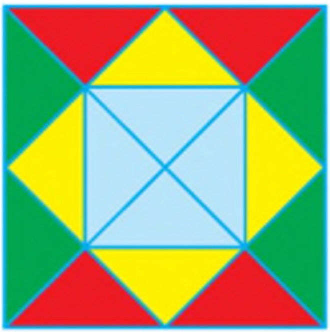
Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова,
О. М. Коломієць, З. О. Сердюк

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів



Київ
Видавничий дім «Освіта»
2015

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ:

 — поміркуйте

 — як записати в зошиті

Запам'ятайте!

 — типова задача

Зверніть увагу:

Тарасенкова Н. А.

Математика : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. — 288 с.

Дорогі учні!

Ви приступаєте до вивчення нового предмета, який називається алгебра.

Алгебра — один із великих розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики і як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються у багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У попередніх класах ви вже познайомилися з елементами алгебри. Тепер ви продовжите розвивати свої уміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити обґрунтовані висновки. Для цього треба наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на п'ять розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання обведено рамкою з позначкою «Запам'ятайте», а поради — з позначкою «Зверніть увагу». *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять. У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», а матеріал усієї теми — контрольні запитання і тестові завдання наприкінці розділу.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом (′). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх треба навчитись розв'язувати усім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Бажаємо вам успіхів
у пізнанні нового і задоволення від навчання!

РОЗДІЛ 1

ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- про числові вирази та їх види;
- чим відрізняються числовий вираз і вираз зі змінними;
- що таке допустимі значення змінних у виразі;
- які вирази називають цілими;
- як обчислювати значення виразу зі змінними;
- про способи спрощення виразів;
- яка рівність є тотожністю та як її доводити;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Із курсу математики 5—6 класів ви знаєте, що таке *числовий вираз*. Пригадайте відповідне формулювання та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Запам'ятайте!

Запис, у якому використовують тільки числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається *числовим виразом*.

Наприклад, записи $15 + 3$, $15 - 3$, $15 \cdot 3$, $15 : 3$ є числовими виразами. Їх називають відповідно *сумою*, *різницею*, *добутком* і *часткою* чисел 15 і 3. У кожному із цих виразів числа 15 і 3 є *компонентами виразу*. Вираз 15^3 також є числовим. Його називають *степенем* числа 15. У ньому число 15 — основа степеня, а число 3 — показник степеня.

Якщо виконати арифметичну дію у виразі, то дістанемо число — *значення числового виразу*. Наприклад, значенням виразу $15 + 3$ є число 18.

Зверніть увагу:

числовий вираз показує, яку арифметичну дію (дії) треба виконати над числами, але не показує результат цієї дії (дій).

Ви знаєте, що дії додавання і віднімання є діями першого ступеня, дії множення і ділення — другого ступеня, а піднесення до степеня — третього ступеня. Обчислюючи значення числового виразу, спочатку з'ясовують, дії яких ступенів містить вираз, а потім виконують дії, дотримуючись відомого вам порядку виконання дій.

Задача 1. Знайдіть значення числового виразу:
1) $35 - 15 + 9$; 2) $35 : 7 + 4 \cdot 2^3$.

Розв'язання. 1. Даний вираз містить тільки дії першого ступеня, тому ці дії виконують за порядком написання зліва направо:

$$35 - 15 + 9 = 20 + 9 = 29.$$

2. Вираз $35 : 7 + 4 \cdot 2^3$ містить дії трьох ступенів, тому спочатку виконують дію третього ступеня, потім — дії другого ступеня (зліва направо), а після цього — дію першого ступеня:

$$35 : 7 + 4 \cdot 2^3 = 35 : 7 + 4 \cdot 8 = 5 + 4 \cdot 8 = 5 + 32 = 37.$$

Чи залежить значення числового виразу від того, як у ньому розставлено дужки? Так. Наприклад, вирази $4 + (30 : 6 - 1)$ і $4 + 30 : (6 - 1)$ мають різні значення: $4 + (30 : 6 - 1) = 8$, а $4 + 30 : (6 - 1) = 10$. Отже, можемо записати:

$$4 + (30 : 6 - 1) \neq 4 + 30 : (6 - 1).$$

Зверніть увагу:

дужки у виразі змінюють порядок виконання дій.

Задача 2. Чи можна знайти значення числового виразу

$$25 : (3 \cdot 8 - 23 - 1)?$$

Розв'язання. Даний вираз містить ділення числа 25 на вираз, що стоїть у дужках. Виконавши дії в дужках, дістанемо: $3 \cdot 8 - 23 - 1 = 24 - 23 - 1 = 0$. Отже, щоб знайти значення заданого виразу, треба число 25 поділити на 0. А це зробити неможливо. Тому значення даного числового виразу знайти не можна.

Коротко говорять: «Даний вираз не має значення» або «Даний вираз не має змісту».

Зверніть увагу:

— ділити на 0 не можна;
— вираз, що містить ділення на нуль, *не має змісту*.

Узагальнимо відомості про порядок виконання дій у виразах.

Запам'ятайте!

Порядок виконання дій у виразах.

1. **У виразі, що містить дії тільки одного ступеня, дії виконують у тому порядку, у якому вони записані.**
2. **У виразі, що містить дії трьох ступенів, першими виконують дії старшого ступеня в тому порядку, у якому вони записані.**
3. **У виразі з дужками спочатку виконують дії в дужках, а потім — інші дії за відомим порядком.**

Дізнайтеся більше

1. У курсі математики 5—6 класів і в цьому параграфі ви зустрічали речення, які містять слова «називають» або «називається». Це *означення понять*. В означенні розкривається зміст поняття. Наприклад, в означенні числового виразу вказується властивість, за допомогою якої можна відрізнити числовий вираз від будь-яких інших записів. Раніше вам зустрічалися записи $3 * 5 + 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $(a + 100) \cdot 2$. Їх не можна вважати числовими виразами, оскільки вони не задовольняють означення числового виразу. Справді, перший запис містить знак *, що не є знаком арифметичної дії. Другий запис містить знак рівності, а третій — букву.
2. **Граве Дмитро Олександрович** (1863—1939) — видатний математик, фундатор вітчизняної алгебраїчної школи, академік Академії наук УРСР (1919), почесний член АН СРСР (1929). Закінчив Санкт-Петербурзький університет (1885). У 1896 р. захистив дисертацію на ступінь доктора математики «Про основні завдання математичної теорії побудови географічних карт». Працював професором Харківського (1897), а потім Київського (1899) університетів. У 1934 став першим директором Інституту математики АН УРСР. Створив у Києві наукову алгебраїчну школу. Основні праці стосуються алгебри, прикладної математики, механіки, кібернетики, астрономії. Його «Трактат з алгебраїчного аналізу», який побачив світ у 1938, мав значний вплив на розвиток математики 20 ст.

   Його учнями були Б. Делоне, М. Кравчук, М. Чеботарьов, О. Шмідт та ін.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називається числовим виразом? Наведіть приклади.
2. Що називають значенням числового виразу?
3. Який порядок виконання дій у числовому виразі без дужок?
4. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками?
5. У якому випадку числовий вираз не має змісту?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. Чи є числовим виразом запис:

1) $14 : 2 + 5$; 3) $24 - 14 = 10$; 5) $4 \cdot x = 20$;

2) $27 > 4 \cdot 3$; 4) $5\frac{2}{3} - 2 \cdot 5{,}2$; 6) $8^4 + 4^2$?

Відповідь поясніть.

2'. Наведіть приклад виразу, який для двох чисел є:
1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою; 5) степенем.

3'. Чи правильно, що значенням числового виразу є: 1) буква; 2) слово; 3) речення; 4) сам числовий вираз; 5) число, яке отримали, виконавши дію в заданому виразі на одну дію; 6) число, яке отримали, правильно виконавши дію в заданому виразі на одну дію; 7) число, яке отримали, правильно виконавши якусь одну дію в заданому виразі на кілька дій; 8) число, яке отримали, правильно виконавши всі дії в заданому виразі на кілька дій?

4'. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі, що містить дії: 1) першого ступеня; 2) другого ступеня; 3) першого і другого ступенів; 4) третього ступеня; 5) другого і третього ступенів; 6) усіх трьох ступенів?

