < a < 1$.

3. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x) + b$

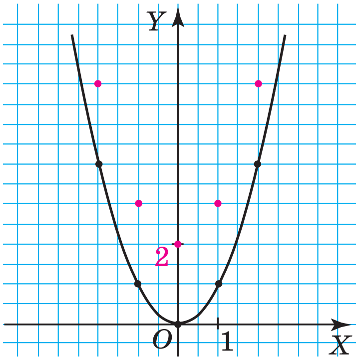
Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = x^2 + 2$. Значення функції $y = x^2 + 2$ за деякого значення аргументу на 2 більше, ніж значення функції $y = x^2$ за того самого значення аргументу.

Щоб побудувати графік $y = x^2 + 2$, можна діяти так:

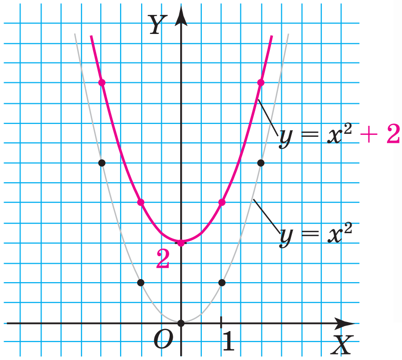
1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок. На малюнку 72 це точки (–2; 4), (–1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4);

2) побудувати точки з такими самими абсцисами, але ординатами, які на 2 одиниці більші: $(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 6)$;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 73).



Мал. 72



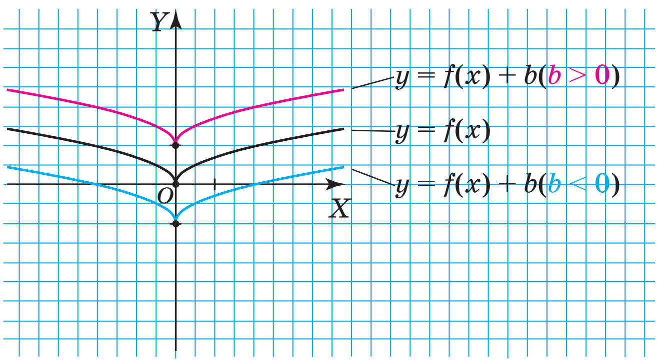
Мал. 73

Можна сказати, що графік функції $y = x^2 + 2$ одержали в результаті переміщення параболи $y = x^2$ на 2 одиниці вгору вздовж осі ординат.

Так само можна побудувати графік функції $y = f(x) + b$ за умови, що побудованим є графік функції $y = f(x)$ (мал. 74).

Графік функції $y = f(x) + b$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат:

- на b одиниць угору, якщо $b > 0$;
- на $|b|$ одиниць униз, якщо $b < 0$.



Мал. 74

4. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x - a)$

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = (x - 3)^2$. Кожному значенню функції $y = (x - 3)^2$ відповідатиме таке саме значення функції

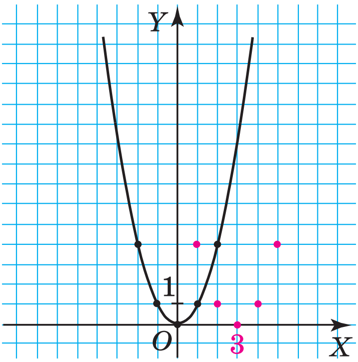
$y = x^2$, якщо аргумент функції $y = (x - 3)^2$ буде на 3 одиниці більшим, ніж відповідне значення аргументу функції $y = x^2$.

Щоб побудувати графік функції $y = (x - 3)^2$, можна діяти так:

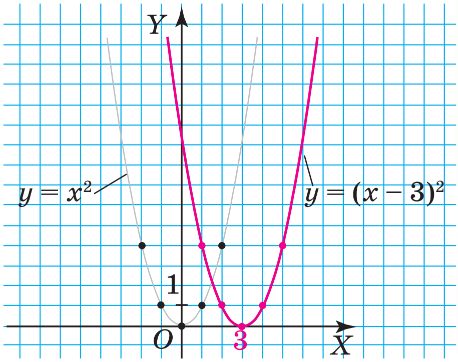
1) на графіку функції $y = x^2$ позначити кілька точок. На малюнку 75 це точки $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$;

2) побудувати точки з такими самими ординатами, але з абсцисами, які на 3 одиниці більші: $(1; 4)$, $(2; 1)$, $(3; 0)$, $(4; 1)$, $(5; 4)$;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 76).



Мал. 75



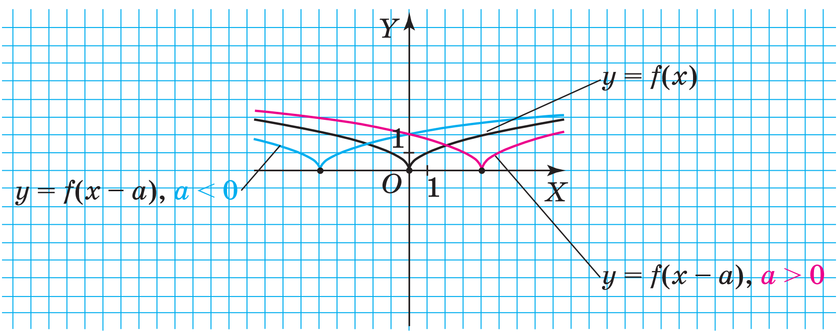
Мал. 76

Можна сказати, що графік функції $y = (x - 3)^2$ одержали в результаті переміщення параболи $y = x^2$ на 3 одиниці праворуч уздовж осі абсцис.

Так само можна побудувати графік функції $y = f(x - a)$ за умови, що побудованим є графік функції $y = f(x)$ (мал. 77).

Графік функції $y = f(x - a)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис:

- на a одиниць праворуч, якщо $a > 0$;
- на $|a|$ одиниць ліворуч, якщо $a < 0$.

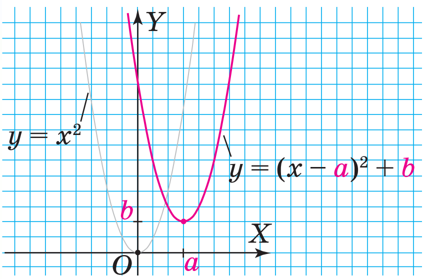


Мал. 77

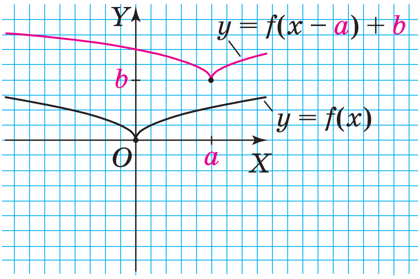
5. ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x - a) + b$

Об'єднаємо результати, одержані в попередніх двох пунктах. Можемо сказати, що графіком функції $y = (x - a)^2 + b$ є парабола, яку одержимо внаслідок переміщення параболи $y = x^2$ на $|a|$ одиниць уздовж осі OX і на $|b|$ одиниць уздовж осі OY (мал. 78). Вершина параболи $y = (x - a)^2 + b$ має координати $(a; b)$.

Аналогічно, графік функції $y = f(x - a) + b$ можна одержати переміщенням графіка функції $y = f(x)$ на $|a|$ одиниць уздовж осі OX (праворуч, якщо $a > 0$, або ліворуч, якщо $a < 0$) і на $|b|$ одиниць уздовж осі OY (угору, якщо $b > 0$, або вниз, якщо $b < 0$) (мал. 79).



Мал. 78



Мал. 79

Дізнайтеся більше

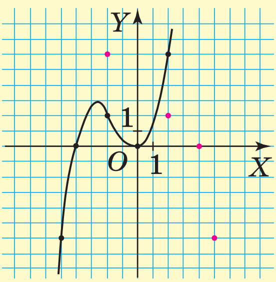
1. У вас могло виникнути запитання: Як будувати графік функції $y = f(-x)$?

Розглянемо функції $y = f(x)$ і $y = f(-x)$. Значення цих функцій є однаковими, якщо відповідні аргументи є протилежними числами. Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, потрібно:

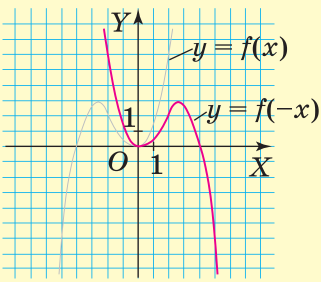
1) на графіку функції $y = f(x)$ позначити кілька точок (мал. 80);

2) побудувати точки з такими ж ординатами і протилежними абсцисами;

3) з'єднати їх плавною лінією (мал. 81).



Мал. 80



Мал. 81

2. **Задача 1.** Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x-2}{x+3}$.

Розв'язання. Подамо функцію $y = \dfrac{x-2}{x+3}$ у вигляді $y = \dfrac{k}{x-a} + b$. Для цього зробимо такі перетворення виразу, що задає дану функцію:

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+3-3-2}{x+3} = \frac{x+3-5}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{5}{x+3} = 1 - \frac{5}{x+3} = \frac{-5}{x+3} + 1.$$

Отже, задана функція набула вигляду: $y = \dfrac{-5}{x+3} + 1$. Графік цієї функції можна одержати внаслідок переміщення гіперболи $y = \dfrac{-5}{x}$ уздовж осі OX на 3 одиниці ліворуч і вздовж осі OY на 1 одиницю вгору.

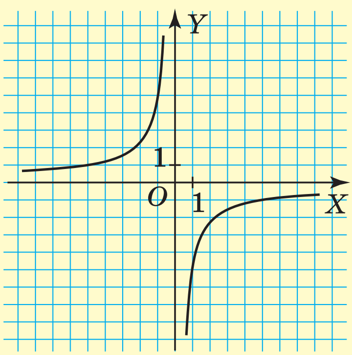
Побудову графіка функції виконаємо за такою схемою:

1) Побудуємо гіперболу $y = \dfrac{-5}{x}$ (мал. 82). Для цього визначимо координати кількох її точок (таблиця 10).

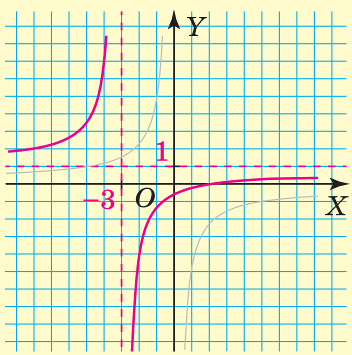
Таблиця 10

x	– 5	– 1	1	5
y	1	5	– 5	– 1

2) Перемістимо гіперболу $y = \dfrac{-5}{x}$ уздовж осі OX на 3 одиниці ліворуч і вздовж осі OY на 1 одиницю вгору (мал. 83).



Мал. 82



Мал. 83

Пригадайте головне

1. Як можна одержати графік функції $y = af(x)$ $(a \neq 0)$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
2. Що є графіком функції $y = -x^2$; функції $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
3. Які властивості функції $y = -x^2$; функції $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
4. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a)$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
5. Як можна одержати графік функції $y = f(x) + b$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
6. Як можна одержати графік функції $y = f(x - a) + b$, скориставшись графіком функції $y = f(x)$?
7. Які властивості функції $y = (x - a)^2 + b$?

Розв'яжіть задачі

228'. Яке з тверджень є правильним:
1) графіком функції $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ є парабола;
2) вітки параболи $y = ax^2$ напрямлені вниз, якщо $a > 1$;
3) вітки параболи $y = ax^2$ напрямлені вниз, якщо $a < 0$?

229'. Яке з тверджень є правильним:
1) графік функції $y = -|x|$ можна одержати перетворенням графіка функції $y = |x|$, якщо відобразити графік функції $y = |x|$ відносно осі OX;
2) графік функції $y = -|x|$ можна одержати перетворенням графіка функції $y = |x|$, якщо відобразити графік функції $y = |x|$ відносно осі OY?

230'. Яке з тверджень є правильним:
1) вершина параболи $y = (x + 5)^2 + 6$ міститься в точці $(-5; 6)$;
2) вершина параболи $y = 3x^2$ міститься в точці $(3; 0)$;
3) вершина параболи $y = (x - 14)^2$ міститься в точці $(0; 14)$?

231'. Яке з тверджень є правильним:
1) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 7 одиниць угору;
2) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 7 одиниць праворуч;

3) графік функції $y = f(x) + 7$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 7 одиниць униз?

232'. Яке з тверджень є правильним:
1) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 8 одиниць ліворуч;
2) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на 8 одиниць праворуч;
3) графік функції $y = f(x - 8)$ можна одержати в результаті переміщення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на 8 одиниць угору?

233°. Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання; проміжки спадання.

234°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті стиску графіка функції $y = |x|$ уздовж осі ординат:
1) у 4 рази;
2) у 2 рази;
3) у 5 разів.

235°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті розтягу графіка функції $y = \sqrt{x}$ удовж осі ординат:
1) у 2 рази;
2) у 6 разів.

236°. Побудуйте графік функції:
1) $y = 3x^2$;
2) $y = -3x^2$;
3) $y = -\frac{1}{3}x^2$;
4) $y = \frac{1}{3}x^2$;
5) $y = 5x^2$;
6) $y = -5x^2$;
7) $y = -\frac{1}{5}x^2$;
8) $y = \frac{1}{5}x^2$;
9) $y = \frac{2}{3}x^2$;
10) $y = -\frac{3}{2}x^2$.

237°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3\sqrt{x}$;
2) $y = -\sqrt{x}$;
3) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$;
4) $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$;
5) $y = 3|x|$;
6) $y = -3|x|$;
7) $y = -0{,}25|x|$;
8) $y = 0{,}25|x|$.

238°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sqrt{x}$;
2) $y = -\sqrt{x}$;
3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
4) $y = -2\sqrt{x}$;
5) $y = 2|x|$;
6) $y = -2|x|$;
7) $y = -\frac{1}{3}|x|$;
8) $y = -\frac{1}{2}|x|$.

239°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = |x|$:

1) на 4 одиниці вгору;
2) на 2 одиниці вниз;
3) на 5 одиниць униз;
4) на 9 одиниць праворуч;
5) на 3 одиниці ліворуч;
6) на 11 одиниць праворуч.

240°. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x}$:

1) на 2 одиниці вгору;
2) на 10 одиниць униз;
3) на 12 одиниць праворуч;
4) на 20 одиниць ліворуч.

241°. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 1)^2$;
2) $y = (x - 1)^2$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$;
5) $y = (x + 7)^2$;
6) $y = (x - 7)^2$;
7) $y = (x + 10)^2$;
8) $y = (x - 10)^2$;
9) $y = x^2 + 3$;
10) $y = x^2 - 3$;
11) $y = x^2 + 4$;
12) $y = x^2 - 4$;
13) $y = x^2 + 6$;
14) $y = x^2 - 6$;
15) $y = x^2 - 10$;
16) $y = x^2 + 10$.

242°. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 2)^2 + 4$;
2) $y = (x - 2)^2 + 4$;

3) $y = (x + 2)^2 - 4$;
4) $y = (x - 2)^2 - 4$;
5) $y = (x + 1)^2 + 1$;
6) $y = (x - 7)^2 + 2$;
7) $y = (x + 3)^2 - 7$;
8) $y = (x - 6)^2 - 1$.

Визначте координати вершини параболи.

243°. Побудуйте графік функції:
1) $y = (x + 1)^2 + 5$;
2) $y = (x - 2)^2 + 4$;
3) $y = (x + 6)^2 - 3$;
4) $y = (x - 5)^2 - 8$.

Визначте координати вершини параболи.

244°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = \sqrt{x-1}$;
2) $y = \sqrt{x-2}$;
3) $y = \sqrt{x+2}$;
4) $y = \sqrt{x+1}$.

245°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = \sqrt{x}$;
2) $y = \sqrt{x} - 1$;
3) $y = \sqrt{x} + 2$;
4) $y = \sqrt{x} + 3$.

246°. Побудуйте графік функції:
1) $y = \sqrt{x-1} + 1$;
2) $y = \sqrt{x+3} - 5$;
3) $y = \sqrt{x-5} + 2$;
4) $y = \sqrt{x+4} + 6$;
5) $y = \sqrt{x-3} - 5$;
6) $y = 3 + \sqrt{x-2}$.

247°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = -|x| + 1$;
2) $y = -|x| - 1$;
3) $y = -|x| + 2$;
4) $y = -|x| - 2$.

248°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = -|x + 1|$;
2) $y = -|x - 1|$;
3) $y = -|x + 2|$;
4) $y = -|x - 2|$.

249°. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x + 2| + 5$;
2) $y = |x - 2| + 5$;
3) $y = |x - 2| - 5$;
4) $y = |x + 2| - 5$;
5) $y = |x + 5| + 4$;
6) $y = |x - 4| + 3$;
7) $y = |x + 4| - 8$;
8) $y = |x - 2| - 2$.

250°. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x + 1| + 5$;
2) $y = |x - 6| + 7$;
3) $y = |x + 3| - 1$;
4) $y = |x - 10| - 1$.

251°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = x^2$;
2) $y = 2x^2$;
3) $y = -2x^2$;
4) $y = -2(x - 1)^2$;
5) $y = -2(x - 1)^2 + 3$.

252°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = x^2$;
2) $y = 3x^2$;
3) $y = -3x^2$;
4) $y = -3(x + 4)^2$;
5) $y = -3(x + 4)^2 - 2$.

253°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \sqrt{x}$;
2) $y = 3\sqrt{x}$;
3) $y = -3\sqrt{x}$;
4) $y = -3\sqrt{x-7}$;
5) $y = -3\sqrt{x-7} - 3$.

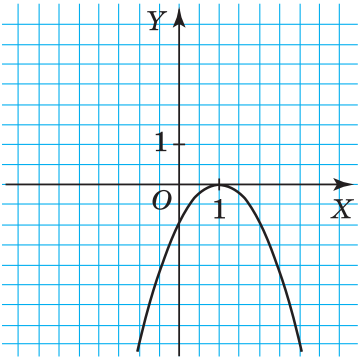
254°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = |x|$;
2) $y = 2|x|$;
3) $y = -2|x|$;
4) $y = -2|x + 2|$;
5) $y = -2|x + 2| + 3$.

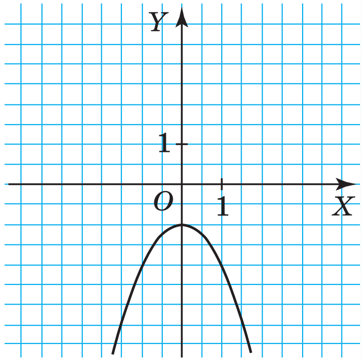
255°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = \sqrt{x}$;
2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;
3) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4}$;
4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 2$.

256°. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 84, 85.

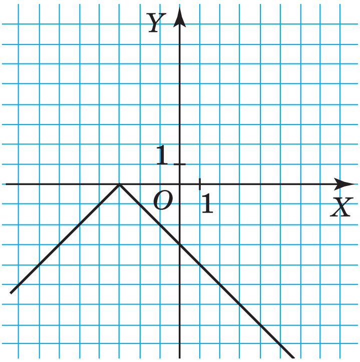


Мал. 84

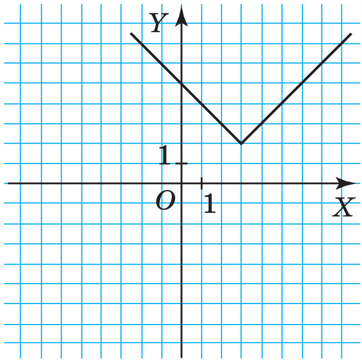


Мал. 85

257°. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 86, 87.

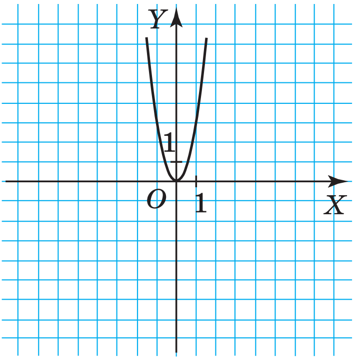


Мал. 86

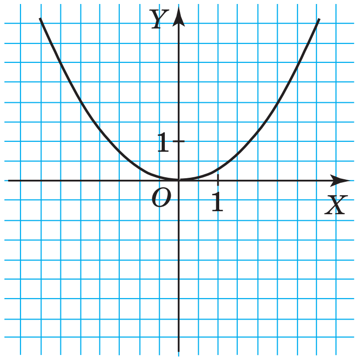


Мал. 87

258. На малюнках 88, 89 зображені графіки функцій $y = ax^2$. Визначте коефіцієнт a.

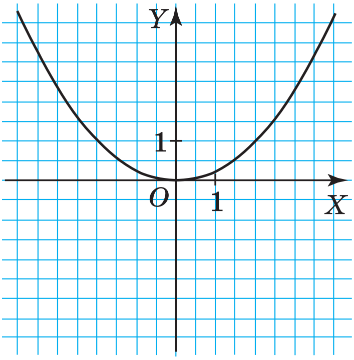


Мал. 88

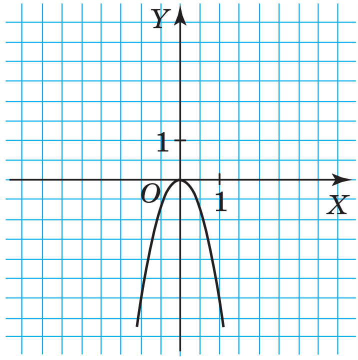


Мал. 89

259. На малюнках 90, 91 зображені графіки функцій $y = ax^2$. Визначте коефіцієнт a.

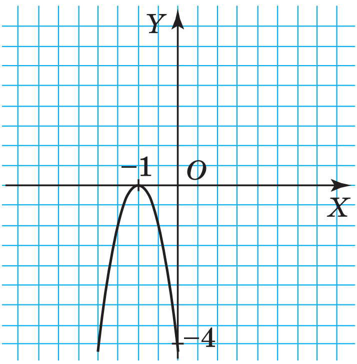


Мал. 90

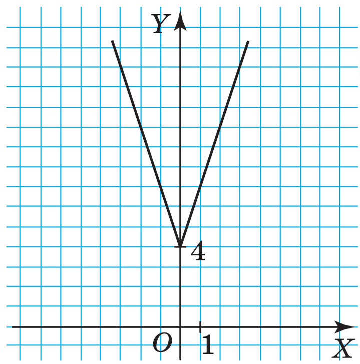


Мал. 91

260. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 92, 93.

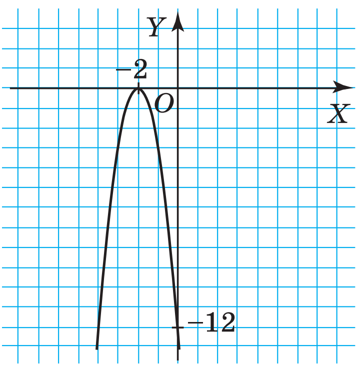


Мал. 92

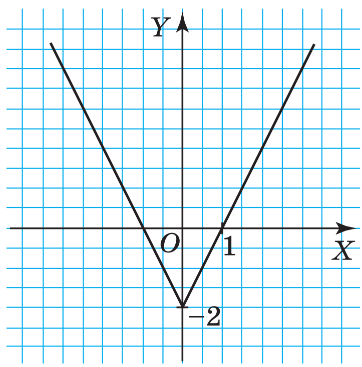


Мал. 93

261. Задайте формулами функції, графіки яких подано на малюнках 94, 95.



Мал. 94



Мал. 95

262. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення вздовж осей координат параболи $y = x^2$ так, що її вершина має координати:

1) (4; 0);
2) (2; −10);
3) (−9; 12);
4) (−2; −7);
5) (−5; 7);
6) (−8; 0).

Скільки розв'язків має задача?

263. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення вздовж осей координат параболи $y = x^2$ так, що її вершина має координати:

1) (0; 3);
2) (3; −15);
3) (−1; 4);
4) (1; 15).

Скільки розв'язків має задача?

264. Задайте формулою функцію $y = f(x)$, яку одержано в результаті переміщення гіперболи $y = \frac{1}{x}$ уздовж осей координат так, щоб для цієї функції виконувалися умови:

1) $D(f) = (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;
2) $D(f) = (-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)$;
3) $D(f) = (-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;7)\cup(7;+\infty)$;
4) $D(f) = (-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;-12)\cup(-12;+\infty)$.

265. Задайте формулою функцію, яку одержано в результаті переміщення гіперболи $y = -\frac{3}{x}$ уздовж осей координат так, щоб для цієї функції виконувалися умови:

1) $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;4)\cup(4;+\infty)$;
2) $D(f) = (-\infty;-6)\cup(-6;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$;
3) $D(f) = (-\infty;7)\cup(7;+\infty)$, $E(f) = (-\infty;-7)\cup(-7;+\infty)$.

266. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 1$;
2) $y = 3(x + 2)^2 - 5$.

Знайдіть:

1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання; проміжки спадання.

267. Побудуйте графік функції:

1) $y = -(x+1)^2$;

2) $y = (x-3)^2 + 3$.

Знайдіть:

1) область визначення функції;

2) область значень функції;

3) нулі функції;

4) проміжки знакосталості;

5) проміжки зростання; проміжки спадання.

268. Параболу $y = x^2$ переміщують уздовж осей координат. Задайте формулою функцію, яку одержано в результаті такого переміщення, якщо відомі властивості цієї функції: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [-1; +\infty)$, $x = -1$, $x = 1$ — нулі функції.

269. Параболу $y = x^2$ переміщують уздовж осей координат. Задайте формулою функцію, яку одержано в результаті такого переміщення, якщо відомі властивості цієї функції: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = [-4; +\infty)$, $x = -2$, $x = 2$ — нулі функції.

270. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2(-x+1)^2$;

2) $y = (4-x)^2 - 1$;

3) $y = (3x+9)^2$;

4) $y = 4 - (2x-1)^2$;

5) $y = (-6-x)^2 + 1$;

6) $y = -10 + (-3-x)^2$;

7) $y = \frac{1}{2}(2x+4)^2$;

8) $y = (2x-8)^2 - 1$.

271. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{1}{3}(3x-6)^2$

2) $y = (-x-1)^2 + 1$;

3) $y = \frac{1}{2}(2x+6)^2$.

272. Побудуйте графік функції:

1) $y = -1 + \sqrt{9x}$;

2) $y = \sqrt{4x-16}$;

3) $y = \sqrt{9x-18} - 3$;

4) $y = |5x+10|$;

5) $y = |-2x+6| + 1$;

6) $y = -|-1-x| - 4$.

273. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{16x-32} + 1$;

2) $y = 2 - \sqrt{4x+12}$;

3) $y = |3x+9|$;

4) $y = |-x-4| + 3$.

274. Дано функцію $f(x) = -x^2$. Для $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ знайдіть значення функції:
1) $y = -2f(x)$;
2) $y = 3f(x)$.

275. Дано функцію $f(x) = |x| + 2$. Для $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$ знайдіть значення функції:
1) $y = f(x) + 1$;
2) $y = f(x - 6)$;
3) $y = f(x + 1) + 2$;
4) $y = \frac{1}{3} f(x + 3)$.

276. Дано функцію $f(x) = -x^2 + 2$. Для $x = -2$, $x = 0$, $x = 4$ знайдіть значення функції:
1) $y = f(x) + 4$;
2) $y = f(x + 4)$;
3) $y = f(x - 2) + 1$.

277. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{1}{x} + 1$;
2) $y = \frac{2}{x} + 2$;
3) $y = \frac{1}{x} - 4$;
4) $y = \frac{1}{x+4}$;
5) $y = \frac{1}{x-3}$;
6) $y = \frac{1}{x+4} - 1$;
7) $y = \frac{1}{x-6} + 2$;
8) $y = \frac{2}{x+3} + 1$.

278. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{1}{x} + 3$;
2) $y = \frac{1}{x} - 5$;
3) $y = \frac{1}{x-5}$;
4) $y = \frac{1}{x+3} - 2$.

279. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x-2}{x}$;
2) $y = \frac{x-1}{x+1}$;
3) $y = \frac{x+4}{x-2}$;
4) $y = \frac{2x+4}{x-7}$;
5) $y = \frac{-x+1}{x-2}$;
6) $y = \frac{3x-3}{x+2}$.

280. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x+1}{x}$;

2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

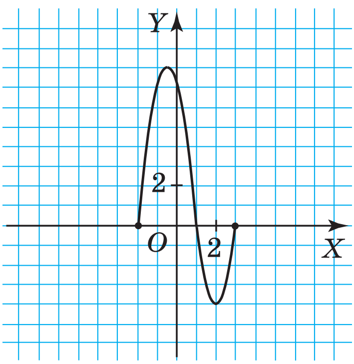
3) $y = \dfrac{x-3}{x-5}$;

4) $y = \dfrac{2x+6}{x-2}$.

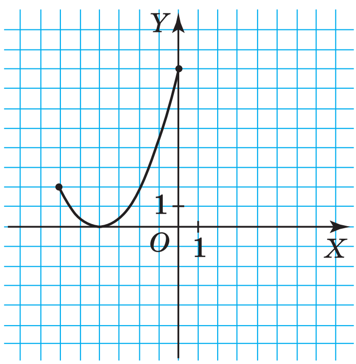
281. На малюнку 96 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-2; 3]$. Побудуйте графік функції:
1) $y = f(x + 2)$;
2) $y = f(x) - 4$;
3) $y = f(x - 1) + 3$;
4) $y = -f(x)$.

282. На малюнку 97 зображено графік функції $y = f(x)$, який задано на проміжку $[-6; 0]$. Побудуйте графік функції:
1) $y = f(x + 1)$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x - 5) + 2$;
4) $y = -f(x)$.

283*. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x+7} - 3$ на 2 одиниці вгору та на 3 одиниці праворуч.



Мал. 96



Мал. 97

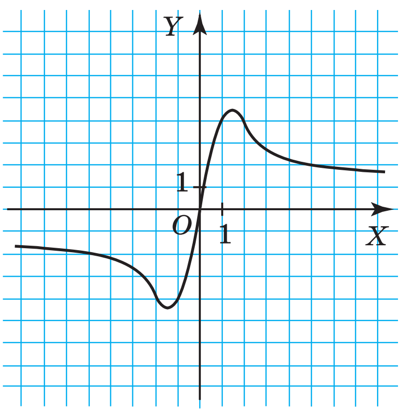
Побудуйте графік функції та знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;

3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання; проміжки спадання.

284*. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення графіка функції $y = 3|x + 5| - 1$ на 2 одиниці вниз та на 2 одиниці праворуч.
Побудуйте графік функції та знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання; проміжки спадання.

285*. Задайте формулою функцію, графік якої одержано в результаті переміщення графіка функції $y = \frac{2}{x-1} + 2$ на 5 одиниць униз та на 2 одиниці ліворуч.
Побудуйте графік функції та знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) проміжки зростання; проміжки спадання.

286*. На малюнку 98 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:
1) $y = -f(x) - 1$;
2) $y = 2f(x)$;
3) $y = f(x + 3) - 2$.



Мал. 98

287*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x^3}$;

2) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$;

3) $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x}$.

Проявіть компетентність

288. Земельні наділи мають форму прямокутника, ширина якого на 6 м менша від довжини.

1. Запишіть залежність площі ділянки від її довжини (позначте довжину через x).
2. Знайдіть область визначення залежності площі ділянки від її довжини.
3. Побудуйте графік залежності площі ділянки від її довжини.
4. Запишіть властивості цієї залежності.
5. Запишіть залежність периметра ділянки від її довжини.
6. Побудуйте графік залежності периметра ділянки від її довжини.

Задачі на повторення

289. Спростіть вираз:

1) $(a^{15} \cdot c)^2 : (a \cdot c^3)^2$;

2) $(a^{10} \cdot a^2)^4 \cdot (a^{10} \cdot a^3)^2$;

3) $(x^{15} : y^4)^3 \cdot (x^{10} : y^3)^2$.

290. Обчисліть:

1) $(3^{-3})^2 \cdot 3^2 : 3^5$;

2) $\dfrac{3^{-1} \cdot 3^2}{9^2 \cdot 3^{-3}}$.

291. Магазин продав 250 зошитів у клітинку за ціною 10 грн та 100 зошитів у лінійку за ціною 12 грн. Податок становить 20 % від ціни реалізації. Визначте величину сплаченого податку.

§ 8 Квадратична функція

Ви вже знаєте властивості функції $y = x^2$. Це окремий вид квадратичної функції. Тому виявлення властивостей квадратичної функції будемо здійснювати шляхом узагальнення.

1. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ

Квадратичною функцією **називається функція, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$.**

Наприклад, квадратичними функціями є функції: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 5x$, $y = -x^2 + 5x - 1$, $y = 9x^2 + 6x - 12$.

Вираз $ax^2 + bx + c$ має зміст за будь-якого дійсного значення x. Тому область визначення квадратичної функції містить усі дійсні числа.

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

? Які властивості має квадратична функція? Поміркуємо. Для цього скористаємося графіком квадратичної функції.

2. ГРАФІК КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Щоб побудувати графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, виділимо квадрат двочлена у виразі $ax^2 + bx + c$, що задає квадратичну функцію:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ca - b^2}{4a}.$$

Отже, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ca - b^2}{4a}$.

Позначивши $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, одержимо $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Отже, графік квадратичної функції $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ можна одержати такими перетвореннями параболи $y = x^2$:

$$y = x^2 \to y = ax^2 \to y = a(x - x_0)^2 \to y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола.

Побудуємо графік функції $y = 2x^2 + 4x + 5$. Для цього спочатку виділимо квадрат двочлена у виразі, що задає дану функцію:

$$2x^2 + 4x + 5 = 2(x + 1)^2 + 3.$$

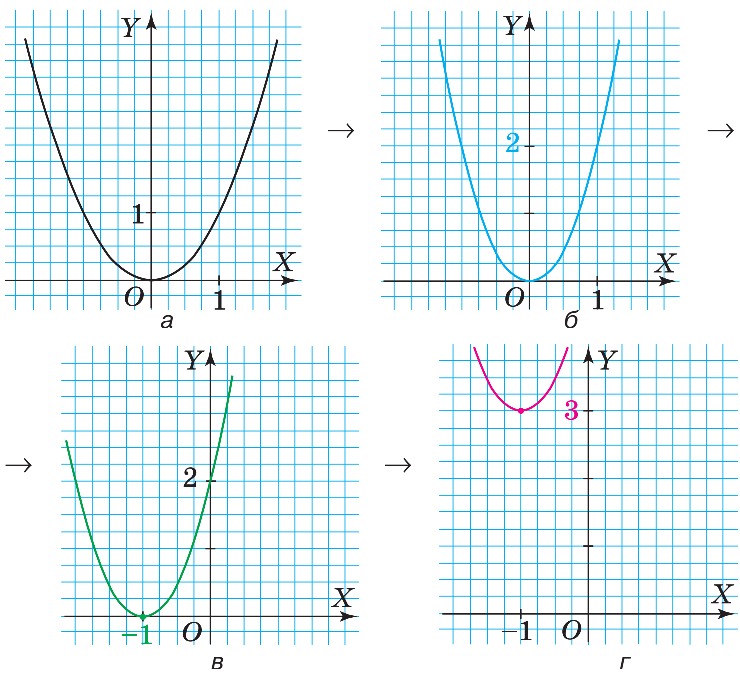
Отже, графіком функції $y = 2(x + 2)^2 + 3$ є парабола, яку можна побудувати шляхом перетворень параболи $y = x^2$:

$y = x^2$ (мал. 99, *а*) $\to$

$\to$ $y = 2x^2$ — розтяг у 2 рази уздовж осі OY (мал. 99, *б*) $\to$

$\to$ $y = 2(x + 1)^2$ — переміщення на 1 од. ліворуч уздовж осі OX (мал. 99, *в*) $\to$

$\to$ $y = 2(x + 1)^2 + 3$ — переміщення на 3 од. вгору уздовж осі OY (мал. 99, *г*).



Мал. 99

Узагалі, розміщення графіка квадратичної функції в системі координат щонайперше характеризують:

1) напрям віток (угору чи вниз);

2) розміщення вершини параболи.

За малюнком 99 бачимо:

1) вітки параболи $y = 2x^2 + 4x + 5$ напрямлені вгору, оскільки $a = 2 > 0$;

2) вершина параболи $y = 2x^2 + 4x + 5$ має координати $(-1;\ 3)$. Їх легко визначити з рівності $y = 2(x + 1)^2 + 3$, яку одержали, виділивши повний квадрат у виразі, що задає дану функцію.

Зверніть увагу:

1) вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені вгору (вниз), якщо $a > 0$ $(a < 0)$;

2) вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ має координати:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ або } y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Знаючи напрям віток параболи та координати її вершини, можна побудувати параболу й по-іншому. Для цього користуються такою схемою.

Схема побудови графіка квадратичної функції

1. Визначити напрям віток:

- якщо $a > 0$, то вітки напрямлені вгору;
- якщо $a < 0$, то вітки напрямлені вниз.

2. Знайти координати вершини параболи $(x_0;\ y_0)$:

- абсциса вершини: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- ордината вершини: $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ або $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

3. Знайти координати точок перетину параболи з осями координат:

- **з віссю OX**, тобто $(x_1;\ 0)$ і $(x_2;\ 0)$. Для цього накладають умову $y = 0$, тоді $ax^2 + bx + c = 0$, звідки знаходять x_1 і x_2 — нулі квадратичної функції;
- **з віссю OY**, тобто $(0;\ y)$. Для цього накладають умову $x = 0$, тоді одержують $y = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$, тобто $y = c$.

4. Знайти координати кількох інших точок параболи для більш точної побудови графіка. Зауважимо, що значення x доцільно обирати близькими до значення x_0.

5. Позначити одержані точки в системі координат і з'єднати їх плавною лінією.

Задача 1. Побудуйте графік функції:

$$y = -x^2 + 6x - 5.$$

Розв'язання.

Графіком функції $y = -x^2 + 6x - 5$ є парабола. Для її побудови скористаємося схемою побудови графіка квадратичної функції.

1. Оскільки $a = -1 < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

2. Знайдемо координати вершини параболи.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2}, \quad x_0 = 3.$$

Тоді $y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$. Точка (3; 4) — вершина параболи.

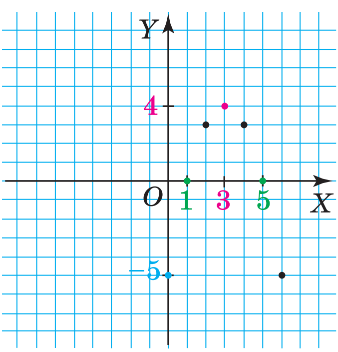
3. Знайдемо точки перетину графіка з осями координат.
Якщо $y = 0$, то $-x^2 + 6x - 5 = 0$ або $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Отже, (1; 0), (5; 0) — точки перетину з віссю абсцис.
Якщо $x = 0$, то $y = -5$. Отже, (0; –5) — точка перетину з віссю ординат.

4. Для більш точної побудови параболи знайдемо ще кілька допоміжних точок.
Оскільки абсциса вершини $x_0 = 3$, то знайдемо значення функції для $x = 2$ і $x = 4$.
Складемо таблицю 11.

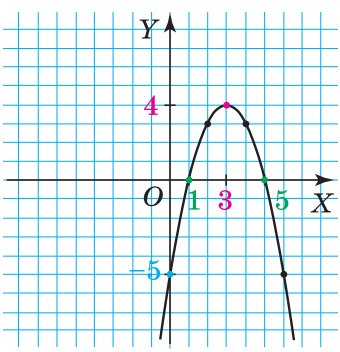
Таблиця 11

x	2	4
y	3	3

5. У системі координат позначимо точки (мал. 100). З'єднаємо їх плавною лінією (мал. 101).



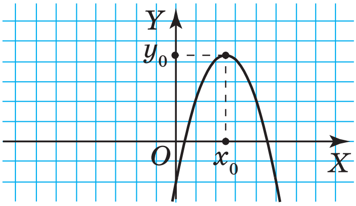
Мал. 100



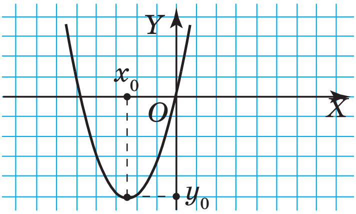
Мал. 101

3. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = ax^2 + bx + c$.

Виокремимо властивості квадратичної функції (таблиця 12), спираючись на її графік для $a < 0$ (мал. 102) і для $a > 0$ (мал. 103).



Мал. 102



Мал. 103

Таблиця 12

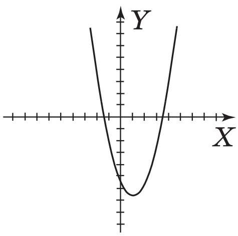
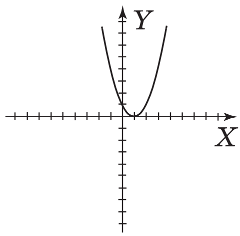
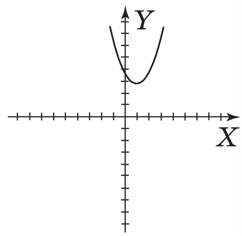
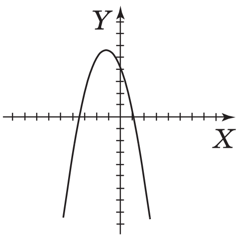
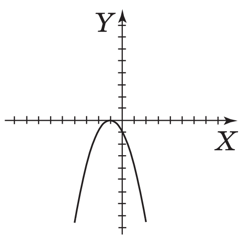
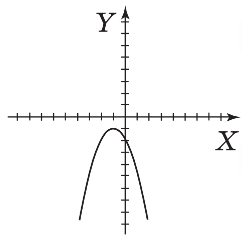
	$a < 0$ (мал. 102)	$a > 0$ (мал. 103)
Область визначення	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значень	$E(f) = (-\infty; y_0]$, де y_0 — ордината вершини параболи	$E(f) = [y_0; +\infty)$ де y_0 — ордината вершини параболи
Нулі функції	x_1, x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (якщо вони існують)	
Проміжки знакосталості	$f(x) < 0$, якщо: $D < 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $D = 0$, $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$; $D > 0$, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x) > 0$, якщо: $D > 0$, $x \in (x_1; x_2)$	$f(x) < 0$, якщо: $D > 0$, $x \in (x_1; x_2)$; $f(x) > 0$, якщо: $D < 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $D = 0$, $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$; $D > 0$, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
Проміжки зростання	$x \in (-\infty; x_0]$	$x \in [x_0; +\infty)$
Проміжки спадання	$x \in [x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_0]$
Найбільше значення функції	y_0	Не існує
Найменше значення функції	Не існує	y_0

Зверніть увагу:

- якщо $D < 0$, то функція $y = ax^2 + bx + c$ не має нулів функції, парабола не перетинає вісь абсцис;
- якщо $D = 0$, то функція $y = ax^2 + bx + c$ має один нуль функції $x_1 = x_2$, парабола дотикається до осі абсцис у точці $(x_1; 0)$;
- якщо $D > 0$, то функція $y = ax^2 + bx + c$ має два нулі функції x_1 і x_2, парабола перетинає вісь абсцис у точках $(x_1; 0)$ і $(x_2; 0)$.

Узагалі, залежно від знака дискримінанта D та коефіцієнта a, маємо різні розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ в системі координат відносно осі абсцис (таблиця 13).

Таблиця 13

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Як бачимо з таблиці 13, проміжки знакосталості квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ залежать від кількості нулів функції та коефіцієнта a. У таблиці 14 подано проміжки знакосталості функції $y = ax^2 + bx + c$.

Таблиця 14

	Функція має два нулі x_1 і x_2	**Функція має один нуль x_1**	**Функція не має нулів**
$a > 0$	$y > 0$, якщо $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$; $y < 0$, якщо $x \in (x_1; x_2)$	$y > 0$, якщо $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_1; +\infty)$; $y < 0$ — таких проміжків немає	$y > 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$; $y < 0$ — таких проміжків немає
$a < 0$	$y > 0$, якщо $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$	$y > 0$ — таких проміжків немає; $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$y > 0$ — таких проміжків немає; $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$

Задача 2. Які властивості має квадратична функція
$$y = -x^2 + 6x - 5?$$

Розв'язання.
За графіком (див. мал. 101) визначимо властивості функції
$$y = -x^2 + 6x - 5.$$
Область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
Область значень функції $E(f) = (-\infty; 4]$.
Нулі функції: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
Проміжки знакосталості: (1; 5) — проміжок, на якому $y > 0$; $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ — об'єднання проміжків, на яких $y < 0$.
Функція є зростаючою, якщо $x \in (-\infty; 3]$.
Функція є спадною, якщо $x \in [3; +\infty)$.
Найбільше значення функції дорівнює 4, якщо $x = 3$.
Найменшого значення функції не існує.

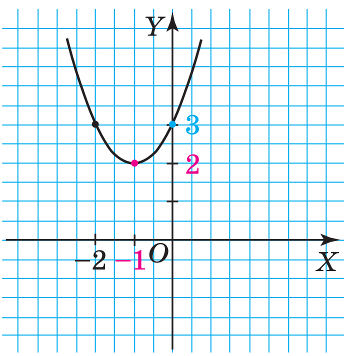
Задача 3. Побудуйте графік квадратичної функції $y = x^2 + 2x + 3$ та визначте її властивості.

Розв'язання.
Графіком квадратичної функції $y = x^2 + 2x + 3$ є парабола. Для її побудови скористаємося схемою.
1. Оскільки $a = 1 > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору.
2. $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2}{2}$, $\quad x_0 = -1$. Тоді $y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$.
Точка (–1; 2) — вершина параболи.
3. Якщо $y = 0$, то $x^2 + 2x + 3 = 0$. $D < 0$, тому рівняння не має коренів. Отже, парабола не перетинає вісь абсцис.
(0; 3) — точка перетину з віссю ординат.
4. Оскільки абсциса вершини $x_0 = -1$, то знайдемо значення функції, якщо $x = -2$, $x = 0$. Складемо таблицю 15.

Таблиця 15

x	–2	0
y	3	3

5. У системі координат позначимо точки та з'єднаємо їх плавною лінією (мал. 104).
Визначимо властивості функції $y = x^2 + 2x + 3$.
Область визначення функції:
$D(f) = (-\infty; \infty)$.
Область значень функції:
$E(f) = [2; \infty)$.



Мал. 104

Нулі функції: немає.
$y > 0$, якщо $x \in (-\infty; \infty)$.
Функція є зростаючою, якщо $x \in [-1; +\infty)$.
Функція є спадною, якщо $x \in (-\infty; -1]$.
Найбільшого значення функції не існує.
Найменше значення функції дорівнює 2, якщо $x = -1$.

Дізнайтеся більше

У вас могло виникнути запитання: Як побудувати графік функції $y = ax^2 + b|x| + c$?

Ви знаєте, що $|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Тоді $y = \begin{cases} ax^2 + bx + c, \text{ якщо } x \geq 0, \\ ax^2 - bx + c, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Для прикладу побудуємо графік функції $y = x^2 + 4|x| - 5$.

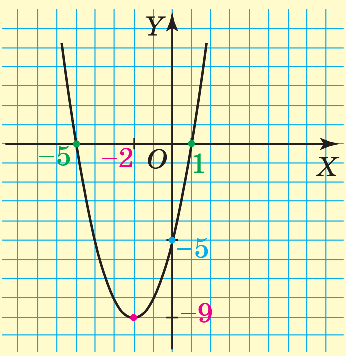
Розкривши модуль, одержуємо $y = \begin{cases} x^2 + 4x - 5, \text{ якщо } x \geq 0, \\ x^2 - 4x - 5, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Це можна записати по-іншому: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 + 4x - 5, \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = x^2 - 4x - 5, \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

Побудуємо спочатку параболу $y = x^2 + 4x - 5$ $(x \geq 0)$.

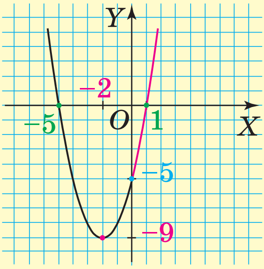
Вітки параболи напрямлені вгору. Вершина має координати $x_0 = -2$, $y_0 = -9$.

Парабола перетинає осі координат у точках (0; –5), (1; 0), (–5; 0). Цю параболу зображено на малюнку 105. Умову $x \geq 0$ задовольняють точки тієї частини параболи, яку виділено червоним кольором (мал. 106). Тобто та точка, яка лежить на осі ординат, і ті, які розміщені праворуч від неї.

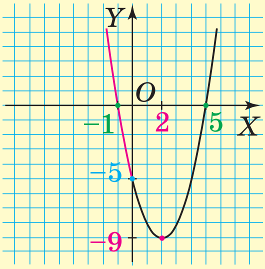


Мал. 105

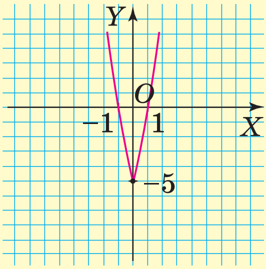
Аналогічно міркуючи, будуємо параболу $y = x^2 - 4x - 5$ ($x < 0$) і беремо ту її частину, яка лежить ліворуч від осі ординат (мал. 107). Остаточний графік функції $y = x^2 + 4|x| - 5$ зображено на малюнку 108.



Мал. 106



Мал. 107



Мал. 108

Так само міркуємо, будуючи графіки функцій $y = f(|x|)$:

1) функцію $y = f(|x|)$ записуємо у вигляді :

$$y = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \geq 0, \\ f(-x), \text{ якщо } x < 0; \end{cases}$$

2) будуємо графік функції $y = f(x)$ і беремо ту його частину, яка відповідає $x \geq 0$;

3) будуємо графік функції $y = f(-x)$ і беремо ту його частину, яка відповідає $x < 0$.

Пригадайте головне

1. Яка функція називається квадратичною?
2. Що є графіком квадратичної функції?
3. Яка область визначення функції $y = ax^2 + bx + c$?
4. Як визначити координати вершини параболи?
5. За якої умови вітки параболи напрямлені вгору; вниз?
6. Як визначити область значень квадратичної функції?
7. Як знайти нулі квадратичної функції? Скільки нулів може мати квадратична функція?
8. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ є зростаючою; спадною?
9. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних значень; від'ємних значень?

Розв'яжіть задачі

292'. Яке з тверджень є правильним:
1) область визначення квадратичної функції — усі додатні числа;
2) область визначення квадратичної функції — усі числа, крім нуля;
3) область визначення квадратичної функції — усі числа;
4) область значень квадратичної функції — усі числа;
5) область значень квадратичної функції — число 0?

293'. Яке з тверджень є правильним:
1) графіком квадратичної функції є пряма;
2) графіком квадратичної функції є парабола;
3) графіком квадратичної функції є або пряма, або парабола?

294'. Дано параболу $y = ax^2 + bx + c$. Яке з тверджень є правильним:
1) вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a > 0$;
2) вітки параболи напрямлені вниз, якщо $c < 0$;
3) вітки параболи напрямлені вниз, якщо $D < 0$?

295'. Дано квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Яке з тверджень є правильним:
1) квадратична функція має три нулі, якщо $a < 0$;
2) квадратична функція має два нулі за будь-яких коефіцієнтів a, b і c;
3) квадратична функція не має нулів, якщо $b^2 - 4ac < 0$;
4) квадратична функція може мати не більш ніж два нулі?

296°. Чи є квадратичною дана функція:
1) $y = 9^2$;
2) $y = \dfrac{1}{x}$;
3) $y = x^2$;
4) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
5) $y = x$;
6) $y = x^2x$;
7) $y = x^2 + x$;
8) $y = 12 + x^2$;
9) $y = -x^2 + 2x^3$;
10) $y = 9 - 7x + x^2$?

297°. Чи належить графіку функції $y = 3x^2 + 4x - 12$ точка:
1) $A(1; 7)$;
2) $B(-1; -19)$;
3) $C(0; -8)$;
4) $D(0; -12)$;
5) $M(2; 8)$;
6) $N(-3; 3)$?

298°. Чи належить графіку функції $y = x^2 - 5x + 7$ точка:
1) $K(1; 3)$;
2) $L(-2; 13)$;
3) $M(-1; 13)$;
4) $N(0; 7)$?

299°. Для функції $y = x^2 + 6x$ знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 3; -4$;
2) значення аргументу, якщо $y = 0; 7; 16$.

300°. Для функції $y = -x^2 + 2$ знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 3; -4$;
2) значення аргументу, якщо $y = 0; -2; -11$.

301°. У якої з парабол вітки напрямлені вгору:
1) $y = 2x^2 - x - 6$;
2) $y = -0{,}1x^2 - 6$;
3) $y = -x^2 + 12x$;
4) $y = -x - x^2$;
5) $y = -2 + x^2 - x$;
6) $y = 2 + 10x^2$?

302°. У якої з парабол вітки напрямлені вниз:
1) $y = -x^2 + x - 15$;
2) $y = 2x^2 - x - 6$;
3) $y = -5x + x^2 - 7$;
4) $y = x^2 + 16$?

303°. Визначте нулі квадратичної функції:
1) $y = x^2 + 4x - 5$;
2) $y = x^2 - 7x - 8$;
3) $y = -6x^2 - x + 1$;
4) $y = 2x^2 - 11x + 5$;
5) $y = 2x^2 - 5x + 3$;
6) $y = 4x^2 - 4x + 1$;
7) $y = 4x^2 - x - 3$;
8) $y = 5x^2 + 14x - 3$.

304°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат параболи:
1) $y = x^2 - 4x$;
2) $y = x^2 - 16$;
3) $y = 9x^2 - 18x$;
4) $y = 5x^2 - 20$;
5) $y = x^2 + 11$;
6) $y = 9x^2 + 36$;
7) $y = x^2 - 4x + 8$;
8) $y = x^2 + 15x - 16$;
9) $y = 4x^2 - 8x + 3$;
10) $y = 4x^2 - 7x + 3$;
11) $y = -6x^2 - x + 1$;
12) $y = 2x^2 - 11x + 5$.

305°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат параболи:
1) $y = x^2 - 9x$;
2) $y = x^2 - 64$;
3) $y = x^2 + 2$;
4) $y = 4x^2 - 16$;
5) $y = x^2 - 8x + 16$;
6) $y = x^2 + 25x + 100$;
7) $y = 2x^2 - 5x + 3$;
8) $y = -3x^2 + 19x - 6$.

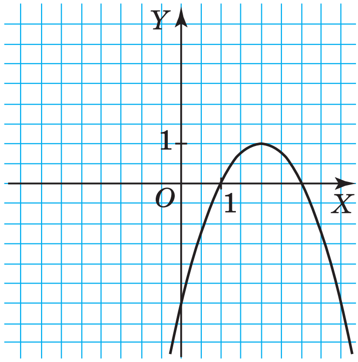
306°. Знайдіть координати вершини параболи:

1) $y = x^2 - 4x$;
2) $y = x^2 + 5x$;
3) $y = -x^2 + 3$;
4) $y = 10x^2 - 5$;
5) $y = x^2 + 12x - 3$;
6) $y = x^2 + 20x + 30$;
7) $y = -6x^2 - 18x + 1$;
8) $y = 3x^2 - 24x + 5$.

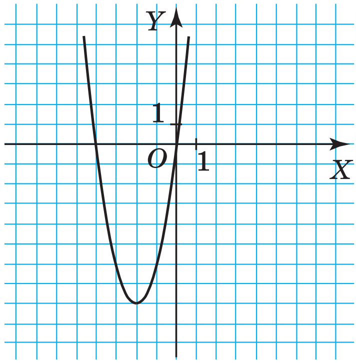
307°. Знайдіть координати вершини параболи:

1) $y = x^2 - 12x$;
2) $y = -x^2 + 5$;
3) $y = 8x^2 - 2$;
4) $y = x^2 - 14x - 90$;
5) $y = x^2 + 2x + 1$;
6) $y = -4x^2 - 16x + 7$.

308°. На малюнках 109, 110 зображено параболи. Визначте:
1) координати вершини параболи;
2) координати точок перетину параболи з осями координат;
3) проміжки знакосталості.

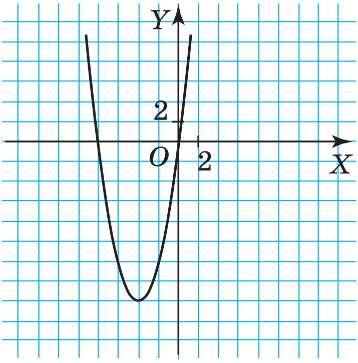


Мал. 109

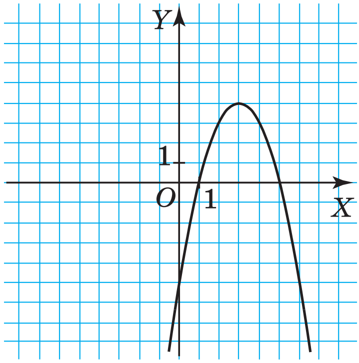


Мал. 110

309°. На малюнках 111, 112 зображено параболи. Визначте:
1) координати вершини параболи;
2) координати точок перетину параболи з осями координат;
3) проміжки знакосталості.



Мал. 111



Мал. 112

310°. Побудуйте графік функції:

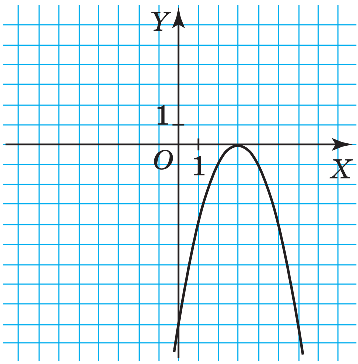
1) $y = x^2 - 6x$; 3) $y = x^2 - 4x + 8$; 5) $y = -6x^2 - 12x$;
2) $y = x^2 - 4x$; 4) $y = 3x^2 + 6x - 9$; 6) $y = x^2 - 2x + 1$.

311°. Побудуйте графік функції:

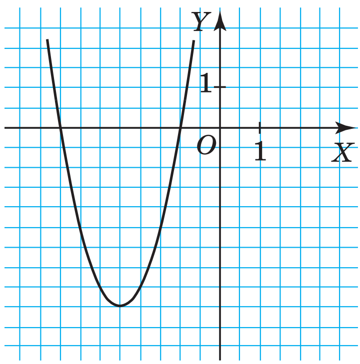
1) $y = x^2 - 8x$; 3) $y = -x^2 + 2x$;
2) $y = x^2 - 6x + 8$; 4) $y = x^2 - 4x + 4$.

312°. На малюнках 113, 114 зображено графіки квадратичних функцій. За малюнком визначте:

1) нулі функції; 2) проміжки знакосталості; 3) проміжок зростання; 4) проміжок спадання; 5) найбільше й найменше значення функції.



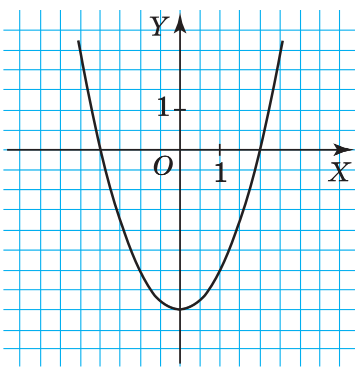
Мал. 113



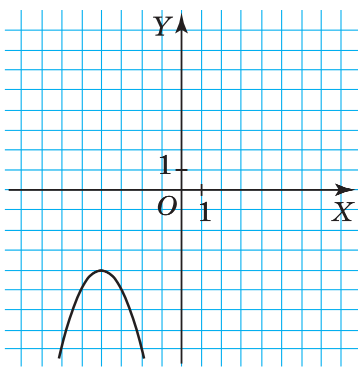
Мал. 114

313°. На малюнках 115, 116 зображено графіки квадратичних функцій. За малюнком визначте:

1) нулі функції; 2) проміжки знакосталості; 3) проміжок зростання; 4) проміжок спадання; 5) найбільше й найменше значення функції.



Мал. 115



Мал. 116

314. Для функції $y = -x^2 + 3x + 5$ знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 0; -1; 0,5; 0,2;$
2) значення аргументу, якщо $y = 7; 5; 5,81$.

315. Для функції $y = 8x^2 + 2x - 1$ знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 0; -0,5; \frac{1}{4};$
2) значення аргументу, якщо $y = 5; 9$.

316. Знайдіть коефіцієнти n і m у рівності, що задає квадратичну функцію $y = x^2 + mx + n$, якщо:
1) $x = 0$, $x = -1$ — нулі функції;
2) $x = -2$, $x = 2$ — нулі функції;
3) $x = 2$, $x = -3$ — нулі функції;
4) $x = -0,5$, $x = -4$ — нулі функції.

317. Знайдіть коефіцієнти p, q в рівності, що задає квадратичну функцію $y = x^2 + px + q$, якщо:
1) $x = 0$, $x = 9$ — нулі функції;
2) $x = -5$, $x = 5$ — нулі функції;
3) $x = 4$, $x = -3$ — нулі функції.

318. Побудуйте графік квадратичної функції:
1) $y = x^2 - 2x - 3$;
2) $y = 2x^2 - 8x + 6$.
Визначте:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) найменше значення функції;
6) проміжок зростання функції;
7) проміжок спадання функції.

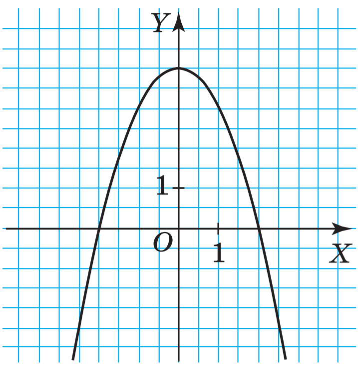
319. Побудуйте графік квадратичної функції:
1) $y = -x^2 + 8x - 12$;
2) $y = -2x^2 - 10x - 8$.
Визначте:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості;
5) найбільше значення функції;
6) проміжок зростання функції;
7) проміжок спадання функції.

320. Побудуйте графік квадратичної функції:
а) $y = x^2 - 4x + 6$;
б) $y = -x^2 + 6x - 5$.
Визначте:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки знакосталості функції;
5) проміжок спадання функції;
6) проміжок зростання функції;
7) найбільше значення функції;
8) найменше значення функції.

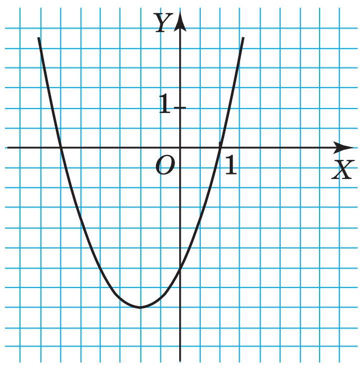
321. За яких значень параметра a парабола:
1) $y = x^2 + x + a$ не перетинає вісь абсцис;
2) $y = x^2 + ax + 16$ дотикається до осі абсцис;
3) $y = -ax^2 + x + 5$ проходить через точку $(-1; 2,5)$;
4) $y = 5x^2 - 2x + a + 4$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 4)$?

322. За яких значень параметра m парабола:
1) $y = x^2 + x + m$ не перетинає вісь абсцис;
2) $y = -x^2 + 2x + m$ дотикається до осі абсцис;
3) $y = mx^2 + x + 4$ проходить через точку $(1; 9)$;
4) $y = x^2 + 3x + m$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 6)$?

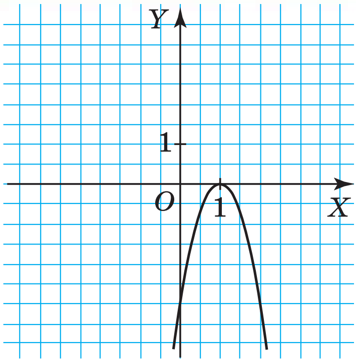
323. На малюнках 117–120 зображено графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$. Для кожної з них визначте знаки коефіцієнта a і дискримінанта D.



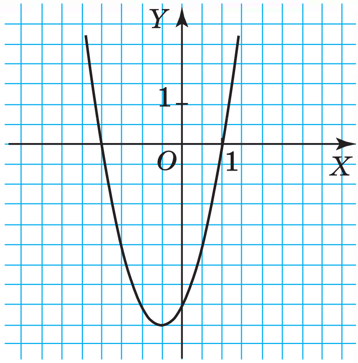
Мал. 117



Мал. 118



Мал. 119



Мал. 120

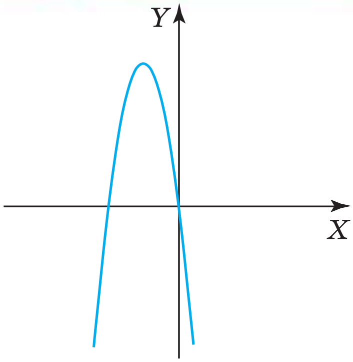
324. Побудуйте схематично графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$, за умови, що:
1) $a = 2$, $D = 18$;
2) $a = -3$, $D = 0$;
3) $a = 7$, $D = -8$;
4) $a = 5$, $D = 0$;
5) $a = 7$, $D = 49$;
6) $a = -8$, $D = -1$;
7) $a = 0{,}5$, $D = 36$;
8) $a = -7{,}3$, $D = 100$.

325. Побудуйте схематично графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$, за умови, що:
1) $a = 5$, $D = 5$;
2) $a = -2$, $D = -16$;
3) $a = 10$, $D = -4$;
4) $a = -1$, $D = 0$.

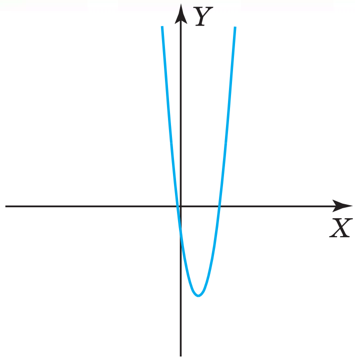
326. Дано функцію $y = -x^2 + 8x - 12$. Знайдіть значеннях x, за якого функція набуває:
1) найбільшого значення на проміжку $[-1; 6]$;
2) найменшого значення на проміжку $[3; 6]$.

327. Дано функцію $y = 2x^2 - 8x + 6$. Знайдіть значеннях x, за якого функція набуває:
1) найбільшого значення на проміжку $[-1; 3]$;
2) найменшого значення на проміжку $[-1; 1]$.

328. Порівняйте з нулем коефіцієнти a, b і c функції $y = ax^2 + bx + c$ за малюнками 121, 122.

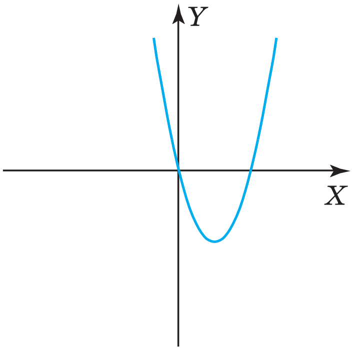


Мал. 121

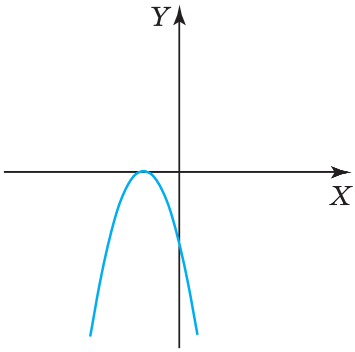


Мал. 122

329. Порівняйте з нулем коефіцієнти a, b і c функції $y = ax^2 + bx + c$ за малюнками 123, 124.



Мал. 123



Мал. 124

330. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = 2x^2 - 4x - 1$ і $x = -1$;
2) $y = x^2 - 2x + 8$ і $y = -x^2 + 8x - 4$;
3) $y = 2x^2 - x$ і $y = -x^2 + x$;
4) $y = x^2 + 4$ і $y = x^2 - 6x + 4$.
Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

331. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:
1) $y = x^2 - 4x + 4$ і $x = 2$;
2) $y = 2x^2 + 4x - 5$ і $y = x$;
3) $y = x^2 - 4x$ і $y = -x^2 + 4x$.
Скориставшись графіками функцій, знайдіть координати точок їх перетину.

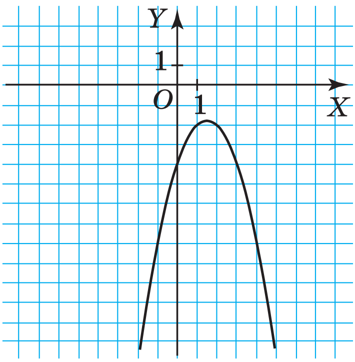
332. Знайдіть точки параболи $y = x^2 + 7x - 7$, у яких абсциса дорівнює ординаті.

333. Знайдіть точки параболи $y = -x^2 + 4x$, у яких абсциса вдвічі менша від ординати.

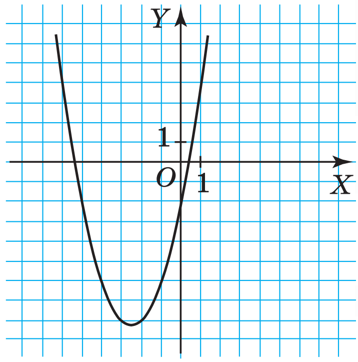
334. Знайдіть точки параболи $y = x^2 + 5x - 3$, у яких абсциса втричі менша від ординати.

335. Скориставшись малюнком 125, порівняйте значення функції $y = -x^2 + 3x - 4$ для таких значень аргументу:

1) $x = 3$ і $x = 5$;
2) $x = -1{,}5$ і $x = 5$;
3) $x = -2{,}7$ і $x = 0{,}9$;
4) $x = -2$ і $x = 3$.



Мал. 125



Мал. 126

336. Скориставшись малюнком 126, порівняйте значення функції $y = x^2 + 5x - 2$ для таких значень аргументу:

1) $x = 0$ і $x = 1{,}5$;
2) $x = -2$ і $x = -5$;
3) $x = -6$ і $x = 1$.

337. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 6x - 5$. Скориставшись графіком, порівняйте значення функції для таких значень аргументу:

1) $x = 1$ і $x = 0{,}5$;
2) $x = -1{,}5$ і $x = 1{,}5$;
3) $x = -2$ і $x = 3$;
4) $x = 2$ і $x = 4$.

338. Визначте коефіцієнти a, b і c функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) вітки параболи напрямлені вгору, вершина має координати (2; 5) і парабола перетинає вісь ординат у точці (0; 10);

2) вершина має координати (0; −1) і парабола перетинає вісь абсцис у точках (1; 0) і (−1; 0).

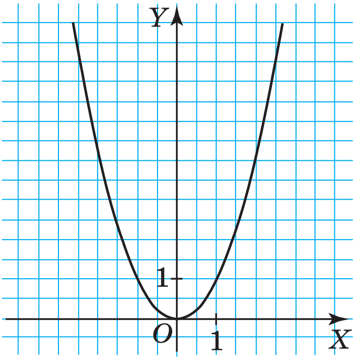
339. Визначте коефіцієнти b і c функції $y = x^2 + bx + c$, якщо вершина параболи має координати:

1) (4; 0);
2) (0; −5);
3) (2; 2);
4) (−1; 3).

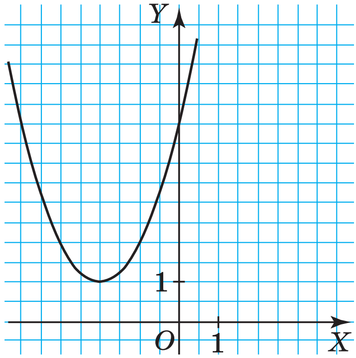
340. Визначте коефіцієнти b і c функції $y = x^2 + bx + c$, якщо вершина параболи має координати:

1) $(5; 0)$; 2) $(4; -3)$.

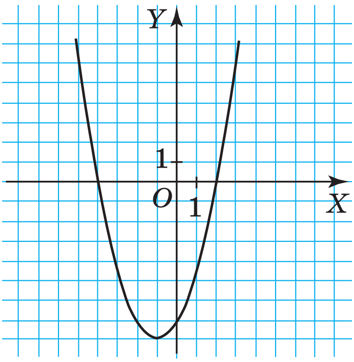
341*. Скориставшись малюнками 127–130, знайдіть значення коефіцієнтів a, b і c функції $y = ax^2 + bx + c$.



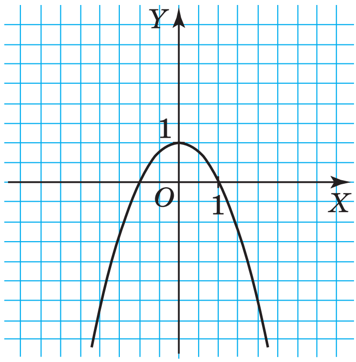
Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129



Мал. 130

342*. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість розв'язків рівняння:

1) $x^2 - 4 = a$;
2) $-x^2 + 8x = a$;
3) $x^2 + 4x - 5 = a$;
4) $-4x^2 + 12x - 3 = a$.

343*. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = 3x^2 - 2x + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 0{,}2x^2, \\ y = 0{,}2x^2 - x + 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 1, \\ y = x^2 + 2x - 3. \end{cases}$

344*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{x^3-2x}{x}$;

2) $y=\dfrac{x^4+4x^3}{x^2}$;

3) $y=\dfrac{2x^3-4x^2+5x}{x}$;

4) $y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$.

345*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\le 0, \\ x^2+3x, \text{ якщо } x>0; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} -x^2-4x+5, \text{ якщо } x<-2, \\ x^2+4x-5, \text{ якщо } x\ge -2; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} x^2+2x-6, \text{ якщо } x<-3, \\ 2x^2+12x+15, \text{ якщо } x\ge -3; \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} x^2-4x, \text{ якщо } x\le 2, \\ -x^2+4x-5, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

346*. Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 6|x| - 7$;

2) $y = 2x^2 - 4|x| + 2$;

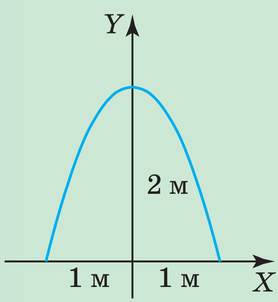
3) $y = x^2 + 6|x + 2| - 12$;

4) $y = x^2 + |x- 2|$.

Проявіть компетентність

347. На міліметровому папері побудуйте параболу $y = x^2 - 6x + 9$. За одиницю масштабу прийміть 1 см. Знайдіть наближені значення функції для таких значень аргументу: –3,5; –2,7; –1,1; 1,2; 2,3; 3,6.

348. У кімнаті вирішили зробити арку у формі параболи (мал. 131). Для цього спочатку потрібно побудувати її на папері. Складіть рівняння квадратичної функції, графіком якої є ця парабола. Побудуйте параболу (за одиничний відрізок, що відповідає 1 м, візьміть 1 см).



Мал. 131

Задачі на повторення

349. Розв'яжіть нерівність:

1) $-9x + 22 < 2x$;

2) $5(4 - x) - x < 0$;

3) $\dfrac{3+x}{2} - \dfrac{x}{6} \geq 1$;

4) $\dfrac{x-4}{5} - 2 \geq x$.

350. Катет прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а його гіпотенуза на 25 % більша за катет. Знайдіть площу трикутника.

351. Ціну товару спочатку підвищили на 50 %, а потім знизили на 50 %. Як змінилася ціна товару?

§ 9 Квадратна нерівність

1. ПОНЯТТЯ КВАДРАТНОЇ НЕРІВНОСТІ

Ви вже знаєте, як розв'язувати квадратні рівняння. У цьому параграфі ви дізнаєтесь, які нерівності називають квадратними та як їх розв'язувати.

Квадратними нерівностями **називаються нерівності виду:**

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0, \qquad ax^2 + bx + c \leq 0,$$

де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$.

Наприклад, квадратними є нерівності: $x^2 + 2 < 0$, $x^2 + 5x > 0$, $x^2 + 7x - 1 > 0$, $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$, $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

? Як знайти всі розв'язки квадратної нерівності? Для цього скористаємося графіком відповідної квадратичної функції, тобто розв'яжемо квадратну нерівність графічно.

2. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНОЇ НЕРІВНОСТІ

Розглянемо нерівність $x^2 - 4 < 0$.

Ліва частина нерівності задає квадратичну функцію $y = x^2 - 4$. Розв'язати цю нерівність — означає знайти, для яких значень змінної x значення даної функції є від'ємними.

Функція $y = x^2 - 4$ має два нулі: $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$. Точки $(-2; 0)$ і $(2; 0)$ — це точки перетину графіка даної функції з віссю OX. Побудуємо схематично параболу $y = x^2 - 4$, врахувавши напрям її віток (мал. 132). З малюнка видно:

1) у точках $x = -2$ і $x = 2$ значення функції дорівнюють нулю;

2) для $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ точки параболи розміщені над віссю OX і значення функції в цих точках — додатні;

3) для $x \in (-2; 2)$ точки параболи розміщені під віссю OX і значення функції в цих точках — від'ємні.

Тоді множиною розв'язків нерівності $x^2 - 4 < 0$ є проміжок $(-2; 2)$. Отже, $x \in (-2; 2)$.

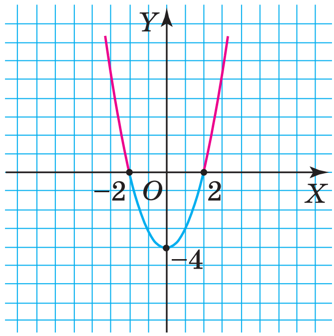
Скориставшись цим графіком, можна встановити множини розв'язків ще й таких нерівностей:

$x^2 - 4 > 0$: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$;

$x^2 - 4 \le 0$: $x \in [-2; 2]$;

$x^2 - 4 \ge 0$: $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Переконайтеся в цьому самостійно.



Мал. 132

Зверніть увагу:

розв'язати квадратну нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ ($ax^2 + bx + c > 0$) графічним способом — означає знайти всі значення змінної x, для яких відповідні значення функції $y = ax^2 + bx + c$ є від'ємними (додатними). Для цього потрібно:

1) знайти нулі функції $y = ax^2 + bx + c$ і, якщо вони існують, позначити на осі OX відповідні точки;

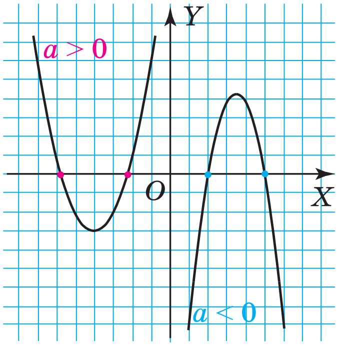
2) врахувавши напрям віток, схематично побудувати параболу;

3) визначити, для яких значень змінної x функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває від'ємних (додатних) значень та записати множину цих значень як числовий проміжок або як їх об'єднання.

Як ви знаєте, на множині дійсних чисел квадратична функція може мати два нулі, один нуль або взагалі не мати нулів залежно від значення дискримінанта. Розглянемо ці випадки.

3. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ, У ЯКОЇ ДИСКРИМІНАНТ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА Є ДОДАТНИМ

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має додатний дискримінант, то відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має два нулі. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь OX у двох точках (мал. 133).



Мал. 133

Задача 1. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо відповідну квадратичну функцію $y = x^2 + 2x - 3$.

Множина розв'язків нерівності $x^2 + 2x - 3 < 0$ — це множина значень змінної x, для яких значення функції $y = x^2 + 2x - 3$ є від'ємними.

1. Знайдемо нулі функції:

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

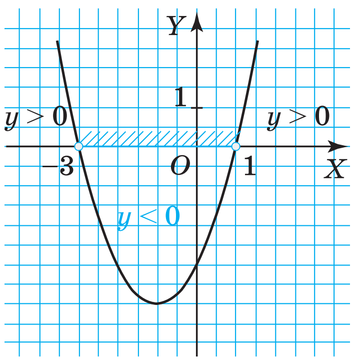
$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 .$$

Оскільки $D > 0$, то функція має два нулі:

$$x_1 = -3 \text{ і } x_2 = 1.$$

Отже, графік функції перетинає вісь OX у двох точках: (–3; 0) і (1; 0). Позначимо ці точки на осі OX.

2. Побудуємо схематично параболу (мал. 134), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору.



Мал. 134

3. З малюнка 134 видно, що функція $y = x^2 + 2x - 3$ набуває від'ємних значень ($y < 0$), якщо $x \in (-3; 1)$.

Отже, усі розв'язки нерівності $x^2 + 2x - 3 < 0$ утворюють проміжок (–3; 1).

Задача 2. Розв'яжіть нерівність $-2x^2 - x + 3 \le 0$.

Розв'язання. Розглянемо відповідну квадратичну функцію $y = -2x^2 - x + 3$. Множина розв'язків нерівності $-2x^2 - x + 3 \le 0$ — це множина значень змінної x, для яких значення функції $y = -2x^2 - x + 3$ є недодатними.

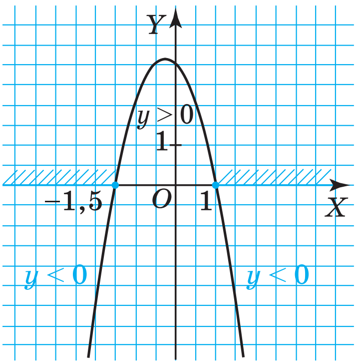
1. Знайдемо нулі функції:

$$-2x^2 - x + 3 = 0,$$
$$D = 25.$$

Оскільки $D > 0$, то функція має два нулі:

$$x_1 = -1{,}5 \text{ і } x_2 = 1.$$

Отже, графік функції перетинає вісь OX у двох точках: (–1,5; 0) і (1; 0). Позначимо ці точки на осі OX.



Мал. 135

2. Побудуємо схематично параболу (мал. 135), врахувавши, що її вітки напрямлені вниз.

3. З малюнка 135 видно, що функція $y = -2x^2 - x + 3$ набуває недодатних значень ($y \le 0$), якщо $x \in (-\infty; -1{,}5] \cup [1; +\infty)$.

Отже, множина розв'язків даної нерівності — це об'єднання проміжків: $(-\infty; -1{,}5] \cup [1; +\infty)$.

Зауважимо, що нерівність $-2x^2 - x + 3 \le 0$ можна було б спочатку домножити на -1 і розв'язувати вже нерівність $2x^2 + x - 3 \ge 0$.

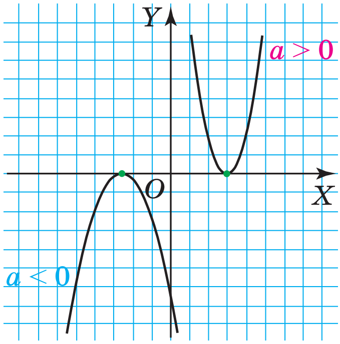
Зверніть увагу:

Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) має два нулі x_1, x_2, то:

- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють об'єднання проміжків: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ утворюють проміжок $(x_1; x_2)$.

4. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ, У ЯКОЇ ДИСКРИМІНАНТ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА ДОРІВНЮЄ НУЛЮ

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має дискримінант, що дорівнює нулю, то відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має один нуль функції. Тоді парабола $y = ax^2 + bx + c$ дотикається до осі OX (мал. 136).



Мал. 136

Задача 3. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x + 1 > 0$.

Розв'язання. Розглянемо відповідну квадратичну функцію

$$y = x^2 + 2x + 1.$$

Множина розв'язків нерівності $x^2 + 2x + 1 > 0$ — це множина значень змінної x, для яких значення функції $y = x^2 + 2x + 1$ є додатними.

1. Знайдемо нулі функції:

$$x^2 + 2x + 1 = 0.$$

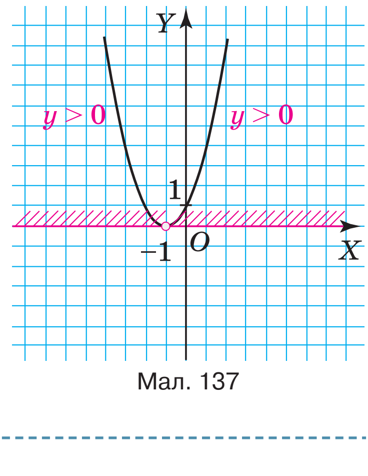
$$D = 0.$$

Функція має один нуль: $x_1 = x_2 = -1$.

Отже, графік функції дотикається до осі OX у точці $(-1; 0)$. Позначимо цю точку на осі OX.

2. Побудуємо схематично параболу $y = x^2 + 2x + 1$ (мал. 137), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору.

3. З малюнка 137 видно, що функція $y = x^2 + 2x + 1$ набуває додатних значень ($y > 0$), якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Отже, усі розв'язки нерівності утворюють об'єднання проміжків: $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

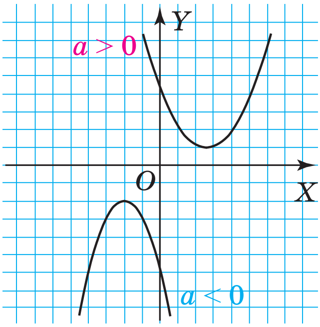


Мал. 137

Зверніть увагу:
Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ має один нуль $(x_1 = x_2)$, то:
- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють об'єднання проміжків $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$;
- нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не має розв'язків.

5. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ, У ЯКОЇ ДИСКРИМІНАНТ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА ВІД'ЄМНИЙ

Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має від'ємний дискримінант, то відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ не має нулів. Тоді парабола $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь OX (мал. 138).



Мал. 138

Задача 4. Розв'яжіть нерівність $x^2 + x + 3 > 0$.

Розв'язання. Розглянемо відповідну квадратичну функцію $y = x^2 + x + 3$.

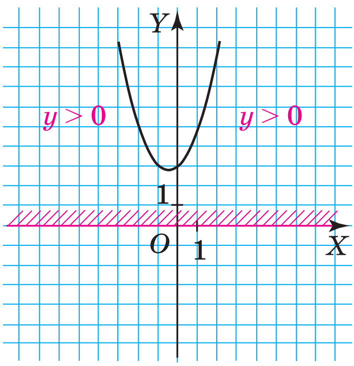
Множина розв'язків нерівності $x^2 + x + 3 > 0$ — це множина значень змінної x, для яких значення функції $y = x^2 + x + 3$ є додатними.

1. Знайдемо нулі функції:
$x^2 + x + 3 = 0$, $D = -11$.
Оскільки $D < 0$, то функція не має нулів, а отже, парабола не перетинає вісь OX.

2. Побудуємо схематично параболу (мал. 139), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору.

3. З малюнка 139 видно, що функція $y = x^2 + x + 3$ набуває додатних значень $(y > 0)$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $(-\infty; +\infty)$.



Мал. 139

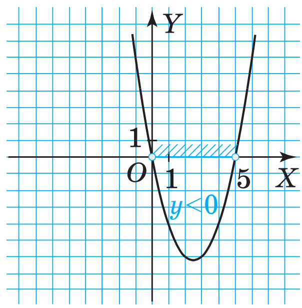
Зверніть увагу:
Якщо квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ не має нулів, то:
- усі розв'язки нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ утворюють проміжок $(-\infty; +\infty)$;
- нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не має розв'язків.

Випадок, коли $a < 0$, можна звести до розглянутого випадку, коли $a > 0$, домноживши нерівність на -1.

Задача 5. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ -4x^2 + 3x + 1 \le 0. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо кожну з нерівностей, що входить до даної системи.