5'. Чи правильно, що дужки у виразі: 1) не змінюють порядок виконання дій; 2) змінюють порядок виконання дій?

6'. Наведіть приклади числових виразів, які: 1) мають зміст; 2) не мають змісту.

7'. Чи правильно, що не має змісту вираз:

1) $5 - 0$; 3) $5 \cdot 0$; 5) $5 - (3 - 3)$; 7) $5 \cdot (3 - 3)$;

2) $5 + 0$; 4) $5 : 0$; 6) $5 + (3 - 3)$; 8) $5 : (3 - 3)$?

8°. Значенням якого виразу є число 2:
1) $24 : 6 - 3$; 2) $(20 - 4) : 8$; 3) $3^2 - 2^3$; 4) $10 - 4 \cdot 2$?

9°. Значенням якого виразу є число 5: 1) $25 - 15 : 3$; 2) $(4^2 + 9) : 5$?

10°. Назвіть порядок виконання дій для обчислення значення числового виразу $5 + 2 \cdot 4 - 18 : 3^2$. Знайдіть значення виразу.

11°. Дано числа 2,5 і 4. Складіть числовий вираз, який є їх:
1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою.
Скільки числових виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.

12°. Дано числа 2 і 3. Складіть вирази для піднесення одного числа до степеня іншого. Скільки числових виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.

13°. Дано числа 5 і 2. Складіть числовий вираз, який є: 1) сумою чисел; 2) різницею чисел; 3) добутком чисел; 4) часткою чисел; 5) степенем, у якому одне число підноситься до степеня іншого. Знайдіть значення цих виразів.

14°. Знайдіть значення виразу:

1) $15,6+27,8$; 4) $84,6-12,49$; 7) $48,56:1,6$;
2) $14,275+10,8$; 5) $12,3\cdot5,8$; 8) $0,15:1,25$;
3) $45,5-23,4$; 6) $0,28\cdot0,125$; 9) $1,8:0,24$.

Якими правилами виконання дій з десятковими дробами ви скористалися?

15°. Знайдіть значення виразу:

1) $42,5+12,52$; 2) $34,6-15,54$; 3) $2,8\cdot0,15$; 4) $56,28:1,4$.

16°. Виконайте дії:

1) $12\frac{1}{6}+8\frac{1}{3}$; 3) $7-2\frac{3}{13}$; 5) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{14}$; 7) $2\frac{3}{4}:1\frac{3}{8}$;

2) $16\frac{1}{8}+2\frac{5}{6}$; 4) $8\frac{1}{10}-5\frac{2}{3}$; 6) $5\frac{2}{5}\cdot3\frac{1}{3}$; 8) $\frac{3}{10}:2\frac{2}{5}$.

Якими правилами виконання дій зі звичайними дробами ви скористалися?

17°. Виконайте дії:

1) $16\frac{1}{4}+14\frac{1}{12}$; 2) $21\frac{1}{2}-9\frac{1}{3}$; 3) $9\frac{2}{7}\cdot7$; 4) $5\frac{1}{9}:7\frac{2}{3}$.

18°. Обчисліть:

1) 2^2; 2) 5^3; 3) 3^5; 4) 7^1; 5) 4^3; 6) 1^7; 7) $\left(\frac{2}{13}\right)^2$; 8) $\left(5\frac{1}{3}\right)^2$.

Сформулюйте правило піднесення числа a до степеня n, яким ви скористалися.

19°. Обчисліть: 1) 2^4; 2) 3^3; 3) 4^5; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

20°. Обчисліть: 1) $-45,2+12,15$; 2) $25-38\frac{1}{3}$;

3) $-4\frac{3}{4}-1,25$; 4) $-2,5\cdot1,2$; 5) $-2,8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$; 6) $-14\frac{1}{3}:(-43)$.

Сформулюйте правила виконання дій з раціональними числами, якими ви скористалися.

21°. Обчисліть:

1) $-14,7+10,15$; 2) $-12\frac{2}{3}-3,5$; 3) $4,08\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; 4) $-12,6:\left(-\frac{3}{5}\right)$.

22°. Чи змінять дужки порядок виконання дій у виразі $20+5\cdot2^3-6:2$, якщо їх розставити так:

1) $(20+5)\cdot2^3-6:2$;
2) $20+(5\cdot2^3-6):2$;
3) $(20+5\cdot2^3)-6:2$;
4) $20+5\cdot(2^3-6:2)$?

Відповідь поясніть.

23°. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками, що містить дії: 1) першого і другого ступенів; 2) другого і третього ступенів; 3) усіх трьох ступенів? Скільки випадків потрібно розглянути? Наведіть приклади.

24°. Запишіть у вигляді виразу і знайдіть його значення:

1) добуток суми чисел 3,5 і –4,5 та числа 42;
2) різниця числа 4,67 та добутку чисел 2,18 і 0,5;
3) сума квадрата числа 3 і числа $5\frac{2}{7}$;
4) різниця куба числа 4 і числа –0,1;
5) добуток числа 3 і квадрата числа $-\frac{2}{3}$;
6) частка суми чисел 3,2 і $1\frac{1}{3}$ та числа 0,5.

25°. Запишіть у вигляді виразу і знайдіть його значення:

1) добуток числа –2,5 та суми чисел 34,8 і –2,8;
2) різниця квадрата числа 1,2 і куба числа 4;
3) сума числа $5\frac{2}{7}$ та частки чисел 5 і 7;
4) частка числа 2,5 та добутку чисел $1\frac{1}{3}$ і $\frac{9}{20}$.

26°. Перевірте, чи має зміст вираз:

1) $2{,}5-(1{,}4-7\cdot0{,}2)$;
2) $\frac{5{,}4:2{,}7-2}{0{,}2}$;
3) $5\cdot2{,}04+\frac{0{,}8}{-4{,}5\cdot2+9}$;
4) $2\frac{1}{4}:\left(17{,}5-8\frac{3}{4}\cdot2\right)$.

Чи потрібно виконувати всі дії? Відповідь поясніть.

27°. Чи має зміст вираз: 1) $\frac{0{,}8\cdot5-4}{1{,}5}$; 2) $12+28:(15\cdot0{,}2-3)$?

28. Складіть числовий вираз, значення якого дорівнює:

1) 14; 2) –5; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) –0,5.

29. Складіть числовий вираз, значення якого дорівнює:

1) 20; 2) $-5\frac{1}{6}$.

30. Знайдіть значення виразу:

1) $0,12 \cdot 10 + 2,4 \cdot 5 \cdot 12 - 9 : 1,8$;

2) $(15 \cdot 0,012 + 15 : 10^2) : 0,66 - 1,8^2$;

3) $-5\frac{5}{6} : \frac{7}{18} - \left(-3\frac{1}{8}\right) \cdot (-0,8) + (-3,6)$;

4) $(3,4 + 5,1) \cdot 1\frac{3}{17} + \left(1\frac{45}{46} - 2\frac{7}{23}\right) : \frac{15}{23}$.

31. Знайдіть значення виразу:

1) $2,5 \cdot 2^3 + 7,5 \cdot (0,04 + 1,6^2) - 1,8 : 90$;

2) $\left(4\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}\right) : 1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{26}\right) + 2,5$.

32. Виконайте дії:

1) $6\frac{13}{22} - 5\frac{5}{11} : 4 + 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} + \frac{25}{36} : \frac{25}{18}$; 2) $\dfrac{0,125 : 0,3125 + 2,25 \cdot \frac{4}{5}}{\left(1\frac{55}{72} - 2\frac{1}{48}\right) : 3\frac{1}{12}} - 3,6$;

3) $1,2 : (0,171 : 0,9 - 0,028 \cdot 2,5) + 0,8 \cdot \left(3\frac{4}{15} + 1\frac{5}{24} - 3\frac{9}{40}\right) - 0,075 : \frac{3}{400}$;

4) $\left(\dfrac{11}{9 - 2\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \cdot 12,5 + 1\frac{13}{30}\right) : 0,016 - 0,005 \cdot 10\,500$.