1. Розв'яжемо нерівність $x^2 - 5x < 0$. Знайдемо нулі функції $y = x^2 - 5x$: $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $x_1 = 0$ і $x_2 = 5$. Побудуємо схематично параболу (мал. 140).



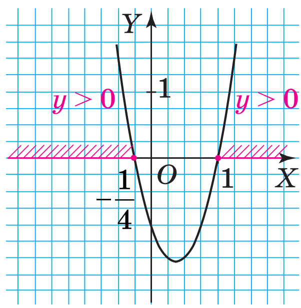
Мал. 140

З малюнка 140 видно, що функція набуває від'ємних значень, якщо $x \in (0; 5)$.

2. Розв'яжемо нерівність

$$-4x^2 + 3x + 1 \le 0.$$

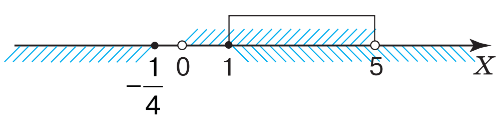
Домножимо її на -1: $4x^2 - 3x - 1 \ge 0$. Знайдемо нулі функції $y = 4x^2 - 3x - 1$: $D = 25$, $x_1 = -\frac{1}{4}$ і $x_2 = 1$. Побудуємо схематично параболу (мал. 141).



Мал. 141

З малюнка 141 видно, що функція набуває невід'ємних значень, якщо $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

3. Знайдемо спільні точки одержаних проміжків (мал. 142):



Мал. 142

Отже, множиною розв'язків системи нерівностей є проміжок $[1; 5)$.

Дізнайтеся більше

Вороний Г. Ф.

1. У XIX ст. Україна дала світові ще одного видатного математика — **Георгія Федосійовича Вороного** (1868–1908), який народився в селі Журавка на Чернігівщині.

Про неабиякі математичні здібності й серйозне захоплення математикою Вороного свідчить той факт, що перше своє дослідження він зробив у 16 років, будучи ще гімназистом. У 1884 р. видатний математик і педагог, тоді ще молодий професор Київського університету, Володимир Петрович Єрмаков почав видавати в Києві «Журнал елементарної математики», у якому для дослідження була запропонована така тема: «Розклад многочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння». Як з'ясувалося, на вказану тему редакція одержала лише одну роботу, а саме від Г. Вороного, і в 1885 р. в журналі була надрукована його перша стаття, у якій окрім розв'язання поставленої задачі наводилася значна кількість прикладів.

Наукова спадщина Г. Вороного складається із шести великих мемуарів, трьох статей з теорії чисел, семи повідомлень на з'їздах і конгресах та неопублікованих архівних матеріалів. Усі ці праці зібрані в тритомному виданні та прокоментовані відомими математиками. Ці роботи — справжня гордість української математики. Надбання Г. Вороного використовують у різноманітних дослідженнях від молекулярної біології до космосу, у комп'ютерній графіці, у проблемах розпізнавання образів, штучного інтелекту, екології, у радіаційній фізиці, космології, хімічній технології, фізичній хімії та інших науках, а також в моделюванні рельєфу, в аналізі руху і плануванні, у виявленні зіткнень, навігації та оминання перешкод, в аналізі мережі тощо. У наші дні дослідження з діаграм Вороного проводять практично в усіх країнах Європи, у США, Канаді, у країнах Південної Америки, у Японії, Китаї, Гонконзі, Австралії, Новій Зеландії. У Сеулі (Корея) існує Дослідницький центр із діаграм Вороного.

2. У завданнях ДПА, ЗНО часто пропонують розв'язати завдання з параметром. Розглянемо приклад розв'язання квадратної нерівності з параметром.

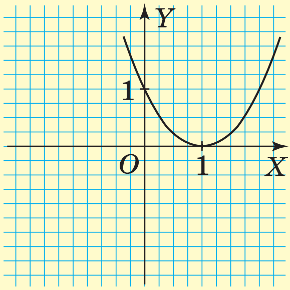
Задача 6. Розв'яжіть нерівність $x^2 - ax + a - 1 \leq 0$ для всіх значень параметра a.

Розв'язання. Знайдемо нулі функції $y = x^2 - ax + a - 1$.

$$x^2 - ax + a - 1 = 0.\ D = \left(-a\right)^2 - 4\cdot(a-1) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2.$$

Можливі два випадки: 1) $D = 0$; 2) $D > 0$.

1. Нехай $D = 0$, тоді $a = 2$ і $y = x^2 - 2x + 1$. Графік функції $y = x^2 - 2x + 1$ дотикається до осі OX, оскільки $x_{1,2} = 1$. Побудуємо схематично параболу (мал. 143), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору.



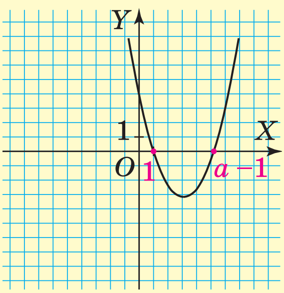
Мал. 143

Функція $y = x^2 - 2x + 1$ набуває недодатних значень, якщо $x = 1$. Отже, нерівність має розв'язок: $x = 1$.

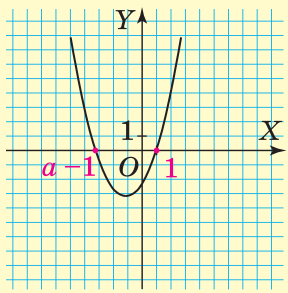
2. Нехай $D > 0$, тоді $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

$$\text{і } x_{1,2} = \frac{a \pm (a-2)}{2},\ x_1 = a - 1,\ x_2 = 1.$$

Графік функції $y = x^2 - ax + a - 1$ перетинає вісь OX у двох точках. При цьому можливі два випадки: $x_1 > x_2$ або $x_1 < x_2$.



Мал. 144



Мал. 145

Нехай $x_1 > x_2$, тоді $a \in (2; +\infty)$. Побудуємо схематично параболу (мал. 144), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору. Функція $y = x^2 - ax + a - 1$ набуває недодатних значень, якщо $x \in [1; a - 1]$. Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $[1; a - 1]$.

Нехай $x_1 < x_2$, тоді $a \in (-\infty; 2)$. Побудуємо схематично параболу (мал. 145), врахувавши, що її вітки напрямлені вгору. Функція $y = x^2 - ax + a - 1$ набуває недодатних значень, якщо $x \in [a - 1; 1]$. Отже, усі розв'язки нерівності утворюють проміжок $[a - 1; 1]$.

Отже, якщо $a = 2$, то $x = 1$; якщо $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in [a - 1; 1]$; якщо $a \in (2; +\infty)$, то $x \in [1; a - 1]$.

Пригадайте головне

1. Яку нерівність називають квадратною?
2. Що називають розв'язком квадратної нерівності?
3. Що означає — розв'язати квадратну нерівність?
4. Які етапи розв'язування квадратної нерівності?

Розв'яжіть задачі

352'. Чи правильно, що дана нерівність є квадратною:

1) $x^2 - 5x + 6 > 0$;
2) $3x^3 + 2x^2 - x < 0$;
3) $\frac{1}{4x^2} + 9x - \frac{2}{5} > 0$;
4) $7 - 2x \geq 0$;
5) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{7x^2} + 4x^3 < 0$;
6) $x(7x + 5) \leq 0$?

353'. Чи правильно, що розв'язком квадратної нерівності є:

1) вираз;
2) число?

354'. Чи правильно, що розв'язок квадратної нерівності:
1) не задовольняє дану нерівність;
2) задовольняє дану нерівність?

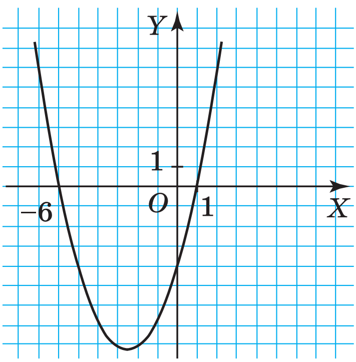
355'. Чи правильно, що розв'язати квадратну нерівність — означає знайти:
1) хоча б один її розв'язок;
2) усі її розв'язки?

356°. Чи є число 3 розв'язком нерівності:
1) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$;
2) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$;
3) $5x^2 + 3x - 2 > 0$;
4) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$;
5) $8x^2 - 2x - 1 < 0$;
6) $x^2 + 4x - 21 < 0$?

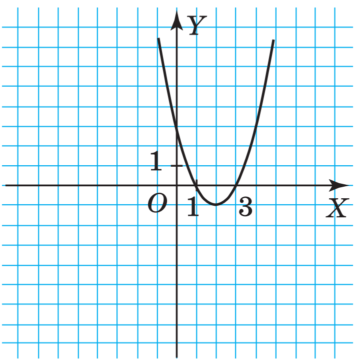
357°. Чи є число -1 розв'язком нерівності:
1) $x^2 - x + 7 \geq 0$;
2) $x^2 + 5x \leq 0$;
3) $x^2 + 6 > 0$;
4) $6x^2 - x + 1 \geq 0$;
5) $-x^2 - 5x - 5 < 0$;
6) $-2x^2 + x - 8 < 0$?

358°. На малюнку 146 зображено параболу $y = x^2 + 5x - 6$. Запишіть множину розв'язків нерівності $x^2 + 5x - 6 < 0$.

359°. На малюнку 147 зображено параболу $y = x^2 - 4x + 3$. Запишіть множину розв'язків нерівності $x^2 - 4x + 3 < 0$.



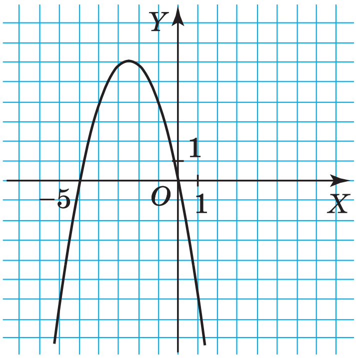
Мал. 146



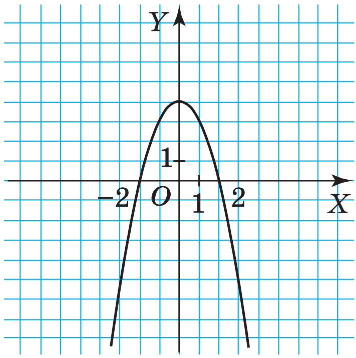
Мал. 147

360°. На малюнку 148 зображено параболу $y = -x^2 - 6x$. Запишіть множину розв'язків нерівності $-x^2 - 6x \geq 0$.

361°. На малюнку 149 зображено параболу $y = -x^2 + 4$. Запишіть множину розв'язків нерівності $-x^2 + 4 < 0$.



Мал. 148



Мал. 149

362°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $x^2 \leq 121$;
2) $x^2 + 5x \geq 0$;
3) $4x^2 - 2 > 0$;
4) $x^2 - 36 \geq 0$;
5) $2x^2 + 9 < 0$;
6) $3x^2 + 14 > 0$;
7) $x^2 - 7x \leq 0$;
8) $7x^2 - 4x > 0$;
9) $x^2 \geq 25$;
10) $5x^2 - 8x < 0$.

363°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $x^2 - 25 \leq 0$;
2) $x^2 \geq 81$;
3) $3x^2 - 4x > 0$;
4) $9x^2 - 2x \geq 0$;
5) $x^2 - 49 < 0$;
6) $2x^2 - 4x \geq 0$.

364°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $x^2 + 3x - 18 > 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 < 0$;
3) $x^2 - 4x - 12 \leq 0$;
4) $-x^2 + 10x - 24 \leq 0$;
5) $-x^2 - 4x + 5 < 0$;
6) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$;
7) $x^2 - 6x - 16 < 0$;
8) $x^2 + 10x + 16 > 0$;
9) $x^2 + 8x - 9 < 0$;
10) $x^2 - 10x + 21 \leq 0$;
11) $x^2 + 2x - 15 < 0$;
12) $x^2 - 6x - 7 \geq 0$;
13) $x^2 + 4x - 12 \leq 0$;
14) $x^2 + 4x - 12 < 0$;
15) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$;
16) $x^2 - 3x - 40 > 0$.

365. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $x^2 + 4x + 3 \le 0$;
2) $x^2 - 3x - 28 < 0$;
3) $x^2 + 6x + 9 > 0$;
4) $x^2 + x - 12 < 0$;
5) $x^2 - 5x - 6 \ge 0$;
6) $-x^2 + 7x - 12 > 0$;
7) $-x^2 + 5x + 14 > 0$;
8) $x^2 + 7x - 8 \le 0$.

366. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $4x^2 - 13x + 9 > 0$;
2) $8x^2 - x + 5 > 0$;
3) $-3x^2 - 5x + 12 \le 0$;
4) $16x^2 - 2x + 10 < 0$;
5) $2x^2 + 5x + 2 \ge 0$;
6) $-9x^2 - 5x + 4 \le 0$;
7) $-2x^2 + 5x + 18 > 0$;
8) $x^2 - 10x + 16 < 0$;
9) $9x^2 + 4x - 1 \le 0$;
10) $-8x^2 + x + 2 \ge 0$.

367°. Розв'яжіть квадратну нерівність:

1) $2x^2 + 10x + 8 > 0$;
2) $3x^2 + 11x - 4 \le 0$;
3) $-5x^2 - 3x + 2 > 0$;
4) $-11x^2 + 12x - 1 \ge 0$;
5) $3x^2 - 10x + 3 \ge 0$;
6) $2x^2 - 11x - 5 \le 0$.

368. Складіть квадратну нерівність за множиною її розв'язків:

1) $(-2; 2)$;
2) $[-8; 8]$;
3) $(-1; 0)$;
4) $[0; 5]$.

369. Складіть квадратну нерівність за множиною її розв'язків:

1) $(0; 10)$;
2) $[-6; 6]$;
3) $(-3; 5)$;
4) $[1; 8]$.

370. Розв'яжіть нерівність:

1) $6x \le 8x^2 - 2$;
2) $3x^2 - 10 \le -x^2 + 22x$;
3) $5x - 14 > x^2$;
4) $3x - 5x^2 \ge 3x^2 + 2$;
5) $9x^2 < -2x^2 - 12x + 1$;
6) $2y < 8y^2 - 1$.

371. Розв'яжіть нерівність:

1) $3x^2 + 9 > 2x^2 + 6x$;
2) $4x \le -x^2 + 5$;
3) $6x^2 \ge 15x + 6$;
4) $2x^2 > -3x^2 - 3x + 2$.

372. Розв'яжіть нерівність:

1) $2x(3 - 4x) \ge -2$;
2) $y(y - 10) \le -21$;
3) $x(x - 7) + 12 < 0$;
4) $y(y + 8) < 9$;
5) $2x(x + 5) > -8$;
6) $x(x + 4) \le -3$.

373. Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x - 6) < 16$;
2) $y(5y + 3) > 2$;
3) $2(x^2 + 1) + 5x \ge 0$;
4) $y(y - 10) \ge -24$.

374. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2x^2+1}{3} < \frac{3x+5}{2}$;

2) $\frac{x^2+3x}{6} \geq \frac{4x-2}{3}$;

3) $\frac{2x^2+3x}{4} \leq \frac{3x+1}{2}$;

4) $\frac{5x^2-x}{2} > x+1$.

375. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2-6}{2} < \frac{3x+2}{4}$;

2) $\frac{y+2y^2}{2} - \frac{y^2-6}{6} < \frac{2-3y}{4}$.

376. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності:

1) $x^2 + 8x < 0$;

2) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$;

3) $(2z - 3)(2 - 3z) < -4$;

4) $(x - 7)(x - 3) > 0$?

377. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності:

1) $-x^2 + 7x + 8 > 0$;

2) $(x - 5)(x + 5) > -x^2 + 5x$;

3) $\frac{x^2-4}{5} < \frac{x-2}{3}$?

378. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $x^2 - 15 \leq 0$;

2) $x^2 + 9x - 10 \leq 0$.

379. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $x^2 - 8 \leq 0$;

2) $x^2 + 12x - 13 \leq 0$.

380. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2+7+2x}$;

2) $y = \sqrt{x^2-4x-12}$;

3) $y = \sqrt{(x+2)(x+3)-2}$;

4) $y = \sqrt{x^2+7x-8}$;

5) $y = \sqrt{4x^2-13x+9}$;

6) $y = \sqrt{3(x^2+1)-10x}$.

381. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x^2-8x+15}$;

2) $y = \sqrt{-8x^2+6x+2}$.

382. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2-1<0, \\ x-0,5>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x\geq 1, \\ x^2-5x+4\leq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2>x, \\ 4x>-2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-4<0, \\ x^2-9>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2\geq 7x, \\ x^2-10x+21\geq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2\geq 2x-4, \\ x^2>x. \end{cases}$

383. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2-25<0, \\ x-2\leq 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-2x<0, \\ x^2-16>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-25<0, \\ x+6\leq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2x\geq 0, \\ x^2-16<0. \end{cases}$

384. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x справджується нерівність:

1) $x^2+8>0$;
2) $x^2-6x+15>0$;
3) $2x^2+5x+6>0$;
4) $-x^2+x-8<0$;
5) $x^2+10x+25\geq 0$;
6) $9x^2-12x+4\geq 0$.

385. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x справджується нерівність:

1) $x^2-3x+11>0$;
2) $-x^2+2x-10<0$;
3) $4x^2-4x+1\geq 0$.

386. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x нерівність $x^2-2x+6<0$ не має розв'язків.

387. Доведіть, що за будь-яких дійсних значень змінної x нерівність $-5x^2+4x-3>0$ не має розв'язків.

388. За яких значень змінної x значення виразу $x-7$ більші за значення виразу $-x^2-5x-9$?

389. За яких значень змінної x значення виразу x^2+4 більші за значення виразу $6x^2-6x+5$?

390. За яких значень змінної x значення виразу $x(2x+1)$ більші за значення виразу $3(x^2+x-1)$?

391. За яких значень змінної x значення виразу $x(x+6)$ більші за значення виразу $2x-3$?

392*. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} (x+1)^2\geq x+7, \\ (x-2)^2\geq x-8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)^2>x-2, \\ (x-1)^2>x-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-6x+8>0, \\ (x-5)(x+5)\geq 0. \end{cases}$

393*. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:
1) $x^2 - ax + 1 \le 0$;
2) $ax^2 - (a-1)x - 1 \le 0$.

394*. За якого значення параметра a рівняння $x^2 - (a-2)x + 0{,}25 = 0$ має розв'язки?

395*. За якого значення параметра a рівняння $x^2 - ax + 2a - 1{,}75 = 0$ має розв'язки?

396*. За якого значення параметра a нерівність $x^2 - (a+6)x + (a+5) \le 0$ має три цілі розв'язки?

397*. За якого значення параметра a нерівність $x^2 - ax - a - 3 \le 0$ має чотири цілі розв'язки?

Проявіть компетентність

398. Площа ділянки, що має форму прямокутника, менша, ніж 200 м^2, але більша, ніж 24 м^2. Якою може бути довжина цієї ділянки, якщо її ширина на 10 м менша від довжини?

399. Площа кімнати, що має форму прямокутника, менша, ніж 45 м^2, але більша, ніж 4 м^2. Якою може бути ширина цієї кімнати, якщо її довжина на 4 м більша за ширину?

Задачі на повторення

400. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 13, \\ x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 9y = 23, \\ x + 8y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 10y = 35, \\ x - 5y = -10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 7y = -17, \\ x + 5y = 9. \end{cases}$

401. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

§ 10 Система двох рівнянь із двома змінними

1. ПОНЯТТЯ СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Ви вже знаєте, як розв'язувати задачі за допомогою системи лінійних рівнянь із двома змінними. Проте в повсякденному житті є процеси, які описуються квадратними або іншими рівняннями. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. На своїй садовій ділянці Микола Петрович вирішив зробити дві доріжки прямокутної форми з квадратних плиток. Для виготовлення першої доріжки він використав 12 таких плиток. Друга доріжка була більшою за розмірами: ширина більша на 1 плитку, а довжина — на 4 плитки. Тому на її виготовлення Микола Петрович використав 30 плиток. Скільки плиток за шириною й довжиною утворюють меншу доріжку?

Щоб відповісти на поставлене запитання, уведемо дві невідомі величини. Нехай кількість плиток за шириною першої доріжки дорівнює x, а кількість плиток за її довжиною дорівнює y. За умовою, для виготовлення першої доріжки Микола Петрович використав 12 таких плиток, отже, перше рівняння є таким: $x \cdot y = 12$. Кількість плиток за шириною другої доріжки дорівнює $x + 1$, а кількість плиток за її довжиною дорівнює $y + 4$. За умовою, для виготовлення другої доріжки використали 30 плиток, отже, друге рівняння є таким: $(x + 1) \cdot (y + 4) = 30$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 12, \\ (x+1)(y+4) = 30. \end{cases}$$

Одержана *система рівнянь із двома змінними* описує зв'язок між кількостями плиток для доріжки, що можна укласти за її шириною та довжиною. Розв'язками цієї системи є дві пари чисел: (2; 6) і (1,5; 8). Умову задачі задовольняє лише пара (2; 6), оскільки кількість плиток є натуральним числом. Отже, меншу доріжку утворюють 2 плитки за її шириною й 6 плиток за її довжиною.

Зверніть увагу:
якщо для опису зв'язку між двома змінними необхідні саме два рівняння, то складають систему двох рівнянь із двома змінними.

Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають таку пару чисел (x; y), яка одночасно є розв'язком кожного рівняння системи.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або встановити, що розв'язків немає.

Ви вже знаєте, як розв'язувати системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Для цього ви використовували або графічний спосіб, або спосіб підстановки, або спосіб додавання. Система, яку одержали в розглянутій вище задачі, містить рівняння другого степеня.

Чи існують аналогічні способи для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня? Так.

Систему рівнянь другого степеня з двома змінними можна розв'язати графічним способом, способом підстановки, способом додавання та іншими способами. Розглянемо деякі з них.

2. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ

Графіком рівняння з двома змінними, як ви пам'ятаєте, називають множину точок координатної площини, координати яких перетворюють рівняння на правильну рівність. Наприклад, графіком рівняння $2x - y = 3$ є пряма, графіком рівняння $x^2 - y = 0$ — парабола, а графіком рівняння $xy = 4$ — гіпербола.

Задача 1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x - y = -2, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. У кожному рівнянні виразимо y через x:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Побудуємо графік кожного з рівнянь системи в одній системі координат.

Графіком рівняння $y = x + 2$ є пряма. Знайдемо координати двох її точок (таблиця 16).

Таблиця 16

x	0	2
y	2	4

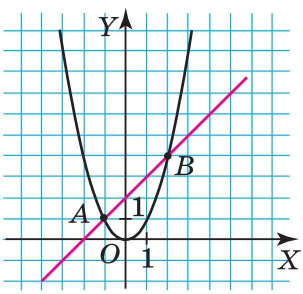
Графіком рівняння $y = x^2$ є парабола. Знайдемо координати кількох її точок (таблиця 17).

Таблиця 17

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	2

Пряма й парабола (мал. 150) перетинаються у двох точках $A(-1; 1)$ і $B(2; 4)$.

Отже, розв'язком даної системи рівнянь є дві пари чисел: $(-1; 1)$ і $(2; 4)$.



Мал. 150

Зверніть увагу:

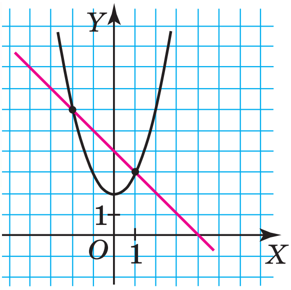
щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними графічним способом, потрібно:

1) в одній системі координат побудувати графік кожного з рівнянь системи;

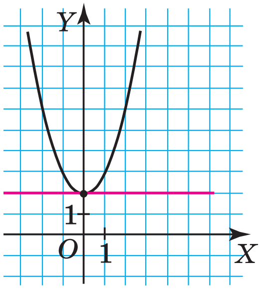
2) визначити координати точок перетину цих графіків, якщо це можливо;

3) записати кожну пару чисел, яка є розв'язком системи.

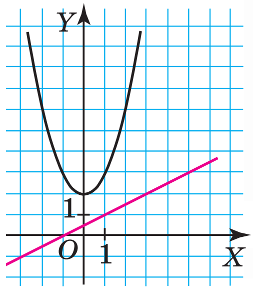
Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними? Відповідь на це запитання залежить від степенів рівнянь, що входять до системи. Наприклад, система, що містить рівняння першого й другого степенів, тобто є системою рівнянь другого степеня, може мати два розв'язки (мал. 151), один розв'язок (мал. 152) або не мати розв'язків (мал. 153).



Мал. 151



Мал. 152



Мал. 153

3. СПОСІБ ПІДСТАНОВКИ

Для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня, можна використовувати і спосіб підстановки.

Задача 2. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 3x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$

Розв'язання. У першому рівнянні виразимо y через x:

$$y = 3x - 2.$$

Одержаний вираз $3x - 2$ підставимо замість y в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} y = 3x - 2, \\ 3x^2 + (3x - 2)^2 = 28. \end{cases}$$

Відтак друге рівняння системи містить лише одну змінну x. Розв'яжемо його:

$$3x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 28 = 0,$$
$$12x^2 - 12x - 24 = 0, \;\big|\; : 12$$
$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Одержали квадратне рівняння. Знайдемо його дискримінант:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9,\ D > 0.$$

Застосуємо формулу коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$ Звідси $x_1 = 2$ і $x_2 = -1$.

У рівність $y = 3x - 2$ підставимо замість x знайдені корені 2 і –1 й обчислимо відповідні значення y.
Якщо $x_1 = 2$, то $y_1 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$;
якщо $x_2 = -1$, то $y_2 = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$.
Отже, система рівнянь має два розв'язки: (2; 4) і (–1; –5).

Зверніть увагу:
щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними способом підстановки, потрібно:
1) в одному з рівнянь системи виразити одну змінну через іншу;
2) підставити знайдений вираз в інше рівняння системи;
3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення другої змінної для кожного одержаного розв'язку рівняння;
5) записати кожну пару чисел, яка є розв'язком системи.

4. СПОСІБ ЗАМІНИ ЗМІННИХ

Для розв'язування систем, що містять рівняння другого степеня, можна використовувати й особливий спосіб — спосіб заміни змінних.

Задача 3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + xy = 9, \\ x - y - xy = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо уважно придивитися до рівнянь системи, то можна побачити, що вирази $x - y$ і xy повторюються в кожному з рівнянь. Тому доцільно замінити ці вирази на нові змінні.
Заміна: $x - y = a$ і $xy = b$.
Увівши ці заміни в початкову систему рівнянь, одержимо допоміжну систему рівнянь зі змінними a і b:

$$\begin{cases} a + b = 9, \\ a - b = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо:

$$a = 4 \text{ і } b = 5.$$

Повернемося до змінних x і y. Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему рівнянь.
У першому рівнянні виразимо x через y:

$$x = y + 4.$$

Одержаний вираз $y + 4$ підставимо замість x у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ (y+4)\cdot y = 5. \end{cases}$$

Друге рівняння цієї системи містить лише одну змінну y. Розв'яжемо його за теоремою Вієта:

$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = -5.$$

Тоді:

якщо $y_1 = 1$, то $x_1 = 1 + 4 = 5$,
якщо $y_2 = -5$, то $x_2 = -5 + 4 = -1$.

Отже, система рівнянь має два розв'язки: (5; 1) і (–1; –5).

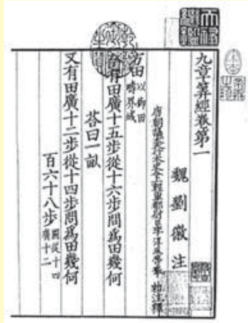
Зверніть увагу:
щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними способом заміни змінних, потрібно:
1) в одному або в обох рівняннях системи виявити вирази, які можна замінити іншими змінними та зробити відповідну заміну;
2) розв'язати допоміжну систему рівнянь з новими змінними;
3) підставити одержані розв'язки в початкову систему;
4) розв'язати одержану систему рівнянь;
5) записати кожну пару чисел, яка є розв'язком початкової системи.

Дізнайтеся більше

Метод Гауса — класичний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, названий на честь німецького математика Карла Фрідріха Гауса (1377–1855). Цей метод передбачає поступове виключення змінних. Тобто за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до еквівалентної системи трикутного виду, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером), знаходять усі змінні системи.

Карл Гаус

Хоча нині даний метод повсюдно називають методом Гауса, він був відомим ще до К.-Ф. Гауса. Уперше опис даного методу трапляється в китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах», який вважають енциклопедією знань давньокитайських математиків. У ньому зібрано 246 задач, до яких наведено відповіді та способи розв'язування. Книга 7 містить розв'язання систем двох лінійних рівнянь за допомогою «правила хибного положення», а книга 8 — розв'язання систем довільного числа лінійних рівнянь.


九章筭經卷第一
魏 劉 徽 注
方田
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
(荅曰一)百六十八步

Пригадайте головне

1. Що таке система двох рівнянь із двома змінними?
2. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
3. Що означає — «розв'язати систему рівнянь із двома змінними»?
4. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними за допомогою графічного способу?
5. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними?
6. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки?
7. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом заміни змінних?

Розв'яжіть задачі

402'. Чи правильно Тарас сформулював означення: «Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають таку пару чисел $(x; y)$, яка є розв'язком кожного рівняння системи»?

403'. Чи правильно сказала Катруся: «Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки»?

404'. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними, якщо вона містить:
1) рівняння першого та другого степенів;
2) обидва рівняння — другого степеня?

405°. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-y^2=12 \end{cases}$ пара чисел:

1) (5; 1); 2) (4; 2)?

406°. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ пара чисел:

1) (4; 2); 2) (3; 1)?

407°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} 2x-y=-3, \\ x^2-y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=6, \\ 2x-3y=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y=8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=12, \\ 3x+4y=24. \end{cases}$

408°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=8, \\ 2x-y=0. \end{cases}$

409°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2xy-y^2=-3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+16=5xy; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-3y=-10, \\ xy-y^2=-12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x=5-y, \\ 3xy=2x^2+4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=4, \\ y^2-4xy=-7; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2y=7-x, \\ 2y^2=14-xy; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=5, \\ 2xy=y^2-13; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3y=-x-2, \\ 2xy=3y^2-5. \end{cases}$

410°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} 2x+y=6, \\ x^2+xy=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x=y-3, \\ 15x^2=2xy+5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-3x=7, \\ x^2+xy=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x=2-y, \\ 2x^2-44=3xy. \end{cases}$

411°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=68; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=6, \\ x^2+y^2=50; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y=0, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x = 6 + y, \\ 2x^2 + y^2 = 66; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = 6y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2 + y = 3x, \\ 3x^2 = 28 - y^2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = xy + 19. \end{cases}$

412°. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 + y^2 = 65; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x^2 = 5 - y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - 1 = y^2 - 4xy. \end{cases}$

413. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x - y = -5, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-1)^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4. \end{cases}$

414. Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x+1)^2 - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

415. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = -7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x - y - xy = -7, \\ x - y + xy = 13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$

416. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 5. \end{cases}$

417. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2+y^2+xy=19; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3, \\ 2x^2+2y^2+xy=-4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x^2+y^2-xy=7. \end{cases}$

418. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2+y^2+xy=12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y-xy=-1, \\ x^2+y^2-xy=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x+y=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3-y^3=28, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

419*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=9, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x+y}=-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=-2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}, \\ xy-\dfrac{x}{y}=2. \end{cases}$

420*. Серед розв'язків $(x;\, y)$ системи рівнянь визначте ту пару, для якої сума $x + y$ буде найбільшою. У відповідь запишіть значення суми.

1) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^2y^2=9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y=6, \\ y^2+x=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0, \\ x^2-xy+3y^2=45; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ 4y^2+xy=7. \end{cases}$

421*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ xz=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y-z=5, \\ 3x-4y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+xz=8, \\ yz+xy=9, \\ xz+yz=-7. \end{cases}$

422*. Знайдіть усі значення параметра a, за яких система рівнянь має розв'язки:

1) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2x + y = a, \\ x^2 - 2x + y^2 = 0. \end{cases}$

423*. Знайдіть усі значення параметра a, за яких система:

1) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок;

2) $\begin{cases} y - |x| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має два розв'язки.

Проявіть компетентність

424. Довжина паркану навколо прямокутної ділянки родини Петренків дорівнює 140 м. Площа ділянки дорівнює 1200 м^2.

1. Знайдіть ширину ділянки.
2. Знайдіть довжину ділянки.

Садова ділянка містить такі зони: житлову, садово-городню й господарську зони та зону відпочинку.

3. Знайдіть площу житлової зони, якщо вона становить $\frac{1}{5}$ площі всієї ділянки.
4. Знайдіть площу господарської зони, якщо вона становить 50 % площі житлової зони.
5. Знайдіть площу зони відпочинку, якщо вона у 2 рази більша за площу садово-городньої зони.

Задачі на повторення

425. Заробітна платня токаря становила 3000 грн. Спочатку її було збільшено на 20 %, а через рік — ще на 10 %. На скільки відсотків збільшилася заробітна платня токаря порівняно з початковою?

426. Обчисліть значення виразу:

$$\left(\frac{15}{1+\sqrt{6}}-\frac{4}{2-\sqrt{6}}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(11+\sqrt{6}\right).$$

427. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a-2}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}\right):\frac{8a}{a^2-4}$; 2) $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(a-\frac{ab}{a+b}\right):\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$.

§ 11 Прикладні задачі

1. СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

Прикладною задачею вважають задачу, яка виникає поза математикою й розв'язується математичними засобами. До таких задач ми відносимо реальні ситуації, які відбуваються або можуть відбуватися в навколишньому середовищі. Наприклад, розглянемо ситуацію.

Ситуація. У яблуневому саду на прямокутній ділянці землі посадили нові дерева, причому виявилося, що кількість рядів на 2 більша, ніж кількість дерев у ряді. Скільки рядів у новому саду й по скільки дерев посаджено в кожному ряді, якщо всього посадили 255 дерев?

Щоб відповісти на поставлене запитання, потрібно сформулювати умову й вимогу задачі мовою математики, тобто скласти математичну модель задачі. Пригадаємо основні положення з курсу алгебри 8-го класу.

Математична модель — це опис деякого реального процесу засобами математики.

Складання математичної моделі задачі називають *математичним моделюванням*. Розв'язування задачі методом математичного моделювання містить *три етапи*:

1) **побудова математичної моделі;**
2) **робота з математичною моделлю;**
3) **складання відповіді до задачі в термінах її сюжету.**

На першому етапі побудуємо математичну модель ситуації, яку ми розглядаємо, у вигляді системи відповідних рівнянь. Для цього необхідно ввести змінні x і y.

Нехай у саду посадили x рядів по y яблунь у кожному ряді. За умовою, кількість рядів на 2 більша, ніж кількісь дерев у ряді. Складаємо перше рівняння: $x - y = 2$.

Також за умовою відомо, що всього посадили 255 яблунь. Складаємо друге рівняння: $xy = 255$. Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 255. \end{cases}$$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь.

У першому рівнянні виразимо змінну x через змінну y:

$$x = y + 2.$$

Одержаний вираз $y + 2$ підставимо замість x у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ (y + 2) \cdot y = 255. \end{cases}$$

Відтак друге рівняння системи містить лише одну змінну y. Розв'яжемо його:

$$y^2 + 2y - 255 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-255) = 4 + 1020 = 1024,$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{-2 \pm 32}{2}.$$

Звідси $y_1 = 15$ і $y_2 = -17$.

Значення $y_2 = -17$ не задовольняє умову задачі, бо кількість яблунь у ряді не може бути від'ємним числом.

Тому в рівність $x = y + 2$ замість y підставимо лише значення 15. Одержимо: якщо $y = 15$, то $x = y + 2 = 15 + 2 = 17$.

На третьому етапі складаємо відповідь до задачі.

Одержали, що $x = 17$ і $y = 15$. Отже, у саду посадили 17 рядів по 15 яблунь у кожному ряді.

2. ЗАДАЧІ НА РУХ

Ви вже знаєте, що для розв'язування задач на рух застосовують формулу, що виражає закон руху: $s = vt$, де s — відстань, v — швидкість, t — час. Тому для складання рівнянь математичної моделі можна використовувати одну з формул для знаходження: відстані — $s = vt$, швидкості — $v = \frac{s}{t}$ або часу — $t = \frac{s}{v}$.

Розглянемо приклад.

Задача 1. Відстань від Черкас до Києва, що становить 180 км, автомобілем можна проїхати на 1 год швидше, ніж автобусом. Знайдіть швидкості автомобіля й автобуса, якщо відомо, що швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса.

Розв'язання.

Побудова математичної моделі. Для побудови математичної моделі ситуації, яку розглядаємо, потрібно ввести змінні x і y.

Нехай x км/год — швидкість автомобіля й y км/ год — швидкість автобуса.

За умовою, швидкість автомобіля на 30 км/год більша за швидкість автобуса. Складаємо перше рівняння: $x - y = 30$.

Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 18.

Таблиця 18

Вид транспорту	v, км/год	s, км	t, год
Автомобіль	x	180	$\frac{180}{x}$, на 1 год <
Автобус	y	180	$\frac{180}{y}$

За умовою, автомобіль долає шлях на 1 год швидше, ніж автобус. Складаємо друге рівняння: $\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 30, \\ \frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1. \end{cases}$$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x = y + 30, \\ \dfrac{180}{y} - \dfrac{180}{y+30} = 1. \end{cases}$$

$$\frac{180}{y} - \frac{180}{y+30} - 1 = 0,$$

ОДЗ: $y \neq 0$, $y \neq -30$.

$$\frac{180 \cdot (y+30) - 180 \cdot y - y \cdot (y+30)}{y(y+30)} = 0,$$

$$180(y+30) - 180y - y(y+30) = 0,$$

$$180y + 5400 - 180y - y^2 - 30y = 0,$$

$$y^2 + 30y - 5400 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5400) = 900 + 21600 = 22500,$$

$$y_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{22500}}{2 \cdot 1} = \frac{-30 \pm 150}{2},$$

$$y_1 = 60,$$
$$y_2 = -90.$$

Перевіркою встановлюємо, що обидва числа задовольняють ОДЗ, а отже, є коренями рівняння. Але число –90 не задовольняє умову задачі.

Якщо $y = 60$, то $x = y + 30 = 60 + 30 = 90$.

На третьому етапі складаємо відповідь до задачі.

Одержали, що $x = 90$ і $y = 60$. Отже, швидкість автомобіля становить 90 км/год, а швидкість автобуса — 60 км/год.

? Чи є відмінності в складані математичних моделей у задачах на рух річкою? Ні. Підхід той самий. Рівняння складають за тими ж формулами, але, зазвичай, за x позначають власну швидкість об'єкта руху, а за y — швидкість течії.

3. ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

У задачах на роботу описується певний вид діяльності: труби наповнюють басейн, селяни збирають урожай, будівельники будують щось тощо. У таких задачах обсяг виконаної роботи знаходять як добуток продуктивності праці й часу: $A = pt$, де A — обсяг роботи, p — продуктивність праці, t — час роботи. Тому для складання математичної моделі цієї задачі можна застосувати одну з формул на знаходження: обсягу роботи — $A = pt$, продуктивності праці — $p = \dfrac{A}{t}$ або часу роботи — $t = \dfrac{A}{p}$.

Зверніть увагу:
якщо в умові задачі не вказано обсяг роботи, то його приймають за число 1.

Задача 2. Через дві труби басейн можна наповнити за 2 год. Через першу трубу цей басейн може наповнитися на 3 год швидше, ніж через другу. За скільки годин можна наповнити цей басейн через кожну трубу окремо?

Розв'язання.
Побудова математичної моделі. Нехай час наповнення басейну через першу трубу — x год, тоді час його заповнення через другу трубу — y год.
За умовою, через першу трубу басейн може наповнитися на 3 год швидше, ніж через другу. Складаємо перше рівняння: $y - x = 3$.
Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 19. Обсяг роботи, що полягає в наповненні басейну, приймаємо за 1.

Таблиця 19

Труби	p	t	A
Перша	$\frac{1}{x}$	2	$\left.\begin{matrix}\frac{2}{x}\\ \frac{2}{y}\end{matrix}\right\}1$
Друга	$\frac{1}{y}$	2	

Складаємо друге рівняння: $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1$.

Одержали систему рівнянь: $\begin{cases} y - x = 3, \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1. \end{cases}$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо дві пари чисел: $x = 3$, $y = 6$ та $x = -2$, $y = 1$. Друга пара не задовольняє умову задачі. Тому вибираємо пару $x = 3$, $y = 6$.
На третьому етапі складаємо відповідь до задачі. Через першу трубу басейн можна наповнити за 3 год, а через другу — за 6 год.

4. ЗАДАЧІ НА ВАРТІСТЬ

Якщо a — ціна деякого товару, n — його кількість, а C — вартість, то для розв'язування задач на вартість під час складання математичної моделі використовують одну з формул для знаходження: вартості — $C = a \cdot n$, ціни — $a = \frac{C}{n}$ або кількості — $n = \frac{C}{a}$.

Задача 3. Мама купила груші та яблука. Ціна 1 кг груш на 8 грн більша, ніж 1 кг яблук. За груші мама заплатила 40 грн, а за яблука — 48 грн. Визначте ціну яблук і груш, якщо яблук мама купила на 2 кг більше, ніж груш.

Розв'язання.
Побудова математичної моделі. Нехай ціна груш — x грн, а ціна яблук — y грн.
За умовою, 1 кг груш коштує на 8 грн дорожче, ніж 1 кг яблук. Складаємо перше рівняння: $x - y = 8$.
Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 20.

Таблиця 20

Фрукти	a, грн	C, грн	n, кг
Груші	x	40	$\frac{40}{x}$
Яблука	y	48	$\frac{48}{y}$, на 2 >

За умовою, мама купила яблук на 2 кг більше, ніж груш. Складаємо друге рівняння: $\frac{48}{y} - \frac{40}{x} = 2$.
Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ \frac{48}{y} - \frac{40}{x} = 2. \end{cases}$$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо два розв'язки: (20; 12) та (–8; –16). Другий розв'язок не задовольняє умову задачі. Тому вибираємо розв'язок (20; 12).
На третьому етапі складаємо відповідь до задачі. Один кілограм груш коштує 20 грн, а один кілограм яблук — 12 грн.

Чи можна для розв'язування розглянутих задач як математичну модель використовувати не системи рівнянь, а рівняння? Так. Наприклад, для розв'язування задачі 3 можна ввести такі позначення: ціна яблук — x грн, а ціна груш — $(x + 8)$ грн. Відтак одержимо рівняння: $\frac{48}{x} - \frac{40}{x+8} = 2$.

5. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Для розв'язування геометричних задач під час складання математичної моделі використовують означення та властивості геометричних фігур.

Задача 4. Прямокутну ділянку землі площею 4000 м^2 обнесено парканом, загальна довжина якого становить 260 м. Знайдіть довжину й ширину цієї ділянки.

Розв'язання.

Побудова математичної моделі. Нехай x — довжина земельної ділянки, а y — її ширина.

За умовою, ділянка має форму прямокутника, площа якого 4000 м^2. Складаємо перше рівняння: $x \cdot y = 4000$.