33. Виконайте дії:

1) $\left(10\frac{9}{35} - 8\frac{7}{30}\right) : 1\frac{3}{14} + 4 \cdot \left(1,35 : 0,9 - 1,5 \cdot \frac{7}{9}\right) + 0,204 \cdot 25 - 7,1$;

2) $\dfrac{4\frac{2}{3} \cdot 0,63 : 2,8 + 0,95}{\left(9\frac{3}{4} - 12,45\right) : 1,35} - 12,5 : 1\frac{1}{4}$.

34. У 7-А класі навчаються 25 учнів, у 7-Б класі — на 2 учні більше, ніж у 7-А класі, а в 7-В класі — на 5 учнів менше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчаються в цих класах разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

35. На першій полиці стоять 18 книг, на другій — на 4 книги менше, ніж на першій, а на третій — стільки книг, як на першій і другій полицях разом. Скільки книг стоять на трьох полицях разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

36. Яке число треба поставити замість зірочки, щоб вираз не мав змісту: 1) $\dfrac{0{,}3\cdot 5^2+15}{3{,}5\cdot 4-*}$; 2) $\dfrac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}6}{5\cdot(*+7{,}5:0{,}5)}$?

37. Яке число треба поставити замість зірочки, щоб вираз не мав змісту: 1) $\dfrac{1{,}7\cdot 3^2+\frac{2}{3}\cdot 15}{*-2{,}4:0{,}12}$?

38*. У виразі $1{,}5-\frac{1}{4}:3\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 4{,}5^2$ розставте дужки так, щоб значення виразу було: 1) найбільшим; 2) найменшим.

39*. Обчисліть зручним способом:

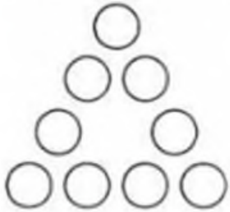
1) $9+99+999+9999+99\,999$;
2) $1-2+3-4+\ldots+999-1000$;
3) $\left(\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{29}\right)+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{41}\right)+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{51}\right)\right)\cdot 1\frac{1}{50}$;
4) $\left(\left(2-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right):\frac{5}{14}$;
5) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-7\cdot8\cdot9}{7\cdot8\cdot9-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$;
6) $\dfrac{101\cdot102\cdot103\cdot104-100\cdot101\cdot102\cdot103}{102\cdot103\cdot104\cdot105-101\cdot102\cdot103\cdot104}$.

40*. Розв'яжіть рівняння:

1) $18\frac{3}{4}:\left(30{,}5-\left(\dfrac{\left(8\frac{5}{8}-6\frac{1}{4}\right):1\frac{1}{4}}{2{,}4x-8{,}2}+17{,}5\right)\right)=1{,}5$;

2) $12{,}6:\left(5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\dfrac{8{,}75}{x:\frac{8}{21}-1{,}4}\right)\cdot 5\frac{68}{125}\right)-\frac{2}{11}=0{,}8$.

41*. Розставте числа від 1 до 9 в кружечках на малюнку 1 так, щоб сума чисел на кожній стороні трикутника дорівнювала 20.



Мал. 1

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

42. Скільки пляшок ємністю 250 мл знадобиться бабусі, щоб розлити в них 5 л соку? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

43. У бензобак машини вміщується 45 л бензину. Витрати бензину становлять 8,5 л на кожні 100 км шляху. Машина вирушила в подорож з повним бензобаком і проїхала 300 км. Обчисліть, скільки літрів бензину залишилось у бензобаку після закінчення подорожі. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

44. Складіть задачу про свій вік і вік інших членів своєї родини. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

45. Складіть задачу про кількість хлопців і дівчат у вашому класі. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

46. Знайдіть:

1) 0,5 числа 300;

2) 0,15 числа 90;

3) $\frac{3}{7}$ числа 21;

4) $\frac{3}{20}$ числа 0,8.

47. Знайдіть число, якщо:

1) його 0,3 дорівнюють 24;

2) його 0,25 дорівнюють 0,25;

3) його $\frac{9}{20}$ дорівнюють 270;

4) його $\frac{3}{11}$ дорівнюють 0,3.

48. У трьох шостих класах школи навчаються 84 учні. Кількість учнів 7-Б класу становить 75 % кількості учнів 7-А класу, а кількість учнів 7-В класу — 50 % кількості учнів 7-А і 7-Б класів разом. Скільки учнів навчаються в кожному класі?

§ 2. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ

Подивіться на малюнок 2. Ви бачите спортсменів на змаганнях з потрійного стрибка. Виконуючи три елементи такого стрибка (скачок, крок і стрибок), кожен спортсмен долає відстані, властиві тільки йому, а сума цих відстаней складає довжину стрибка. Якщо позначити ці відстані буквами a, b і c, то для довжини потрійного стрибка дістанемо вираз: $a+b+c$. Ви знаєте, що це — *буквений вираз*. Для кожного спортсмена відстані, позначені буквами a, b і c, є різними, і вони можуть змінюватися залежно від різних обставин. Тому букви в цьому виразі можна називати *змінними*, а сам вираз — *виразом зі змінними*.

Мал. 2

? Чи кожен буквений вираз є виразом зі змінними? Ні. Наприклад, ви знаєте, що буквою π позначають відношення довжини кола до його діаметра. Але це число є сталим для будь-якого кола і не може змінюватися, воно є *константою*: $\pi \approx 3,14$. Тому буквений вираз, наприклад 2π, не є виразом зі змінною. Пізніше в курсі математики і фізики ви ознайомитесь і з іншими константами.

Запам'ятайте!

Запис, у якому використовують змінні, позначені буквами, числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається *виразом зі змінними*.

Саму змінну також вважають виразом зі змінними. І це найпростіший із таких виразів. Наприклад, довжину сторони квадрата можна подати так: a.

Замість змінних, що входять до виразу, можна підставити числа — *значення змінних*. Тоді вираз зі змінними перетвориться на числовий вираз. Виконавши обчислення, дістанемо число, яке називають *значенням виразу* для заданих значень змінних. Наприклад, вираз $2(a + b)$ використовують для обчислення периметра прямокутника зі сторонами a і b. Звідси:

якщо $a = 1$ і $b = 3$, то $2(a + b) = 2 \cdot (1 + 3) = 8$;
якщо $a = 5$ і $b = 2$, то $2(a + b) = 2 \cdot (5 + 2) = 14$;
якщо $a = 3{,}5$ і $b = 6{,}1$, то $2(a + b) = 2 \cdot (3{,}5 + 6{,}1) = 19{,}2$ і т.д.

Зверніть увагу:

значення виразу зі змінними залежить від значень змінних, що входять до нього.

? Чи завжди можна обчислити значення виразу зі змінними? Ні. Наприклад, якщо $x = 2$, то вираз $\frac{15}{x-2}$ втрачає зміст, оскільки його знаменник перетворюється на 0, а на 0 ділити не можна. Отже, число 2 є *недопустимим значенням змінної* для даного виразу. Будь-яке інше число не перетворює на нуль знаменник даного виразу і тому є *допустимим значенням змінної* для нього. Отже, вираз $\frac{15}{x-2}$ має зміст, лише якщо $x \neq 2$.

Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень (ОДЗ) змінної* цього виразу. У розглянутому прикладі — це всі значення змінної x, що не дорівнюють 2.

Коротко це записують так: ОДЗ: $x \neq 2$.

Вирази зі змінними можна поділити на види залежно від тих дій, які містяться в цих виразах. Якщо вираз містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником, то такий вираз називають *раціональним*. Усі вирази, які розглядались у цьому параграфі, є раціональними. У наступних класах ви ознайомитесь і з іншими діями, наявність яких у виразі робитиме його *ірраціональним*.

Раціональні вирази, своєю чергою, поділяються на *цілі* та *дробові* вирази.

Запам'ятайте!

***Вираз* називається *цілим*, якщо він не містить ділення на вираз зі змінними.**

Наприклад, цілими є вирази: $(2 + a) : 30$, $\frac{5}{9}x$, $-b+\frac{c-3}{2}$.

Прикладами дробових виразів є вирази: $\frac{2+a}{ab+3}$, $(b - a) : (a - 5b + 3)$. Дробові вирази ви будете вивчати пізніше.

З а д а ч а. Які значення змінних є допустимими для виразу: 1) $\frac{12}{x(5+x)}$; 2) $\frac{2+ab}{30}$?