Ділянку обнесено парканом, загальна довжина якого 260 м, отже, периметр прямокутника дорівнює 260 м. Складаємо друге рівняння: $2(x+y)=260$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 4000, \\ 2(x+y) = 260. \end{cases}$$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 4000, \\ 2(x+y) = 260; \ | :2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 4000, \\ x+y = 130; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 130 - y, \\ (130-y)y = 4000; \end{cases}$$

$$130y - y^2 - 4000 = 0,$$

$$y^2 - 130y + 4000 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-130)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4000 = 16900 - 16000 = 900,$$

$$y_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{130 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{130 \pm 30}{2},$$

$$y_1 = 80, \ y_2 = 50.$$

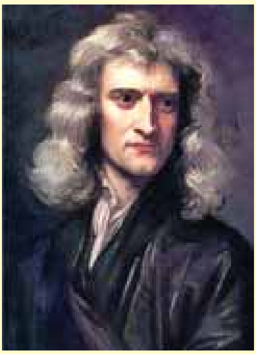
Якщо $y_1 = 80$, то $x_1 = 130 - 80 = 50$;
якщо $y_2 = 50$, то $x_2 = 130 - 50 = 80$.
Отже, система рівнянь має два розв'язки: (50; 80) і (80; 50).
На третьому етапі складаємо відповідь до задачі.
У задачі необхідно було знайти довжину й ширину ділянки, що має форму прямокутника. За x прийнято довжину цієї ділянки, а за y — її ширину. Тому, за умовою задачі, обираємо пару (80; 50).
Отже, довжина земельної ділянки дорівнює 80 м, а її ширина — 50 м.

Зверніть увагу:

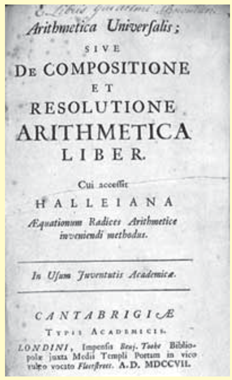
- якщо в задачі необхідно знайти пару чисел a і b, то таких пар може бути дві: a і b та b і a;
- якщо за умовою задачі важливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то із двох можливих пар чисел залишають одну пару, що задовольняє цю умову;
- якщо за умовою задачі не важливо, у якому порядку подавати знайдені числа, то можна залишити будь-яку з пар: або a і b, або b і a.

Дізнайтеся більше

«Універсальна арифметика» (або «Загальна арифметика») — монографія Ісака Ньютона, уперше опублікована в 1707 р. латинською мовою.



Ісак Ньютон



Arithmetica Universalis;
SIVE
DE COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.
Cui accessit
HALLEIANA
Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus.
In Usum Juventutis Academicæ.
CANTABRIGIÆ
Typis Academicis.
LONDINI, Impensis Benj. Tooke Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato Fleetstreet. A.D. MDCCVII.

Універсальної арифметикою Ньютон називав алгебру, і даною працею він зробив істотний внесок у розвиток цього розділу математики.

На початку книги Ньютон пояснює взаємозв'язок арифметики й алгебри: мета алгебри — відкривати та досліджувати загальні закони арифметики, а також пропонувати практичні методи розв'язування рівнянь.

Особливу увагу Ньютон приділив розв'язуванню алгебраїчних рівнянь, ця тема займає майже половину книги. У ній наведено різноманітні чисельні методи, адже Ньютон завжди приділяв велику увагу наближеному розв'язуванню рівнянь. У ході викладу наведено розв'язання 77 типових задач (в основному геометричного характеру), з докладними роз'ясненнями та методичними рекомендаціями.

Пригадайте головне

1. Що таке математична модель?
2. Що таке математичне моделювання?
3. Назвіть етапи математичного моделювання.
4. Поясніть, як розв'язують задачі на рух.
5. Поясніть, як розв'язують задачі на роботу.
6. Поясніть, як розв'язують задачі на вартість.
7. Поясніть, як розв'язують геометричні задачі.

Розв'яжіть задачі

428'. При розв'язуванні задач на рух за якою формулою знаходять:
1) пройдену відстань;
2) швидкість руху;
3) час на подолання відстані?

429'. При розв'язуванні задач на вартість за якою формулою знаходять:
1) обсяг виконаної роботи;
2) продуктивність праці;
3) час роботи?

430'. При розв'язуванні задач на вартість за якою формулою знаходять:
1) вартість покупки;
2) ціну товару;
3) кількість придбаного товару?

431°. Складіть формулу для визначення:
1) часу руху автобуса, який проїхав 100 км зі швидкістю v км/год;
2) швидкості велосипедиста, який проїхав s км за 2 год;
3) відстані, яку проїхав поїзд зі швидкістю 80 км/год за t год.

432°. Швидкість течії річки 3 км/год. Складіть рівність для визначення часу руху катера, який проплив:
1) 36 км зі швидкістю v км/год за течією річки;
2) s км зі швидкістю 15 км/год проти течії річки.

433°. Складіть рівність для визначення:
1) обсягу виконаної роботи з продуктивністю p за 2 год;
2) продуктивності праці при виготовлені 30 костюмів за t днів;
3) часу роботи для виготовленні n деталей за 3 год.

434°. Складіть рівність для визначення:
1) вартості покупки n кг яблук за ціною 10 грн за 1 кг;
2) ціну зошита, якщо придбали 12 зошитів, витративши m грн;
3) кількості придбаних тістечок за ціною a грн за штуку, якщо заплатили 50 грн.

435°. Одне із чисел на 5 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 150.

436°. Одне із чисел на 3 менше від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 108.

437°. Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їх квадратів — 369. Знайдіть ці числа.

438°. Сума двох чисел дорівнює 25, а сума їх квадратів — 317. Знайдіть ці числа.

439°. Сума двох чисел дорівнює 22. Якщо від квадрата першого числа відняти подвоєне друге число, то одержимо 124. Знайдіть ці числа.

440°. Різниця двох чисел дорівнює 2. Якщо до потроєного першого числа додати квадрат другого числа, то одержимо 124. Знайдіть ці числа.

441°. Із Києва до Житомира одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з автомобілів була на 10 км/год більшою за швидкість другого, тому він прибув до Житомира на 40 хв раніше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 140 км.

442°. Із Черкас до Вінниці одночасно виїхали автобус й автомобіль. Швидкість автомобіля була на 30 км/год більшою за швидкість автобуса, тому він прибув до Вінниці на 1 год 30 хв раніше. Знайдіть швидкість автобуса й автомобіля, якщо відстань між містами становить 270 км.

443°. Із Харкова до Запоріжжя відправився рейсовий автобус. Автобус їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Запоріжжя він прибув на 1 год раніше, ніж планував. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо відстань між містами становить 300 км?

444°. Із Полтави до Одеси відправився рейсовий автобус. Через негоду автобус їхав зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж було заплановано за розкладом. Тому до Одеси він прибув із запізненням на 2 год. З якою швидкістю мав їхати автобус за розкладом, якщо відстань між містами становить 600 км?

445°. Замовлення на 140 деталей перший робітник виконує на 4 дні швидше, ніж другий. Скільки деталей за день виготовляє другий робітник, якщо перший робітник за день виготовляє на 4 деталі більше?

446°. Замовлення на 80 деталей перший робітник виконує на 3 год довше, ніж другий. Скільки деталей за 1 год виготовляє перший робітник, якщо другий робітник за 1 год виготовляє на 6 деталей більше?

447°. Мама заплатила за груші 60 грн, а за яблука — 48 грн. Відомо, що ціна 1 кг груш на 8 грн більша, ніж ціна 1 кг яблук. Визначте, скільки кілограмів яблук і груш купила мама та за якою ціною, якщо яблук мама купила на 1 кг більше, ніж груш.

448°. За зошити в лінійку Тетянка заплатила 45 грн, а за зошити в клітинку — 80 грн. Ціна одного зошита в лінійку на 1 грн менша, ніж ціна одного зошита в клітинку. Визначте, скільки зошитів кожного виду купила Тетянка та за якою ціною, якщо зошитів у клітинку Тетянка купила на 5 більше, ніж зошитів у лінійку.

449°. Петрик і Миколка майструють моделі корабликів. Петрик може виготовити за день на 2 моделі більше, ніж Миколка. Відомо, що для виготовлення 16 моделей Петрик витрачає на 4 дні менше, ніж Миколка. Скільки корабликів за день виготовляє кожен хлопчик?

450°. Тетянка з Наталкою виготовляють новорічні прикраси для шкільної ялинки. Тетянка за 1 год може виготовити на 1 прикрасу менше, ніж Наталка. Відомо, що для виготовлення 12 прикрас Тетянка витрачає на 1 год більше, ніж Наталка. Скільки прикрас за годину виготовляє кожна дівчинка?

451°. Сквер прямокутної форми, площа якого становить 6300 м^2, огороджено парканом завдовжки 320 м, включаючи ворота на вході до скверу. Знайдіть довжину й ширину скверу.

452°. Спортмайданчик біля школи, площа якого становить 4000 м^2, має прямокутну форму. Знайдіть довжину й ширину спортмайданчика, якщо довжина огорожі, включаючи вхід до майданчика, дорівнює 260 м.

453. Якщо до $\frac{1}{2}$ першого числа додати $\frac{1}{2}$ другого, то одержимо 7, а якщо до $\frac{1}{4}$ квадрата першого числа додати $\frac{1}{5}$ квадрата другого, то одержимо 24. Знайдіть ці числа.

454. Якщо до $\frac{1}{4}$ першого числа додати $\frac{1}{3}$ другого, то одержимо 3, а якщо до $\frac{1}{2}$ квадрата першого числа додати $\frac{1}{4}$ квадрата другого, то одержимо 17. Знайдіть ці числа.

455. У кінотеатрі два зали для глядачів: великий і малий. У великому залі — 500 місць, а в малому — 300 місць. Кількість місць у кожному ряді обох залів однакова, проте в малому залі на 10 рядів менше, ніж у великому. Скільки рядів у великому залі, а скільки — у малому? Скільки місць у кожному ряді?

456. На двох ділянках рівними рядами посадили яблуні й груші: на першій — 300 яблунь, а на другій — 270 груш. Кількість дерев у кожному ряді однакова, проте на першій ділянці було висаджено на 2 ряди дерев більше, ніж на другій. Скільки рядів яблунь посадили на першій ділянці, а скільки — на другій? Скільки дерев у кожному ряді?

457. Мотоцикліст зі сталою швидкістю виїхав з Рівного до Луцька, відстань між якими дорівнює 70 км. Наступного дня він відправився назад. Половину шляху він проїхав зі швидкістю, з якою рухався напередодні. Потім зробив зупинку на 10 хв. Для того щоб прибути вчасно, на шляху, що лишився, він збільшив швидкість на 5 км/год. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шляху з Рівного до Луцька. Упродовж якого часу він був у дорозі?

458. Автомобіль зі сталою швидкістю виїхав з Тернополя до Вінниці, відстань між якими дорівнює 240 км. Наступного дня він відправився назад. Половину шляху він проїхав зі швидкістю, з якою рухався напередодні. Потім зробив зупинку на 10 хв. Для того щоб прибути вчасно, на шляху, що залишився, він збільшив швидкість на 10 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля на шляху з Тернополя до Вінниці. Упродовж якого часу він був у дорозі?

459. Туристи за 1 год на автомобілі подолали відстань, на 40 км більшу, ніж за 4 год, рухаючись пішки. Відомо, що швидкість руху на автомобілі була у 12 разів більшою, ніж швидкість руху туристів. Знайдіть швидкості руху туристів пішки та швидкість їхнього руху на автомобілі. Яку відстань подолали туристи, рухаючись пішки?

460. За 4 год на автобусі туристи подолали ту саму відстань, що й за 3 год на поїзді. Знайдіть швидкості автобуса й поїзда, якщо за 1 год на поїзді туристи проїжджали на 20 км більше, ніж на автобусі. Яку відстань подолали туристи, рухаючись автобусом?

461. Катер проплив 20 км за течією річки за 1 год. Назад він повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях 1 год 40 хв. Знайдіть швидкість катера й швидкість течії річки.

462. Моторний човен проплив проти течії річки 24 км за 2 год. Назад він повернувся до пункту відправлення, витративши на зворотний шлях 1,5 год. Знайдіть швидкість човна та швидкість течії річки.

463. Майстер має зробити 120 деталей. Якщо він буде виготовляти щодня на 2 деталі більше, ніж повинен, то закінчить роботу на 2 дні раніше. Скільки деталей за день має виготовляти майстер?

464. Кравчиня має пошити 30 суконь. Якщо щодня вона буде шити на 1 сукню більше, ніж заплановано, то закінчить роботу на 5 днів раніше. Скільки суконь за день має шити кравчиня за планом?

465. Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а його площа — 120 см^2. Знайдіть діагональ прямокутника.

466. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а його площа — 48 см^2. Знайдіть діагональ прямокутника.

467*. Богдан і Тарас поділили між собою 39 горіхів. Кількість горіхів, що дісталися одному з них, менша від подвоєного добутку кількості горіхів, що дісталися Тарасові. Квадрат третьої частини горіхів, що дісталися Тарасові, менший від збільшеної на 1 кількості горіхів, що дісталися Богданові. Скільки горіхів одержав кожний хлопчик?

468*. Двоє робітників одночасно розпочали роботу. Після 45 хв їх спільної роботи першого робітника перевели на іншу роботу, і другий робітник завершив роботу за 2 год 15 хв.

За який час міг би виконати цю роботу кожний робітник, працюючи окремо, якщо відомо, що другому робітникові на її виконання потрібно на 1 год більше, ніж першому?

469*. Відстань між містами A і B пасажирський поїзд долає на 4 год швидше, ніж товарний. Якби пасажирський поїзд витратив той час, який витратив товарний поїзд на подолання шляху від A до B, то він проїхав би на 280 км більше, ніж товарний. Якби швидкість кожного поїзда збільшили на 10 км/год, то пасажирський поїзд пройшов би відстань від A до B на 2 год 24 хв швидше, ніж товарний. Знайдіть відстань між містами.

470*. Два велосипедисти одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 28 км. Через 1 год вони зустрілися й продовжили свій шлях без зупинки і з тими самими швидкостями. Перший прибув у пункт B на 35 хв раніше, ніж другий у пункт A. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

471*. Дві точки рівномірно в одному напрямку рухаються по колу. Перша точка проходить коло на 2 с швидше за другу й наздоганяє її через кожні 12 с. За який час кожна точка проходить це коло?

Проявіть компетентність

472. Головним споживачем води в країні є сільське господарство. Воно споживає 70 % усієї води, яку використовують люди. Щоб виростити 1 т пшениці, потрібно 1500 т води, а 1 т рису — 7000 т води.

1. Площа земельної ділянки фермера Василя Петровича дорівнює 0,4 км^2, а її периметр становить 2 км 600 м. Знайдіть довжину й ширину ділянки.
2. Скільки тонн пшениці зібрав Василь Петрович цього року, якщо її врожайність становила 45 ц/га?
3. Обчисліть масу води, необхідну для вирощування такого врожаю.
4. Яка маса води знадобиться Василю Петровичу наступного року, якщо він надумає вирощувати рис на цій ділянці при очікуваній урожайності 30 ц/га?

473. Державний прапор України — стяг із двох рівновеликих горизонтальних смуг синього й жовтого кольорів. Співвідношення ширини прапора до його довжини 2 : 3.

1. Знайдіть сторони прапора, площа якого дорівнює 1,5 м^2, а периметр — 5 м.
2. Знайдіть розміри прапора, одна сторона якого дорівнює 60 см.
3. Обчисліть, скільки тканини кожного кольору потрібно для виготовлення такого прапора, якщо на шви потрібно додати 2 % тканини.

474. На занятті в художній школі Тетяна виконала малюнок «Весняна мелодія», який відібрали для участі в конкурсі. За вимогами конкурсу Тетяна має наклеїти свій малюнок на білий папір так, щоб навколо малюнка була біла окантовка однакової ширини.

1. Знайдіть розміри малюнка, якщо його ширина на 5 см менша від довжини, а площа становить 300 см^2.
2. Знайдіть ширину окантовки, якщо площа малюнка з окантовкою дорівнює 1400 см^2.
3. Чи зможе Тетяна для виготовлення окантовки до малюнка використати аркуш формату А2, розміри якого 420 × 594 мм?

Задачі на повторення

475. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2+8x-9)(x^2-4)\geq 0$; 2) $(x^2-6x-16)(x^2+2x+1)<0$.

476. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2+4|x|-12=0$; 2) $x^2-\dfrac{5x^2}{|x|}-6=0$.

477. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{4a^2-5a+1}{4a-1}-\dfrac{a^2-1}{1-a}$; 2) $\dfrac{a+1}{a^3+a^2+a}:\dfrac{1}{a^4-a}-a^2$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

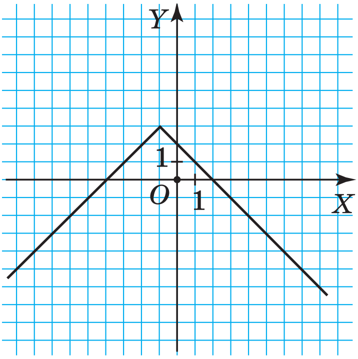
1. Сформулюйте означення функції.
2. Що називають аргументом функції?
3. Що таке область визначення функції?
4. Що таке область значень функції?
5. Назвіть способи задання функцій.
6. Наведіть приклади відомих вам функцій. Побудуйте їхні графіки.
7. Що таке нуль функції?
8. Що таке проміжки знакосталості?
9. Яка функція є зростаючою на деякому проміжку; спадною на деякому проміжку?
10. Як можна одержати графік функції $y = af(x)$ $(a \neq 0)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
11. Що є графіком функції $y = -x^2$? $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
12. Які властивості функції $y = -x^2$? $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
13. Як можна одержати графік функції $y = f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
14. Як можна одержати графік функції $y = f(x) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
15. Як можна одержати графік функції $y = f(x + a) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
16. Яка функція називається квадратичною?
17. Що є графіком квадратичної функції?
18. Яка область визначення функції $y = ax^2 + bx + c$?
19. Як визначити координати вершини параболи?
20. За якої умови вітки параболи напрямлені вгору; вниз?
21. Як визначити область значень квадратичної функції?
22. Скільки нулів може мати квадратична функція?
23. За яких значень аргументу функція $y = ax^2 + bx + c$ є зростаючою; спадною?
24. Яку нерівність називають квадратною? Як її розв'язати?
25. Що таке система двох рівнянь із двома змінними?
26. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
27. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними?
28. Які є способи розв'язування системи рівнянь із двома змінними?
29. Що таке математична модель?
30. Що таке математичне моделювання? Які його етапи?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

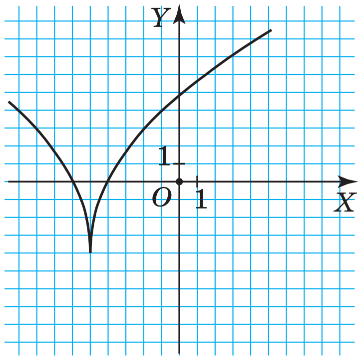
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1



Мал. 154



Мал. 155

За малюнком 154 розв'яжіть задачі 1–3.

1° Знайдіть область значень функції.

А. $y \in (-\infty; +\infty)$. **В.** $y \in (-\infty; 3]$.
Б. $y \in (-4; 2)$. **Г.** $y \in (-\infty; -1)$.

2° Знайдіть проміжок зростання функції.

А. $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. **В.** $x \in [-4; 2]$.
Б. $x \in (-\infty; -1]$. **Г.** $x \in (-1; +\infty)$.

3° Якою з наведених у відповідях формул задається функція?

А. $y = |x + 1| + 3$. **В.** $y = -|x + 1| + 2$.
Б. $y = |x - 1| + 3$. **Г.** $y = -|x + 1| + 3$.

4 Знайдіть нулі функцій $y = \dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$.

А. -2 і 1. **Б.** 2 і -1. **В.** $-2, 1, 0$. **Г.** 0.

5* На малюнку 155 зображено графік функції $y = f(x)$. Скільки точок перетину має графік функції $y = -f(x - 2) + 1$ із прямою $y = -3$?

А. 0. **Б.** 1. **В.** 2. **Г.** 3.

№ 2

1° Яке з наведених у відповідях чисел є розв'язком нерівності $5x^2 - 3x - 2 > 0$?

А. 1. **Б.** 0. **В.** 0,5. **Г.** −1.

2° Знайдіть абсцису вершини параболи $y = 2x^2 - 8x + 3$.

А. 2. **Б.** −2. **В.** 4. **Г.** −4.

3° Яка з наведених у відповідях квадратичних функцій не перетинає вісь абсцис?

А. $y = -x^2 - 12x + 1$. **В.** $y = x^2 - 18$.
Б. $y = x^2 - 12x$. **Г.** $y = x^2 - x + 1$.

4 Розв'яжіть квадратну нерівність $x^2 - 36 \le 0$.

А. $x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$. **В.** $x \in [-6; 6]$.
Б. $x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$. **Г.** $x \in (-6; 6)$.

5* Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{3 - x^2 - 2x} + \dfrac{x-1}{x+2}$.

А. $x \in (-3; 1)$. **В.** $x \in [-3; 1]$.
Б. $x \in [-3; -2) \cup (-2; 1]$. **Г.** $x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

№ 3

1° Яка з пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x^2 + y^2 = 10? \end{cases}$

А. (1; 3). **Б.** (−1; 3). **В.** (3; 1). **Г.** (−3; 1).

2° Скільки розв'язків має система рівнянь: $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - y = 0? \end{cases}$

А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

3° Розв'яжіть графічно систему рівнянь: $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

А. (−1; 1) і (1; 1). **В.** (−1; 1).
Б. (1; 1). **Г.** Розв'язків немає.

4 Одне із чисел на 5 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 84.

А. 6 і 11. **Б.** 7 і 12. **В.** 8 і 13. **Г.** 9 і 14.

5* Площа прямокутника дорівнює 60 см², а його діагональ — 13 см. Обчисліть сторони прямокутника.

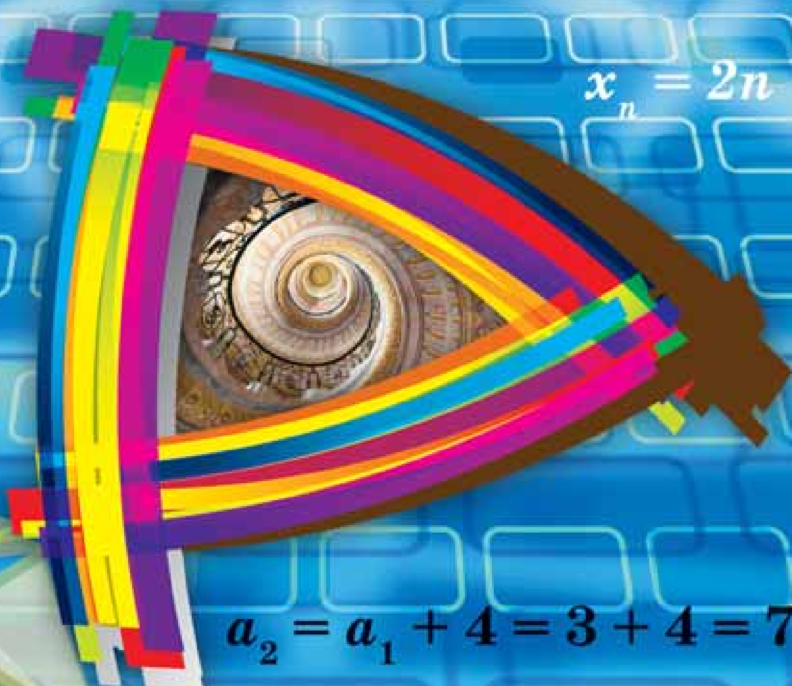
А. 3 см і 20 см. **В.** 5 см і 12 см.
Б. 4 см і 15 см. **Г.** 2 см і 30 см.

Розділ 3

Числові послідовності

У розділі дізнаєтеся:

- які є послідовності чисел;
- що таке арифметична та геометрична прогресії;
- про властивості арифметичної та геометричної прогресій;
- як обчислити суму n перших членів арифметичної та геометричної прогресій;
- як записати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці



§ 12 Що таке числова послідовність

1. ПОНЯТТЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Ви вже знаєте, що в повсякденному житті використовують нумерацію предметів, щоб указати порядок їхнього розміщення. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. У місті розпочато будівництво нового мікрорайону. За планом необхідно збудувати по п'ять будинків уздовж нової вулиці Різдвяної. Скільки металевих цифр необхідно замовити забудовнику, щоб пронумерувати будинки на вулиці Різдвяній?

Щоб відповісти на поставлене запитання, спочатку потрібно з'ясувати, скільки будинків будуть утворювати нову вулицю. Якщо будемо записувати їхні номери один за одним, то одержимо таку *послідовність чисел* для нумерації будинків:

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.$$

Тепер можна відповісти на запитання задачі: для нумерування десяти будинків знадобиться 11 цифр.

Якщо в подальшому буде продовжено будівництво на вулиці Різдвяній, то, відповідно, послідовність чисел для нумерування будинків також буде подовжуватись:

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; \ldots .$$

Якщо брати до уваги будинки лише на одній стороні вулиці, то одержимо дві нові послідовності чисел — із парними й непарними числами (на одній стороні вулиці будинки мають парну нумерацію, а на іншій — непарну).

Розглянемо послідовність чисел, що відповідає парній нумерації будинків:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots\ .$$

Бачимо, що кожному будинку на цій стороні вулиці поставлено у відповідність його номер. Схематично цю відповідність можна зобразити так:

1-й будинок	2-й будинок	3-й будинок	4-й будинок	5-й будинок
↓	↓	↓	↓	↓
№ 2	№ 4	№ 6	№ 8	№ 10

Ця відповідність задає послідовність чисел, у якій кожному номеру її члена n ставиться у відповідність число, що дорівнює $2n$:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots;\ 2n;\ \ldots\ .$$

Таку послідовність позначають $(2n)$. У ній на десятому місці буде стояти число 20, на п'ятнадцятому — 30, а на сотому — 200.

Якщо кожному натуральному числу n за деяким правилом поставити у відповідність число a_n, то одержимо *послідовність чисел* $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$, або *числову послідовність* (a_n). Така послідовність є нескінченною, оскільки натуральних чисел — безліч.

Записують: (a_n): $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$.

Числа, що утворюють дану послідовність, називають *членами послідовності*; число a_1 — першим членом; a_2 — другим членом; a_3 — третім членом тощо. Число a_n називають n-м членом послідовності (a_n).

Чи можна послідовності позначати іншими буквами, крім a? Так. Послідовності позначають малими буквами латинського алфавіту: (b_n), (c_n) тощо.

Наведемо приклади послідовностей:

(a_n) : 1; 2; 3; 4; ...;

(b_n) : 100; 50; 25; 12,5; ... .

Послідовність (a_n) є *зростаючою*, оскільки кожний її член, крім першого, більший за попередній. Послідовність (b_n) є *спадною*, оскільки кожний її член, крім першого, менший від попереднього.

2. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Задати числову послідовність — означає вказати правило, за яким можна обчислити її n-й член a_n для будь-якого натурального n. Це правило можна подати різними способами: формулою, словесним описом тощо.

Найчастіше послідовність задають за допомогою *формули n-го члена* або *рекурентної формули*.

Послідовність задано *формулою n-го члена*, якщо задано формулу $a_n = f(n)$, де $n \in N$, f — деяка функція. Наприклад, послідовність чисел, кратних числу 3, задають формулою $a_n = 3n$, $n \in N$. Така послідовність має вигляд: 3; 6; 9; ... .

Задача 1. Числову послідовність задано формулою $a_n = 2n + 1$. Знайдіть перші три члени цієї послідовності.

Розв'язання. Застосуємо формулу $a_n = 2n + 1$, тоді:
якщо $n = 1$, то $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;
якщо $n = 2$, то $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;
якщо $n = 3$, то $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Послідовність задано *рекурентною формулою*, якщо задано один або кілька перших її членів та формулу, що виражає наступний її член через один або кілька попередніх членів. Наприклад, послідовність Фібоначчі задано рекурентною формулою: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Така послідовність має вигляд: 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... .

Задача 2. Послідовність (a_n) задано рекурентною формулою: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 4$. Знайдіть a_5.

Розв'язання. За умовою, $a_1 = 3$. Застосуємо формулу $a_{n+1} = a_n + 4$:
$a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7$;
$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11$;
$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15$;
$a_5 = a_4 + 4 = 15 + 4 = 19$.

? Чи можна, знаючи член числової послідовності, визначити його номер у цій послідовності? Так. Розглянемо задачу 3.

Задача 3. Числову послідовність задано формулою $a_n = 10n - 5$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює 35.

Розв'язання. За умовою складаємо рівняння: $10n - 5 = 35$. Звідси $n = 4$. Отже, 35 — це 4-й член даної послідовності.

Зверніть увагу:
щоб переконатися в тому, що деяке число є членом даної послідовності, достатньо знайти його номер.

Дізнайтеся більше

Послідовність Фібоначчі 1; 1; 2; 3; 5; 8; ..., про яку згадували в параграфі, названо на честь математика XIII ст. Леонардо Фібоначчі з Пізи (бл. 1170 — бл. 1250).

Леонардо Фібоначчі

У «Книзі абака» («Liber abacci») у 1202 р. Фібоначчі описав цю послідовність, хоча вона була відома ще в Стародавній Індії, задовго до цього. Послідовність Фібоначчі була розв'язком задачі про кроликів.

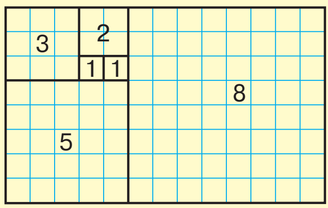
Задача. Дехто посадив пару кроликів у загін, оточений з усіх боків стіною. Скільки пар кроликів за рік може народити ця пара, якщо кожна пара кроликів кожного місяця, починаючи з другого місяця після свого народження, народжує одну пару?

Можна переконатися, що кількість пар кроликів, які народяться за кожний із дванадцяти наступних місяців, буде такою: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Ця послідовність виникає в найрізноманітніших математичних ситуаціях — комбінаторних, числових, геометричних.

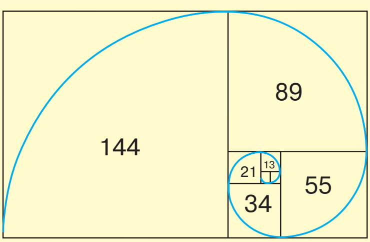
Відношення двох сусідніх чисел у послідовності Фібоначчі прямує до числа, відомого ще з античності, яке називають «золотим перерізом».

На малюнку 156 наведено початок розбиття довільного прямокутника на квадрати, у яких довжини сторін утворюють послідовність чисел Фібоначчі.



Мал. 156

Якщо провести плавну лінію через кути цих квадратів, то одержимо спіраль Архімеда, збільшення кроку якої завжди є рівномірним (мал. 157).



Мал. 157

У природі числа Фібоначчі можна побачити в різних спіральних формах: лусочки на сосновій шишці (мал. 158), насіння в соняшнику (мал. 159); космічні туманності (мал. 160) тощо.

Мал. 158

Мал. 159

Мал. 160

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади числових послідовностей.
2. У якому випадку говорять, що одержано числову послідовність?
3. Як позначають числову послідовність?
4. Як називають числа числової послідовності (a_n)? Як називають a_1; a_2; a_3; a_n?
5. Як задають числову послідовність?
6. Як задати послідовність за допомогою формули n-го члена?
7. Як задати послідовність за допомогою рекурентної формули?

Розв'яжіть задачі

478'. Чи правий Петро, стверджуючи: «Для одержання числової послідовності (b_n) потрібно кожному натуральному числу n поставити у відповідність число b_n»?

479'. Чи правильно, що даний набір чисел є числовою послідовністю:
1) 1, 2, 3, 4, 5, ...; 2) 1, 3, 5, 7, 9, ...; 3) 2, 4, 6, 8, 10, ...?
Яке число буде наступним?

480°. Дано послідовність чисел (a_n): 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
Назвіть:
1) перший член; 3) п'ятий член;
2) другий член; 4) восьмий член.

481°. Дано послідовність (b_n): b_1, b_2, b_3, b_4, ..., b_n, ... Який член послідовності:

1) слідує за членом: b_5; b_{10}; b_{99}; b_n; b_{n+5}; b_{n-1};
2) передує члену: b_7; b_{50}; b_{100}; b_n; b_{n+7}; b_{n-3}?

482°. Запишіть члени послідовності (c_n), які розміщені між членами:

1) c_4 і c_7;
2) c_{56} і c_{62};
3) c_{98} і c_{104};
4) c_n і c_{n+3};
5) c_{n-2} і c_n;
6) c_{n-3} і c_{n+2}.

483°. Запишіть члени послідовності (d_n), які розміщені між членами:

1) d_{12} і d_{15};
2) d_{44} і d_{50};
3) d_{n-2} і d_{n+2};
4) d_{n-1} і d_{n+1}.

484°. Запишіть перші п'ять членів послідовності, заданої формулою n-го члена:

1) $x_n = 2n$;
2) $x_n = 3n - 1$;
3) $x_n = \frac{n+1}{5}$;
4) $x_n = n^2 + 1$.

485°. Запишіть перші чотири члени послідовності, заданої формулою n-го члена:

1) $y_n = n + 1$;
2) $y_n = \frac{2}{n+3}$.

486°. Послідовність (c_n) задано рекурентною формулою: $c_1 = -2$, $c_{n+1} = c_n + 6{,}5$. Знайдіть c_4.

487°. Послідовність (d_n) задано рекурентною формулою: $d_1 = 3{,}5$, $d_{n+1} = d_n - 10{,}5$. Знайдіть d_5.

488°. Запишіть кілька перших членів послідовності (a_n), членами якої є натуральні числа, кратні числу 3. Для цієї послідовності вкажіть:

1) a_1;
2) a_7;
3) a_{100};
4) a_n.

489°. Запишіть кілька перших членів послідовності (b_n), членами якої є натуральні числа, кратні числу 5. Для цієї послідовності вкажіть:

1) b_{10};
2) b_n.

490°. Послідовність задано формулою $x_n = 7n - 2$. Чи є членом цієї послідовності число:

1) 33;
2) 75;
3) 107;
4) 131?

491°. Послідовність задано формулою $y_n = 10 + 4n$. Чи є членом цієї послідовності число:

1) 50;
2) 100?

492. Дано послідовність: 5; 10; 15; 20; ... . Задайте цю послідовність:
1) формулою n-го члена;
2) рекурентною формулою.

493. Дано послідовність: 10; 20; 30; ... . Задайте цю послідовність:
1) формулою n-го члена;
2) рекурентною формулою.

494. Якою формулою можна задати послідовність: 1; 4; 9; 16; 25; ...?

495. Послідовність задано формулою $a_n = (-1)^n$. Знайдіть:
1) a_1;
2) a_5;
3) a_{100};
4) a_{n+2}.

496. Послідовність задано формулою $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Знайдіть:
1) b_{10};
2) b_{n+1}.

497. Послідовність задано формулою $c_n = (n+5)(n-2)$. Знайдіть n, якщо:
1) $c_n = 260$;
2) $c_n = 638$.

498. Послідовність задано формулою $d_n = (n-3)(n+2)$. Знайдіть n, якщо: $d_n = 594$.

499. Обчисліть другий, третій і четвертий члени послідовності (x_n), якщо:
1) перший її член дорівнює 5, а кожний наступний — на 4 більший за попередній;
2) перший її член дорівнює 12, а кожний наступний — у 2 рази менший від попереднього.

500. Обчисліть другий, третій і четвертий члени послідовності (y_n), якщо перший її член дорівнює 10, а кожний наступний — на 5 менший від попереднього.

501. Перевірте, чи є числа 6 і 1 членами послідовності (a_n), якщо $a_n = \frac{n^2+11}{n+1}$.

502. Перевірте, чи є числа 5 і 2 членами послідовності (b_n), якщо $b_n = \frac{24 - n^2}{n}$.

503*. Послідовність (c_n) задано рекурентною формулою: $c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$, $c_1 = 1$, $c_2 = -5$. Знайдіть c_5.

504*. Знайдіть 4-й, 5-й і 6-й члени послідовності (a_n), якщо:

1) $(a_n) = \begin{cases} n^2, \text{ якщо } a \text{ — непарне}, \\ 5, \text{ якщо } a \text{ — парне}; \end{cases}$

2) $(a_n) = \begin{cases} 2n+1, \text{ якщо } a \text{ — непарне}, \\ 2n-1, \text{ якщо } a \text{ — парне}. \end{cases}$

505*. Послідовність задано формулою $b_n = -3n + 5$. Запишіть $(n + 1)$-й, $(n - 2)$-й і $(n + 4)$-й члени цієї послідовності.

Проявіть компетентність

506. Для перевірки логічного аспекту мислення використовують завдання на числові послідовності.
Знайдіть закономірність і продовжіть ряд чисел, написавши два наступні члени цієї послідовності:
1) 2, 4, 6, 8, 10, ...;
2) 5, 10, 20, 40, ...;
3) 21, 19, 17, 15, ...;
4) 16, 25, 36, 49, ...;
5) 2, 5, 11, 23, 47, 95, ...

Задачі на повторення

507. Число a більше за число b на 4. Знайдіть ці числа, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює:
1) 25;
2) 35,5.

508. У трьох дев'ятих класах навчається 70 учнів. У 9-А класі на 3 учні більше, ніж у 9-Б класі, і на одного учня менше, ніж у 9-В класі. Скільки учнів навчається в кожному класі?

§ 13 Арифметична прогресія

1. ПОНЯТТЯ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

У реальних життєвих ситуаціях інколи можна побачити закономірності, які дозволяють складати різні числові послідовності. Розглянемо ситуацію.

Ситуація 1. Під час весняних канікул Тарас вирішив розв'язувати цікаві задачі з математики з понеділка по п'ятницю. За планом, який склав Тарас, у понеділок він мав розв'язати 5 задач, а кожного наступного дня — на 2 задачі більше, ніж за попередній. Визначте, скільки задач розв'язував Тарас кожного дня, якщо він виконав усе, що запланував.

Задача розв'язується достатньо легко: якщо в понеділок Тарас розв'язав 5 задач, то:

$5 + 2 = 7$ (з.) — розв'язав у вівторок;
$7 + 2 = 9$ (з.) — розв'язав у середу;
$9 + 2 = 11$ (з.) — розв'язав у четвер;
$11 + 2 = 13$ (з.) — розв'язав у п'ятницю.

Одержимо послідовність чисел, яка показує кількість розв'язаних задач щодня з понеділка по п'ятницю:

$$5, 7, 9, 11, 13.$$

Кожний член цієї послідовності, починаючи з другого, одержується шляхом додавання до попереднього члена числа 2. Така послідовність є прикладом *арифметичної прогресії*, яка має скінченну кількість членів.

Послідовність можна було б продовжувати, якби Тарас, а потім його нащадки, нащадки нащадків і т.д., продовжували розв'язувати задачі за тих самих умов:

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots .$$

Така послідовність є прикладом нескінченної арифметичної прогресії.

Означення арифметичної прогресії

Арифметичною прогресією **називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, доданому з одним і тим самим числом.**

Тобто послідовність (a_n) — арифметична прогресія, якщо для будь-якого натурального числа n виконується умова: $a_{n+1} = a_n + d$, де d — деяке число.

З означення арифметичної прогресії випливає, що різниця між будь-яким її членом, починаючи з другого, і попереднім членом дорівнює d, тобто виконується рівність: $a_{n+1} - a_n = d$. Число d називають *різницею арифметичної прогресії*.

? Як задати арифметичну прогресію? Щоб задати арифметичну прогресію, достатньо задати її перший член і різницю. А далі потрібно скористатися означенням.

Наведемо приклади.

Якщо $a_1 = 1$, $d = 10$, то одержимо арифметичну прогресію:

$$1, 11, 21, 31, 41, \ldots .$$

Якщо $a_1 = 7$, $d = -2$, то одержимо арифметичну прогресію:

$$7, 5, 3, 1, -1, \ldots .$$

Якщо $a_1 = 5$, $d = 0$, то одержимо арифметичну прогресію:

$$5, 5, 5, 5, 5, \ldots .$$

За допомогою рівності $a_{n+1} = a_n + d$ можна визначити будь-який член арифметичної прогресії через попередній її член. Проте такий спосіб не є зручним, якщо, наприклад, потрібно знайти a_{100} або a_{1000}.

2. ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Для знаходження будь-якого члена арифметичної прогресії існує спеціальна формула. Виведемо її.

За означенням арифметичної прогресії:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d; \ldots .$$

Простежується закономірність: щоб знайти n-й член прогресії, потрібно до першого її члена додати $n - 1$ раз число d, тобто $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Формула n-го члена арифметичної прогресії

Нехай (a_n) — арифметична прогресія з різницею d. Тоді формула n-го члена має вигляд:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d}.$$

Формулу n-го члена арифметичної прогресії використовують під час розв'язування задач.

Задача 1. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, $a_1 = 2{,}5$, $d = 1{,}5$. Знайдіть a_{100}.

Розв'язання. Застосуємо формулу n-го члена

$$a_n = a_1 + (n - 1)d:$$

$$a_{100} = a_1 + 99d = 2{,}5 + 99 \cdot 1{,}5 = 2{,}5 + 148{,}5 = 151.$$

Задача 2. З'ясуйте, чи є число 30 членом арифметичної прогресії (b_n): $-20, -15, -10, -5, \ldots$.

Розв'язання. Для даної арифметичної прогресії:

$$b_1 = -20 \text{ і } d = b_2 - b_1 = -15 - (-20) = 5.$$

Якщо число 30 є членом прогресії, то існує таке натуральне число n, яке відповідає номеру заданого члена прогресії.
Застосуємо формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

$$30 = -20 + (n - 1) \cdot 5.$$

Розв'яжемо рівняння: $-20 + 5n - 5 = 30$, $5n = 55$, $n = 11$.
Отже, число 30 є 11-тим членом арифметичної прогресії (b_n), або $b_{11} = 30$.

Задача 3. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (c_n), якщо $c_7 = 36$ і $c_9 = 42$. Чому дорівнює c_8?

Розв'язання. За формулою n-го члена арифметичної прогресії:

$$c_7 = c_1 + 6d \text{ і } c_9 = c_1 + 8d.$$

Оскільки, за умовою, обидві вимоги мають виконуватись одночасно, то одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_7 = c_1 + 6d, \\ c_9 = c_1 + 8d. \end{cases}$$

Підставивши замість c_7 і c_9 їхні значення, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + 6d = 36, \\ c_1 + 8d = 42. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо, що $c_1 = 18$ і $d = 3$.
Тоді $c_8 = c_1 + 7d = 18 + 7 \cdot 3 = 39$.

? Чи можна задати арифметичну прогресію формулою $a_n = kn + b$, де k і b — деякі числа? Так. Для цього у формулі n-го члена необхідно розкрити дужки, звести подібні доданки:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = dn + (a_1 - d).$$

Якщо ввести позначення $d = k$ і $(a_1 - d) = b$, то одержимо $a_n = kn + b$.

3. ВЛАСТИВІСТЬ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Свою назву арифметична прогресія одержала через властивість, яка виконується для всіх її членів, крім першого.

Властивість арифметичної прогресії

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, є середнім арифметичним попереднього й наступного її членів, тобто:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n = 2, 3, \ldots .$$

Властивість можна довести. Для цього необхідно виразити члени a_{n-1} і a_{n+1} через a_n і d:

$$a_{n-1} = a_n - d \text{ і } a_{n+1} = a_n + d,$$

а потім знайти середнє арифметичне чисел a_{n-1} і a_{n+1}:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n .$$

Цю властивість використовують для розв'язування задач. Наприклад, у задачі 3 відповідь на друге запитання можна одержати в інший спосіб — знайти c_8 як середнє арифметичне його сусідів $c_7 = 36$ і $c_9 = 42$, тобто $c_8 = \frac{36+42}{2} = 39$.

4. ФОРМУЛА СУМИ n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Розглянемо таку ситуацію.