Розв'язання. 1) Вираз $\frac{12}{x(5+x)}$ містить ділення на добуток двох множників x і $5 + x$, які перетворюють знаменник на нуль, якщо $x = 0$ і $x = -5$ відповідно. Отже, числа 0 і –5 є недопустимими значеннями змінної x для даного виразу. Відтак ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 5$.

2) Вираз $\frac{2+ab}{30}$ містить ділення на число, але не містить ділення на вираз зі змінними. Отже, це — цілий вираз, тому для нього будь-які значення змінних a і b є допустимими. Відтак ОДЗ: a — будь-яке число, b — будь-яке число.

Зверніть увагу:

для цілого виразу ОДЗ кожної змінної — будь-яке число.

Дізнайтеся більше

Алгебра (походить від арабського слова αλδφεβρ, що означає «поновлення» або «відновлення») — одна з провідних галузей сучасної математики, а також один із предметів шкільного навчання. Слово αλδφεβρ уперше зустрічається у творі **Аль-Хорезмі** (IX ст.). Цей твір був присвячений розв'язуванню рівнянь першого і другого степенів. Пізніші переклади зробили слово aldjebr назвою всієї науки «алгебри», яка довгий час була наукою про рівняння.

Зародження алгебри слід віднести до тих часів, коли в арифметику почали вводити невідому величину і спеціальний символ для її позначення, формулювати загальні правила розв'язування арифметичних задач певного типу й у зв'язку з цим складати й розв'язувати рівняння. У цьому розумінні певні алгебраїчні факти були відомі ще в Стародавніх Вавилоні та Єгипті, в Індії та Китаї.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називається виразом зі змінними? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як обчислити значення виразу зі змінними.
3. Що таке допустимі значення змінної для виразу зі змінними?
4. Які вирази називають раціональними?
5. Які вирази називаються цілими?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

49´. Прочитайте вираз:

1) $5a+6b$; 2) $15\cdot 2{,}4+17$; 3) $m+25n$; 4) 4^2+4^3; 5) abc; 6) $\frac{2x}{3y}$.

Чи є даний вираз виразом зі змінними? Відповідь поясніть.

50´. Значення виразу $3x - 2y$ дорівнює 1, якщо $x = 5$ і $y = 7$. Назвіть: 1) вираз зі змінними; 2) змінні у виразі; 3) значення виразу; 4) значення змінних. Чи зміниться значення даного виразу, якщо змінити значення: а) змінної x на –0,5; б) змінної y на 8; в) змінної x на 2, а змінної y на –2?

51´. Дано вираз: $(x - 5) : (x + 7)$. Чи є допустимим для даного виразу таке значення змінної x:
1) –5; 2) 5; 3) 7; 4) –7?
Назвіть ОДЗ змінної даного виразу.

52´. Чи є данний вираз цілим:

1) $a + 4{,}5b$; 3) $(m - n) : 5n$; 5) $\frac{abc}{3}$;

2) $\frac{2m}{27}$; 4) $\frac{15}{x-5}$; 6) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{x}$?

Відповідь поясніть.

53´. Дано вираз: $\frac{12}{(x+4)(9-x)}$. Чи правильно визначено ОДЗ його змінної:
1) $x \neq -4$; 3) $x \neq 12$; 5) $x \neq 4,\ x \neq 9$.
2) $x \neq 9$; 4) $x \neq 4,\ x \neq -9$; 6) $x \neq -4,\ x \neq 9$.
Відповідь поясніть.

54´. Чи правильно, що значення виразу $2a + 10$ дорівнює 0, якщо:
1) $a = 2$; 2) $a = -5$; 3) $a = 0{,}5$; 4) $a = 0$?

55´. Олег стверджує, що можна обчислити всі значення виразу $4a - 12$. Чи правий Олег?

56°. Запишіть у вигляді виразу: 1) суму змінних a і b; 2) частку змінних c і d; 3) квадрат змінної p; 4) потроєну суму змінної k і числа 8; 5) різницю подвоєної змінної a і змінної b; 6) суму змінної a і різниці змінної b і числа 5; 7) частку від ділення числа 12 на суму змінних a і b; 8) добуток числа 5 та суми змінних n і m; 9) частку від ділення суми змінної a і числа 10 на різницю змінної b і числа 8; 10) суму потроєної змінної x і подвоєної змінної y.

57°. Запишіть у вигляді виразу: 1) добуток змінних a і b; 2) різницю змінних c і d; 3) суму добутку числа 7 і змінної a та частки від ділення числа 9 на змінну b; 4) суму потроєної змінної c і числа 7; 5) різницю числа 10 і добутку числа 5 і змінної c; 6) добуток квадрата змінної x і куба змінної y.

58°. За даними таблиці 1 знайдіть значення виразів.

Таблиця 1

a	10	8,4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
b	–5	4,8	$\frac{2}{3}$	10
$2a+0,5b$				
$\frac{a-2b}{4}$				

59°. За даними таблиці 2 знайдіть значення виразів.

Таблиця 2

c	9	3,6	2,25	0,81
d	–50	3	–8	0,125
$\frac{1}{3}c-0,4d$				

60°. У 7-А класі навчаються a учнів, у 7-Б класі — на 2 учні більше, ніж у 7-А класі, а в 7-В — на 5 учнів менше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчаються в усіх сьомих класах разом? Складіть вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення для: 1) $n=17$; 2) $n=22$.

61°. Зошит коштує a грн, а блокнот — на 7 грн більше. Скільки коштують 5 таких зошитів і 10 блокнотів разом? Складіть вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення для $a=3$.

62°. Чи всі значення змінної a є допустимими для виразу:

1) $5a+4$; 2) $\frac{3}{a-3}$; 3) $\frac{4a-5}{2}$; 4) $\frac{2}{a}$; 5) $1{,}5(a+10)$; 6) $\frac{6}{9-a}$?

Відповідь поясніть.

63°. Чи всі значення змінної b є допустимими для виразу:

1) $12-6b$; 2) $\frac{b-7}{3}$; 3) $\frac{4}{6-b}$; 4) $\frac{5}{9}b$?

64°. У числовому виразі $\frac{3\cdot4+10:4}{4\cdot2}$ замініть число 4 на букву a. Чи всі значення змінної a є допустимими для отриманого виразу?

65°. У числовому виразі $\frac{12+(5\cdot2-4)}{5-6}$ замініть число 5 на букву b. Чи всі значення змінної b є допустимими для отриманого виразу?

66. Чи правильно, що лише для $x+4$ має зміст вираз:

1) $\frac{15x}{4}$; 2) $\frac{18}{x-4}$; 3) $\frac{-6x}{4+x}$; 4) $\frac{x+5}{4-x}$.

Відповідь обґрунтуйте.

67. Чи є цілим вираз:

1) $\frac{2a-14}{5\cdot0,2}$; 2) $\frac{6-20\cdot0,3}{7-b}$; 3) $\frac{10x+y}{x}$; 4) $\frac{7m}{(m+5)(n-5)}$?

Відповідь обґрунтуйте.

68. Чи є цілим вираз: 1) $\frac{9+4,5x}{3x}$; 2) $\frac{12a-5}{4\cdot0,5+3}$?

Відповідь обґрунтуйте.

69. Чи всі значення змінних є допустимими для виразу:

1) $2a-b+3c$; 3) $\frac{7c-5}{c}$; 5) $\frac{14}{17}(a+b)$;

2) $\frac{2}{b-4}$; 4) $\frac{2m}{27}$; 6) $\frac{6}{9-n}$?

70. Чи всі значення змінних є допустимими для виразу:

1) $4a-6b$; 2) $\frac{c+0,5d}{10}$; 3) $\frac{m}{16-m}$; 4) $\frac{4}{9}(p+6n)$?