Ситуація 2. Якось на уроці арифметики учитель дав учням, серед яких був маленький Карл Гаус, досить складне завдання з арифметики: відшукати суму всіх натуральних чисел від 1 до 100. Учитель вважав, що учні досить довго шукатимуть відповідь. Але через кілька хвилин Карл розв'язав задачу. Коли вчитель проглянув розв'язання, то побачив, що малий Гаус запропонував спосіб, який можна було застосовувати для знаходження суми членів арифметичної прогресії.

Запишемо суму двома способами:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$
$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Додамо почленно ці дві рівності:
$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101.$
Одержали 100 доданків.
Отже, $2S = 101 \cdot 100$.
Звідси $S = 101 \cdot 50 = 5050$.

За допомогою аналогічних міркувань можна знайти суму n перших членів будь-якої арифметичної прогресії.

Позначимо суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) через S_n і запишемо її двічі: спочатку в порядку зростання номерів, а потім — у порядку їх спадання:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Сума кожної пари членів прогресії, що розміщуються один під одним, дорівнює $(a_1 + a_n)$. Число таких пар дорівнює n. Додавши почленно дві рівності, одержимо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Розділивши обидві частини рівності на 2, одержимо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії.

Формула суми *n* перших членів арифметичної прогресії через a_1 й a_n

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Повернемося до ситуації 1 на початку параграфа про Тараса, який розв’язував цікаві задачі під час канікул. Доповнимо її новою вимогою: знайдіть, скільки задач розв’язав Тарас за час канікул.

Розв’язати задачу можна двома способами.

Спосіб 1. З’ясуємо, скільки задач розв’язував Тарас кожного дня, а потім знайдемо їх суму:

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45 \text{ (з.)}.$$

Отже, за час канікул Тарас розв’язав 45 задач.

Спосіб 2. Застосуємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 5$, $n = 5$, $a_5 = 13$:

$$S_5 = \frac{5+13}{2} \cdot 5 = 45 \text{ (з.)}.$$

Якщо задані перший член арифметичної прогресії та її різниця, то зручніше використовувати формулу суми n перших членів, записану в іншому вигляді. Для цього застосуємо формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Формула суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d

Суму n перших членів арифметичної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Задача 4. Знайдіть суму дванадцяти членів арифметичної прогресії (a_n): –5; –4,5; –3; … .

Розв'язання. У даній прогресії $a_1 = -5$, $d = a_2 - a_1 = -4{,}5 - (-5) = 0{,}5$.

Задачу можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1. Скористаємось формулою суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Для цього визначимо $a_{12} = a_1 + 11d = -5 + 11 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

Тепер обчислимо суму 12-ти перших членів:

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{-5 + 0{,}5}{2} \cdot 12 = -27.$$

Спосіб 2. Скористаємось формулою суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

$$S_{12} = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = \frac{2 \cdot (-5) + 11 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 12 = -27.$$

Дізнайтеся більше

Термін «прогресія» має латинське походження (від *progression* — рух вперед) і був уведений римським автором Боецієм (VI ст.). Цим терміном у математиці спочатку йменували будь-яку послідовність чисел, побудовану за таким законом, який дозволяє необмежено продовжувати цю послідовність в одному напрямі.

Назва «арифметична» — від грецького слова *aritmos* — число.

Задачі на арифметичну прогресію існували вже в Давньому Єгипті. Наприклад, в одному зі стародавніх папірусів математичного змісту — папірусі Рінда (XIX ст. до н. е.) — наводиться така задача: «Тобі потрібно розділити 10 мір хліба між 10 особами так, щоб різниця між кожною людиною та наступною за нею становила $\frac{1}{8}$ міри».

В античних математичних текстах трапляються теореми, які стосуються арифметичної прогресії. Гипсікл Александрійський (II ст. до н. е.) сформулював таке твердження: «В арифметичній прогресії з парним числом членів сума членів другої половини перевищує суму членів першої половини на число, кратне квадрату половини числа членів».

Нікомах із Герази (I ст. н. е.) склав трактат «Вступ до арифметики», який довгий час від пізньої античності й до середньовіччя був поширеним підручником з математики. Він пропонував таку задачу: «Якщо розбити ряд усіх непарних чисел на групи, у яких кількість членів буде зростати як ряд натуральних чисел, то сума членів кожної групи буде дорівнювати кубу кількості членів у ній».

Спробуйте самостійно розв’язати наведені задачі.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення арифметичної прогресії. Наведіть приклади арифметичних прогресій.
2. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.
3. Сформулюйте властивість арифметичної прогресії.
4. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n.
5. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d.

Розв'яжіть задачі

509'. Чи правильно Дарина сформулювала означення: «Арифметичною прогресією називається послідовність, кожний член якої дорівнює попередньому члену, доданому з одним і тим самим числом»?

510'. Чи правильно, що для задання арифметичної прогресії достатньо знати:
1) два послідовні члени прогресії;
2) два перші члени прогресії?

511'. Чи правильно, що арифметична прогресія може мати:
1) скінченну кількість членів;
2) нескінченну кількість членів?
Наведіть приклади.

512'. Виберіть формулу для знаходження n-го члена арифметичної прогресії:
1) $a_n = a_1 + nd$;
2) $a_n = a_1 - nd$;
3) $a_n = a_1 + (n - 1)d$;
4) $a_n = a_1 - (n - 1)d$.

513'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 й a_n:
1) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{n} \cdot 2$;
2) $S_n = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$;
3) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{n - 1} \cdot n$;
4) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

514'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d:
1) $S_n = \dfrac{2a_1 + nd}{2} \cdot n$;
2) $S_n = \dfrac{a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$;
3) $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{n} \cdot 2$;
4) $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

515°. Чи є арифметичною прогресією послідовність:
1) 3; 6; 9; ...;
2) 4; 8; 16; ...;
3) –12; 0; 12; ...;
4) 50; 45; 40; ...?
Для арифметичної прогресії назвіть її перший член і різницю.

516°. Запишіть перші п'ять членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 5$ і $d = 8$;
2) $a_1 = 10$ і $d = -7$;
3) $a_1 = 0{,}2$ і $d = 5$;
4) $a_1 = 4{,}5$ і $d = -2$;
5) $a_1 = -1{,}5$ і $d = -0{,}4$;
6) $a_1 = \frac{5}{7}$ і $d = -\frac{3}{14}$.

517°. Запишіть перші п'ять членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 12$ і $d = 8$;
2) $a_1 = -5$ і $d = 15$;
3) $a_1 = 7{,}5$ і $d = -2{,}5$;
4) $a_1 = \frac{5}{6}$ і $d = \frac{1}{12}$.

518°. Послідовність (b_n) — арифметична прогресія, перший член якої дорівнює b_1, а різниця — d. Виразіть через b_1 і d:

1) b_{12};
2) b_{25};
3) b_{103};
4) b_{301};
5) b_k;
6) b_{k+2}.

519°. Послідовність (c_n) — арифметична прогресія, перший член якої дорівнює c_1, а різниця — d. Виразіть через c_1 і d:

1) c_{17}; 2) c_{51}; 3) c_{225}; 4) c_{k-3}.

520°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть:

1) a_{11}, якщо $a_1 = 15$ і $d = 6$;
2) a_{36}, якщо $a_1 = -8$ і $d = 12$;
3) a_{51}, якщо $a_1 = 3{,}4$ і $d = 1{,}6$;
4) a_{101}, якщо $a_1 = -2{,}1$ і $d = -1{,}5$;
5) a_{25}, якщо $a_1 = -10$ і $d = \frac{2}{5}$;
6) a_{257}, якщо $a_1 = -5{,}4$ і $d = -\frac{3}{16}$.

521°. Послідовність (b_n) — арифметична прогресія. Знайдіть:

1) b_{16}, якщо $b_1 = 9$ і $d = 22$;
2) b_{106}, якщо $b_1 = -24$ і $d = 8$;
3) b_{75}, якщо $b_1 = 12$ і $d = -0{,}5$;
4) b_{125}, якщо $b_1 = -20$ і $d = -\frac{5}{6}$.

522°. Знайдіть 48-й і n-й члени арифметичної прогресії:

1) (a_n): 18; 27; ...;
2) (b_n): 5,4; 7; ...;
3) (c_n): $-\frac{2}{15}$; $\frac{6}{15}$; ...;
4) (m_n): $-15{,}2$; $-10{,}1$; ... .

523°. Знайдіть 31-й і n-й члени арифметичної прогресії:
1) (a_n): -6; 12; ...; 2) (b_n): 5; $2{,}5$; ... .

524°. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_{16} = 5$ і $d = -3$; 3) $b_{13} = 1$ і $d = -\dfrac{1}{4}$;
2) $b_{29} = 490$ і $d = 18$; 4) $b_{43} = -10$ і $d = -0{,}2$.

525°. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) $a_{11} = 110$ і $d = -10$; 2) $a_{49} = 49$ і $d = -0{,}5$.

526°. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) $a_1 = 7$ і $a_{16} = 67$; 3) $a_1 = 0{,}5$ і $a_7 = 6{,}5$;
2) $a_1 = -4$ і $a_9 = 0$; 4) $a_1 = -10$ і $a_{31} = -20$.

527°. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 3$ і $b_{25} = 45$; 2) $b_1 = -14$ і $b_{17} = -9{,}2$.

528°. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d, якщо:
1) $a_5 = 15$ і $a_7 = 27$; 3) $a_2 = -7$ і $a_7 = 18$;
2) $a_{11} = -15$ і $a_{13} = -7$; 4) $a_4 = 14$ і $a_9 = 1$.

529°. Послідовність (b_n) — арифметична прогресія. Знайдіть b_1 і d, якщо:
1) $b_3 = 32$ і $b_5 = 44$; 2) $b_4 = -16$ і $b_7 = 8$.

530°. Знайдіть суму п'ятдесяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) $a_1 = 20$ і $a_{50} = 200$; 2) $a_1 = -45{,}2$ і $a_{50} = -8{,}8$.

531°. Знайдіть суму сорока перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 45$ і $a_{40} = -15$.

532°. Знайдіть суму вісімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (b_n), якщо:
1) (b_n): 38; 35; 32; ...; 2) (b_n): -16; -10; -4; ... .

533°. Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо (a_n): 10; 13; 16; ... .

534. З'ясуйте, чи є членом арифметичної прогресії (a_n): -20, -9, 2, ... число:
1) 101; 2) 144.

535. З'ясуйте, чи є членом арифметичної прогресії (b_n): 44, 38, 32, ... число:
1) -22; 2) -42.

536. Скільки додатних членів має арифметична прогресія:
1) (b_n): $4{,}4$; $4{,}2$; 4; ... ; 2) (a_n): $20\frac{1}{4}$; $19\frac{3}{4}$; $19\frac{1}{4}$; ...?

537. Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія:

1) (a_n): $-38; -36; -34; \dots$; 2) (b_n): -9 ; $-8\frac{1}{2}$; -8 ; ...?

538. Між числами 12 і 36 уставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

539. Між числами -45 і 9 уставте сім таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

540. Між числами 2 і 42 вставте чотири такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

541. Знайдіть перший член b_1 і різницю d арифметичної прогресії (b_n), якщо:

1) $\begin{cases} b_1 + b_7 = 42, \\ b_{10} - b_3 = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b_1 + b_6 = 10, \\ b_2 \cdot b_8 = -23. \end{cases}$

542. Знайдіть перший член a_1 та різницю d арифметичної прогресії (a_n), якщо $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8, \\ a_2 \cdot a_7 = 75. \end{cases}$

543. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 1$; $a_n = 20$; $n = 50$; 3) $a_1 = 0{,}5$; $a_n = 25{,}5$; $n = 11$;
2) $a_1 = -1$; $a_n = -40$; $n = 20$; 4) $a_1 = -38$; $a_n = -10$; $n = 15$.

544. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 0$; $b_n = 5$; $n = 11$; 2) $b_1 = -2$; $b_n = -60$; $n = 10$.

545. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (b_n):

1) (b_n): 9; 13; 17; ...; $n = 11$;
3) (b_n): -9; $-8{,}5$; -8; ...; $n = 25$;
2) (b_n): -3; 4; 11; ...; $n = 13$;
4) (b_n): $\frac{1}{3}$; 1; $1\frac{2}{3}$; ...; $n = 36$.

546. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n):

1) (a_n): 5; 9; 13; ...; $n = 16$; 2) (a_n): $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{6}$; ...; $n = 31$.

547. Арифметичну прогресію задано формулою n-го члена. Знайдіть:

1) S_{20}, якщо $a_n = 4n + 5$; 2) S_{12}, якщо $a_n = -2{,}7n + 0{,}7$.

548. Арифметичну прогресію задано формулою n-го члена. Знайдіть S_{25}, якщо $b_n = 12n - 2$.

549. Знайдіть суму:
1) усіх натуральних чисел, що не перевищують 200;
2) усіх парних чисел, що не перевищують 500;
3) усіх натуральних чисел від 15 до 150.

550. Знайдіть суму:
1) усіх натуральних чисел, що не перевищують 180;
2) усіх натуральних чисел від 20 до 120.

551. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d, якщо:
1) $a_7 = 21$ і $S_7 = 315$; 2) $a_{11} = 131$ і $S_{11} = 1221$.

552. Послідовність (b_n) — арифметична прогресія. Знайдіть b_1 і d, якщо $b_8 = -7$ і $S_8 = 28$.

553. Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_1 і d, якщо:
1) $S_4 = 32$ і $S_6 = 60$;
2) $S_5 = 45$ і $S_{12} = -18$.

554. Послідовність (b_n) — арифметична прогресія. Знайдіть b_1 і d, якщо $S_5 = 65$ і $S_{10} = 380$.

555*. Сума чотирьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох наступних — 120. Знайдіть перший член і різницю цієї прогресії.

556*. Три числа утворюють арифметичну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 21, а сума їх квадратів дорівнює 197. Знайдіть два наступні члени цієї прогресії.

557*. Знайдіть суму:
1) усіх натуральних чисел, кратних числу 3, що не перевищують число 360;
2) усіх непарних чисел від 35 до 350.

558*. В арифметичній прогресії $c_2 + c_7 = 7$ і $c_6 + c_8 = 22$. Знайдіть $c_3 + c_7$.

559*. Розв'яжіть рівняння:
1) $2 + 6 + 10 + \ldots + x = 288$;
2) $5 + 12 + 19 + y = 2225$;
3) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$;
4) $(y + 248) + (y + 243) + (y + 238) + \ldots + (y + 3) = 6225$.

560*. Доведіть, що суми пар членів арифметичної прогресії рівні, якщо рівні суми їхніх номерів.

Проявіть компетентність

561. Петрик грався в кубики. Спочатку він складав з кубиків «драбинку», як показано на малюнку 161.

Мал. 161

1. Скільки кубиків використав Петрик, якщо для побудови останнього стовпчика йому знадобилося 6 кубиків?
2. Скільки сходинок на такій «драбинці»?
3. Скільки сходинок буде на «драбинці», якщо Петрик використає 36 кубиків?

Після цього Петрик почав складати кубики «сходинками» так, як показано на малюнку 162.

Мал. 162

4. Скільки кубиків йому знадобиться, щоб побудувати «драбинку» на 12 сходинок?
5. Зі скількох сходинок складається «драбинка», у якій 120 кубиків?

Катруся, молодша сестричка Петрика, будувала «драбинку», як показано на малюнку 163.

Мал. 163

6. Скільки кубиків їй знадобиться, щоб побудувати «драбинку» на 5 сходинок?
7. Зі скількох сходинок складається «драбинка», у якій 49 кубиків?

Задачі на повторення

562. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$;

2) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+6x-7}$.

563. Сума двох чисел дорівнює 15, а їх різниця — 5. Знайдіть ці числа.

564. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a}{b-a}-\dfrac{a}{b+a}\right)\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2a^2}$;

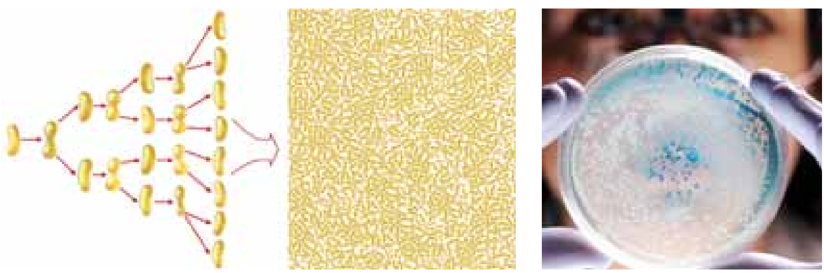
2) $(1-a^2)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a-1}\right)$.

§ 14 Геометрична прогресія

1. ПОНЯТТЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Ви уже знаєте, що таке арифметична прогресія, умієте задавати її за допомогою першого члена й різниці, використовуєте формули для знаходження її елементів. Проте існує ще одна прогресія. Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Бактерії (*bacteria* від давньогрецького *βακτήριον* — паличка) є однією з основних груп живих організмів. Вони присутні у ґрунті, воді, повітрі та як симбіонти в інших організмах. У сприятливих умовах бактерії розмножуються так, що протягом визначеного часу кожна з них ділиться на дві (мал. 164).



Мал. 164

Для виконання проекту з біології Дарина досліджує певний вид бактерій, кількість яких протягом однієї хвилини подвоюється. У чашку Петрі помістили 100 бактерій. Скільки бактерій стане в чашці через 5 хв?

Урахуємо, що протягом однієї хвилини кількість бактерій подвоюється. Тоді, якщо в чашку помістили 100 бактерій, то:

$100 \cdot 2 = 200$ (бактерій) — через 1 хв;

$200 \cdot 2 = 400$ (бактерій) — через 2 хв;

$400 \cdot 2 = 800$ (бактерій) — через 3 хв;

$800 \cdot 2 = 1600$ (бактерій) — через 4 хв;

$1600 \cdot 2 = 3200$ (бактерій) — через 5 хв.

Одержимо послідовність чисел, яка показує кількість бактерій у чашці Петрі від початку досліду до кінця п'ятої хвилини:

100, 200, 400, 800, 1600, 3200.

Кожний член цієї послідовності, починаючи з другого, одержується шляхом множення попереднього члена на 2. Така послідовність є прикладом *геометричної прогресії*, яка має скінченну кількість членів.

Послідовність можна було б продовжити, якби Дарина продовжила дослідження:

100, 200, 400, 800, 1600, 3200, 6400, 12800, ...

Така послідовність є прикладом *нескінченної геометричної прогресії*.

Означення геометричної прогресії

Геометричною прогресією **називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.**

Тобто послідовність (b_n) — геометрична прогресія, якщо для будь-якого натурального числа n виконується умова: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, де q — деяке число.

З означення геометричної прогресії випливає, що відношення будь-якого її члена, починаючи з другого, до попереднього члена дорівнює q, тобто виконується рівність: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q називають *знаменником геометричної прогресії*.

Як задати геометричну прогресію? Щоб задати геометричну прогресію, достатньо задати її перший член і знаменник, а потім скористатись означенням.

Наведемо приклади.

Якщо $b_1 = 1$, $q = 5$, то одержимо геометричну прогресію:

$$1, 5, 25, 125, \ldots .$$

Якщо $b_1 = 2$, $q = -3$, то одержимо геометричну прогресію:

$$2, -6, 18, -54, \ldots .$$

Якщо $b_1 = -10$, $q = -1$, то одержимо геометричну прогресію:

$$-10, 10, -10, 10, \ldots .$$

За допомогою рівності $b_{n+1} = b_n \cdot q$ можна визначити будь-який член геометричної прогресії через попередній її член, проте, як і для арифметичної прогресії, можна застосовувати формулу n-го члена.

2. ФОРМУЛА n-ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Для знаходження будь-якого члена геометричної прогресії існує спеціальна формула. Виведемо її.

За означенням геометричної прогресії:

$b_2 = b_1 \cdot q$;

$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$;

$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$;

$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4$ ... .

Простежується закономірність: щоб знайти n-й член прогресії, потрібно перший її член помножити на число q в $(n-1)$-му степені, тобто $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула n-го члена геометричної прогресії

Нехай (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q. Тоді формула n-го члена має вигляд:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Формулу n-го члена геометричної прогресії використовують під час розв'язування задач.

Задача 1. Послідовність (a_n) — геометрична прогресія, $a_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$.

Знайдіть a_6.

Розв'язання. Застосуємо формулу n-го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Задача 2. Знайдіть третій член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 1$ і $b_4 = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. За формулою n-го члена геометричної прогресії маємо: $b_2 = b_1 \cdot q$ і $b_4 = b_1 \cdot q^3$.

Оскільки, за умовою, обидві вимоги мають виконуватись одночасно, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_2 = b_1 \cdot q, \\ b_4 = b_1 \cdot q^3. \end{cases}$$

Підставивши замість b_2 і b_4 їхні значення, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = b_1 \cdot q, \\ \frac{1}{4} = b_1 \cdot q^3. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо: $q^2 = \frac{1}{4}$. Отже, $q = \pm\frac{1}{2}$. Відповідно $b_1 = \pm 2$. Тобто існують дві прогресії, що задовольняють умову задачі. Тоді:

якщо $b_1 = 2$ і $q = \frac{1}{2}$, то $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

якщо $b_1 = -2$ і $q = -\frac{1}{2}$, то $b_3 = b_1 \cdot q^2 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Отже, задача має два розв'язки: $b_3 = \frac{1}{2}$ або $b_3 = -\frac{1}{2}$.

? Чи можна формулу n-го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ подати в інший спосіб? Так. Наприклад, виконавши певні перетворення цієї формули, одержимо:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^n \cdot \frac{1}{q} = \left(b_1 \cdot \frac{1}{q}\right) \cdot q^n.$$

Якщо добуток чисел $b_1 \cdot \frac{1}{q}$ позначити k, то формула n-го члена набуде вигляду: $b_n = k \cdot q^n$.

3. ВЛАСТИВІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Свою назву геометрична прогресія одержала через властивість, яка виконується для всіх її членів, крім першого.

Властивість геометричної прогресії

Якщо всі члени геометричної прогресії додатні, то будь-який її член, крім першого, є *середнім геометричним* попереднього та наступного членів, тобто:

$$\boldsymbol{b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}, \text{ де } n = 2, 3, \ldots .$$

Цю властивість використовують для розв'язування задач. Наприклад, у задачі 2 можна було б знайти b_3 як середнє геометричне його сусідів $b_2 = 1$ і $b_4 = \frac{1}{4}$, тобто:

$$b_3 = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}.$$

4. ФОРМУЛА СУМИ n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

Для геометричної прогресії, як і для арифметичної, є формули для знаходження суми n перших членів.

Формула суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і b_n

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \text{ де } q \neq 1.$$

Виведемо цю формулу.

Розглянемо геометричну прогресію (b_n). Суму n перших членів цієї прогресії можна записати так:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n.$$

Помножимо обидві частини рівності на $q \neq 0$:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

За формулою n-го члена геометричної прогресії замінимо всі доданки рівності, крім останнього:

$$b_1 \cdot q = b_2,\ b_2 \cdot q = b_3,\ b_3 \cdot q = b_4,\ \ldots,\ b_{n-1} \cdot q = b_n.$$

Одержимо:

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q.$$

Знайдемо різницю $S_n q - S_n$:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q) -$$
$$- (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n) = -b_1 + b_n q.$$

Звідси $S_n q - S_n = b_n q - b_1$, $S_n(q - 1) = b_n q - b_1$, $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ за умови, що $q \neq 1$.

Якщо задані перший член геометричної прогресії та її знаменник, то зручніше використовувати формулу суми n перших членів, записану в іншому вигляді. Для цього застосуємо формулу n-го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 q^{n-1} q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \left(q^n - 1\right)}{q - 1}.$$

Формула суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою:

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}, \text{ де } q \neq 1.$$

Задача 3. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, $b_1 = 27$, $q = \frac{1}{3}$. Знайдіть. S_5.

Розв'язання. Задачу можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1. Застосуємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і b_n, а саме: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$.

Спочатку знайдемо b_5 за формулою n-го члена геометричної прогресії: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 3^3 \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3}$.

$$S_5 = \frac{b_5 \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 27}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{9} - 27}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{242}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{121}{3} = 40\frac{1}{3}.$$

Спосіб 2. Застосуємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q, а саме: $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$:

$$S_5 = \frac{27 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{27 \cdot \left(\frac{1}{243} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot \left(-\frac{242}{243}\right)}{-\frac{2}{3}} = 40\frac{1}{3}.$$

Дізнайтеся більше

1. Міхаель Штифель (близько 1487, Есслінгені-на-Неккарі — 19 квітня 1567, Єна) — німецький математик, який залишив помітний слід у розвитку алгебри. Його головна праця *Arithmetica integra* (Нюрнберг, 1544) містить розділ, у якому розглядаються


Міхаель Штифель

прогресії та послідовності. У цій же книзі він уперше висловив ідею: зіставити геометричну й арифметичну прогресії. У подальшому розвиток цієї ідеї привів до розробки логарифмів, з якими ви ознайомитеся пізніше.

2. За легендою, колись творець шахів — винахідник на ім'я Сета показав свій винахід індійському цареві Шераму. Царю так сподобалася гра, що він надав винахіднику право самому обирати винагороду. Сета попросив царя видати йому за першу клітку шахівниці 1 зернину пшениці (за іншою версією — рису), за другу — 2 зернини, за третю — 4 зернини і т. д., подвоюючи кількість зернин на кожній наступній клітці. Цар, який не розбирався в математиці, швидко погодився, навіть дещо образившись на таку невисоку оцінку винаходу. Він наказав скарбнику підрахувати й видати винахідникові потрібну кількість зерна. Однак, коли через тиждень скарбник усе ще не зміг підрахувати, скільки потрібно зернин, він пояснив цареві причину такої затримки. За розрахунками, число зернин становить 18 446 744 073 709 551 615. Тому розплатитися неможливо, хіба тільки осушити моря й океани та засіяти весь простір пшеницею. В одиницях маси: якщо прийняти, що одне зернятко пшениці має масу 0,065 г, тоді загальна маса пшениці на шахівниці становитиме 1200 мільярдів тонн, або 1,2 трильйони тонн пшениці.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте означення геометричної прогресії. Наведіть приклади геометричної прогресії.
2. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії.
3. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
4. Запишіть формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і b_n.
5. Запишіть формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q.

Розв'яжіть задачі

565'. Чи правильно Петро сформулював означення: «Геометричною прогресією називається послідовність, кожний член якої дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число»?

566'. Чи правильно, що для задання геометричної прогресії достатньо знати:
1) два послідовні члени прогресії;
2) два перші члени прогресії?

567'. Чи правильно, що геометрична прогресія може мати:
1) скінченну кількість членів;
2) нескінченну кількість членів?
Наведіть приклади.

568'. Виберіть формулу для знаходження n-го члена геометричної прогресії:
1) $b_n = b_1 \cdot q^{n+1}$;
2) $b_n = b_1 \cdot q^n$;
3) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;
4) $b_n = b_1 + q^{n-1}$.

569'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і b_n:
1) $S_n = \dfrac{b_1 q - b_n}{1-q}$;
2) $S_n = \dfrac{b_1 q - b_n}{q-1}$;
3) $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$;
4) $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{1-q}$.

570'. Виберіть формулу для знаходження суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q:
1) $S_n = \dfrac{b_1\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}$;
2) $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-n\right)}{q-1}$;
3) $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{1-q}$;
4) $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

571°. Чи є геометричною прогресією послідовність:
1) 3; 6; 12; ...;
2) 4; 8; 12; ...;
3) –12; 12; –12; ...;
4) 48; 24; 12; ...?
Для геометричної прогресії назвіть її перший член і знаменник.

572°. Запишіть перші чотири члени геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 5$ і $q = 2$;
2) $b_1 = 10$ і $q = -3$;
3) $b_1 = -12$ і $q = -2$;
4) $b_1 = -4$ і $q = 0{,}5$;
5) $b_1 = 20$ і $q = \dfrac{1}{2}$;
6) $b_1 = 3{,}6$ і $q = -\dfrac{1}{3}$.

573°. Запишіть перші п'ять членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 5$ і $q = 3$;
2) $b_1 = -10$ і $q = 2$;
3) $b_1 = 2{,}5$ і $q = \frac{1}{5}$;
4) $b_1 = 4{,}8$ і $q = -\frac{1}{2}$.

574°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, перший член якої дорівнює b_1, а знаменник — q. Виразіть через b_1 і q:

1) b_8;
2) b_{12};
3) b_{52};
4) b_{200};
5) b_k;
6) b_{k+2}.

575°. Послідовність (c_n) — геометрична прогресія, перший член якої дорівнює c_1, а знаменник — q. Виразіть через c_1 і q:

1) c_{15};
2) c_{26};
3) c_{111};
4) c_{k+1}.

576°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_4, якщо $b_1 = 3$ і $q = 10$;
2) b_7, якщо $b_1 = -4$ і $q = \frac{1}{2}$;
3) b_5, якщо $b_1 = 1$ і $q = -2$;
4) b_6, якщо $b_1 = -3$ і $q = -\frac{1}{3}$;
5) b_9, якщо $b_1 = -14$ і $q = -1$;
6) b_7, якщо $b_1 = 27$ і $q = \sqrt{3}$.

577°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_4, якщо $b_1 = 32$ і $q = \frac{1}{2}$;
2) b_6, якщо $b_1 = -24$ і $q = 2$;
3) b_5, якщо $b_1 = 27$ і $q = -\frac{1}{3}$;
4) b_9, якщо $b_1 = -20$ і $q = 1$.

578°. Знайдіть 6-й і n-й члени геометричної прогресії:

1) (a_n): 1; 3; ...;
2) (b_n): −5; 10; ...;
3) (c_n): $\frac{2}{7}$; −2; ...;
4) (m_n): −16; −4; ....

579°. Знайдіть 5-й і n-й члени геометричної прогресії:

1) (a_n): 6; 12; ...;
2) (b_n): 44; −22; ....

580°. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_5 = 16$ і $q = -2$;
2) $b_7 = 1024$ і $q = 4$;
3) $b_{10} = 7$ і $q = 0{,}5$;
4) $b_6 = 3125$ і $q = -2\frac{1}{2}$.

581°. Знайдіть перший член геометричної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_5 = 20\,000$ і $q = -10$;
2) $a_6 = 0{,}32$ і $q = 0{,}2$.

582°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 6$ і $a_3 = 54$;
2) $a_1 = 125$ і $a_4 = 1$;
3) $a_1 = -\frac{2}{9}$ і $a_3 = -2$;
4) $a_1 = -0{,}1$ і $a_6 = -10\,000$.

583°. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 3$ і $b_4 = -81$;
2) $b_1 = 80$ і $b_5 = 5$.

584°. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо:

1) $b_3 = 16$ і $b_5 = 256$;
2) $b_4 = -2$ і $b_6 = -18$;
3) $b_2 = \frac{1}{2}$ і $b_7 = 16$;
4) $b_3 = -27$ і $b_6 = -1$.

585°. Послідовність (a_n) — геометрична прогресія. Знайдіть a_1 і q, якщо:
1) $a_2 = 6$ і $a_4 = 54$;
2) $a_3 = -3$ і $a_6 = -81$.

586°. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 5$ і $b_6 = 160$;
2) $b_1 = -0{,}6$ і $b_5 = -48{,}6$.

587°. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 1$ і $a_4 = -27$.

588°. Знайдіть суму восьми перших членів геометричної прогресії (a_n), якщо:
1) (a_n): 2; 6; 18; ...;
2) (a_n): −16; 8; −4; ... .

589°. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо (b_n): −2; 4; −8; ... .

590. З'ясуйте, чи є членом геометричної прогресії (b_n): 150, 30, 6, ... число:

1) 1,2;
2) $\frac{4}{25}$.

591. З'ясуйте, чи є членом геометричної прогресії (b_n): 3, 21, 147, ... число: 1) 1029; 2) 7200.

592. Між числами 9 і 243 вставте два такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

593. Між числами 160 і 10 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

594. Між числами 2 і 512 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію.

595. Знайдіть перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії, якщо:

1) $\begin{cases} b_7 - b_5 = 48, \\ b_5 + b_6 = 48; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b_2 \cdot b_3 = -72, \\ b_1 \cdot b_2 = -18. \end{cases}$

596. Знайдіть перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії, якщо $\begin{cases} b_2 \cdot b_6 = 4, \\ b_1 \cdot b_4 = 32. \end{cases}$

597. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 1$; $a_n = 81$; $n = 5$; 3) $a_1 = 0,5$; $a_n = 62,5$; $n = 4$;

2) $a_1 = -1$; $a_n = 128$; $n = 8$; 4) $a_1 = -250$; $a_n = \frac{2}{25}$; $n = 6$.

598. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = \frac{1}{4}$; $b_n = 64$; $n = 5$; 2) $b_1 = -0,2$; $b_n = 25$; $n = 4$.

599. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n):

1) (b_n): 9; 18; 3; ..., якщо $n = 8$;

2) (b_n): 5; –10; 20; ..., якщо $n = 7$;

3) (b_n): $-\frac{2}{3}$; 2; –6; ..., якщо $n = 4$;

4) (b_n): $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; ..., якщо $n = 5$.

600. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії:

1) (a_n): 2; 6; 18; ..., якщо $n = 5$;

2) (a_n): 64; –32; 16; ..., якщо $n = 6$.

601. Геометричну прогресію задано формулою n-го члена. Знайдіть:

1) S_8, якщо $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) S_5, якщо $b_n = 5^{n-2}$.

602. Геометричну прогресію задано формулою n-го члена. Знайдіть S_6, якщо $b_n = -3 \cdot 2^{n+1}$.

603. Знайдіть суму:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 1024$; 3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{729}$.

2) $5 - 15 + 45 - ... + 405$;

604. Знайдіть суму:

1) $1 - 2 + 4 - ... + 256$; 2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{512}$.

605. Послідовність (c_n) — геометрична прогресія. Знайдіть c_1 і q, якщо: 1) $c_3 = 20$ і $S_3 = 35$; 2) $c_8 = -4$ і $S_8 = 340$.

606. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо $b_3 = 45$ і $S_3 = 65$.

607. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо: 1) $S_4 = 30$ і $S_6 = 126$; 2) $S_3 = 7$ і $S_6 = -182$.

608. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть b_1 і q, якщо $S_3 = 49$ і $S_5 = 217$.

609*. Знайдіть чотири перші члени геометричної прогресії, якщо сума крайніх із цих членів дорівнює 27, а сума середніх — 18.

610*. Між числами 0,5 і 128 вставте три такі числа, щоб одержати п'ять послідовних членів геометричної прогресії.

611*. У геометричній прогресії $c_3 \cdot c_5 = 72$. Знайдіть $c_1 \cdot c_7$.

612*. Три числа утворюють геометричну прогресію. Сума цих чисел дорівнює 63, а сума їх квадратів дорівнює 1701. Знайдіть два наступні члени цієї прогресії.

613*. Сума перших трьох членів спадної геометричної прогресії дорівнює 14, а сума їх квадратів дорівнює 84. Знайдіть три наступні члени цієї прогресії.

614*. Знайдіть чотири додатні числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три — геометричну прогресію, якщо сума перших трьох чисел дорівнює 12, а сума останніх трьох дорівнює 19.

615*. Сума трьох додатних чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 15. Якщо до цих чисел відповідно додати 1, 4 і 19, то нові три числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

Проявіть компетентність

616. Компанія «Перспектива» у 2012 році почала інвестувати свої кошти в будівництво на території міста дитячих спортивних майданчиків, маючи капітал 50 000 грн. Кожного року, починаючи з 2013 року, компанія одержувала прибуток, що становив 20 % капіталу попереднього року. У 2014 році «Перспектива» розширила свої інвестиції та вклала

100 000 грн у створення велотреку за містом. Починаючи з 2015 року, прибуток за цією інвестицією становив 40 % попереднього капіталу.

1. Який прибуток одержала компанія за першу інвестицію на кінець 2017 року, якщо прибуток з обороту не вилучали?
2. Яка з інвестицій була більш прибутковою?

617. Дріжджі належать до групи одноклітинних грибів, яка об'єднує близько 1500 видів. Деякі з їх видів використовують у домашньому господарстві або промисловості, наприклад, для приготування хліба чи напоїв. Зростання дріжджових клітин відбувається поділом кожної клітини на дві частини.

1. У чашку Петрі помістили одну дріжджову клітину. Скільки клітин будуть міститися в чашці після їх п'ятикратного поділу?
2. Скільки дріжджових клітин будуть у чашці Петрі після їх десятикратного поділу, якщо спочатку було 6 клітин?
3. Скільки дріжджових клітин було спочатку, якщо після шестикратного поділу їх стало 320?

Задачі на повторення

618. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x - 3y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 3xy - y^2 = 20. \end{cases}$

619. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+1}{6} - \dfrac{20}{1-x} = 4$; 2) $\dfrac{12}{x-1} - 1 = \dfrac{8}{x+1}$.

620. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2 - 4\sqrt{5}$; 3) $\left(5+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt{108} - \left(3\sqrt{6} + 2\sqrt{8} - \sqrt{32}\right)$; 4) $\dfrac{5}{3-\sqrt{2}} + \dfrac{5}{3+\sqrt{2}}$.

621. Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 20, а їх середнє геометричне — 12. Знайдіть ці числа.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Контрольні запитання

1. Що таке числова послідовність? Наведіть приклади.
2. Як позначають числову послідовність?
3. Як називають числа числової послідовності? Як називають a_1; a_2; a_3; a_n?
4. Як задають числову послідовність?
5. Як задати послідовність за допомогою формули n-го члена?
6. Як задати послідовність за допомогою рекурентної формули?
7. Сформулюйте означення арифметичної прогресії. Наведіть приклади.
8. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.
9. Сформулюйте властивість арифметичної прогресії.
10. Запишіть формулу суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і a_n; через a_1 і d.
11. Сформулюйте означення геометричної прогресії. Наведіть приклади.
12. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії.
13. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.
14. Запишіть формулу суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і b_n; через b_1 і q.

Тестові завдання

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Знайдіть п'ятий член послідовності $x_n = 2n^2 - 1$.

А. 51.
Б. 49.
В. 11.
Г. 9.

2° Послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть a_{16}, якщо $a_1 = 8$ і $d = -5$.

А. 88.
Б. −72.
В. 67.
Г. −67.

3° Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = 96$ і $q = -2$.

А. −4.
Б. −3.
В. 4.
Г. 3.

4 Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n): 5; 12; 19; ... .

А. 432.
Б. 216.
В. 244.
Г. 236.

5* Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть S_5, якщо $b_3 = -12$ і $b_6 = 96$.

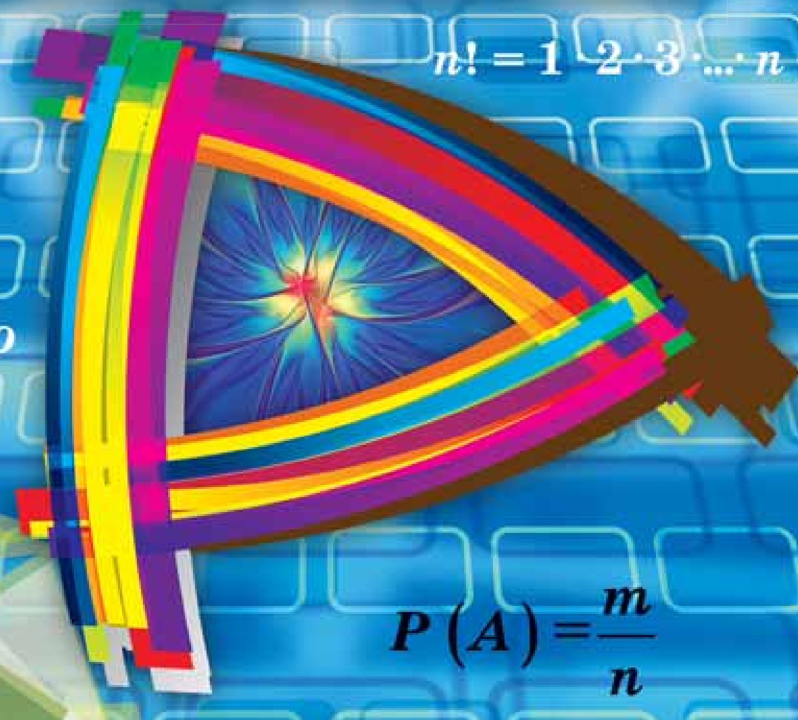
А. 63.
Б. −33.
В. 33.
Г. 15.

Розділ 4

Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики

У розділі дізнаєтеся:

- про комбінаторику та її основні задачі;
- як знаходити кількість варіантів комбінування деяких предметів;
- що таке випадкова подія, її частота та ймовірність;
- як обчислити частоту та ймовірність випадкової події;
- що вивчає статистика;
- про способи подання статистичних даних;
- як застосовувати вивчений матеріал на практиці



§ 15 Основні правила комбінаторики

У зв'язку з потребою організації побуту, побудови оптимальних планів виробництва, транспортування тощо виникають задачі, у яких доводиться шукати відповідь на запитання «Скільки різних комбінацій, які задовольняють певну умову, можна утворити з даної множини елементів?» Задачі з такими запитаннями називають *комбінаторними*. В основі розв'язування багатьох задач комбінаторики лежать два правила — правило додавання та правило множення.

1. ПРАВИЛО ДОДАВАННЯ

Задача 1. Ірина вирішила купити або морозиво, або тістечко. У магазині морозиво було трьох видів, а тістечка — п'яти видів. Скількома способами Іринка може вибрати або одне морозиво, або одне тістечко?

Розв'язання. Одне морозиво можна вибрати 3 способами, а одне тістечко — 5 способами. Оскільки Іринка обирає або морозиво, або тістечко, то всього в неї $3 + 5 = 8$ (способів).

Задача 2. У ящику є 10 білих, 7 чорних і 3 червоні кульки. Скількома способами можна вибрати: 1) або одну чорну кульку, або одну білу кульку; 2) або одну чорну кульку, або одну червону кульку?

Розв'язання. 1. Білу кульку можна вибрати 10 способами, а чорну кульку — 7 способами. Оскільки треба вибрати або чорну кульку, або білу кульку, то це можна зробити $7 + 10 = 17$ (способами).

2. Чорну кульку можна вибрати 7 способами, а червону кульку — 3 способами. Оскільки треба вибрати або чорну кульку, або червону кульку, то це можна зробити $7 + 3 = 10$ (способами).

Під час розв'язування задач 1 і 2 ми скористалися правилом додавання.

Правило додавання (для комбінаторних задач). Якщо деякий об'єкт A можна вибрати з даної сукупності об'єктів n способами, а об'єкт B можна вибрати m способами, то вибрати **або** об'єкт A, **або** об'єкт B можна $n + m$ способами.

Зауважимо: множини об'єктів A і B не перетинаються.

Під об'єктами розуміють будь-які предмети чи живі істоти. Важливо тільки те, що їх можна перерахувати.

? Чи можна правило додавання застосувати до більшої кількості об'єктів? Так.

Якщо об'єкти $A_1, A_2, \ldots A_m$ можна вибрати з даної множини об'єктів відповідно $n_1, n_2, \ldots n_m$ способами, то вибрати **або** об'єкт $A_1, \ldots,$ **або** об'єкт A_m можна $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ способами.

2. ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ

Задача 3. Ольга вирішила у вихідний відвідати спочатку одну із двох вистав, а потім подивитися один із чотирьох кінофільмів. Скількома способами Ольга може спланувати свій вихідний?

Розв'язання. Виставу можна вибрати 2 способами, а кінофільм — 4 способами. Якщо Ольга спочатку відвідає першу виставу, то кінофільм вона може обрати одним із чотирьох способів, тобто має 4 варіанти планування свого вихідного. Якщо ж Ольга спочатку відвідає другу виставу, то кінофільм вона зможе обрати також одним із чотирьох способів. У цьому разі Ольга матиме також 4 варіанти планування свого вихідного. Загалом у неї $2 \cdot 4 = 8$ (способів) планування вихідного.

Сформулюємо загальне правило.

Правило множення (для комбінаторних задач). Якщо деякий об'єкт A можна вибрати з даної сукупності об'єктів n способами й після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати m способами, то вибрати пару (A, B) у вказаному порядку можна $n \cdot m$ способами.

? Чи можна правило множення застосувати до більшої кількості об'єктів? Так.

Задача 4. Скількома способами можна скласти трицифрове число із цифр 1, 2, 5?

Розв'язання. Цифра 1 може бути або першою цифрою шуканого числа, або другою, або третьою. Маємо три способи її розміщення в записі числа. Для цифри 2, як і для цифри 5, маємо також по три способи розміщення в записі числа, оскільки цифри в записі числа можуть повторюватися. Отже, одержуємо $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ трицифрових чисел, які можна скласти із заданих цифр.

Як зміниться результат цієї задачі, якщо додати умову, що всі цифри числа різні? Поміркуємо.

Задача 5. Скількома способами можна скласти трицифрове число із цифр 1, 2, 5 за умови, що цифри в числі є різними?

Розв'язання. Цифра 1 може бути або першою цифрою шуканого числа, або другою, або третьою. Маємо три способи її розміщення в записі числа. Для цифри 2 маємо вже два способи її розміщення в записі числа. Для цифри 5 залишається тільки одне вільне місце в записі трицифрового числа. Зрештою одержуємо: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Отже, із заданих цифр трицифрове число, у якому цифри не повторюються, можна скласти шістьма способами.

Зверніть увагу:
якщо об'єкти $A_1, A_2, \dots A_m$ можна вибрати з даної множини об'єктів відповідно й послідовно $n_1, n_2, \dots n_m$ способами, тоді вибрати набір об'єктів $(A_1, \dots, A_m)$ можна $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ способами.

Якщо кількість шуканих способів комбінування об'єктів невелика, то їх можна виписати методом перебору. Щоб перебрати всі шукані способи й не загубити якийсь із них, варто записувати проміжні результати в таблиці або можна створити дерево можливих варіантів.

Випишемо для прикладу всі шукані числа для задачі 5.

Перший спосіб. Заповнимо таблицю 21. У першому стовпчику таблиці виписуватимемо числа, перша цифра яких 1, у другому — числа, перша цифра яких 2, і в третьому — числа, перша цифра яких 5.

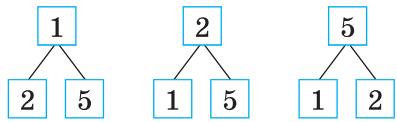
Таблиця 21

125	251	512
152	215	521

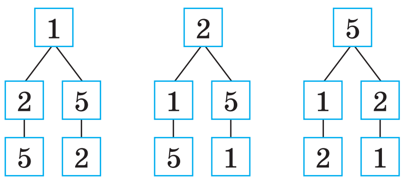
Одержали 6 різних чисел.

Другий спосіб. Дерево можливих варіантів — це схема, яка допомагає виявити всі можливі способи комбінування заданих елементів. В один ряд запишемо цифри 1, 2, 5 (мал. 165). Від кожної цифри проведемо по дві гілки (мал. 166), які показують, що перебирати залишилось із 2 елементів. На кінцях гілок підпишемо дві інші цифри. Залишилось перебрати по 1 елементу, тому проводимо по 1 гілці від кожної цифри другого рівня й виписуємо на їхніх кінцях відповідні цифри, що залишилися (мал. 167). Тепер залишилось порахувати кількість цифр у найнижчому, третьому рівні. Їх виявляється 6. Отже, із цифр 1, 2 і 5 можна утворити 6 різних чисел, цифри яких не повторюються.

Мал. 165



Мал. 166



Мал. 167

Зверніть увагу:
у дереві можливих варіантів:
- стільки рівнів, скільки задано елементів для комбінування;
- на кожному рівні проводять стільки гілок, скільки елементів залишилося перебрати.

Дізнайтеся більше

1. Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розміщення елементів деякої, зазвичай скінченної, множини відповідно до заданих правил. Термін «комбінаторика» ввів німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) у своїй праці «Міркування про комбінаторне мистецтво», яка вийшла друком у 1666 р.

Вільгельм Лейбніц

Комбінаторика використовується в хімії для вивчення різних можливих типів зв'язків атомів у молекулах; у біології, наприклад у процесі знаходження послідовностей амінокислот у білкових сполуках; у кібернетиці при розв'язуванні задач кодування й побудові обчислювальних пристроїв тощо.

2. Під час розв'язування комбінаторних задач часто одержують добуток послідовних натуральних чисел (наприклад, задача 4). Розглянемо ще одну задачу.

Задача 6. Скількома способами можна скласти у школі розклад уроків на один день із семи різних навчальних предметів?

Розв'язання. На перший урок можна поставити один із семи навчальних предметів, на другий — один із шести предметів, на третій — один з п'яти і т. д.
Отже, маємо $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ способів, щоб скласти розклад.

У математиці добуток усіх натуральних чисел від одиниці до n включно, позначають $n!$ і називають факторіалом натурального числа n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Наприклад:

$$1! = 1,\ 2! = 1 \cdot 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Зверніть увагу:
- приймають, що $0! = 1$;
- факторіал є визначеним тільки для цілих невід'ємних чисел;
- загальна кількість *перестановок* з n різних елементів (тобто способів комбінування, які складаються з n різних елементів і відрізняються лише порядком розміщення цих елементів) дорівнює $n!$

Пригадайте головне

1. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
2. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
3. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.
4. У чому полягає суть способу перебору розв'язування комбінаторних задач?

Розв'яжіть задачі

622'. Об'єкт M можна вибрати з даної сукупності об'єктів 5 способами, а об'єкт N — 4 способами. З даної сукупності об'єктів треба вибрати або об'єкт M, або об'єкт N. Чи правильно, що кількість варіантів вибору об'єктів можна знайти за:
1) правилом додавання;
2) правилом множення?

623'. Об'єкт M можна вибрати з даної сукупності об'єктів 5 способами, і після кожного такого вибору об'єкт N можна вибрати 4 способами. З даної сукупності об'єктів потрібно вибрати пару (M, N). Чи правильно, що кількість варіантів вибору об'єктів можна знайти за:
1) правилом додавання;
2) правилом множення?

624'. Потрібно виписати всі можливі числа, які утворені цифрами 9, 8, 7, причому всі цифри числа різні. Чи правильно заповнено таблицю 22?

Таблиця 22

987	879	978
988	897	789

625°. У першій урні міститься 10 кульок, а в другій — 8 кульок. Скільки є способів, щоб вийняти одну кульку або з першої урни, або з другої урни?

626°. У першій урні міститься 10 кульок, а в другій — 8 кульок. Скільки є способів, щоб вийняти одну кульку з першої урни, а потім — одну кульку з другої урни?

627°. Є 12 червоних кульок, 18 — зелених і 8 — синіх. Скількома способами можна вибрати:
1) 1 червону або 1 зелену кульку;
2) 1 червону або 1 синю кульку?

628°. Екскурсовод запропонувала учням відвідати або один з 8 музеїв, або один із 4 парків. Скількома способами це можна зробити?

629°. Екскурсовод запропонувала учням відвідати один з 8 музеїв, а потім — один із 3 театрів. Скількома способами це можна зробити?

630°. Для участі в конференції вибирають одного учня із 17 учнів 10-го класу або одного учня з 21 учня 11-го класу. Скількома способами можна вибрати учня для конференції?

631°. Для чергування на різних поверхах школи вибирають двох учнів: одного учня з 30 учнів 10-А класу й одного учня з 25 учнів 10-Б класу. Скільки існує можливих способів формування різних пар чергових із двох учнів для чергування?

632°. Є 5 кольорів для розфарбування п'яти частин орнаменту. Скількома способами можна розфарбувати орнамент, якщо різні частини фарбувати різними кольорами?

633°. Скільки існує чотирицифрових пін-кодів (цифри можуть повторюватися)?

634°. Складіть дерево всіх можливих варіантів розміщення чергових Петренка, Сидоренка, Василенка й Іваненка на чотирьох поверхах школи.

635°. Скільки існує двоцифрових чисел, цифри яких різні?

636°. Скільки існує трицифрових чисел, цифри яких різні?

637°. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 3, 1, 6, якщо:
1) усі цифри числа — різні;
2) цифри в числі можуть повторюватися?

638°. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 7, 9, 6, якщо:
1) усі цифри числа — різні;
2) цифри в числі можуть повторюватися?

639°. Які трицифрові числа можна записати за допомогою цифр 6, 4 і 2 (цифри в записі чисел не повторюються)? Накресліть у зошиті таблицю 23 та запишіть у ній ці числа.

Таблиця 23

640°. Які трицифрові числа можна записати за допомогою цифр 3, 5 і 6 (цифри в записі чисел не повторюються)? Накресліть у зошиті таблицю 24 та запишіть у ній ці числа.

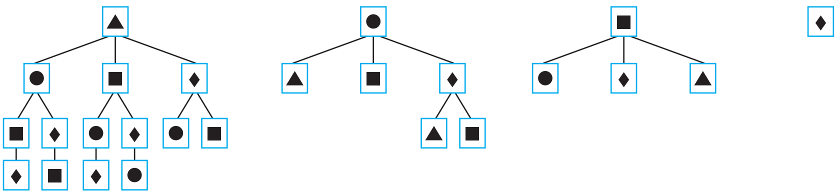
Таблиця 24

641°. Випишіть усі можливі набори слів *миру*, *усім*, *людям*. Побудуйте дерево можливих варіантів.

642°. Випишіть усі трицифрові числа, які можна записати за допомогою цифр 4, 8 і 7 (цифри в записі чисел не повторюються). Побудуйте дерево можливих варіантів. Скільки рівнів у дереві?

643°. Випишіть усі трицифрові числа, які можна записати за допомогою цифр 5, 1 і 3 (цифри в записі чисел не повторюються). Побудуйте дерево можливих варіантів. Скільки рівнів у дереві?

644°. Випишіть усі можливі способи комбінування фігур ▲, ●, ■ і ♦. Добудуйте дерево можливих варіантів (мал. 168).



Мал. 168

645°. Наталка вирішила відвідати три виставки: виставку фіалок, виставку виробів ручної роботи й виставку капелюхів. Скількома способами дівчинка може відвідати ці виставки? Побудуйте до задачі дерево можливих варіантів.

646. Скільки існує трицифрових чисел, які діляться на 5?

647. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2 і 0?

648. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 7, 2 і 5 так, щоб першою цифрою була цифра 2?

649. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 5 і 6, якщо цифри числа різні й число є:
1) парним;
2) кратним числу 5?

650. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 4, 5 і 0, якщо цифри числа різні й число є:
1) непарним;
2) кратним числу 5;
3) кратним числу 10?

651. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 2, 3 і 0, якщо цифри числа можуть повторюватися й число є:
1) парним;
2) кратним числу 10?

652. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 4, 5, 6 і 0, якщо цифри числа різні й число є:
1) парним;
2) кратним числу 5;
3) кратним числу 10?

653. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 7, 2, 3 і 0, якщо цифри числа можуть повторюватися й число є:
1) парним;
2) кратним числу 10?

654. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з непарних цифр, якщо:
1) усі цифри числа — різні;
2) цифри в числі можуть повторюватися?

655. Самостійна робота з математики містить одне рівняння й одну задачу. Скільки варіантів самостійної роботи з математики можна скласти із 7 рівнянь і 5 задач?

656. Скількома способами можуть бути розподілені 1, 2 й 3 місця, за умови, що в змаганнях беруть участь 8 команд?

657. Щоб набрати чотирицифровий пін-код, потрібно дві секунди. Скільки секунд знадобиться для того, щоб набрати всі можливі коди? Відомо, що всі цифри пін-коду різні.

658. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок із шести уроків.

659. Скількома способами можна скласти список з п’яти учнів?

660. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок із шести уроків так, щоб алгебра й геометрія стояли в розкладі поруч?

661. Скількома способами можна скласти список з п’яти учнів так, щоб прізвища Петренко й Василенко стояли в списку поруч?

662. Скільки діагоналей можна провести в:
1) шестикутнику;
2) десятикутнику?

663. У змаганні брало участь 8 команд. Кожна команда грала з усіма іншими командами одну гру. Скільки всього ігор було зіграно?

664. У змаганні брало участь n команд. Кожна команда грала з усіма іншими командами одну гру. Скільки всього ігор було зіграно?

665*. Скільки діагоналей можна провести в n-кутнику?

666*. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 4, 2, 3, 8 і 0, якщо на місці тисяч може стояти цифра 2 або цифра 3, а на місці десятків — цифра 2 або цифра 4?

667*. Скільки трицифрових чисел, кратних числу 3, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 5 і 8? Розв'яжіть задачу, якщо:
1) усі цифри числа різні;
2) цифри числа можуть повторюватися.

668*. Скільки натуральних дільників має число:
1) $2^2 \cdot 6^5$;
2) $9^5 \cdot 7^3 \cdot 8$?

Проявіть компетентність

669. З Києва до Одеси можна дістатися літаком, потягом, автобусом або автомобілем. Скількома способами можна дістатися з Києва до Одеси й повернутися назад, якщо для подорожі:
1) можна скористатися різними видами транспорту;
2) види транспорту можуть бути однаковими?

670. Петро забув код до вхідних дверей, який складається із 4 різних цифр. Він пам'ятає, що остання цифра є парною, а першою є цифра 9. Скільки способів комбінування цифр йому доведеться перебрати, щоб відкрити двері?

Задачі на повторення

671. *Старовинна задача.* Дехто підійшов до клітки, у якій сидять фазани та кролики. Він порахував їх голови, їх виявилося 15. Потім він підрахував їх ноги, їх було 42. Скільки кроликів і скільки фазанів було в клітці? Розв'яжіть цю задачу. Складіть аналогічну задачу та розв'яжіть її.

§ 16 Частота та ймовірність випадкової події

Вам вже доводилось обдумувати різні події, про які ви знали, що вони або відбудуться, або ні. Наприклад, такими є події: купівля нового одягу, отримання нагороди в конкурсі, поїздка за кордон у мовний табір тощо.

Явище, про яке можна сказати, що воно відбудеться чи не відбудеться за певних умов, називається ***випадковою подією*** або (коротко) ***подією***.

Події позначають великими латинськими літерами, наприклад: A. Читають: подія A.

Вважають, що будь-яка випадкова подія відбувається (чи не відбувається) внаслідок проведення деякого *випадкового*, або *стохастичного*, експерименту. Такий експеримент є *випробуванням*. Умови проведення випробування є незмінними. Можливі результати випробування є відомими, але заздалегідь не можна передбачити, який саме з них матиме місце. Наприклад, якщо ми будемо підкидати монету один раз, то можливими є два наслідки: випаде або «герб», або «цифра» (мал. 169), проте не можна точно сказати, що саме випаде. Тому підкидання монети є випробуванням, а поява «герба» чи «цифри» — це події A і B.

мал. 169

? Скільки подій можуть відбутися внаслідок одного підкидання грального кубика (мал. 170)? Гральний кубик містить шість граней, отже, подій буде принаймні шість: поява 1 очка, поява 2 очок, поява 3 очок, поява 4 очок, поява 5 очок, поява 6 очок.

мал. 170

Зверніть увагу:
усі можливі результати випробування утворюють сукупність подій, проте випробування завершується настанням лише однієї із цих подій.

Наприклад, у результаті одного підкидання грального кубика із шести можливих подій відбудеться лише одна: або поява 1 очка, або поява 2 очок, або поява 3 очок, або поява 4 очок, або поява 5 очок, або поява 6 очок. Інакше кажуть: «Появі 1 очка *сприяє* лише одна подія» і т.д.

Подію, яка в результаті випробування неодмінно має статися, називають *достовірною*. Наприклад, подія A «поява від 1 до 6 очок» у результаті підкидання грального кубика є достовірною.

Подію, яка внаслідок даного випробування не може відбутися, називають *неможливою*. Наприклад, подія B — «поява на одній із граней грального кубика 7 очок» є неможливою.

Задача 1. Зі скриньки, у якій містяться лише жовті кульки, виймають по одній кульці. Якою є подія:
1) вийнято жовту кульку;
2) вийнято червону кульку?

Розв'язання.
1. Подія A «вийнято жовту кульку» — це достовірна подія, бо в даному випробуванні вона є єдино можливим його результатом.
2. Подія B «вийнято червону кульку» — це неможлива подія, бо в даному випробуванні такого результату не може бути.

Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу другої. Такі події не можуть настати одночасно. Наприклад, подія C — «поява 3 очок» і подія D — «поява 5 очок» є несумісними подіями в результаті одного підкидання грального кубика.

Події називаються *рівноможливими*, якщо в результаті випробування поява кожної з них є однаково можливою порівняно з іншими. Наприклад, під час підкидання грального кубика події «поява 1 очка», «поява 2 очок», «поява 3 очок», «поява 4 очок», «поява 5 очок», «поява 6 очок» є рівноможливими.

Ймовірність події — це кількісна характеристика можливості настання цієї події в ході випробування.

Позначають: $P(A)$. Читають: «Ймовірність події A».

Для випробування, у якому всі можливі події є несумісними й рівноможливими, ймовірність події можна обчислювати за формулою.

Ймовірністю події А **називається відношення числа** m **сприятливих для** A **подій до числа** n **усіх рівноможливих у даному випробуванні подій:**

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Чи правильно, що кількість тих випробувань m, які сприяють появі даної події, завжди менша від загальної кількості випробувань n? Ні. Числа m і n можуть також дорівнювати одне одному. Наприклад, ймовірність достовірної події «поява від 1 до 6 очок» у результаті одного підкидання грального кубика дорівнює 1, оскільки $\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=1$.

Зверніть увагу:
ймовірність події може набувати значень лише від 0 до 1 ($0 \le P(A) \le 1$). Ймовірність достовірної події дорівнює 1, а ймовірність неможливої події — 0.

Задача 2. У магазині є 18 пар джинсів. З них 10 пар — 34-го розміру і 8 пар — 36-го розміру. Марина купила одну пару джинсів. Яка ймовірність того, що ця пара джинсів:
1) 34-го розміру;
2) 36-го розміру?

Розв'язання.
1. Нехай подія A — «куплено джинси 34 розміру». Загальна кількість пар джинсів у магазині становить 18, тому $n = 18$. Джинсів 34-го розміру — 10, тому $m = 10$. Ймовірність події A дорівнює відношенню кількості m можливостей купити джинси 34-го розміру до загальної кількості n можливостей купити хоч якісь джинси, тому: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$.

2. Нехай подія B — «куплено джинси 36-го розміру». Тоді $m = 8$, $n = 18$.

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

Відповідь: 1) ймовірність купити джинси 34-го розміру дорівнює $\frac{5}{9}$; 2) ймовірність купити джинси 36-го розміру дорівнює $\frac{4}{9}$.

У задачі розглядали випробування, у ході якого в магазині купили джинси. Можливими були дві події: подія A — «куплено джинси 34-го розміру» і подія B «куплено джинси 36-го розміру». Ймовірність події A дорівнює $\frac{5}{9}$, а події B — $\frac{4}{9}$. Сума ймовірностей цих подій дорівнює $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=1$.

Сума ймовірностей усіх можливих подій випробування дорівнює 1.

? Чи можна визначити ймовірність однієї з можливих подій випробування як різницю числа 1 і ймовірності іншої події? Так. Ймовірність купити джинси 36-го розміру в розглянутій задачі можна було знайти й по-іншому:

$$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}.$$

Задача 3. Кидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що в сумі випаде 9 очок?

Розв'язання. Подія C «внаслідок підкидання двох кубиків в сумі випало 9 очок». Можливими є такі пари чисел на верхніх гранях двох гральних кубиків: 3 і 6, 4 і 5, 5 і 4, 6 і 3. Отже, $m = 4$. Загальна кількість пар чисел, коли на першому кубику випало число від 1 до 6 і для кожного з них на другому кубику випало одне із цих шести чисел, дорівнює 36, тобто $n = 36$. Отже:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Під час різних експериментів дослідники з'ясовують, скільки разів відбулася та чи інша подія. Наприклад, скільки дівчаток народилося в Полтавській області за місяць, шість місяців, рік тощо; скільки учнів шкіл Черкаської області одержали червоні дипломи математичного конкурсу «Кенгуру» у 2015 році, 2016 році, 2017 році; скільки разів випаде герб при підкиданні монети. Проводячи такі експерименти, дослідники відмітили, що події відбуваються з певною ***частотою***.

Частотою випадкової події A **називається відношення кількості появ події, яка нас цікавить, до загальної кількості випробувань (спостережень).**

Ймовірність випадкової події наближено дорівнює частоті цієї події, знайденій під час проведення великої кількості випробувань (спостережень). Таку оцінку ймовірності ще називають *статистичною*.

Якщо під час проведення великої кількості випадкових випробувань, у кожному з яких може відбутися або не відбутися деяка подія A, значення частоти цієї події A близьке до певного числа, яке залежить тільки від події A й не залежить від серії експериментів, то це число називають ***ймовірністю випадкової події A*** й позначають $P(A)$.

Дізнайтеся більше

Вважають, що історія теорії ймовірностей розпочинається з роботи Я. Бернуллі (1654–1705) «Ars Conjectandi» («Мистецтво припущень»), яка була опублікована в 1713 р. У ній Бернуллі запропонував класичне означення ймовірності випадкової події як відношення кількості рівноможливих випадків, пов'язаних із цією подією, до загальної кількості випадків. Він також виклав правила підрахунку ймовірності для складних подій і дав перший варіант ключового «закону великих чисел», який пояснює, чому частота події в серії випробувань не змінюється хаотично, а в певному сенсі прагне до свого граничного теоретичного значення (тобто ймовірності).

Ідеї Бернуллі розвинули на початку XIX ст. Лаплас, Гаусс та Пуассон. Поняття ймовірності було розвинуте для неперервних випадкових величин, завдяки чому з'явилася можливість застосування методів математичного аналізу. З'являються перші спроби застосування теорії ймовірностей у фізиці. До кінця XIX ст. з'являються статистична фізика, сувора теорія помилок вимірювання, ймовірнісні методи проникають в різноманітні прикладні науки.

У XX ст. у фізиці була створена теорія мікросвіту, а в біології — теорія спадковості, обидві вони більшою мірою засновані на ймовірнісних методах. Карл Пірсон розробив алгоритми математичної статистики, які широко застосовуються для аналізу прикладних вимірювань, перевірки гіпотез і прийняття рішень. А. М. Колмогоров дав класичну аксіоматику теорії ймовірностей. З інших нових сфер застосувань теорії ймовірностей необхідно пригадати теорію інформації та теорію випадкових процесів.

Пригадайте головне

1. Що таке подія?
2. Яку подію називають випадковою?
3. Яку подію називають достовірною?
4. Яку подію називають неможливою?
5. Які події називають несумісними?
6. Які події називають рівноможливими?
7. Що таке ймовірність події? Як її позначають?
8. Як знайти ймовірність події?
9. Яких значень може набувати ймовірність події?
10. Що таке частота випадкової події?

Розв'яжіть задачі

672'. Які події можна одержати внаслідок проведення випробування:
1) монету підкидають один раз;
2) монету підкидають два рази;
3) гральний кубик кидають один раз;
4) стріляють по мішені один раз;
5) стріляють по мішені два рази;
6) зі скриньки, у якій лежать блакитна й жовта кульки, виймають кульку;
7) зі скриньки, у якій лежать блакитна, жовта й червона кульки, виймають кульку?

673'. У скриньці лежать 4 кульки: біла, жовта, зелена та блакитна. Виймають одну кульку. Для цього випробування назвіть:
1) усі рівноможливі події;
2) неможливу подію;
3) несумісні події.

674'. У кошику лежать однакові тенісні м'ячі. Якою є подія:
1) «вийнято тенісний м'яч»;
2) «вийнято футбольний м'яч»;
3) «вийнято баскетбольний м'яч»?

675'. У коробці містяться котушки ниток білого кольору. Якою є подія:
1) «вийнято котушку синього кольору»;

2) «вийнято котушку білого кольору»;
3) «вийнято котушку червоного кольору»?

676°. Монету підкидають один раз. Яка ймовірність того, що випаде «цифра»?

677°. Монету підкидають один раз. Яка ймовірність того, що випаде «герб»?

678°. Оленка задумала просте двоцифрове число, менше від числа 25. Яка ймовірність того, що це число:
1) 13;
2) 17;
3) 18;
4) більше за 20;
5) непарне?

679°. Семен задумав складене двоцифрове число, менше від числа 27. Яка ймовірність того, що це число:
1) 8;
2) 15;
3) 19;
4) парне?

680°. Гральний кубик кидають один раз. Підрахуйте ймовірність події:
1) «випадає 2 очки»;
2) «випадає 5 очок»;
3) «випадає 7 очок»;
4) «випадає парне число очок»;
5) випадає число очок, кратне числу 3».

681°. Гральний кубик кидають один раз. Підрахуйте ймовірність події:
1) «випадає 3 очки»;
2) «випадає 6 очок»;
3) «випадає непарне число очок».

682°. У класі навчаються 22 хлопці й 11 дівчат. Один учень захворів. Яка ймовірність того, що це:
1) хлопець;
2) дівчина?

683°. У змаганнях брали участь 16 хлопців і 18 дівчат, які мають рівні шанси на перемогу. Яка ймовірність того, що перше місце виборе:
1) дівчина;
2) хлопець?

684°. Зі скриньки, у якій містяться 10 зелених та 8 блакитних кульок, навмання вийнято одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька:
1) зелена;
2) блакитна;
3) червона?

685°. Зі скриньки, у якій містяться 9 жовтих і 12 фіолетових кульок, навмання вийнято одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька:
1) жовта;
2) фіолетова;
3) зелена?

686. У родині двоє дітей. Яка ймовірність того, що це: 1) хлопчики; 2) дівчатка, якщо припускати, що народження хлопчика й дівчинки є рівноможливими подіями?

687. У родині двоє дітей. Яка ймовірність того, що в родині є хлопчик і дівчинка, якщо народження хлопчика й дівчинки є рівноможливими подіями?

688. Монету підкидають два рази. Яка ймовірність того, що випадуть:
1) дві «цифри»;
2) два «герби»;
3) «цифра» і «герб»?

689. Підкидають дві монети. Яка ймовірність того, що монети упадуть однаковою стороною доверху?

690. У лотереї розігрують 20 грошових призів і 5 речових. Усього було продано 5000 лотерейних білетів. Яка ймовірність того, що, придбавши один білет, ви:
1) виграєте який-небудь приз;
2) виграєте грошовий приз;
3) не виграєте жодного призу?

691. У міжнародних змаганнях із плавання беруть участь 8 спортсменів: 3 — зі США, 2 — з Австралії, 1 — з Китаю, 1 — з України, 1 — з Канади. Порядок, у якому виступають спортсмени, визначається жеребкуванням. Знайдіть ймовірність того, що спортсмен, який виступає останнім, виявиться із США.

692. У змаганнях із велоспорту беруть участь 4 спортсмени з Польщі, 8 спортсменів з Болгарії, 7 спортсменів з Румунії та 5 — із Словенії. Порядок, у якому виступають спортсмени, визначається жеребкуванням. Знайдіть ймовірність того, що спортсмен, який виступає першим, виявиться з Болгарії.

693. На завод привезли партію з 2000 деталей, з яких 50 деталей не відповідають стандарту. Визначте ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться стандартною.

694. На фабриці виготовляють постільну білизну. За день було пошито 250 комплектів, з яких 5 комплектів виявилися з прихованими дефектами. Знайдіть ймовірність того, що куплений у магазині комплект постільної білизни із цієї партії виявиться якісним.

695. Синоптики прогнозують на наступний тиждень 5 сонячних днів та 2 дощові. Яка подія є більш ймовірною: «середа — сонячний день» чи «в середу буде дощ»?

696. У випадковому експерименті кидають два гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що в сумі випаде 9 очок.

697. У випадковому експерименті кидають два гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що на кубиках випадуть однакові очки.

698*. У випадковому експерименті кидають три гральні кубики. Знайдіть ймовірність того, що в сумі випаде:
1) 10 очок; 2) 15 очок; 3) 20 очок.

699*. У випадковому експерименті монету кидають тричі. Знайдіть ймовірність того, що «герб» випаде всі три рази.

Проявіть компетентність

700. Проведіть такий експеримент. Підкиньте монету:
1) 10 разів;
2) 50 разів;
3) 100 разів.
Результати запишіть у таблицю 25.

Таблиця 25

Номер експерименту	1	2	3
Кількість підкидань	10	50	100
Кількість випадань «герба»			
Кількість випадань «цифри»			

У кожному експерименті підрахуйте частоту випадання «цифри» та порахуйте ймовірність настання події «випаде цифра».

701. Оксана й Сергій придумали гру; кидають два гральні кубики. Якщо сума очок дорівнює 11, то виграв Сергійко, а якщо сума очок дорівнює 10, то виграла Оксанка. У кого з дітей більше шансів виграти?

702. Оберіть навмання одну сторінку з п'єси Івана Котляревського «Наталка Полтавка». Порахуйте на цій сторінці кількість букв «а», «о», «е», «і» та загальну кількість букв. Підрахуйте частоту появи вказаних букв у тексті.

Задачі на повторення

703. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x-3>5, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{3}\le 1\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+1\le 16, \\ \dfrac{3x}{4}+\dfrac{2x}{3}>1. \end{cases}$

704. Змішали 200 г 78 %-го розчину, 300 г 60 %-го розчину й 600 г 20 %-го розчину. Знайдіть концентрацію розчину, що утворився.

§ 17 Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки

1. ЗБИРАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ. ГЕНЕРАЛЬНА СУКУПНІСТЬ І ВИБІРКА

Однією з наук, що займається збиранням, систематизацією та обробкою даних, є статистика, з якою ми починаємо ознайомлюватися.

Статистика — наука, що збирає, обробляє й аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища та події навколишнього світу. Такі дані одержують під час проведення досліджень. Важливою властивістю статистичних даних є їхня масовість.

Першим етапом будь-якого дослідження є статистичне спостереження, тобто збирання інформації в ході проведення масових спостережень, опитувань, експериментів.

Статистичне спостереження — це сплановане, науково організоване збирання статистичних даних про будь-яке масове явище або процес. Прикладами збирання даних унаслідок таких спостережень є ведення шкільного щоденника або класного журналу. Із щоденника можна одержати дані про успішність окремого учня, а з класного журналу — всього класу.

? Чи завжди дані про успішність у щоденнику та класному журналі збігаються? Якщо ви вважаєте, що ні, то поясніть можливі причини появи відмінностей.

Найпоширенішим видом статистичних спостережень є вибіркове спостереження. У ході такого дослідження розглядають не всю сукупність явищ, об'єктів чи процесів, які хотіли б вивчити, а лише деяку їх частину. Таку частину, відібрану в особливий спосіб, називають *вибіркою*. Усю сукупність явищ або об'єктів, з якої роблять вибірку, називають *генеральною сукупністю*. Елементами генеральної сукупності можуть бути люди, неживі предмети, природні явища тощо. У кожному конкретному дослідженні генеральна сукупність залежить від тих цілей, які ставлять у дослідженні.

Наприклад, при визначенні рейтингу телевізійної передачі практично неможливо з'ясувати думку всіх телеглядачів, які становлять генеральну сукупність дослідження. Тому проводять вибіркове обстеження лише її малої частини, яка становить вибірку. Число об'єктів генеральної сукупності та вибірки називають відповідно *обсягом генеральної сукупності* (N) та *обсягом вибірки* (n). Наприклад, якщо для дослідження з 20 млн глядачів відібрали 2000 осіб, то обсяг генеральної сукупності $N = 20\,000\,000$, а обсяг вибірки $n = 2000$.

Зверніть увагу:
вибірка має такі характеристики:
- якісну (способи побудови вибірки);
- кількісну (обсяг вибірки).

Перед початком статистичної обробки даних їх систематизують. Від людей, предметів або явищ переходять до рядів чисел. Із цієї точки зору вибіркою можна вважати набір даних (найчастіше числових), одержаних у результаті статистичного спостереження. Такий набір називають *статистичним рядом*.

За типом представлених у них даних статистичні ряди можна розділити на числові та нечислові. Наприклад, вік респондентів є числовим рядом, а їхня стать або освіта — нечисловим.

Розглянемо ситуацію.

Ситуація. Потрібно проаналізувати результати контрольної роботи з математики в 9-А класі. Для цього випишемо одержані учнями бали, тобто утворимо статистичний ряд балів:

8, 10, 4, 7, 8, 6, 5, 7, 11, 9, 10, 8, 6, 8, 9, 11, 8, 6, 7, 9, 11, 7, 9.

Бачимо, що обсяг цієї вибірки $n = 23$, бали варіюються від 4 до 11. З одержаного статистичного ряду можна виокремити й інші дані про результати контрольної роботи, зокрема про кількість тих чи тих балів.

Для полегшення роботи з одержаними даними їх упорядковують. У статистиці впорядкування даних, одержаних у вибірці, називають *ранжуванням*, а впорядкований за зростанням статистичний ряд — *варіаційним рядом*. Наприклад, варіаційний ряд балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі є таким:

4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11.

Варіаційний ряд дозволяє відповісти на багато запитань, які залишаються «прихованими» всередині звичайного статистичного ряду: побачити мінімальне й максимальне значення ряду; оцінити, які значення повторюються частіше, тощо. Проте якщо вибірка має великий обсяг, то зручніше використовувати статистичні таблиці. У таблицях дані подаються компактно, у зручній для порівняння й аналізу формі. Наприклад, у таблиці 26 подано бали, одержані за контрольну роботу, та відповідну кількість учнів, які одержали ці бали.

Таблиця 26

Бали	4	5	6	7	8	9	10	11
Кількість учнів	1	1	3	4	5	4	2	3

Зібрані та систематизовані статистичні дані мають бути проаналізовані. Для цього в статистиці використовують різні показники.

2. ЧИСЕЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКИ

До чисельних характеристик вибірки відносять: середнє значення, моду та медіану.

Позначають: $\bar{x}$ — середнє значення вибірки; Mo — мода вибірки; Me — медіана вибірки.

Середнім значенням $\overline{x}$ ***вибірки*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **називають середнє арифметичне всіх членів даного ряду, тобто**

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

У більшості реальних ситуацій саме середнє арифметичне несе важливу інформацію про певне явище, об'єкт чи процес. Достатньо пригадати вирази «середній бал», «середня зарплата», «середній дохід», які є знайомими й зрозумілими більшості людей, далеких від математики.

Визначимо середнє значення вибірки балів («середній бал») за контрольну роботу з математики в 9-А класі:

$$\overline{x} = \frac{4+5+6\cdot 3+7\cdot 4+8\cdot 5+9\cdot 4+10\cdot 2+11\cdot 3}{23} = 8.$$

Мода **(*Мо*)** ***вибірки*** **— це значення вибірки, яке трапляється у варіаційному ряді найчастіше.**

Визначимо моду для вибірки балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі. За відповідним варіаційним рядом або за таблицею 17.1 можна побачити, що найчастіше трапляється значення «8 балів». Таку кількість балів одержало найбільше учнів. Отже, $Mo = 8$.

? Чи для кожного статистичного ряду існує мода? Ні. На відміну від середнього значення, яке можна обчислити для будь-якого скінченного числового ряду, ряд, у якому різні значення трапляються однакову кількість разів, не має моди. Наприклад, ряд 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 не має моди, тоді як ряд 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 має моду $Mo = 4$.

Медіана **(*Ме*)** ***вибірки*** **— це число, яке «поділяє» упорядковану сукупність усіх значень вибірки на дві рівні частини.**

Медіана є таким числом варіаційного ряду, яке розміщується точно посередині цього ряду.

Визначимо медіану для вибірки балів за контрольну роботу з математики в 9-А класі:

4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, **8**, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10.

Обсяг даної вибірки є непарним числом: $n = 23$. Тому перед медіаною й після неї мають стояти по 11 чисел. У даному ряді таким є число 8. Отже, $Me = 8$.

Якщо вибірка містить парну кількість членів, то медіану визначають як півсуму двох його середніх значень. Наприклад, для вибірки, обсяг якої $n = 10$, одержуємо:

$$4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, \text{ тому } Me = \frac{6+7}{2} = 6{,}5.$$

Яка з характеристик краще описує особливості ряду: середнє значення, мода чи медіана? Відповісти на це запитання однозначно не можна — у кожному конкретному випадку це може бути будь-яка з них. Розглянемо приклади.

Задача 1. Богдан виписав свої бали за тему «Числові послідовності»: 9, 8, 10, 9, 9, 10, 10, 11, 10, 10, 8, 11.
Якою буде підсумкова оцінка за тему?

Розв'язання. Бали за тему утворюють статистичний ряд. Для його дослідження ряд доцільно впорядкувати, тобто одержати варіаційний ряд: 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11.
Обсяг вибірки: $n = 12$.
Визначимо середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{8\cdot 2 + 9\cdot 3 + 10\cdot 5 + 11\cdot 2}{12} \approx 9{,}6.$$

Саме це число, швидше за все, буде головним орієнтиром для вчителя під час визначення підсумкової оцінки Богдана за тему.

Зверніть увагу:
середнє значення ряду може не збігатися з жодним з його елементів.

У розглядуваній задачі середній бал дорівнює 9,6, хоча всі оцінки є цілими числами.

Визначимо моду вибірки: $Mo = 10$.

Незважаючи на те, що середнє значення не доходить до 10, мода свідчить на користь підсумкової оцінки 10, адже саме таку оцінку учень одержував найчастіше протягом вивчення теми. Отже, підсумкова оцінка за тему — 10 балів.

3. СПОСОБИ ПОДАННЯ ДАНИХ. ДІАГРАМИ

Ми вже пересвідчилися, що зібрану інформацію або одержані дані зручно подавати в таблицях. Наприклад, дані задачі 1 можна подати в таблиці 27.

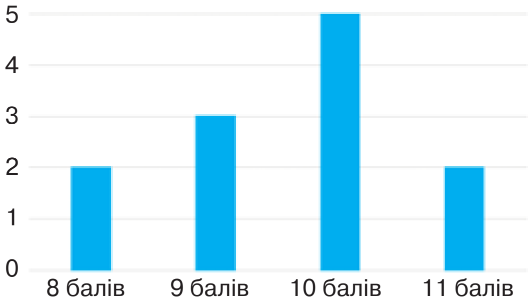
Таблиця 27

Бали	8	9	10	11
Кількість оцінок	2	3	5	2

Також доцільно застосовувати діаграми.

Діаграма — це графічне зображення, що наочно показує співвідношення будь-яких величин. Як унаочнення статистичних даних використовують стовпчасті та кругові діаграми.

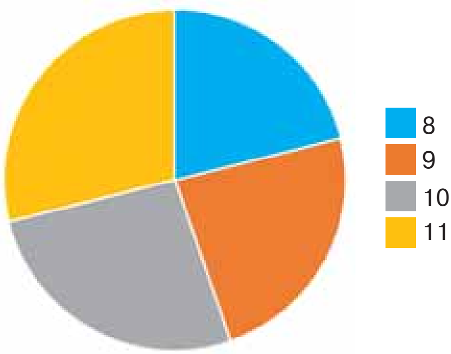
На *стовпчастій діаграмі* за горизонталлю відкладають різні значення однієї ознаки, а над кожним таким значенням малюють стовпчик, висота якого дорівнює відповідному значенню іншої ознаки. Такі діаграми особливо наочно показують кількісні співвідношення між величинами. Наприклад, стовпчасту діаграму до задачі 1 наведено на малюнку 171.



Мал. 171

Стовпчасті діаграми, у яких немає розривів між стовпцями, у статистиці називають *гістограмами*.

Кругова діаграма являє собою круг, розрізаний на сектори пропорційно до значень досліджуваної ознаки. Щоб побудувати кругову діаграму, потрібно поділити все коло на дуги так, щоб їхні довжини (або відповідні їм центральні кути) перебували в тому самому відношенні, що й представлені на діаграмі величини. Наприклад, кругову діаграму до задачі 1 подано на малюнку 172.



Мал. 172

? Яка діаграма є кращою? Найчастіше різні види діаграм взаємозамінні, а ті самі статистичні дані можна подати на різних діаграмах. Проте можна визначити, що стовпчасті діаграми зручно використовувати для порівняння абсолютних значень досліджуваної ознаки, а кругові діаграми — для випадків, коли потрібно показати, у якій пропорції ціле ділиться на частини.

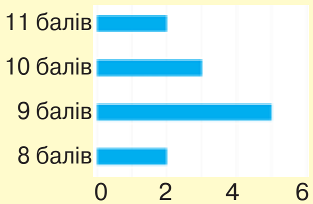
Діаграми потрібно вміти не тільки правильно будувати, а й правильно читати, тобто сприймати укладену в них інформацію. Для цього необхідно визначити тип діаграми; з'ясувати, які величини на ній показані та скільки їх; що відкладено по кожній з осей; які обрано одиниці вимірювання; які умовні позначення використовували.

Дізнайтеся більше

1. Математична статистика пов'язана з більш тонкими дослідженнями — оцінкою невідомих параметрів, перевіркою гіпотез, вивченням статистичних зв'язків і залежностей.

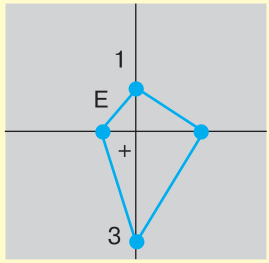
Крім того, у статистиці виділяють багато галузей, пов'язаних з тією сферою життя, з якої одержано статистичні дані. Економічна статистика вивчає зміни цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання й падіння виробництва та споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, ймовірність виникнення деякого захворювання залежно від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок людей, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна.

2. Крім стовпчастих і кругових діаграм, у статистиці використовують й інші способи графічного подання даних. Наприклад, дані задачі 1 можна подати на лінійчатій діаграмі (мал. 173), графіку (мал. 174), пелюстковій діаграмі (мал. 175) тощо.



Мал. 173

Мал. 174



Мал. 175

Іншою основою для поділу на види способів графічного подання даних є їхній зміст. За цією основою їх поділяють на: діаграми порівняння, структурні діаграми, динамічні діаграми, графіки зв’язку, графіки контролю тощо.

Пригадайте головне

1. Що досліджує статистика?
2. Що таке генеральна сукупність; вибірка?
3. Назвіть характеристики вибірки.
4. Що таке середнє значення вибірки?
5. Що таке мода вибірки?
6. Що таке медіана вибірки?
7. Які є способи подання даних?

Розв’яжіть задачі

705'. Чи правий Дмитро, стверджуючи:
1) «Вибірка — це генеральна сукупність»;
2) «Вибірка — це частина генеральної сукупності»;
3) «Вибірка — це частина генеральної сукупності, відібрана в спеціальний спосіб»?

706'. Чи правильно, що середнє значення вибірки — це:
1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

707'. Чи правильно, що мода вибірки — це:
1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

708'. Чи правильно, що медіана вибірки — це:
1) середнє арифметичне всіх значень вибірки;
2) значення вибірки, яке трапляється найчастіше;
3) число, яке «поділяє» вибірку на дві рівні частини?

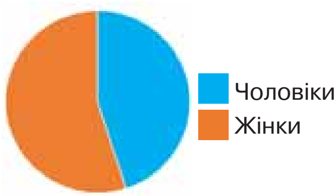
709'. Чи правильно, що для вибірки 1; 2; 3; 4; 5; 5; 6:
1) $Mo = 5$; 2) $Me = 5$; 3) $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{5}$?