71. Укажіть ОДЗ змінних виразу та обчисліть його значення:

1) $6a+4b$ для $a=\frac{2}{3}$, $b=-0,25$;

2) $0,4c-4d^2+4,5$ для $c=-20$, $d=\frac{1}{2}$;

3) $\frac{2(ab+4)+c}{11}$ для $a=-2,8$, $b=\frac{5}{7}$, $c=0,4$;

4) $3,5n-5(m^2-1)+1,2\left(4p-\frac{3}{16}\right)$ для $n=2$, $m=0,5$, $p=1\frac{3}{16}$;

5) $\frac{\left(1,25\cdot k+1\frac{1}{4}\cdot t\right)\cdot2\frac{1}{7}}{h-5\frac{1}{3}}$ для $k=1\frac{1}{8}$, $t=-1\frac{1}{8}$, $h=1,5$;

6) $\dfrac{\left(5{,}4 - x : 2\frac{2}{3} + (0{,}3 - 0{,}5 : x)\cdot\frac{4}{7}\right)\left(36y - 5\frac{1}{4}\right)}{y \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{1}{24}}$ для $x = 4$, $y = \frac{1}{4}$.

72. Укажіть ОДЗ змінних виразу та обчисліть його значення:

1) $-5{,}4a + 6b - 12$ для $a = \frac{4}{9}$, $b = -0{,}15$;

2) $5\left(2{,}5n^2 - m\right) - 9\left(p - 2\frac{1}{9}\right)$ для $n = 0{,}2$, $m = -2{,}8$, $p = -4\frac{2}{9}$;

3) $\dfrac{2 + 2c - 3\frac{11}{36}}{-3 + d}$ для $c = \frac{1}{96}$, $d = -\frac{1}{12}$;

4) $\left(\dfrac{11}{7 + y} - 2x \cdot 12{,}5 + 1\frac{13}{30}\right) : 0{,}017 - 0{,}5 \cdot 105$ для $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{1}{3}$.

73. Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Складіть вираз для знаходження відстані, яку проїде автомобіль за t год. Знайдіть значення виразу, якщо:

1) $t = 4$ год;
2) $t = 4$ год 30 хв;
3) $t = 2$ год 30 хв;
4) $t = 5$ год 20 хв.

74. Одна сторона прямокутника дорівнює a см, а інша — на 5 см більша. Складіть вирази для знаходження периметра і площі прямокутника. Знайдіть значення цих виразів, якщо:

1) $a = 2$ см;
2) $a = 5$ см;
3) $a = 3$ дм;
4) $a = 6$ см 4 мм.

75. Складіть вирази для знаходження периметра і площі квадрата зі стороною c. Знайдіть значення цих виразів, якщо:

1) $c = 3$ см; 2) $c = 4$ см 5 мм.

76*. Відомо, що для деяких значень x і y значення виразу $x - y$ дорівнює 6,2. Якого значення за тих самих значень x і y набуває вираз:

1) $4x - 4y$; 2) $y - x$; 3) $0{,}25(2y - 2x)$; 4) $\dfrac{-3x + 3y}{0{,}2}$?

77*. Відомо, що для деяких значень c і d значення виразу $c + d$ дорівнює $\frac{2}{3}$. Якого значення за тих самих значень c і d набуває вираз:

1) $6c + 6d - 6$; 2) $\dfrac{-c - d}{0{,}4}$?

78*. Відомо, що $a+3b=6$ і $c=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $a+3(b+c)$; 2) $6b+2(a-5c)$; 3) $\frac{(a-b)+4(b+c)}{8}$.

79*. Запишіть число, яке: 1) є наступним для натурального числа n; 2) дорівнює добутку трьох послідовних чисел, найбільше з яких m; 3) у своєму записі має a тисяч, b сотень, c десятків і d одиниць.

80*. Знайдіть значення y, за яких дріб $\frac{10}{|y-5|}$:

1) дорівнює 10; 2) не має змісту.

81*. Знайдіть ОДЗ змінних виразу:

1) $\frac{2}{2-\frac{2}{x}}$; 2) $\frac{4}{4-\frac{4}{x-4}}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

82. Складіть вираз для обчислення кількості учнів у 7 класі, у якому навчаються a хлопців та b дівчат. Обчисліть значення цього виразу за даними вашого класу.

83. На придбання меблів для кабінету виділено кошти. Розрахуйте варіанти мінімальної та максимальної вартості комплекту, що містить a столів, b стільців, c шаф та d стелажів, якщо вартість столів становить 450—550 грн, стільців — 120—135 грн, шаф — 1200—1500 грн, стелажів — 800—950 грн. Урахуйте, що для оптових покупців діє знижка 10 %. Обчисліть вартість покупки, якщо $a=6$, $b=6$, $c=1$, $d=3$.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

84. Обчисліть:

1) 5 % числа 55; 3) 120 % числа 4,5;

2) 60 % числа 30; 4) 72 % числа $3\frac{3}{8}$.

85. Знайдіть число:

1) 8 % якого дорівнюють 24;
2) 9 % якого дорівнюють 8,1;
3) 13 % якого дорівнюють $\frac{13}{25}$;
4) 105 % якого дорівнюють 21.

§ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ

Ви вже знаєте, що два числові вирази можуть мати рівні значення, і тоді ці вирази можна прирівняти. Наприклад, $10 \cdot 2 + 5 = 31 - 2 \cdot 3$. Про вирази зі змінними такого однозначно сказати не можна. Розглянемо приклади.

Задача 1. Чи можна прирівняти вирази: 1) $3a + b - a$ і $2a + b$; 2) $abb : b$ і ab?

Розв'язання. 1. Вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ містять однакові змінні і є цілими. Тому ОДЗ змінних першого виразу (ОДЗ-1) і другого виразу (ОДЗ-2) збігаються. Можемо записати спільно:

ОДЗ: a і b — будь-які числа.

Оскільки $3a - a = 2a$ для будь-яких значень a, то, яким би не було b:

$$3a + b - a = 2a + b.$$

Отже, для будь-яких значень a і b вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ прирівняти можна.

Наприклад:

якщо $a = -5$, $b = 0$, то

$$3a + b - a = 3 \cdot (-5) + 0 - (-5) = -15 + 0 + 5 = -10,$$
$$2a + b = 2 \cdot (-5) + 0 = -10 + 0 = -10;$$

якщо $a = 1{,}5$, $b = 4{,}3$, то

$$3a + b - a = 3 \cdot 1{,}5 + 4{,}3 - 1{,}5 = 4{,}5 + 4{,}3 - 1{,}5 = 7{,}3,$$
$$2a + b = 2 \cdot 1{,}5 + 4{,}3 = 3 + 4{,}3 = 7{,}3.$$

2. Вирази $abb : b$ і ab містять однакові змінні. Але в першому виразі є ділення на вираз зі змінною, а другий вираз є цілим. Тому ОДЗ змінних першого виразу (ОДЗ-1) і другого виразу (ОДЗ-2) не збігаються:

ОДЗ-1: a — будь-яке число, $b \neq 0$,

ОДЗ-2: a і b — будь-які числа.

Оскільки для $b = 0$ перший вираз втрачає зміст, то для будь-яких значень a і b вирази $abb : b$ і ab прирівняти не можна. Рівність справджується лише для $b \neq 0$.

Запам'ятайте!

Два вирази зі змінними називаються *тотожно рівними*, якщо вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їх змінних.

Зверніть увагу:

перевіряючи два вирази зі змінними на тотожну рівність, спочатку потрібно впевнитися, що їх ОДЗ збігаються.

У розглянутій задачі 1 вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ є тотожно рівними, а вирази $abb : b$ і ab — ні.

Заміну виразу тотожно рівним йому виразом називають *тотожним перетворенням виразу*. Наприклад:

$$3a + b - a = 2a + b.$$

Тотожні перетворення використовують для *спрощення виразів*. Так, в останньому прикладі за допомогою тотожного перетворення вираз із трьома доданками замінили виразом із двома доданками. Для цього у виразі $3a + b - a$ спочатку виявили *подібні доданки* ($3a$ і $-a$), а потім *звели* їх (тобто виконали вказану дію й отримали $2a$).

? Чому $3a$ і $-a$ є подібними доданками? Тому що в цих доданків однакова буквена частина.

Спрощення виразів здійснюють згідно із законами додавання і множення. Пригадайте їх (табл. 3).

Таблиця 3

Закони додавання і множення

ПЕРЕСТАВНИЙ ЗАКОН		СПОЛУЧНИЙ ЗАКОН	
додавання	*множення*	*додавання*	*множення*
Для будь-яких a, b		Для будь-яких a, b, c	
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
РОЗПОДІЛЬНИЙ ЗАКОН *множення відносно додавання*			
Для будь-яких a, b, c			
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$			

Задача 2. Спростіть вираз:
1) $14a \cdot 0{,}5bc$; 2) $25xy - 2x + 5y + 3xy + 8x : 4 - 2$.