710°. Назвіть генеральну сукупність і вибірку в статистичних спостереженнях:
1) результати ЗНО з математики;
2) вибір професії старшокласниками.

711°. Назвіть генеральну сукупність і вибірку в статистичних спостереженнях:
1) вибір інженерних спеціальностей випускниками шкіл;
2) вибір здорового способу життя молоддю України.

712°. Які статистичні дані про кожного учня, крім його оцінок, записують у класному журналі?

713°. Як ви думаєте, кого в Україні більше — чоловіків чи жінок? Відповідь на це запитання міститься на малюнку 176. З'ясуйте, кого у вашій школі більше — хлопців чи дівчат.



Мал. 176

714°. Відповідно до системи АВ0, запропонованої на початку минулого століття К. Ландштейнером, виділяють чотири групи крові, які відрізняються за складом: 0 — перша; А — друга; В — третя; АВ — четверта. У таблиці 28 наведено дані розподілу населення України за групою крові.

Таблиця 28

0	A	B	AB
37 %	40 %	17 %	6 %

За даними таблиці з'ясуйте:
1) яка група крові трапляється найчастіше;
2) яка група крові трапляється найрідше.

715°. Упродовж тижня Дмитро вимірював час, за який він виконував домашнє завдання. Одержав такі дані: 2 год, 1,5 год, 1,8 год, 1,2 год, 2,5 год. Знайдіть середній час виконання Дмитром домашнього завдання цього тижня.

716°. Упродовж тижня Тетяна чотири рази відвідувала художню школу. Час занять становив: 1,3 год, 2 год, 1 год, 0,5 год відповідно. Знайдіть середній час заняття цього тижня.

717°. Знайдіть середнє значення, моду, медіану ряду чисел: 2; 4; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 1; 6; 2; 4; 5; 6; 4.

718°. Знайдіть середнє значення, моду, медіану ряду чисел: 5; 2; 4; 2; 5; 3; 4; 5; 5; 6.

719°. У таблиці 29 наведено дані про кількість деталей, виготовлених робітниками за один робочий день.

Таблиця 29

Кількість деталей за день	18	19	20	21	22
Кількість робітників	2	10	8	4	1

За цими даними знайдіть:
1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

720°. У таблиці 30 наведено дані про віковий склад учасників шкільного хору.

Таблиця 30

Вік (роки)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість учасників	4	2	6	5	4	5	4	2	2	1

За цими даними знайдіть:
1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

721°. У таблиці 31 наведено витрати родини Терещенків на харчування упродовж тижня.

Таблиця 31

День тижня	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд
Витрати, грн	124	106	100	102	94	128	151

Визначте середньодобову витрату коштів на харчування в родині Терещенків.
Побудуйте діаграму витрат родини за тиждень.

722°. У таблиці 32 показано кількість відвідувачів фотовиставки «З Україною в серці» в різні дні тижня.

Таблиця 32

День тижня	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд
Кількість відвідувачів	241	547	342	402	вихідний	704	854

Визначте середньодобову кількість відвідувачів фотовиставки.

Побудуйте діаграму відвідування виставки за тиждень.

723. У числовому ряді 4; 10; 18; x; 26; 30 пропущено число x. Знайдіть число x, якщо середнє значення ряду дорівнює 18.

724. У числовому ряді 9; 16; 25; y; 40 пропущено число y. Знайдіть число y, якщо середнє значення ряду дорівнює 24.

725. Дано варіаційний ряд чисел: 6; 7; 8; x; 9; 10. За яких значень x: 1) мода буде дорівнювати 9; 2) медіана буде дорівнювати 8?

726. Дано варіаційний ряд чисел: 20; 21; y; 23; 24; 26. За яких значень y: 1) мода буде дорівнювати 23; 2) медіана буде дорівнювати 22?

727. Розклад уроків визначає розпорядок роботи будь-якого навчального закладу. У кожній школі ця таблиця займає головне місце. За розкладом уроків у своєму класі складіть статистичний ряд предметів, які вивчають у 9 класі. Визначте моду цього ряду. Побудуйте діаграму.

728. У таблиці 33 наведено результати навчальних досягнень учнів 9-А класу за семестр із деяких предметів.

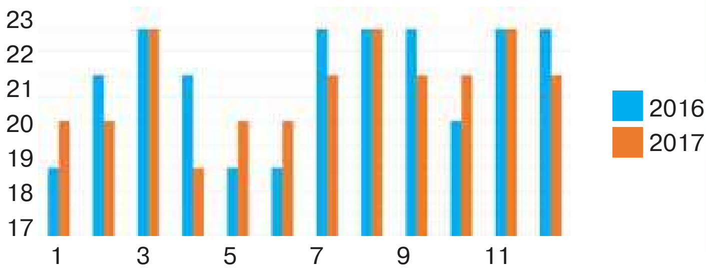
Таблиця 33

Учень	**Алгебра**	**Геометрія**	**Фізика**	**Хімія**
Антоненко В.	8	7	9	8
Бондаренко Е.	10	10	10	11
Василенко І.	5	4	6	5
Денисюк С.	9	8	7	7
Карась Д.	9	8	9	8
Коваленко О.	10	9	10	10
Левицька А.	7	6	7	7
Степанець М.	9	8	9	8
Ясінська К.	11	10	11	10

За даними таблиці: 1) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з алгебри; 2) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з геометрії; 3) побудуйте діаграму навчальних досягнень з алгебри та геометрії.

729. За даними таблиці 33: 1) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з фізики; 2) знайдіть середнє значення, моду та медіану результатів з хімії; 3) побудуйте діаграму навчальних досягнень з фізики та хімії.

730. На діаграмі (мал. 177) подано кількість робочих днів (за місяцями) в Україні в 2016 й 2017 роках.

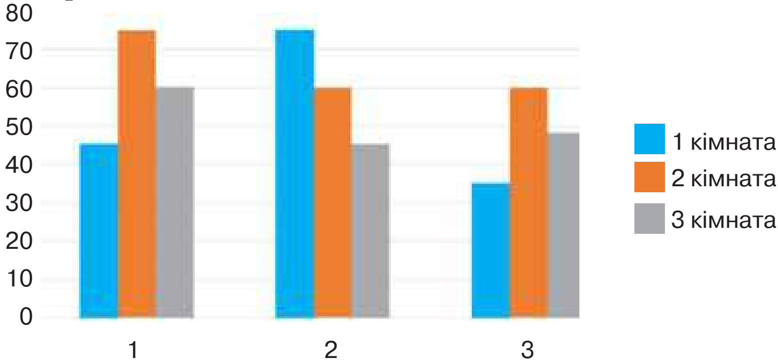


Мал. 177

За діаграмою: 1) установить кількість робочих днів за кожний рік; 2) порівняйте кількість робочих днів узимку за ці роки; 3) порівняйте кількість робочих днів навесні та восени у 2016 році.

Чи можна встановить кількість вихідних днів у 2017 році?

731. На діаграмі (мал. 178) подано дані щодо кількості квартир у трьох будинках: однокімнатних, двокімнатних і трикімнатних.



Мал. 178

За діаграмою:
1) установіть кількість квартир у кожному будинку;
2) установіть кількість однокімнатних квартир у трьох будинках разом;
3) порівняйте загальну кількість двокімнатних і трикімнатних квартир.

732. На телеканалі «Рось» провели дослідження щодо розподілу ефірного часу між різними типами програм. Було одержано такі дані: новини — 15 %, кінофільми та серіали — 50 %, спортивні програми — 7 %, науково-пізнавальні програми — 3 %, музичні програми — 15 %, дитячі передачі — 10 %. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє значення, моду та медіану ряду. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми.

733. Режим дня школяра в обов'язковому порядку передбачає на добу: повноцінне харчування — 2 год; навчання — 8 год; фізичні навантаження — 1 год; відпочинок і прогулянки — 4 год; сон — 9 год. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє значення, моду та медіану ряду. Побудуйте стовпчасту та кругову діаграми.

734. Провели опитування учнів 9-го класу про їхній зріст. Були одержані такі дані (у сантиметрах): 166, 165, 162, 168, 165, 170, 165, 165, 165, 164, 168, 169, 168, 166, 170, 165, 163, 168, 171, 174. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє значення, моду та медіану цього ряду.

735. Провели опитування учнів 9-го класу щодо кількості дітей у їхніх родинах. Були одержані такі дані: 1, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 2, 6, 3. Складіть варіаційний ряд вибірки. Знайдіть середнє значення, моду та медіану цього ряду.

736*. Середнє арифметичне деякого ряду даних, що складається з 8 чисел, дорівнює 16. До цього ряду приписали числа 15 і 17. Чому дорівнює середнє арифметичне нового ряду чисел?

737*. Кожне число варіаційного ряду збільшили на 10. Як змінилося його:
1) середнє значення;
2) мода;
3) медіана?

738*. Кожне число варіаційного ряду збільшили у 2 рази. Як змінилося його:
1) середнє значення;
2) мода;
3) медіана?

Проявіть компетентність

739. Зберіть дані про дні народження однокласників. Проаналізуйте їх і дайте відповідь на запитання:
1) хто у вашому класі найстарший;
2) хто — наймолодший;
3) чи є в класі учні, у яких збігаються дні народження?

740. Проведіть колективне дослідження про те, які жіночі та чоловічі імена є найбільш популярними:
1) для вашого покоління;
2) для покоління ваших батьків;
3) для покоління ваших дідусів і бабусь.
За результатами опитування складіть рейтинг жіночих і чоловічих імен.

741. Проведіть у своїй школі опитування про улюблені шкільні предмети. Складіть на його основі рейтинг шкільних предметів. З'ясуйте, чи спостерігається залежність цього рейтингу від віку школярів.

Задачі на повторення

742. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 4) = 0$;
2) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3} = 0$.

743. Спростіть вираз: $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \dfrac{b}{a - \sqrt{ab}}\right) : \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, які задачі називають комбінаторними.
2. Сформулюйте правило додавання для комбінаторних задач.
3. Сформулюйте правило множення для комбінаторних задач.
4. Яку подію називають випадковою? достовірною? неможливою?
5. Які події називають несумісними? рівноможливими?
6. Що таке ймовірність події? Як її позначають?
7. Як знайти ймовірність події?
8. Що таке частота випадкової події?
9. Що досліджує статистика?
10. Що таке генеральна сукупність; вибірка?
11. Як обчислити середнє значення вибірки; моду вибірки; медіану вибірки?
12. Які є способи подання даних?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Якою буде семестрова оцінка Тетянки з хімії, якщо тематичні оцінки були такими: 9, 10, 8, 11, 11?

А. 8. **Б.** 9. **В.** 10. **Г.** 11.

2° У класі навчаються 16 хлопців і 14 дівчат. На зборах класу учні обрали старосту. Яка ймовірність того, що це хлопець?

А. $\frac{7}{8}$. **Б.** $\frac{8}{15}$. **В.** $\frac{7}{15}$. **Г.** 1.

3° Знайдіть моду і медіану ряду чисел: 15, 14, 13, 13, 14, 13, 16.

А. 13 і 13. **Б.** 13 і 14. **В.** 14 і 14. **Г.** 14 і 13.

4 Яка ймовірність того, що парне двоцифрове число буде ділитися на 8?

А. $\frac{1}{3}$. **Б.** $\frac{1}{4}$. **В.** $\frac{11}{45}$. **Г.** $\frac{1}{2}$.

5* Скільки чотирицифрових парних чисел можна утворити із цифр 3, 6, 8, 9, 0, якщо всі цифри числа — різні?

А. 36. **Б.** 72. **В.** 120. **Г.** 60.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 1

ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ. НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

1 Чи може значення виразу $2b - 2a$, якщо $a < b$, дорівнювати:

1) 4; 2) -4; 3) 0; 4) $-(-0{,}1)^4$?

Розв'язання

1) Оскільки $a < b$, то $b > a$. Тоді $2b - 2a = 2(b - a) > 0$. А це означає, що значення виразу $2b - 2a$ може дорівнювати числу 4.

2 Дано: $-\frac{2}{3} \le a \le 2{,}5$. Оцініть значення виразу:

1) $3a + 2$; 2) $2a - 1$; 3) $2(1 - 3a)$; 4) $\frac{1-3a}{4}$.

Розв'язання

1) За умовою задачі, $-\frac{2}{3} \le a \le 2{,}5$. Помножимо обидві частини даної подвійної нерівності на додатне число 3. Знак нерівності при цьому не зміниться (теорема 3): $-\frac{2}{3}\cdot 3 \le 3a \le 2{,}5\cdot 3$, звідси $-2 \le 3a \le 7{,}5$. Далі додамо до обох частин нерівності число 2. Знак нерівності при цьому не зміниться (теорема 2): $-2+2 \le 3a+2 \le 7{,}5+2$, звідси $0 \le 3a+2 \le 9{,}5$.

3 Знайдіть об'єднання та переріз проміжків:

1) $[-2; 0)$ і $(-1; 3]$; 3) $(-1; +\infty)$ і $(3; 10)$;

2) $[-3; 1{,}5]$ і $[1{,}5; 2]$; 4) $[3; +\infty)$ і $(-2; 2]$.

Розв'язання

1) $[-2; 0) \cup (-1; 3] = [-2; 3]$; $[-2; 0) \cap (-1; 3] = (-1; 0]$.

4 Чи існують такі значення n, за яких:

1) $\frac{2}{3}n - n^2 - \frac{1}{9} > 0$; 2) $2n - 3n^2 - \frac{1}{3} > 0$; 3) $2n - 2n^2 - \frac{1}{2} > 0$.

Розв'язання

1) Перетворимо даний вираз:

$$\frac{2}{3}n - n^2 - \frac{1}{9} = -\left(n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}\right) = -\left(n - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Оскільки $\left(n - \frac{1}{3}\right)^2 \ge 0$ за будь-яких значень n, то $-\left(n - \frac{1}{3}\right)^2 \le 0$ за будь-яких значень n. Отже, не існує таких значень n, за яких значення данного виразу було б додатним.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 2

ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ.

1 Розв'яжіть нерівність:

1) $2(x-1)-3x>3+x$; 3) $2x-\frac{4x}{7}\geq 20$;

2) $5(1-x)+2x<11+x$; 4) $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}\leq 21$.

Розв'язання

1) Виконаємо рівносильні перетворення нерівності:

$$2(x-1)-3x>3+x,$$
$$2x-2-3x>3+x,$$
$$2x-3x-x>3+2,$$
$$-2x>5\ \Big|:(-2),$$
$$x<-2{,}5.$$

Отже, $x\in(-\infty;-2{,}5)$.

2 Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}2(x-1)>x+1,\\ 2x+1<7;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3(2-x)<4x-8,\\ \frac{x}{2}-1\leq 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2(1-x)-x\geq 8,\\ 3x-1\geq 0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3(2+3x)\geq 24,\\ \frac{x}{2}-\frac{x}{6}<1.\end{cases}$

Розв'язання

1) Спочатку виконаємо рівносильні перетворення кожної нерівності системи:

$$\begin{cases}2(x-1)>x+1,\\ 2x+1<7;\end{cases}\quad \begin{cases}2x-2>x+1,\\ 2x<7-1;\end{cases}\quad \begin{cases}2x-x>1+2,\\ 2x<6 \qquad \Big|:2;\end{cases}\quad \begin{cases}x>3,\\ x<3.\end{cases}$$

Як бачимо, нерівності даної системи не мають спільних розв'язків.

Отже, відповідь запишемо так: $\varnothing$.

3 Розв'яжіть нерівність:

1) $|2-x|\leq 2$; 3) $|7-3x|\leq -1$;

2) $|2x-1|\geq 3$; 4) $|3x-1|\leq 0$.

Розв'язання

1) Дана нерівність є нерівністю виду $|f(x)| \le a$, де a — додатне число, яка рівносильна подвійній нерівності $-a \le f(x) \le a$, тобто $-2 \le 2 - x \le 2$. Виконаємо рівносильні перетворення: $-2-2 \le -x \le 2-2$, $-4 \le -x \le 0 \,\big|\, \cdot(-1)$, $0 \le x \le 4$. Отже, множиною розв'язків нерівності $|2-x| \le 2$ є проміжок: $[0; 4]$.

4 Доведіть нерівності:

1) $4(a^3+b^3) \ge (a+b)^3$, де $a>0$, $b>0$;

2) $2a^2+b^2+c^2 \ge 2a(b+c)$, де a, b, c — будь-які числа;

3) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2} \ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, де $a>0$, $b>0$.

Розв'язання

1) Доведемо нерівність $4(a^3+b^3) \ge (a+b)^3$, де $a>0$, $b>0$. Розглянемо різницю лівої й правої частин нерівності та визначимо знак цієї різниці:

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3 =$$

$$=4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3 =$$

$$=(a+b)\left(4a^2-4ab+4b^2-(a+b)^2\right)=$$

$$=(a+b)\left(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2\right)=$$

$$=(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)=$$

$$=3(a+b)(a^2-2ab+b^2)=$$

$$=3(a+b)(a-b)^2.$$

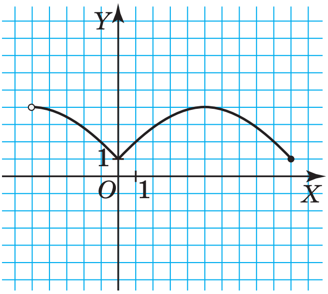
За умовою, $a>0$, $b>0$, тобто $a+b>0$. Оскільки $(a-b)^2 \ge 0$ для будь-яких a і b, то $3(a+b)(a-b)^2 \ge 0$. Це означає, що $4(a^3+b^3)-(a+b)^3 \ge 0$, звідси $4(a^3+b^3) \ge (a+b)^3$, що й треба було довести.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 3

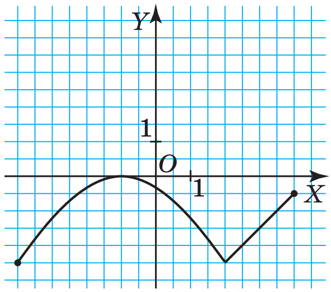
ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

Для функцій $y = f(x)$, графіки яких подано на малюнках 179–184, знайдіть:

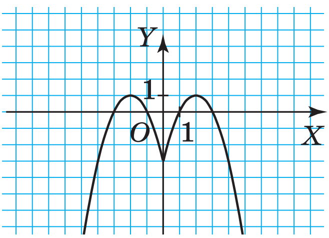
1) значення функції, якщо $x = -1$;
2) область визначення функції; область значень функції;
3) нулі функції;
4) проміжки зростання; проміжки спадання.



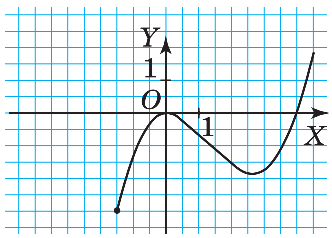
Мал. 179



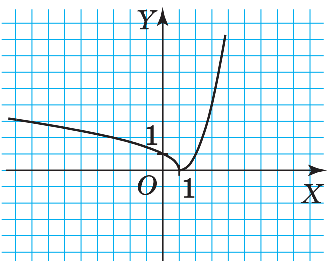
Мал. 180



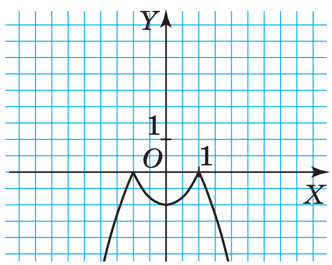
Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183



Мал. 184

Малюнок 179. **Розв'язання.**

1) Якщо $x = -1$, то $y = 2$. Отже, $y(-1) = 2$;
2) $D(f) = (-5; 10]$, $E(f) = [1; 4]$;
3) функція не має нулів;
4) функція зростає на проміжку $[0; 5]$, а спадає на проміжках $(-5; 0]$ і $[5; 10]$.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 4

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Дано функції:
1) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
2) $y = x^2 - 7$;
3) $y = -x^2 + 6x - 4$;
4) $y = 0{,}5x^2 + 4x$;
5) $y = -2x^2 + 4x - 7$;
6) $y = 3x^2 + 12x$.

Знайдіть:
а) значення функції, якщо $x = -2$;
б) координати вершини параболи;
в) область значень функції;
г) проміжки зростання; проміжки спадання.

Розв'язання

а) Підставляємо $x = -2$ у формулу, що задає функцію: $y = 2x^2 - 4x + 5$. Тоді одержуємо: $y(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 5 = 21$. Отже, $y(-2) = 21$.

б) Знайдемо координати вершини параболи.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4}, \quad x_0 = 1.$$

Тоді $y_0 = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 3$. Точка $(1; 3)$ — вершина параболи.

в) Оскільки $(1; 3)$ — вершина параболи, а вітки параболи напрямлені вгору, то область значень функції $E(f) = [3; +\infty)$.

г) Якщо вітки параболи напрямлені вгору, то функція зростає на проміжку $[1; \infty)$, а спадає на проміжку $(-\infty; 1]$.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 5

СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

1 Розв'яжіть графічно систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

Розв'язання

1) Р о з в' я з а н н я. У кожному рівнянні виразимо y через x:

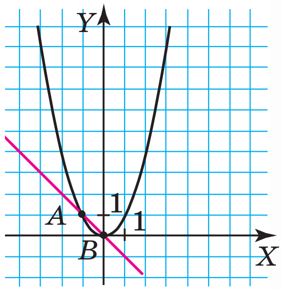
$$\begin{cases} y = -x, \\ y = x^2. \end{cases}$$

Графіком рівняння $y = -x$ є пряма.

x	0	−4
y	0	4

Графіком рівняння $y = x^2$ є парабола.

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	2



Мал. 185

Побудуємо графік кожного з рівнянь системи в одній системі координат (мал. 185).

Пряма й парабола перетинаються в точках $A(-1; 1)$ і $B(0; 0)$.

Отже, розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$ є дві пари чисел: $(-1; 1)$ і $(0; 0)$.

Відповідь: $(-1; 1)$ і $(0; 0)$.

2 Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 20, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = -2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Розв'язання

1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 - y, \\ (2 - y)^2 - y^2 = 0; \end{cases}$

$$4 - 4y + y^2 - y^2 = 0,$$
$$4 - 4y = 0,$$
$$4y = 4,$$
$$y = 1.$$

Якщо $y = 1$, то $x = 2 - y = 2 - 1 = 1$.

Отже, система рівнянь має розв'язок: $(1; 1)$.

Відповідь: $(1; 1)$.

3 Одне із чисел на 2 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює:

1) 80; 3) 255;
2) 120; 4) 360.

Розв'язання

1) Нехай x — перше число, а y — друге число.

За умовою, одне із чисел на 2 більше за друге число. Складаємо перше рівняння: $x-y=2$.

Добуток чисел дорівнює 80. Складаємо друге рівняння: $xy=80$.

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ xy=80. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=y+2, \\ (y+2)\cdot y=80, \end{cases}$$

$$y^2+2y-80=0,$$

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-80)=4+320=324,$$

$$y_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{324}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 18}{2},$$

$$y_1=8,\ y_2=-10.$$

Якщо $y_1=8$, то $x_1=8+2=10$;
якщо $y_2=-10$, то $x_2=-10+2=-8$.
Отже, система рівнянь має два розв'язки: (10; 8) і (–8; –10).
Відповідь: це числа 10 і 8 або –8 і –10.

4 Розв'яжіть задачу.

1) Із пункту A до пункту B одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з автомобілів була на 10 км/год більша за швидкість другого, тому він прибув до пункту B на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між пунктами 720 км.

2) Із пункту A до пункту B, відстань між якими становить 560 км, відправився автомобіль. Автомобіль їхав зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж було заплановано, тому прибув до пункту B на 1 год пізніше. З якою швидкістю їхав автомобіль?

Розв'язання

1) Нехай x — швидкість першого автомобіля й y — швидкість другого автомобіля.

За умовою, швидкість першого автомобіля на 10 км/год більша за швидкість другого автомобіля. Складаємо перше рівняння: $x - y = 10$.

Для складання другого рівняння заповнимо таблицю 34.

Таблиця 34

Вид транспорту	***v*, км/год**	***s*, км**	***t*, год**
1 автомобіль	x	720	$\frac{720}{x}$
2 автомобіль	y	720	$\frac{720}{y}$, на 1

За умовою, перший автомобіль долає шлях на 1 год швидше, ніж другий автомобіль. Складаємо друге рівняння:

$$\frac{720}{y} - \frac{720}{x} = 1.$$

Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 10, \\ \frac{720}{y} - \frac{720}{x} = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y + 10, \\ \frac{720}{y} - \frac{720}{y+10} = 1. \end{cases}$$

$$\frac{720}{y} - \frac{720}{y+10} - 1 = 0,$$

ОДЗ: $y \neq 0$, $y \neq -10$.

$$\frac{720 \cdot (y+10) - 720 \cdot y - y \cdot (y+10)}{y(y+10)} = 0,$$

$$720(y+10) - 720y - y(y+10) = 0,$$

$$720y + 7200 - 720y - y^2 - 10y = 0,$$

$$y^2 + 10y - 7200 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7200) = 100 + 28800 = 28900,$$

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 5

$$y_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{28900}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 170}{2},$$

$y_1 = 80$, $y_2 = -90$.

Перевіркою встановлюємо, що обидва числа входять до ОДЗ, а отже, є коренями рівняння. Але число -90 не задовольняє умову задачі.

Якщо $y = 80$, то $x = y + 10 = 80 + 10 = 90$.

Одержали, що $x = 90$ і $y = 80$. Отже, швидкість першого автомобіля становить 90 км/год, а швидкість другого — 80 км/год.

Відповідь: швидкість першого автомобіля становить 90 км/год, а швидкість другого — 80 км/год.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 6

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

1 Знайдіть другий член послідовності, яку задано:
1) формулою n-го члена $a_n = 3n - 1$;
2) формулою n-го члена $b_n = -2 \cdot 3n$;
3) рекурентною формулою: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$;
4) рекурентною формулою: $b_1 = -12$, $b_{n+1} = a_n \cdot 2$.

Розв'язання

1) Знайдемо другий член послідовності. Для цього застосуємо формулу $a_n = 3n - 1$, тоді:

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

Відповідь: 5.

2 Послідовність (a_n) — арифметична прогресія, $a_1 = 2{,}5$, $d = 1{,}5$. Знайдіть:
1) a_{16}; 2) a_{25}; 3) a_{101}; 4) a_n.

Розв'язання

1) Застосуємо формулу n-го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \text{ тоді:}$$

$$a_{16} = a_1 + 15d = 2{,}5 + 15 \cdot 1{,}5 = 2{,}5 + 22{,}5 = 25.$$

Відповідь: 25.

3 Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) (a_n) : 5; 9; 13;...;
2) $a_1 = -2$ і $d = 6$;
3) $a_1 = 10$ і $a_{10} = -17$;
4) $a_3 = 8$ і $a_5 = 20$.

Розв'язання

1) Для даної арифметичної прогресії:

$a_1 = 5$ і $d = a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$.

Тепер обчислимо суму 10-ти перших членів. Для цього скористаємося формулою суми n перших членів арифметичної прогресії через a_1 і d: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 5 + 9 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 230.$$

Відповідь: 230.

4 Послідовність (b_n) — геометрична прогресія, $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$. Знайдіть:

1) b_4; 2) b_5; 3) b_8; 4) b_n.

Розв'язання

1) Застосуємо формулу n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$:

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 16 \cdot \frac{1}{8} = 2.$$

Відповідь: 2.

5 Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) (b_n) : 5; 10; 20;...; 3) $b_1 = 0{,}5$ і $b_5 = 8$;
2) $b_1 = -2$ і $q = 3$; 4) $b_2 = -4$ і $b_4 = -16$.

Розв'язання

1) Для даної геометричної прогресії:

$b_1 = 5$ і $q = b_2 : b_1 = 10 : 5 = 2$.

Тепер обчислимо суму 5-ти перших членів. Для цього скористаємось формулою суми n перших членів геометричної прогресії через b_1 і q: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{5 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 155.$$

Відповідь: 155.

ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 7

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

1 У 7-му класі навчається 23 учні, у 8-му класі — 22 учні, у 9-му й 10-му класах — по 25 учнів, в 11-му класі — 20 учнів. Скількома способами можна утворити команду для участі в змаганнях, якщо до команди мають увійти:
1) один учень старшої школи й один учень основної школи;
2) один учень із 10-го класу й один учень із 11го класу;
3) один учень із 8-го класу й один учень із 9-го класу;
4) по одному учню з 7–9-х класів;
5) один учень з 10-го класу або один учень з 11-го класу;
6) один учень старшої школи або один учень основної школи;
7) один учень з 10-го класу й один учень з 9-го класу або один учень з 11-го класу й один учень з 8-го класу?

Розв'язання

1) Одного учня старшої школи можна вибрати 25 + 20 = 45 (способами), одного учня основної школи можна вибрати 23 + 22 + 25 = 70 (способами). Отже, команду можна утворити 45 · 70 = 3150 (способами).

2 Оленка задумала складене двоцифрове число від 35 до 54. Яка ймовірність того, що це число:
1) ділиться на 3; 2) парне; 3) ділиться на 5; 4) дорівнює 33?

Розв'язання

1) Від 35 до 54 міститься 20 натуральних чисел, із них 15 — складені, решта 5 чисел — прості, тому $n = 15$. Серед даних складених чисел на 3 діляться такі: 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, тобто $m = 7$. Отже, ймовірність того, що Оленка задумала число від 35 до 54, яке ділиться на 3, дорівнює: $p = \frac{m}{n} = \frac{7}{15}$.

3 Із скриньки, у якій знаходяться 11 зелених, 8 блакитних та 6 жовтих кульок, Сергійко навмання вийняв одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька:
1) зелена; 2) блакитна; 3) жовта; 4) червона?

Розв'язання

1) Оскільки зелених кульок є 11, то $m = 11$, а всього кульок: $n = 11 + 8 + 6 = 25$. Тоді, ймовірність того, що Сергійко вийняв зелену кульку, дорівнює: $p = \frac{m}{n} = \frac{11}{25} = 0,44$.

4 Знайдіть середнє значення, моду, медіану ряду чисел та побудуйте діаграму:
1) 2, 4, 3, 3, 4, 5, 1, 6, 6, 4;
2) 10, 7, 10, 10, 9, 11, 10, 8, 6;
3) 20, 15, 10, 10, 20, 15, 15, 15;
4) 22, 23, 23, 27, 21, 28, 24.

Розв'язання

1) Запишемо варіаційний ряд:
1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6.
Обсяг вибірки: $n = 10$.
Визначимо середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3\cdot2+4\cdot3+5+6\cdot2}{10} = 3{,}8.$$

Найчастіше зустрічається число 4. Отже, $Mo = 4$.

Вибірка містить парну кількість членів, тому $Me = \frac{4+4}{2} = 4$.

5 Розв'яжіть задачу.

1) Показники лічильника електроенергії в родині Сидоренків із січня по травень становили: 100 кВт-год, 210 кВт-год, 120 кВт-год, 150 кВт-год і 180 кВт-год. Визначте середньомісячні витрати електроенергії в родині Сидоренків.

2) За тиждень на харчування в родині Сидоренків було витрачено: 120 грн, 150 грн, 100 грн, 120 грн, 145 грн, 200 грн, 250 грн. Визначте середньодобові витрати коштів на харчування в родині Сидоренків.

Розв'язання

1) Показники лічильника електроенергії утворюють статистичний ряд: 100, 210, 120, 150, 180.

Обсяг вибірки: $n = 5$.

Визначимо середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{100+210+120+150+180}{5} = 152.$$

Отже, середньомісячні витрати електроенергії в родині Сидоренків становлять 152 кВт-год.

ВІДПОВІДІ

РОЗДІЛ 1

§ 1

6. 1) Так; 3) так; 5) так. **7.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **10.** 2,223 — найменше число, 3,32 — найбільше. **13**. 1) a; 3) $a = c$; 5) a; 7) a; 9) a. **14**. 1) a; 2) $a = b$; 3) a; 4) a. **15**. 1) Ні; 3) ні; 5) ні. **16**. 1) Так; 3) ні; 5) ні. **17**. 1) Ні; 3) так; 5) ні. **18**. 1) B; 3) B; 5) A. **19**. 1) N; 3) N; 5) N. **20**. 1) D; 3) C; 5) C. **21.** 1) $3a > 3b$; 2) $-5a < -5b$; 3) $0{,}1b < 0{,}1a$; 4) $\frac{2a}{3} > \frac{2b}{3}$; 5) $-\frac{4}{7}b > -\frac{4}{7}a$; 6) $\sqrt{3}a > \sqrt{3}b$. **22.** 1) $m + 2 < 2 + n$; 2) $m - 5 < n - 5$; 3) $2m + 1 < 2n + 1$; 4) $-5m + 7 > 7 - 5n$. **23.** $3x - 1 < -1 + 3y$; 2) $-4y + 5 > 5 - 4x$. **26.** 1) <; 2) >; 3) <; 4) >; 5) >; 6) <. **27.** 1) >; 2) <. **31.** 1) якщо $a > 0$, то $a^2 < ab$; якщо $a < 0$, то $a^2 > ab$. **33**. 1) $-1 < \frac{1-\sqrt{6}}{2} < 0$; 2) $-2 < \frac{1-\sqrt{39}}{4} < -1$; 3) $6 < 2+\sqrt{17} < 7$. **36.** 1) $x \neq 1$; 2) будь-які числа; 3) будь-які числа. **37.** 1) $x = 1$ та $x = 0{,}2$; 2) $x = 0$, $x = 1$, $x = -\frac{1}{3}$; 3) $x = 0{,}5$.

§ 2

42. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) так. **43**. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. **44**. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні. **45**. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) так. **46.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні. **47.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **48.** 1) $10 \le 2a \le 16$; 2) $7 \le a+2 \le 10$; 3) $3 \le a-2 \le 6$; 4) $-6 \le 2-a \le -3$. **49.** 1) $6 \le 2b \le 10$; 2) $-15 \le -3b \le -9$; 3) $0{,}6 \le \frac{b}{5} \le 1$; 4) $9 \le b^2 \le 25$. **50.** 1) $6 \le 3x \le 18$; 2) $5 \le x+3 \le 9$; 3) $-18 \le -3x \le -6$; 4) $4 \le x^2 \le 36$. **51.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. **52.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) ні. **53.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **54.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **55.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **56.** 1) $0 \le 2a-1 \le 5{,}4$; 2) $3{,}5 \le 3a+2 \le 11{,}6$; 3) $0{,}5 \le 5a-2 \le 14$. 4) $-28 \le 4-10a \le -1$; 5) $-3{,}4 \le 3-2a \le 2$. **57**. 1) $1{,}6 \le 3b-2 \le 5{,}5$; 3) $-22 \le 3-10b \le -9$. **58**. 1) $0 \le 2a+b \le 11$; 3) $-9 \le 5a+2b \le 5$; 5) $0{,}5 \le \frac{a+b}{2} \le 4$; 7) $\frac{2}{3} \le \frac{b-a}{3} \le 1$; 9) $-2 \le a \cdot b \le 15$; 11) $0 \le \frac{4a+2b}{11} \le 2$. **59.** 1) $1 \le 2y+x \le 10$; 3) $0 \le y-2x \le 3$; 5) $\frac{y-x}{2} = 0{,}5$; 7) $-6 \le 2x \cdot 3y \le 48$. **61.** $11{,}2 \le P \le 12{,}6$; $7{,}75 \le S \le 9{,}8$. **63**. 1) $-3 \le x \le 3$; 3) $-4 \le x \le 1$; 5) $\frac{4}{3} \le x \le 2$. **65**. 3 пачки клею. **67.** 1) 24; 2) 10. **68.** 1) –1 та 2; 2) $\frac{1}{3}$ та 3; 3) –4,75 та 5,25.

§ 3

76. 1) а)Так; б) ні; в) ні; г) так; 2) а) ні; б) так; в) ні; г) ні; 3) а) так; б) ні; в) ні, г) так; 4) а) так; б) так; в) так; г) ні. **77.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **78.** 1) Ні; 2) ні;

3) так; 4) ні. **81.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **82.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **83.** 1) 0; 1; 2; 2) –1; 0; 1; 2; 3) –1; 0; 1; 2; 3; 4) 0; 1; 2; 3. **84.** 1) 4 та 0; 2) 5 та –1; 3) 5 та –1; 4) 6 та 0. **85.** 1) –1; 0; 1; 2) –2; –1; 0; 1; 3) –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4) –1; 0; 1; 2; 3. **86.** 1) $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$; 3) $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{13}{4}$. **87.** 1) $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$. **88.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **89.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **90.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **91.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **92.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **93.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **94.** Якщо $a = -1$: $x \in (-5; 1)$; якщо $a = 0$: $x \in (-2; 3)$; якщо $a = 1$: $x \in (1; 5)$; якщо $a = 2$: $x \in (4; 7)$. **95.** Якщо $a = 0$: $x \in (-1; 1)$; якщо $a = 1$: $x \in (1; 4)$; якщо $a = 2$: $x \in (3; 7)$. **96.** 1) $(a; c)$; 3) $(a; c)$; 5) $(a; +\infty)$; 7) $(a; b) \cup (c; +\infty)$. **97.** 1) $(a; c)$; 3) $(a; d) \cup (b; c)$; 4) $\varnothing$; 5) $(a; c)$; 7) $(a; b) \cup (c; +\infty)$. **98.** 1) $(x; t) \cup (z; y)$; 2) $\varnothing$; 3) $(t; z)$. **104.** 1. **105.** 65.

§ 4

111. 1) $x > 2$; 2) $x > 1{,}25$; 3) $x > -2$; 4) $x > -1\frac{2}{3}$; 5) $x < 0$; 6) $x < -1\frac{1}{3}$; 7) $x < 4$; 8) $x < 1{,}75$; 9) $x < -3$; 10) $x > -2{,}4$; 11) $x > -7$; 12) $x > -4\frac{1}{3}$. **112.** 1) $x > 5$; 3) $x < 3{,}25$; 5) $x < -2\frac{7}{9}$. **113.** 1) $x \geq 2{,}5$; 3) $x \geq -3\frac{1}{3}$; 5) $x \leq -13$; 7) $x \leq 0$; 9) $x \leq -3{,}2$; 11) $x \geq -4{,}5$. **114.** 1) $x \geq 2{,}2$; 3) $x \leq -7\frac{2}{3}$; 5) $x \leq -6{,}5$. **115.** 1) $x \geq 100$; 2) $x \leq 25$; 3) $x \leq 10$; 4) $x < -20$; 5) $x \leq -7$; 6) $x > 6$; 7) $x \leq 3{,}2$. **116.** 1) $x < 30$; 3) $x \geq -14$. **117.** 1) $x > -3\frac{2}{3}$; 3) $x < 4\frac{5}{7}$. **118.** 1) $x > 1\frac{2}{3}$; 3) $x \leq 2\frac{3}{8}$; 5) $x > \frac{1}{3}$. **119.** 1) $x > -1{,}6$; 2) $x > 1\frac{3}{7}$; 3) $x > 1\frac{5}{8}$. **120.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **121.** 1) $x > 1{,}5$; 3) $x < -1$; 5) $x < 1{,}8$; 7) $x > -16$. **122.** 1) $x \leq 6$; 3) $x \geq -1$. **123.** 1) $a < 6$; 3) $a < -6$. **124.** 1) $b < 0{,}8$; 3) $b < 5$. **125.** 1) $x > 1{,}2$; 3) $x > 6{,}4$; 5) $x > -\frac{5}{23}$. **126.** 1) $\varnothing$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **127.** 1) $x > 2\frac{3}{11}$; 2) $x < 15$. **128.** 1) $x \leq \frac{5}{11}$; 3) $x > 2$. **129.** 1) $x \geq 3$; 2) $x \geq 3$; 3) x — будь-яке число; 4) $\varnothing$; 5) $x \leq -1$. **130.** 1) $x \leq 8$; 2) $x < 3\frac{1}{6}$; 3) $x \geq -2{,}5$. **137.** $a = -6$. **138.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$.

§ 5

139. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **140.** 1) 0; 1; 2) –1; 0; 3) 0; 1; 4) –1; 0; 1. **142.** 1) [1; 5]; 3) [–3; 2]; 5) $(-\infty; 1]$; 7) $(-\infty; -3)$. **143.** 1) [2; 6); 3) [–4; 4]; 5) [–2; 3). **144.** 1) [1; 4]; 3) [2; 5]. **145.** 1) [2; 2,5); 3) $[-0{,}5; +\infty)$; 5) [0; 2); 7) $(-\infty; -4{,}5)$; 9) $(2; +\infty)$. **146.** 1) (0,1; 0,3); 3) $(-\infty; 2]$. **147.** 1) $\varnothing$; 2) [0,5; 1,5); 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$. **148.** 1) {–3}; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **149.** 1) $(-\infty; -12)$; 3) [–4; –2]. **150.** 1) [5; 6); 2) $(-\infty; 2]$. **151.** 1) [2; 7]; 3) [–4; –1]. **152.** 1) [–11; 3]; 3) [–1,5; 0].

153. 1) $(-\infty; 6]$; 3) $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **154.** 1) $[-4; 1]$; 2) $[14; +\infty)$. **155.** 1) $[-10; -1]$; 3) $(4,5; 6,5)$. **156.** 1) $[1; 6,6]$; 2) $[-2,4; 4,25]$. **157.** 1) 0; 1; 2; 2) –1; 0; 1; 2; 3) 3; 4. **158.** 1) $[-4; 4]$; 3) $\varnothing$; 5) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **159.** 1) $[-1; 2]$; 3) $(-\infty; -2] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 5) $[0,25; +\infty)$. **161.** 1) $\varnothing$; 2) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **162.** 1) $\{-1\}$; 3) $[-5; 1]$. **163.** 1) а) $a \le 5$; б) $a > 5$; 3) а) $a < 5$; б) $a \ge 5$. **165.** 9 відер. **166.** 1) 5; 6; 2) –3; 1. **167.** 2,5 кг олова.

РОЗДІЛ 2

§ 6

170. Так. **173.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **174.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **175.** 1) 14; 2) 6; 3) 0; 4) –6; 5) –4. **178.** 2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 4) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 5) $D(f) = (-\infty; -10) \cup (-10; 10) \cup (10; +\infty)$; 8) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 9) $D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$. **179.** 1) $D(f) = (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$; 2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 3) $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; 4) $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; 5) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 6) $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$; 7) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 8) \cup (8; +\infty)$; 8) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 8) \cup (8; +\infty)$. **184.** 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $E(f) = [0; +\infty)$; 3) $x = 0$; 4) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **186.** Мал. 54: 1) $D(f) = [-2; 1)$; 2) $E(f) = [0; 4,5]$; 3) $x = 0$; 4) $y > 0$, якщо $x \in [-2; 0) \cup (0; 1)$; 5) $x \in [-2; 0]$ — проміжок спадання; $x \in [0; 1)$ — проміжок зростання; 6) 4,5 — найбільше значення функції, 0 — найменше значення функції. **187.** Мал. 56: 1) $D(f) = [-2; 2]$; 2) $E(f) = [-4; 0]$; 3) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$; 6) 0 — найбільше значення функції, –4 — найменше значення функції. **192.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) спадна; 4) спадна. **193.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) спадна; 4) спадна. **197.** Таблиця 36.

Таблиця 36

x	–9	–3	–2	0	1	2	4	8
$y(x)$	1	3	5	1	5	10	20	40

198. Таблиця 37.