Розв'язання. 1) $14a \cdot 0{,}5bc = 14 \cdot 0{,}5 \cdot abc = 7abc$;

2) $25xy - 2x + 5y + 3xy + 8x : 4 - 2 =$
$= 25xy - \cancel{2x} + 5y + 3xy + \cancel{2x} - 2 =$
$= 28xy - 0 \cdot x + 5y - 2 =$
$= 28xy + 5y - 2.$

Зверніть увагу:

подібні доданки, у яких числові коефіцієнти є протилежними числами, ***взаємно знищуються.***

Так, у задачі 2 дістали: $-2x + 2x = (-2 + 2) \cdot x = 0 \cdot x = 0$.

Щоб спростити вираз із дужками, спочатку *розкривають дужки*, спираючись на відповідні правила, а потім зводять подібні доданки.

Пригадаємо *правила розкриття дужок.*

Запам'ятайте!

Правила розкриття дужок.

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, знаки доданків у дужках зберігають.

Якщо перед дужками стоїть знак «–», то, розкриваючи дужки, знаки доданків у дужках змінюють на протилежні.

Наприклад:

$$-(x + 5) + (2x - 3) - (7 - 3x) =$$
$$= -x - 5 + 2x - 3 - 7 + 3x =$$
$$= 4x - 15.$$

Якщо перед дужками стоїть числовий множник або множник зі змінними, то, розкриваючи дужки, також користуються певними правилами.

Задача 3. Спростіть вираз $2x(y + 3z - 4) - 5(xy + xz - 6)$.

Розв'язання. $2x(y + 3z - 4) - 5(xy + xz - 6) =$
$= 2xy + 6xz - 8x - 5xy - 5xz + 30 =$
$= -3xy + xz - 8x + 30.$

Зверніть увагу:

щоб не помилитися, розкриваючи дужки у виразі:
1) порахуйте кількість доданків у дужках;
2) щоразу називайте кількість доданків у дужках і номер того доданка, який множите на вираз перед дужками, наприклад: «У дужках п'ять доданків; множимо перший доданок. У дужках п'ять доданків; множимо другий доданок і т.д.».

Із курсу математики 5—6 класів ви знаєте, що перетворення суми або різниці виразів у добуток нерідко пов'язане із *винесенням спільного множника за дужки*.

Задача 4. У виразі $16nmk + 8nm - 12mk$ винесіть спільний множник за дужки.

Розв'язання. Спочатку визначимо спільний множник для доданків даного виразу. Кожен доданок має числовий коефіцієнт, а НСД чисел 16, 8 і 12 дорівнює 4. Тому число 4 — це коефіцієнт спільного множника. Буквені частини кожного з доданків містять змінну m, а дві інші змінні (n і k) є не в кожному з доданків. Тому буквена частина спільного множника міститиме лише змінну m. Отже, спільний множник дорівнює $4m$. Винесемо його за дужки:

$$16nmk + 8nm - 12mk = 4m(4nk + 2n - 3k).$$

Зверніть увагу:

щоб перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки, виконайте обернену дію, тобто розкрийте дужки.

Дізнайтеся більше

Позначення невідомих величин за допомогою букв уперше зустрічається в записах у **Діофанта Александрійського** (бл. III ст.). Невідому величину Діофант називає «число» (ἀριθμός) і позначає літерою ς, квадрат невідомої — символом δ^{v} (скорочення від δύναμις — «степінь»). Проте повне значення буквеної символіки відносять до заслуг Франсуа Вієта, який вперше застосував її для позначення величин і коефіцієнтів. Завдяки введенню буквених коефіцієнтів стало можливим застосування загальних формул та дослідження алгебраїчних рівнянь у загальному вигляді.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які вирази називаються тотожно рівними?
2. Що називають тотожним перетворенням виразу?
3. Для чого використовують тотожні перетворення виразів?
4. Як зводять подібні доданки?
5. Як розкрити дужки, якщо перед дужками стоїть знак «+»; знак «–»?
6. Як винести спільний множник за дужки?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

86'. Чи можуть бути тотожно рівними два вирази, якщо: 1) їх буквені частини містять неоднакові змінні; 2) їх буквені частини містять однакові змінні; 3) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 не збігаються; 4) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються; 5) вирази набувають нерівних значень за тих самих значень змінних; 6) один вираз є цілим, а другий містить ділення на змінну?

87'. Чи правильно, що у виразі подібними є такі доданки, у яких: 1) той самий числовий коефіцієнт; 2) однакова буквена частина?

88'. Чи правильно, що у виразі взаємно знищуються такі подібні доданки, у яких числові коефіцієнти є: 1) взаємно оберненими числами; 2) додатними числами; 3) від'ємними числами; 4) протилежними числами?

89'. У виразі перед дужками стоїть знак «+». Чи правильно розкриють дужки, якщо: 1) знак першого доданка збережуть, а знаки інших доданків поміняють; 2) знак першого й останнього доданків збережуть, а знаки інших доданків поміняють; 3) не поміняють знаки жодного з доданків?

90'. У виразі перед дужками стоїть знак «–». Чи правильно розкриють дужки, якщо: 1) знак першого доданка поміняють, а знаки інших доданків збережуть; 2) знак першого й останнього доданків поміняють, а знаки інших доданків збережуть; 3) поміняють знаки кожного з доданків?

91'. У виразі перед дужками стоїть знак «–». Скільки разів треба змінювати знаки доданків, якщо вираз у дужках містить: 1) два доданки; 2) три доданки; 3) п'ять доданків?

92'. Чи є подібні доданки у виразі:
1) $5a+3a$; 2) $a+2b$; 3) $7c+4-5c+9$; 4) $6a+7b-9c$? Назвіть їх.

93´. У якому виразі взаємно знищуються доданки:

1) $4a+(-4a)$;
2) $-4a+4a$;
3) $-4a-4a$;
4) $4a-4a$;
5) $4a+4a$;
6) $4a-4$?

94°. Зведіть подібні доданки у виразі:

1) $12a+23a$;
2) $46c-c$;
3) $16n+4n+12$;
4) $12m+m+4m$;
5) $14p-10p-16p$;
6) $0{,}8k+10{,}2k-4{,}5$.

95°. Зведіть подібні доданки у виразі:

1) $16a-9a$;
3) $15c-12+5c$;
2) $3b+12b-16b$;
4) $15x-8x-12x$.

96°. Спростіть вираз:

1) $0{,}2a\cdot 6$;
2) $7c\cdot 0{,}5d$;
3) $-3m\cdot 4n$;
4) $10x\cdot(-1{,}1yz)$;
5) $-8a\cdot(-0{,}4bc)$;
6) $12t\cdot 5p\cdot(-4k)$.

97°. Спростіть вираз:

1) $a\cdot 14b$;
2) $0{,}2c\cdot 8d$;
3) $-5m\cdot 1{,}4n$;
4) $-7xy\cdot(-0{,}5z)$.

98°. Розкрийте дужки:

1) $2\cdot(a-4)$;
2) $1{,}5\cdot(b+2)$;
3) $-5\cdot(6-c)$;
4) $-0{,}4\cdot(d+2)$;
5) $a\cdot(8-1{,}2b)$;
6) $(n-0{,}5)\cdot m$;
7) $-x\cdot(5-y)$;
8) $(12a+5)\cdot(-b)$;
9) $-6x\cdot(y-3)$;
10) $(2n-m)\cdot(-5p)$;
11) $3t\cdot(5p+k+6)$;
12) $(2p-4k+6t)\cdot 2a$.

99°. Розкрийте дужки:

1) $7\cdot(a-2)$;
2) $-0{,}2\cdot(b-15)$;
3) $c\cdot(d-10)$;
4) $-n\cdot(0{,}5-m)$;
5) $2x\cdot(-5+y)$;
6) $(3a-2b+1)\cdot(-c)$.

100°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $a-(a-b)$;
2) $4c+(5c-4d)$;
3) $(n-m)-(m-n)$;
4) $2(k+p)-3(k-p)$;
5) $-5(x-y+z)+4(-x+y-z)$;
6) $c-(b-a)+(a-b-c)$.

101°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $(c-d)-2d$;
2) $2x-(3y-2x)$;
3) $4(a-b)-2(b-a)$;
4) $(n-3m)-(4n-6m)$.

102°. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $4a\cdot 8b$ і $32ab$;
2) $4c+2c+6$ і $6c+6d$;
3) $0{,}5+2n$ і $0{,}5\cdot 4n$;
4) $9m+5+m-4m$ і $12m+10-6m-5$;

5) $7xy : y$ і $7x$;
6) $12cd : 2cd$ і $6cd : cd$?

103°. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $5a + 6a$ і $11a$;
2) $12c \cdot 2d$ і $18cd$;
3) $5ab : a$ і $5b$;
4) $(4n + 5n) : 3$ і $3n$?

104°. Які з виразів є тотожно рівними:

1) $2a + 2b$;
2) $a + b + a + 2$;
3) $2(a + b)$;
4) $2a + b + b$?

105°. Винесіть спільний множник за дужки:

1) $11a + 11b$;
2) $4c + 12d$;
3) $6nm - 21m$;
4) $18n - 24m$;
5) $2p + 12k - 8t$;
6) $pk + 12k + 6tk$;
7) $-ax + 2bx$;
8) $10a - 5b - 15c$;
9) $-4x - 12y - 8z$;
10) $ay + by - 8y$;
11) $-3n - 12m + 9p$;
12) $4a - 6b + 8c - 10$.

106°. Винесіть спільний множник за дужки:

1) $6a - 6b$;
2) $-5c - 20d$;
3) $3xy + 9x$;
4) $-4n - 6nm + 2np$.

107°. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(2x-1)-(1-4x)$, якщо $x = 0,25$;

2) $(2-5x)+(6,4x+2,8)$, якщо $x = -2,4$;

3) $(8,5-6,2x)-\left(4\frac{1}{3}-7\frac{2}{7}x\right)$, якщо $x = 11\frac{2}{3}$;

4) $8x-\left(2\frac{5}{7}+4,7x\right)+\left(4,7x-6\frac{2}{7}\right)$, якщо $x = -5\frac{3}{8}$.

108°. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(5-14y)-(2,4-2,5y)$, якщо $y = -4$;

2) $5\frac{5}{6}-\left(2,4y+3\frac{1}{3}\right)+\left(2,5-1\frac{1}{3}y\right)$, якщо $y = \frac{5}{8}$.

109°. Замініть вираз на тотожно рівний:

1) $5a + 16a - 7b + 12b$;
2) $25c - 31d - 23d + 12c$;
3) $0,6m + 3,4n - 7,2n - 6,8m$;
4) $7y - 3,5x - 4,5x + 13y$;
5) $\frac{3}{7}p - 1\frac{4}{9}k - \frac{6}{7}p + k$;
6) $12,5t - \frac{5}{12}t + 5,5 - \frac{1}{12}$.

110°. Замініть вираз на тотожно рівний:

1) $12c + 14d - 4c - 23d$;
3) $\frac{5}{9}x - 4{,}5y + 2{,}5x + 5\frac{1}{3}y$;
2) $-5{,}6n + 3{,}4m + 4{,}5m - 7{,}2n$;
4) $2{,}8k + 1{,}4 - 7k + 4\frac{1}{5}k$.

111. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $-3(m - 0{,}2n) + \frac{4}{5}(10n - 1{,}5m)$;

2) $0{,}3(n - 5m) - 1{,}2(-n - 1{,}25m)$;

3) $\left(4\frac{2}{5}n - 0{,}8m\right) \cdot 5 - 0{,}6\left(\frac{5}{6}n - 3{,}5m\right) + 4{,}5m$;

4) $-2{,}6(4m - 5n) + (10n - 5m) \cdot (-1{,}3) - (4{,}8n + 1{,}3m) \cdot 5$.

112. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $6{,}4(2c - 0{,}5d) - 0{,}4(16c - 8d)$;

2) $0{,}9\left(3\frac{1}{3}d + 1\frac{2}{3}c\right) - (5{,}2c - d) \cdot \frac{1}{13} + 2{,}7c$.

113. Винесіть спільний множник за дужки:

1) $6ab - 4ac + 12ad$;
3) $\frac{4}{5}abc - \frac{8}{9}acd + 3\frac{1}{3}ack - 4apc$;
2) $-2{,}4mn + 1{,}6mp - 8mk$;
4) $-2{,}5xy + 1{,}5xyz - 5xyn + 3{,}5$.

114. Винесіть спільний множник за дужки:

1) $4{,}9xy - 1{,}4xz + 7yz$;
2) $\frac{3}{7}abc - \frac{6}{11}abd + 1\frac{4}{5}abcd - 9$.

115. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(5{,}4xy - 6{,}8xz + 4) - (3{,}2xy - 4{,}8xz + 5{,}8) - 2{,}2$, якщо $x = 1{,}5$; $y = -4$; $z = -0{,}2$;

2) $-20\left(0{,}2xy - 0{,}3x - \frac{2}{5}y\right) + (xy - 3y - 2x) \cdot 3$, якщо $x = -0{,}6$; $y = 0{,}4$;

3) $(2xy - 5xz) \cdot 0{,}4 - (xy + 3yz) \cdot 0{,}8 + (5xz - 2yz) \cdot (-0{,}2)$, якщо $x = 3\frac{1}{3}$; $y = 1\frac{1}{4}$; $z = -12{,}6$;

4) $(x - y) \cdot z - (4x - z) \cdot y + (5y - 7z) \cdot x$, якщо $x = -2{,}4$; $y = 1{,}5$; $z = -1\frac{3}{5}$.

116. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-4(0{,}5x+y)+0{,}8(3x-2z)-6(0{,}4z-0{,}1y)$, якщо $x=-5$; $y=10$; $z=5\frac{3}{4}$;

2) $(5x+6y)\cdot 0{,}5z+(3x-2z)\cdot 1{,}5y-(2{,}5z-y)\cdot x$, якщо $x=5{,}2$; $y=0{,}1$; $z=-6\frac{4}{11}$.

117. Знайдіть значення виразу:

1) $4a+12b$, якщо $a+3b=28$;
2) $7xz-14yz$, якщо $x-2y=17$; $z=0{,}4$;
3) $6ab-8ac$, якщо $a=-0{,}12$; $3b-4c=5$;
4) $3xy-0{,}6x+0{,}9y$, якщо $x-5xy-1{,}5y=1{,}25$.

118. Знайдіть значення виразу:

1) $15c-3d$, якщо $5c-d=-3$;
2) $-12mn+18mp$, якщо $m=0{,}5$; $2n-3p=-8$.

119. Складіть та спростіть вираз: 1) до добутку чисел a і b додати третю частину різниці чисел a і b; 2) потроєну суму чисел a і b поділити на половину їх різниці. Знайдіть значення виразу, якщо $a=5$, $b=-0{,}4$.

120. Складіть та спростіть вираз: потроєну різницю чисел c і d поділити на подвоєну їх суму. Знайдіть значення виразу, якщо $c=-2$, $d=1{,}2$.

121*. Що потрібно вставити замість зірочок, щоб отримати тотожно рівні вирази?

1) $4a(*+4{,}5c)=10ab+*$;
2) $*\left(\frac{2}{3}x-1\frac{1}{6}y\right)=-4x+7y$;
3) $3{,}6ac-*=6c(*-3bc)$;
4) $*+5\frac{2}{3}yz=\frac{1}{6}y(1{,}5xy+*)$.

122*. Складіть вираз для знаходження суми: 1) чотирьох послідовних натуральних чисел; 2) п'яти послідовних непарних натуральних чисел; 3) шести послідовних парних натуральних чисел; 4) трьох натуральних чисел, кратних 6.

123*. Відомо, що $\frac{a}{b}=12$. Знайдіть значення виразів:

1) $\frac{a}{2b}$;
2) $\frac{3a}{b}$;
3) $\frac{4a}{3b}$.

124*. Знайдіть значення x, якщо:

1) $x-y=5,\ \frac{y}{2}=-3;$ 2) $x+3y=4,\ \ 2x+3y=8.$

125*. Доведіть, що при виконанні рівності $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $b\neq0$, $d\neq0$, виконується така рівність:

1) $\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d};$ 3) $\frac{a+nb}{b}=\frac{c+nd}{d};$

2) $\frac{nb-a}{b}=\frac{nd-c}{d};$ 4) $\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}.$

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

126. Купили 3 кг яблук, 2 кг груш і 4 кг слив. Складіть вираз для обчислення вартості фруктів, якщо ціна 1 кг: яблук — a грн, груш — b грн, слив — c грн.

127. Складіть вираз щодо витрат часу Тетянкою на виконання домашнього завдання, якщо: 1) на англійську мову витрачено a хв; 2) на математику — у 1,5 рази більше, ніж на виконання англійської мови; 3) на українську літературу — на 10 хв, більше, ніж на виконання математики. Скільки часу виконувала домашнє завдання Тетянка, якщо завдання з англійської мови вона виконала за 20 хв?

128. Складіть задачу, подібну до попередньої, за вашими власними витратами часу на виконання домашнього завдання.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

129. Знайдіть середнє арифметичне трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких є найбільшим трицифровим числом.

130. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює 18. Знайдіть ці числа, якщо перше з них у 2 рази, а друге — у 1,5 раза більше за третє.

131. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{2}{x}=\frac{-3}{9-2x};$ 2) $\frac{5y}{10-2y}=\frac{3}{0{,}8}.$

§ 4. ТОТОЖНІСТЬ

Ви знаєте, що два вирази зі змінними можуть бути тотожно рівними. Наприклад, такими є пари виразів $3a - a$ і $2a$, $3xy \cdot (-5z)$ і $-15xyz$, $55nm : 11$ і $5nm$ для будь-яких значень змінних, що входять до них. Якщо в кожній із цих пар вирази поєднати знаком «=», то дістанемо особливі рівності — *тотожності*, а саме: $3a - a = 2a$, $3xy \cdot (-5z) = -15xyz$, $55nm : 11 = 5nm$.

Запам'ятайте!

Рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами, називається *тотожністю*.

Крім тотожностей зі змінними, вам вже зустрічалися й числові тотожності. Наприклад:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4, \quad 3 \cdot (7 - 5) = 3 \cdot 2.$$

Кожна *тотожність стверджує*, що вирази в її лівій і правій частинах є тотожно рівними, тобто їх відповідні значення дорівнюють одне одному для кожного значення їх змінних. Якщо не відомо, чи є тотожно рівними вирази в лівій і правій частинах певної рівності, тоді цю рівність перевіряють на правильність, тобто *доводять тотожність* або спростовують її.

Довести тотожність — означає довести тотожну рівність її лівої і правої частин. Для доведення тотожностей використовують тотожні перетворення виразів.

Розпочинають доведення (чи спростування) тотожності з перевірки того, чи збігаються ОДЗ змінних виразів у її лівій і правій частинах.

Задача 1. Чи є тотожністю рівність $(a - 1) \cdot a : (a - 1) = a$?

Розв'язання. ОДЗ-1: $a \neq 1$, ОДЗ-2: a — будь-яке число. Оскільки ОДЗ змінних виразів у лівій і правій частинах рівності не збігаються, то дана рівність не є тотожністю.

Якщо ОДЗ змінних виразів у лівій і правій частинах рівності збігаються, тоді застосовують один із чотирьох *способів доведення тотожностей*. Розглянемо приклад.

Задача 2. Доведіть тотожність $3(b+2)-b=3b+5-(b-1)$.

Розв'язання. ОДЗ-1: b — будь-яке число, ОДЗ-2: b — будь-яке число.

Спосіб 1 (перетворення лівої частини рівності).
Перетворимо вираз у лівій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$\begin{aligned}&3(b+2)-b=\\&=3b+6-b=\\&=3b+5+1-b=\\&=3b+5-b+1=\\&=3b+5-(b-1).\end{aligned}$$

Отже, $3b+5-(b-1)=3b+5-(b-1)$.
Звідси $3(b+2)-b=3b+5-(b-1)$, що і вимагалося довести.

Спосіб 2 (перетворення правої частини рівності).
Перетворимо вираз у правій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її лівій частині:

$$\begin{aligned}&3b+5-(b-1)=\\&=3b+5-b+1=\\&=3b+6-b=\\&=3(b+2)-b.\end{aligned}$$

Отже, $3(b+2)-b=3(b+2)-b$.
Звідси $3(b+2)-b=3b+5-(b-1)$, що і вимагалося довести.

Спосіб 3 (перетворення обох частин рівності).
Перетворимо вирази в обох частинах даної рівності так, щоб вони набули одного й того самого вигляду:

$$\begin{aligned}&3(b+2)-b= \qquad && 3b+5-(b-1)=\\&=3b+6-b= && =3b+5-b+1)=\\&=2b+6. && =2b+6.\end{aligned}$$

Отже, $2b+6=2b+6$.
Звідси $3(b+2)-b=3b+5-(b-1)$, що і вимагалося довести.

Спосіб 4 (різницеве порівняння). Перевіримо, чи дорівнює нулю різниця виразів у лівій і правій частинах даної рівності:

$$\begin{aligned}&3(b+2)-b-(3b+5-(b-1))=\\&=3b+6-b-(3b+5-b+1)=\\&=2b+6-(2b+6)=\\&=2b+6-2b-6=0.\end{aligned}$$

Звідси $3(b+2)-b=3b+5-(b-1)$, що і вимагалося довести.

Чи можна спростувати тотожність, не перетворюючи виразів у її лівій і правій частинах? Так. Розглянемо приклад.

Задача 3. Чи є тотожністю рівність $0 \cdot x = x$?

Розв'язання. ОДЗ-1: x — будь-яке число, ОДЗ-2: x — будь-яке число. Перевіримо, чи справджується дана рівність, наприклад, для $x = 1$. Підставивши це значення x у вирази лівої і правої частин рівності, отримаємо, що вони набувають різних значень: $0 \cdot 1 \neq 1$, або $0 \neq 1$. Отже, дана рівність не є тотожністю.

Зверніть увагу:

щоб спростувати правильність рівності зі змінними, достатньо дібрати лише один набір значень змінних, за яких ліва і права її частини набувають різних значень.

Дізнайтеся більше

Доведення вважають єдиним способом встановлення істини в математиці. Проте так було не відразу. Спочатку в єгипетській і вавилонській математиці обчислювальні формули та математичні факти вгадувались, а потім експериментально перевірялись. Це вважали доказом їх істинності.

Необхідність доведення обґрунтував давньогрецький математик Евклід (ІІІ ст. до н. е.). Він вважав, що доведення мають бути логічними висновками з аксіом — тверджень, що приймають без доведення. У результаті з'явилися знамениті «Начала» Евкліда.

У 1939 р. виходить багатотомний трактат групи французьких математиків, які взяли для цього псевдонім Ніколя Бурбакі. Ось якою фразою відкривають Бурбакі свій трактат: «Із часів греків говорити «математика» — означає говорити «доведення». Відтоді математика і доведення — два слова, які вважають майже синонімами.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке тотожність?
2. Що означає — довести тотожність?
3. У чому суть способу перетворення лівої частини рівності?
4. Поясніть суть способу перетворення правої частини рівності.
5. У чому суть способу перетворення обох частин рівності?
6. Поясніть суть способу різницевого порівняння.
7. Як спростувати правильність рівності зі змінними?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

132'. Чи правильно, що тотожністю може бути:
1) вираз; 2) нерівність; 3) рівність?

133'. Чи правильно, що ліва і права частини тотожності мають бути:
1) нерівними виразами;
2) рівними виразами;
3) тотожно рівними виразами?

134'. Чи може бути тотожністю рівність, у якої:
1) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 не збігаються;
2) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються?

135'. Чи є тотожністю числова рівність? Якщо так, наведіть приклад.

136°. Чи може бути тотожністю запис:
1) $a \cdot 1 - a$;   3) $a \cdot a - a^2 = 0$;   5) $4a - 2a + a = 3a$;
2) $3a - 4a \neq 5a$;   4) $2a - 2 = a$;   6) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$?

137°. Чи може бути тотожністю запис:
1) $b + 2 > 0$;   3) $-3b + 3b = 0$?
2) $b \cdot \frac{3}{4} - \frac{3b}{