Таблиця 37

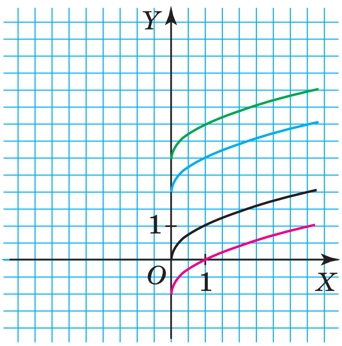
x	–6	–4	–3	0	1	4	9	16
y	$\frac{6}{7}$	0,8	–2	1	2	–2	–3	–4

200. 1) $D(f) = (1; +\infty)$; 3) $D(f) = [4, +\infty)$; 5) $D(f) = \varnothing$; 6) $D(f) = (1; +\infty)$; 7) $D(f) = \varnothing$; 9) $D(f) = (-6; -4) \cup (-4; +\infty)$; 11) $D(f) = \{0\}$; 13) $D(f) = [0; 2]$.

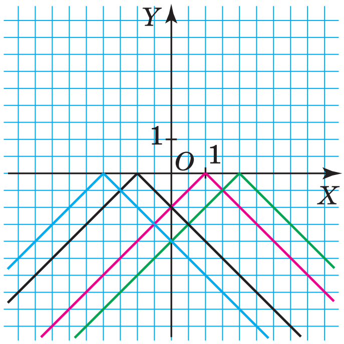
201. 1) $D(f)=[7;+\infty)$; 2) $D(f)=[8;10]$; 3) $D(f)=\{1\}$; 4) $D(f)=(-3;3)$. **206.** 1) $x = 1$, $x = -5$; 4) $x = 0$, $x = 9$; 5) $x = -2$, $x = 2$; 6) $x = 5$; 7) $x=\pm\sqrt{6}$; 8) $x = 3$; 11) $x = -2$; 12) не має. **207.** 1) $x=-2$, $x=1$; 2) $x=1$; 3) $x=0$, $x=8$; 5) $x = -6$; 6) не має; 7) не має; 8) $x = -3$. **215.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 5) 2. **216.** 1) $E(f)=(-\infty;0]$; 2) $E(f)=\{0\}$; 3) $E(f)=\{0\}$; 4) $E(f)=\{1\}$. **221.** Якщо $a = -0{,}5$, то не має нулів, якщо $a \neq -0{,}5$, то функція має один нуль. **222.** Якщо $a = 1$, то функція має один нуль, якщо $a \neq 1$, то функція має два нулі.

§ 7

228. 1); 3). **229.** 1). **230.** 1). **231.** 1). **233.** 1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$; 2) $E(f)=(-\infty;0]$; 3) $x=0$; 5) $x\in(-\infty;0]$, $x\in[0;+\infty)$. **234.** 1) $y = \frac{1}{4}|x|$. **235.** 1) $y = 2\sqrt{x}$. **239.** 1) $y=|x|+4$; 2) $y=|x|-2$; 4) $y=|x-9|$. **240.** 1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=\sqrt{x}-10$; 3) $y=\sqrt{x-12}$. **243.** 1) (–1; 5); 2) (2; 4); 3) (–6; –3). **245.** Мал. 193. **248.** Мал. 194.

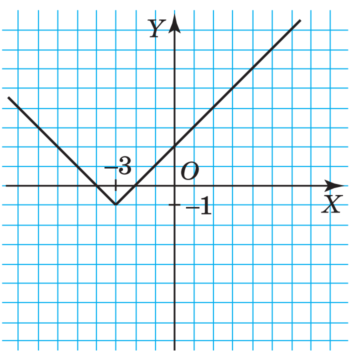


Мал. 193

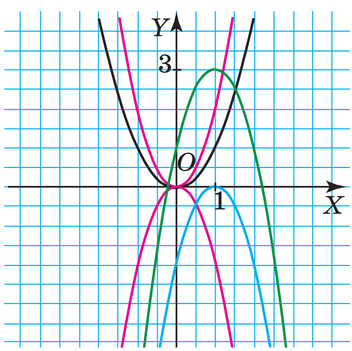


Мал. 194

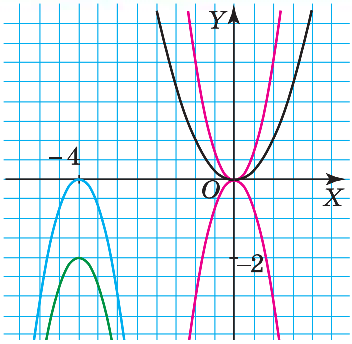
250. 3) Мал. 195. **251.** Мал. 196. **252.** Мал. 197. **255.** Мал. 198.



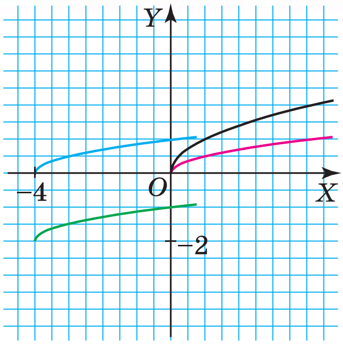
Мал. 195



Мал. 196

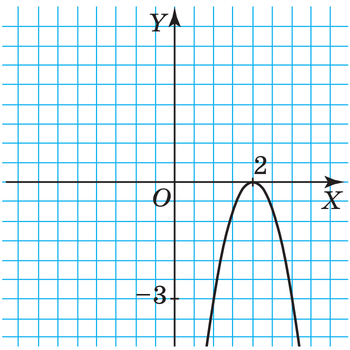


Мал. 197

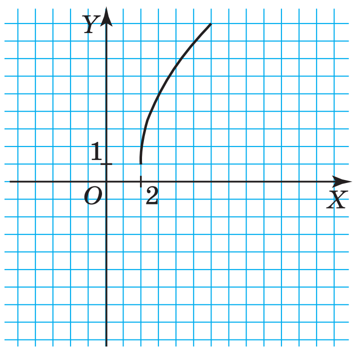


Мал. 198

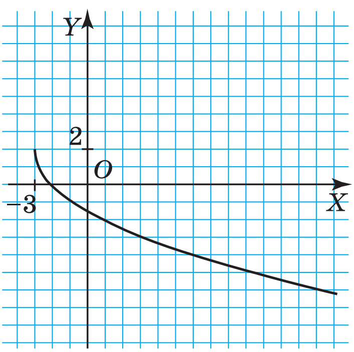
257. $y = -|x + 3|$ (мал. 86), $y = |x - 3| + 2$ (мал. 87). **258.** $a = 3$ (мал. 88). **259.** $a = 0{,}5$ (мал. 90). **261.** $y = 2|x| - 2$ (мал. 95). **263.** 1) $y = x^2 + 3$. **265.** 1) $y = -\dfrac{3}{x} + 4$; 3) $y = -\dfrac{3}{x-7} - 7$. **269.** 1) $y = x^2 - 4$. **271.** 1) Мал. 199. **273.** 1) Мал. 200; 2) мал. 201. **275.** 1) 4; 3; 6; 2) 9; 8; 5. **276.** 1) 2; 6; –10. **277.** 6) мал. 202.



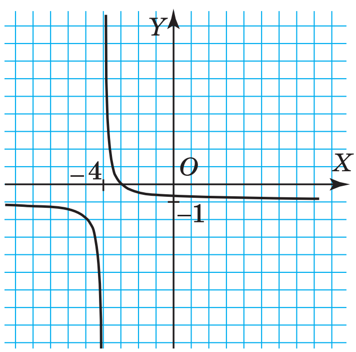
Мал. 199



Мал. 200

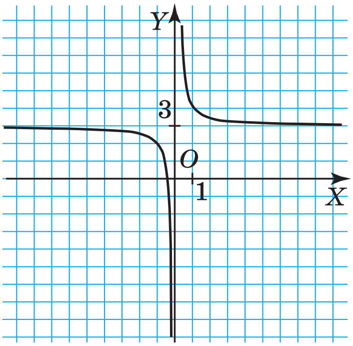


Мал. 201

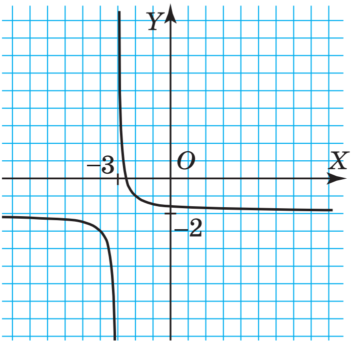


Мал. 202

278. 1) Мал. 203; 4) мал. 204.

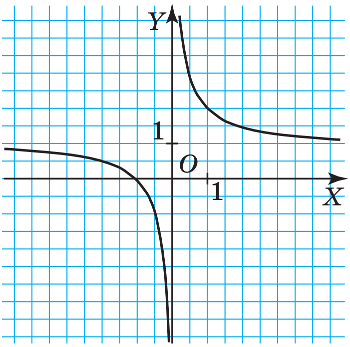


Мал. 203

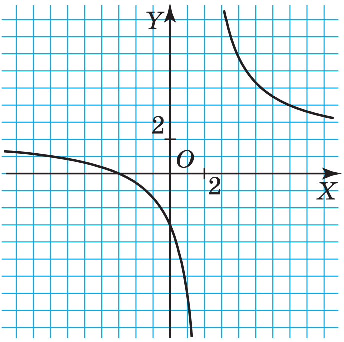


Мал. 204

280. 1) Мал. 205; 4) мал. 206.

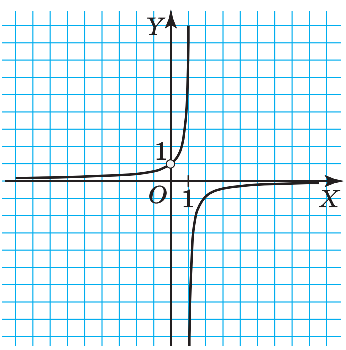


Мал. 205

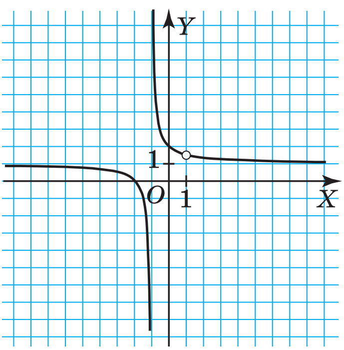


Мал. 206

284. $y = 3|x+3| - 3$. 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $E(f) = [-3; +\infty)$; 3) $x = -4$, $x = -2$.
287. 1) Мал. 207; 2) мал. 208. **289.** 1) $a^{28}c^{-4}$; 2) a^{74}; 3) $x^{65}y^{-18}$.



Мал. 207

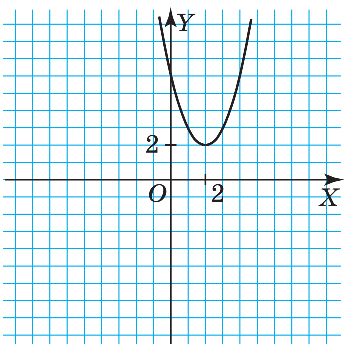


Мал. 208

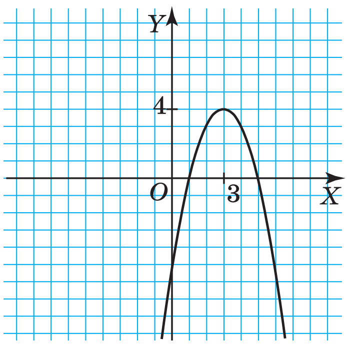
§ 8

292. 3). **293.** 2). **295.** 3); 4). **296.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні; 7) так; 8) так; 9) ні; 10) так. **297.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. **298.** 1) Так; 2) ні; 4) так. **299.** 1) 0; –5; 27; –8. **300.** 1) 2; 1; –7; –14; 2) $\pm\sqrt{2}$; ±2; $\pm\sqrt{13}$. **301.** 1), 5), 6). **302.** 1). **303.** 1) $x_1 = -5, x_2 = 1$; 2) $x_1 = -1, x_2 = 8$; 3) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$.

304. 1) (0; 0), (4; 0); 11) (–0,5; 0), ($\frac{1}{3}$; 0), (0; 1); 12) (0,5; 0), (5; 0), (0; 5). **305.** 1) (0; 0), (9; 0); 2) (–8; 0), (8; 0), (0; –64); 3) (0; 2); 7) (1; 0), (1,5; 0), (0; 3). **306.** 1) $(2; -4)$; 3) $(0; 3)$; 8) $(4; -43)$. **307.** 1) (6; –36); 2) $(0; 5)$; 3) $(0; -2)$; 6) $(-2; 23)$. **308.** Мал. 109: 1) (2; 1); 2) (1; 0), (3; 0), $(0; -3)$; 3) $y > 0$, якщо $x \in$ (1; 3), $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **309.** Мал. 111: 1) (–4; –16); 2) (0; 0), (–8; 0); 3) $y > 0$, якщо $x \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$, $y < 0$, якщо $x \in (-8; 0)$. **313.** Мал. 115: 1) $x_1 = -2, x_2 = 2$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0]$; 5) найбільшого значення функція не досягає, найменше значення функції дорівнює –4 при $x = 0$. **315.** 1) –1; 0; 0; 2) –1 і 0,75; 1 і –1,25. **316.** 1) $m = 1$, $n = 0$; 2) $m = 0$, $n = -4$. **317.** 1) $p = -9$, $q = 0$; 2) $p = 0$, $q = -25$. **320.** а) Мал. 209. 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $E(f) = [2; +\infty)$; 3) не має; 5) $x \in (-\infty; 2]$. 2. Мал. 210. 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 2) $E(f) = (-\infty; 4]$; 3) $x_1 = 1, x_2 = 5$.



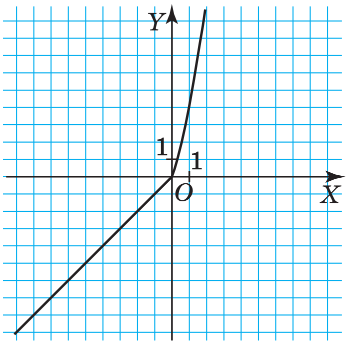
Мал. 209



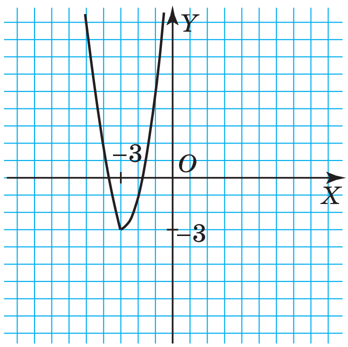
Мал. 210

322. 1) $m > \frac{1}{4}$; 2) $m = -1$; 3) $m = 4$; 4) $m = 6$. **323.** Мал. 117: $a < 0, D > 0$. Мал. 118: $a > 0, D > 0$. **327.** 1) –1; 2) 1. **328.** Малюнок 121: $a < 0, b < 0, c = 0$. Малюнок 122: $a > 0, b < 0, c < 0$. **329.** Малюнок 123: $a > 0, b < 0, c = 0$. Малюнок 124: $a < 0, b < 0, c < 0$. **330.** 1) (–1; 5); 3) (0; 0), $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **331.** 1) (2; 0); 3) (0; 0), (4; 0). **335.** 1) $y(3) > y(5)$; 2) $y(-1{,}5) > y(5)$; 3) $y(-2{,}7) < y(0{,}9)$; 4) $y(-2) < y(3)$. **336.** 1) $y(0) < y(1{,}5)$; 2) $y(-2) < y(-5)$; 3) $y(-6) = y(1)$. **338.** 1) $a = 1\frac{1}{4}, b = -5, c = 10$. **339.** 1) $b = -8, c = 16$; 2) $b = 0, c = -5$. **340.** 1) $b = -10, c = 25$; 2) $b = -8, c = 13$. **341.** Малюнок 127: $a = 1, b = 0, c = 0$. Малюнок 128: $a = 1, b = 4, c = 5$. **343.** 1) (0; 1), (1; 2); 3) (–1; –4), (1; 0).

345. 1) Мал. 211; 3) мал. 212.

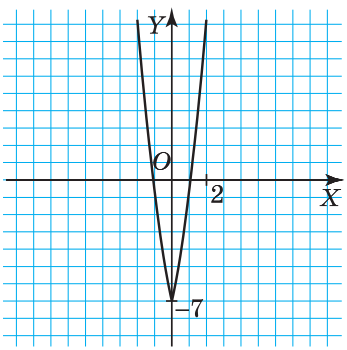


Мал. 211

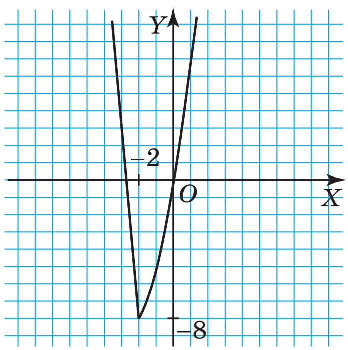


Мал. 212

346. 1) Мал. 213; 3) мал. 214.



Мал. 213



Мал. 214

348. $y = -2x^2 + 2$. **350.** 24 см^2. **351.** Знизиться на 25 %.

§ 9

356. 1) Так; 2) так; 5) ні. **357.** 1) Так; 2) так; 3) так. **358.** $x \in (-6;\ 1)$. **359.** $x \in (1;\ 3)$. **361.** $x \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$. **362.** 1) $x \in [-11;\ 11]$; 2) $x \in (-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$; 5) $\varnothing$; 6) $x \in (-\infty; +\infty)$; 7) $x \in (0; 7)$; 9) $x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. **363.** 1) $x \in [-5; 5]$; 2) $x \in (-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$; 5) $x \in (-7; 7)$. **364.** 1) $x \in (-\infty; -6) \cup (3;\ +\infty)$; 2) $x \in (-2;\ 5)$; 3) $x \in [-2;\ 6]$; 7) $x \in (-2;\ 8)$; 10) $x \in [3;\ 7]$; 14) $x \in (-6;\ 2)$. **365.** 1) $x \in [-3;\ -1]$; 3) $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$; 8) $x \in [-8; 1]$. **366.** 1) $x \in (-\infty; 1) \cup (2{,}25; +\infty)$. **367.** 1) $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$; 2) $x \in \left[-4; \frac{1}{3}\right]$; 3) $x \in (-1; 0{,}4)$; 4) $x \in \left[\frac{1}{11}; 1\right]$; 6) $x \in [0{,}5; 5]$. **371.** 1) $x \in (-\infty; 3) \cup (3;\ +\infty)$; 2) $x \in [-5;\ 1]$; 4) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **372.** 1) $x \in [-0{,}25;\ 1)$; 2) $y \in [3; 7]$; 3) $x \in (3; 4)$; 4) $y \in (-9; 1)$. **373.** 1) $x \in (-2; 8)$; 2) $y \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$;

4) $y\in(-\infty;4]\cup[6;+\infty)$. **374.** 1) $x\in\left(-1;3\frac{1}{4}\right)$; 3) $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right]$. **376.** 1) 7; 2) 5. **377.** 1) 8; 2) безліч. **379.** 1) 2; 2) 1. **381.** 1) $x \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. **382.** 1) $x \in (0,5; 1)$. **383.** 1) $x \in (-5; 2]$; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 4) $x \in (-4; 0] \cup [2; 4)$. **389.** $x\in\left(\frac{1}{5};1\right)$. **391.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$. **392.** 2) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$. **393.** 2) Якщо $a = 0$, то $x\in(-\infty;1]$, якщо $a = -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$, якщо $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$, то $x \in \left[-\frac{1}{a};1\right]$, якщо $a\in(-1;0)$, то $x \in \left[1;-\frac{1}{a}\right]$. **394.** $a\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$. **395.** $a\in(-\infty;1]\cup[7;\infty)$. **396.** $a\in(-7;-6]\cup(-2;-1)$. **400.** 1) (11; –2); 4) (–1; 2).

§ 10

407. 1) (–1; 1), (3; 9); 2) (–2; –4), (3; 1); 3) (3; 2); (–3; –2),; 4) (4; 3). **408.** 1) (–2; 4), (1; 1); 2) (–2; –4), (2; 4). **409.** 1) (1; –1), (–1; –3); 2) (–4; 2), (–1; 3); 3) (2; 1), $\left(2\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$; 4) $\left(\frac{2}{3};4\frac{1}{3}\right)$, (6; –1); 5) (2; 2), $\left(1\frac{1}{3};2\frac{2}{3}\right)$; 6) (1; 2), $\left(\frac{4}{11};3\frac{10}{11}\right)$; 7) (3; 2); 8) (1; –1), $\left(-2\frac{2}{3};\frac{5}{9}\right)$. **410.** 1) (2; 2), (4; –2); 2) (–2; 1), (0,25; 7,75); 3) (1; 5), $\left(-\frac{5}{11};2\frac{1}{11}\right)$; 4) (2; –6), $\left(-1\frac{1}{2};-4\right)$. **411.** 1) (–2; 8), (8; –2); 2) (–1; 7), (7; 1); 3) (1; 3), (3; –1); 4) (–2; 1), (2; –1); 5) (–1; –8), (5; 4); 6) (–1; –5), (2; 4); 7) (0; 0), (–2,4; 4,8); 8) (4; –3), (17; 10). **412.** 1) (1; 8), (8; 1); 2) (–2; –5), (5; 2); 3) (–2; –1), $\left(2\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$; 4) (1; 4), (6,5; –1,5). **413.** 1) (–5; 0), (0; 5); 2) (1; 0), (0; 1); 3) (0; 1); 4) розв'язків немає. **414.** 1) (0; 4), (4; 0); 2) (–1; 0), (0; 1). **415.** 1) (1; 4), (4; 1); 2) (–2; –9), (9; 2); 3) (–3; 1), (3; –1), (–1; 3), (1; –3); 4) (–5; –3), (–3; –5), (3; 5), (5; 3); 5) (–7; 1), (7; –1), (1; –7), (–1; 7); 6) (–2,5; –2), (–1; –5), (1; 5), (2,5; 2); 7) (–2; –5), (5; 2); 8) (1; 3), (3; 1). **416.** 1) (1; 7), (7; 1); 2) (–3; –2), (–2; –3), (2; 3), (3; 2); 3) $\left(-1\frac{2}{3};-3\right)$, (–1; –5), (1; 5), $\left(1\frac{2}{3};3\right)$; 4) (1; 2), (2; 1). **417.** 1) (2; 3), (3; 2), $\left(-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7}\right)$, $\left(-2+\sqrt{7};-2-\sqrt{7}\right)$; 2) (–4; –3), (–4; 2), (3; –3), (3; 2); 3) (1; 2), (2; 1); 4) (1; 2), (–1; –2), (2; 1), (–2; –1); 5) (2; 3), (3; 2); 6) (1; 3), (3; 1). **418.** 1) (–4; 2), (2; –4); 2) (–1; –2), (–1; 1), (2; 1); 3) (1; 4), (4; 1); 4) (1; –3), (3; –1). **419**. 1) $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$; 2) (2; 3), (3; 2); 3) (–2; 3), (1; –1,5); 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right)$. **420**. 1) 4; 2) 4; 3) 9; 4) 8,5. **421**. 1) (2; –1; 3), (–3; 4; –2); 2) (–1; –2; –3), (1; 2; 3); 3) (2; 1; –1), $\left(2\frac{1}{15};1\frac{2}{15};-\frac{2}{3}\right)$; 4) (–4; –3; 1), (4; 3; –1). **422**. 1) [8; +∞); 2) $\left(-2;\frac{1}{4}\right]$.

423. 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) $(-1;1)\cup\left\{-\sqrt{2}\right\}$. **424**. 1) 30 м; 2) 40 м; 3) 240 м^2; 4) 120 м^2; 5) 560 м^2. **425**. На 32 %. **426**. –115. **427**. 1) –1; 2) $\frac{a^2}{b^2}$.

§ 11

435. 10 і 15 або –15 і –10. **436.** 12 і 9 або –9 і –12. **437.** 12 і 15. **438.** 14 і 11. **439.** 12 і 10 або –14 і 36. **440.** 8 і 10. **441.** 70 км/год і 60 км/год. **442.** 60 км/гол і 90 км/год. **443.** 50 км/год. **444.** 60 км/год. **445.** 10 деталей. **446.** 10 деталей. **447.** 3 кг груш по 20 грн і 4 кг яблук по 12 грн. **448.** 20 зошитів по 4 грн і 15 зошитів по 3 грн. **449.** 4 моделі і 2 моделі. **450.** 3 прикраси і 4 прикраси. **451.** 70 м і 90 м. **452.** 50 м і 80 м. **453.** 4 і 10. **454.** 4 і 6. **455.** 25 рядів, 15 рядів, 20 місць. **456.** 20 рядів, 18 рядів, 15 дерев. **457.** 30 км/год, 2 год 10 хв. **458.** 80 км/год, 3 год. **459.** 5 км/год і 60 км/год, 12 км. **460.** 60 км/гд і 80 км/год, 240 км. **461.** 16 км/год і 4 км/год. **462.** 14 км/год і 2 км/год. **463.** 10 деталей. **464.** 2 сукні. **465.** 17 см. **466.** 10 см. **467.** 25 горіхів і 14 горіхів. **468.** 3 год і 4 год. **469.** 480 км. **470.** 16 км/год і 12 км/год. **471.** 4 с і 6 с. **472.** 1) 0,8 км і 0,5 км; 2) 180 т. **473.** 1) 1 м і 1,5 м; 2) 60 см і 90 см або 40 см і 60 см. **474.** 1) 15 см і 20 см; 2) 10 см. **476.** 1) –2 і 2; 2) –6 і 6. **477.** 1) $2a$; 2) –1.

РОЗДІЛ 3
§ 12

484. 1) 2, 4, 6, 8, 10; 2) 2, 5, 8, 11, 14; 3) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1, $1\frac{1}{5}$; 4) 2, 5, 10, 17, 26. **485.** 1) 2, 3, 4, 5; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$. **486.** 17,5. **487.** –38,5. **488.** 1) 3; 2) 21; 3) 300; 4) $3n$. **489.** 1) 50; 2) $5n$. **490.** 1) Так, $n = 5$; 2) так, $n = 11$; 3) ні; 4) так, $n = 19$. **491.** 1) Так, $n = 10$; 2) ні. **495.** 1) –1; 2) –1; 3) 1; 4) 1, якщо n — парне, –1, якщо n - непарне. **496.** 1) $\frac{1}{1024}$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. **497.** 1) 15; 2) 24. **498**. 25. **499**. 1) 9, 13, 17; 2) 6, 3, $1\frac{1}{2}$. **500**. 5, 0, –5. **503**. –19. **504**. 1) 5, 25, 5; 2) 7, 11, 11. **505.** $-3n + 2$; $-3n + 11$; $-3n - 7$. **506**. 1) 12, 14; 2) 80, 160; 3) 13, 11; 4) 64, 81. **507**. 1) 27; 23; 2) 37,5; 33, 5. **508.** 24, 21, 25.

§ 13

515. 1) Так, 3 і 3; 2) ні; 3) так, –12 і 12; 4) так, 50 і –5. **516.** 1) 5; 13; 21; 29; 37; 2) 10; 3; –4; –11; –18; 3) 0,2; 5,2; 10,2; 15,2; 20,2; 4) 4,5; 2,5; 0,5 –1,5; –3,5; 5) –1,5; –1,9; –2,3; –2,7; –3,1; 6) $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{14}$, $-\frac{1}{7}$. **517.** 1) 12; 20; 28; 36; 44; 2) –5; 10; 25; 40; 55; 3) 7,5; 5; 2,5; 0; –2,5; 4) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, 1, $1\frac{1}{12}$, $1\frac{1}{6}$. **520.** 1) 75; 2) 412; 3) 83,4; 4) –152,1; 5) –0,4; 6) –53,4. **521.** 1) 339; 2) 816;

3) –25; 4) $-123\frac{1}{3}$. **522.** 1) 441; $9n+9$; 2) 80,6; $1{,}6n+3{,}8$; 3) $24\frac{14}{15}$; $\frac{8}{15}n-\frac{2}{3}$; 4) 219,8; $5{,}1n-20{,}3$. **523.** 1) 534; $18n-24$; 2) –70; $-2{,}5n+7{,}5$. **524.** 1) 50; 2) –14; 3) 4; 4) –1,6. **525.** 1) 210; 2) 73. **526.** 1) 4; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $-\frac{1}{3}$. **527.** 1) $1\frac{1}{6}$; 2) 0,3. **528**. 1) –9 і 6; 2) –55 і 4; 3) –12 і 5; 4) 21,8 і –2,6. **529**. 1) 20 і 6; 2) –40 і 8. **530**. 1) 5500; 2) –1350. **531**. 600. **532**. 1) –117; 2) 774. **533**. 390. **534**. 1) Так; 2) ні. **535**. 1) Так; 2) ні. **536**. 1) 22; 2) 41. **537**. 1) 19; 2) 18. **538.** 18, 24 і 30. **539.** –38; –31; –24; –17; –10; –3; 4. **540.** 10, 18, 26, 34. **543**. 1) 525; 2) –410; 3) 143; 4) –360. **544**. 1) 27,5; 2) –310. **545**. 1) 319; 2) 526,5; 3) 37,5; 4) $307\frac{2}{3}$. **546**. 1) 560; 2) 170,5. **547**. 1) 940; 2) –202,2. **548**. 3850. **549**. 1) 20 100; 2) 62 750; 3) 11 220. **550**. 1) 16 290; 2) 7070. **551**. 1) 69 і –8; 2) 91 і 4. **552**. 14 і –3. **553**. 1) 5 і 2; 2) 15 і –3. **554.** –7 і 10. **555**. 8 і 4. **556.** 17 і 22. **557.** 1) 21780; 2) 30336. **558.** 10. **559.** 1) 12; 2) 25; 3) 1; 4) –1. **561.** 1) 21; 2) 6; 3) 8; 4) 78; 5) 15; 6) 25; 7) 7. **562**. 1) $x+2$; 2) $\frac{x-6}{x+7}$. **563**. 10 і 5. **564**. 1) $\frac{a+b}{b-a}$; 2) $3-a^2$.

§ 14

571. 1) Так, 3 і 2; 2) ні; 3) так, –12 і –1; 4) так, 48 і 0,5. **572**. 1) 5; 10; 20; 40; 2) 10; –30; 90; –270; 3) –12; 24; –48; 96; 4) –4; –2; –1; –0,5; 5) 20; 10; 5; 2,5; 6) 3,6; –1,2; 0,4; $-\frac{2}{15}$. **573**. 1) 5; 15; 45; 135; 405; 2) –10; –20; –40; –80; –160; 3) 2,5; 0,5; 0,1; 0,02; 0,004; 4) 4,8; –2,4; 1,2; –0,6; 0,3. **576.** 1) 3000; 2) $-\frac{1}{16}$; 3) 16; 4) $\frac{1}{81}$; 5) –14; 6) 729. **577.** 1) 4; 2) –768; 3) $\frac{1}{3}$; 4) –20. **578.** 1) 243; 2) 160; 3) –4802; 4) $-\frac{1}{64}$. **579.** 1) 96; 2) 2,75. **580.** 1) 1; 2) 0,25; 3) 3584; 4) –32. **581.** 1) 2; 2) 1000. **582.** 1) 3 або –3; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 3 або –3; 4) 10. **583.** 1) –3; 2) $\frac{1}{2}$ або $-\frac{1}{2}$. **584.** 1) 1 і 4 або 1 і –4; 2) $-\frac{2}{27}$ і 3 або $\frac{2}{27}$ і –3; 3) $\frac{1}{4}$ і 2; 4) –243 і $\frac{1}{3}$. **585.** 1) 2 і 3 або 2 і –3; 2) $-\frac{1}{3}$ і 3. **586.** 1) 315; 2) –72,6 або –36,6. **587.** –20. **588.** 1) 6560; 2) $-10\frac{5}{8}$. **589.** 42. **590.** 1) Так; 2) ні. **591.** 1) Так; 2) ні. **592.** 27, 81. **593.** 80, 40, 20 або –80; 40; –20. **594.** 8; 32; 128 або –8; 32; –128. **595.** 1) 1 і 2; 2) –3 і –2 або 3 і –2. **596.** 16 і 0,5. **597.** 1) 121 або 61; 2) 85; 3) 78; 4) $-208\frac{8}{25}$. **598.** 1) 85,25 або 51,25; 2) 20,8. **599.** 1) 2295; 2) 215; 3) $13\frac{1}{3}$; 4) 242. **600.** 1) 242; 2) 42. **601.** 1) 1530;

2) 156,2. **602.** –756. **603.** 1) 2047; 2) 305; 3) $\frac{364}{729}$. **604.** 1) 171; 2) $\frac{127}{512}$. **605**. 1) 5 і 2; 2) 512 і –0,5. **606.** 5 і 3. **607**. 1) 2 і 2; 2) 1 і –3. **608.** 7 і 2. **609.** 3, 6, 12, 24 або 24, 12, 6, 3. **610.** 2, 8, 32 або –2, 8, –32. **611.** 72. **612.** 72, 144. **613.** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. **614.** 2, 4, 6 і 9. **617.** 1) 32; 2) 6144; 3) 5. **618.** 1) (12; –4); 2) (4; 2) і (3; 4). **619.** 1) 13 і 11; 2) –3 і 7. **620.** 1) 9; 2) $3\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)$; 3) 10; 4) $4\frac{2}{7}$; **621**. 36 і 4.

РОЗДІЛ 4
§ 15

625. 18. **626.** 80. **628.** 12. **629.** 24. **632.** 120. **633.** 10 000. **636.** 648. **638.** 1) 6; 2) 27. **646.** 180. **649.** 1) 4; 2) 2. **651.** 1) 12; 2) 6. **652.** 1) 14. **656.** 336. **659.** 120. **661.** 48. **663.** 28. **664.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **669.** 1) 12; 2) 16.

§ 16

672. 1) «Випав герб», «випала цифра»; 2) «Випав герб на першій монеті і цифра — на другій», «випала цифра на першій монеті і герб — на другій», «випав герб на обох монетах», «випала цифра на обох монетах»; 3) «Випало 1 очко», «випало 2 очка»,... « випало 6 очок». 4) «Влучення по мішені», «промах по мішені». 5) «Перший постріл — влучення, другий — промах», «перший постріл — промах, другий — влучення», «два влучення по мішені», «два промахи по мішені»; 6) «Вийнято жовту кулю», «вийнято блакитну кулю». 7) «Вийнято жовту кулю», «вийнято блакитну кулю», «вийнято червону кулю». **673.** 1) витягнуто кулю жовтого, білого, зеленого чи блакитного кольору; 2) витягнуто кулю червоного кольору; 3) витягнута куля жовта і біла одночасно. **674.** 1) вірогідна; 2) неможлива; 3) неможлива. **675.** 1) неможлива; 2) вірогідна; 3) неможлива. **676.** $\frac{1}{2}$. **677.** $\frac{1}{2}$. **678.** 1) $\frac{1}{5}$, 2) $\frac{1}{5}$, 3) 0, 4) $\frac{1}{5}$, 5) 1. **679.** 1) 0, 2) $\frac{1}{12}$, 3) $\frac{1}{12}$, 4) $\frac{3}{4}$. **680.** 1) $\frac{1}{6}$, 2) $\frac{1}{6}$, 3) 0, 4) $\frac{1}{2}$, 5) $\frac{1}{3}$. **681.** 1) $\frac{1}{6}$, 2) $\frac{1}{6}$, 3) $\frac{1}{2}$. **682.** 1) $\frac{2}{3}$, 2) $\frac{1}{3}$. **683.** 1) $\frac{9}{17}$, 2) $\frac{8}{17}$. **684.** 1) $\frac{5}{9}$, 2) $\frac{4}{9}$, 3) 0. **685.** 1) $\frac{3}{7}$, 2) $\frac{4}{7}$, 3) 0. **686.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. **687.** $\frac{1}{3}$. **688.** 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{1}{4}$, 3) $\frac{1}{2}$. **689.** $\frac{1}{2}$. **690.** 1) $\frac{1}{200}$, 2) $\frac{1}{250}$, 3) $\frac{199}{200}$. **691.** $\frac{3}{8}$. **692.** $\frac{1}{3}$. **693.** $\frac{39}{40}$. **694.** $\frac{49}{50}$. **695.** Середа — сонячний день. **696.** $\frac{1}{9}$. **697.** $\frac{1}{6}$. **698.** 1) $\frac{1}{9}$, 2) $\frac{7}{216}$, 3) 0. **699.** $\frac{1}{8}$. **701.** Оксана. **703.** 1) $(4;\infty)$, 2) $\left(\frac{12}{17};5\right]$ **704.** $41\frac{5}{11}\%$.

§ 17

714. 1) A; 2) AB. **715.** 2,2. **716.** 1,2. **717.** 1) 3,8; 2) 4; 3) 4. **718.** 1) 4,2; 2) 5; 3) 4,5. **719.** 1) ≈ 20; 2) 19; 3) 20. **720.** 1) ≈ 10; 2) 8; 3) 10. **721.** 115 грн. **722.** 515 відвідувачів. **723.** 20. **724.** 30. **725.** 1) 9; 2) 8. **726.** 1) 23; 2) 21. **728.** 1) ≈ 9, 9, 9; 2) ≈ 8, 8, 8. **729.** 1) ≈ 9, 9, 9; 2) ≈ 8, 8, 8. **730.** 1) 251 і 249; 2) 62 і 61; 3) 62 і 4. **731.** 1) 180, 180 і 145; 2) 155; 3) двокімнатних більше. **732.** 1) ≈ 17; 2) 15; 3) 12,5. **733.** 1) 4,8; 2) немає; 3) 4. **734.** 1) ≈ 167; 2) 165; 3) 166. **735.** 1) ≈ 2; 2) 2; 3) 2. **736.** 16. **742.** 1) –2, 2 і 4; 2) 2. **743.** 1.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 1

1. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. **2.** 1) $[0; 9,5]$; 2) $\left[-2\frac{1}{3}; 4\right]$; 3) $[-13; 6]$; 4) $[-1,625; 0,75]$.

3. 1) 1) $[-2; 0) \cup (-1; 3] = [-2; 3]$, $[-2; 0) \cap (-1; 3] = (-1; 0]$; 2) $[-3; 1,5] \cup [1,5; 2] = [-3; 2]$, $[-3; 1,5] \cap [1,5; 2] = \{1,5\}$; 3) $(-1; +\infty) \cup (3; 10) = (-1; +\infty)$, $(-1; +\infty) \cap (3; 10) = (3; 10)$; 4) $(-2; 2] \cup [3; +\infty) = (-2; 2] \cup [3; +\infty)$, $(-2; 2] \cap [3; +\infty) = \varnothing$. **4.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 2

1. 1) $(-\infty; -2,5)$; 2) $(-1,5; +\infty)$; 3) $(14; +\infty)$; 4) $(-\infty; 30]$. **2.** 1) $\varnothing$; 2) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$.

3. 1) $[0; 4]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 3

Мал. 180. 1) $y(-1) = 0$; 2) $D(f) = [-4; 4]$, $E(f) = [-2,5; 0]$; 3) –1; 4) функція зростає на проміжках [–4; –1] і [2; 4], а спадає на проміжку [–1; 2].

Мал. 181. 1) $y(-1) = 0$; 2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 1]$; 3) –3; –1; 1; 3; 4) функція зростає на проміжках (–∞; –2] і [0; 2], а спадає на проміжках [–2; 0] і [2; +∞).

Мал. 182. 1) $y(-1) = -1,5$; 2) $D(f) = [-1,5; +\infty)$, $E(f) = [-3; +\infty)$; 3) 0; 4; 4) функція зростає на проміжках [–1,5; 0] і [2,5; +∞), а спадає на проміжку [0; 2,5].

Мал. 184. 1) $y(-1) = 0$; 2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0]$; 3) –1; 1; 4) функція зростає на проміжках (–∞; –1] і [0; 1], а спадає на проміжках [–1; 0] і [1; +∞).

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 4

2. а) $y(-2) = -3$; б) (0; –7); в) $E(f) = [-7; +\infty)$; г) функція зростає на проміжку [0; +∞), а спадає на проміжку (–∞; 0].

3. а) $y(-2) = -20$; б) (3; 5); в) $E(f) = (-\infty; 5]$; г) функція зростає на проміжку (–∞; 3], а спадає на проміжку [3; +∞).

4. а) $y(-2) = -6$; б) $(-4; -8)$; в) $E(f) = [-8; +\infty)$; г) функція зростає на проміжку $[-4; +\infty)$, а спадає на проміжку $(-\infty; -4]$.

5. а) $y(-2) = -23$; б) $(1; -5)$; в) $E(f) = (-\infty; -5]$; г) функція зростає на проміжку $(-\infty; 1]$, а спадає на проміжку $[1; +\infty)$.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 5

1. 2) (1; 1) і (–1; –1); 3) (2; 3) і (–2; –3); 4) (1; 1) і (–1; 1).
2. 2) (5; 4), (–5; –4), (4; 5), (–4; –5); 3) (2; 1); 4) (2; –1), (–2; 1), (1; –2), (–1; 2).
3. 2) 10 і 12 або –12 і –10; 3) 15 і 17 або –17 і –15; 4) 18 і 20 або –20 і –18.
4. 2) 70 км/год.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 6

1. 2) –12; 3) 5; 4) –24. **2.** 2) 38,5; 3) 152,5; 4) $1{,}5n - 1$. **3.** 2) 250; 3) –35; 4) 230. **4.** 2) 1; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{32}{2^n}$. **5.** 2) –162; 3) 15,5 або 5,5; 4) 22 або –62.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ 7

1. 2) 500; 3) 550; 4) 12650; 5) 45; 6) 115; 7) 1065. **2.** 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{15}$; 4) 0. **3.** 2) 0,32; 3) 0,24; 4) 0. **4.** 2) 9, 10, 10; 3) 15, 15, 15; 4) 24, 23, 23. **5.** 2) 155 грн.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

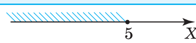
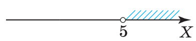
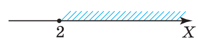
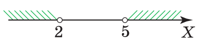
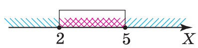
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

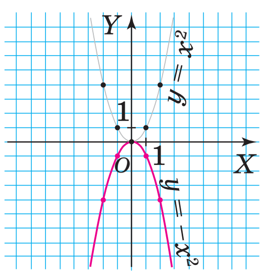
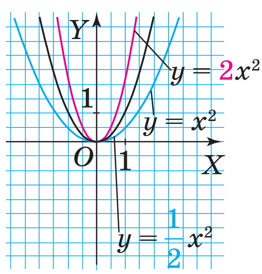
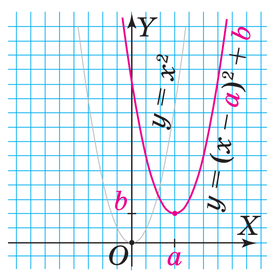
ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

ОБ’ЄДНАННЯ І ПЕРЕРІЗ ЧИСЛОВИХ ПРОМІЖКІВ

<table>
<tr><th colspan="2">Об’єднання
двох числових проміжків</th><th colspan="2">Переріз
двох числових проміжків</th></tr>
<tr><td></td><td>$(-\infty; 2)$</td><td></td><td>$(-\infty; 5]$</td></tr>
<tr><td></td><td>$(5; +\infty)$</td><td></td><td>$[2; +\infty)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$(-\infty; 2) \cup$
$\cup (5; +\infty)$</td><td></td><td>$(-\infty; 5] \cap [2; +\infty) =$
$= [2; 5]$</td></tr>
</table>

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

<table>
<tr><th>$y = -f(x)$</th><th>$y = af(x) (a \neq 0)$</th><th>$y = f(x - a) + b$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

ДОДАТОК 2

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

a^n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
6	36	216	1296	7776	46656	279936			
7	49	242	2401	16807	117649				
8	64	512	4096	32768					
9	81	729	6561	59049					
10	100	1000	10000						

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК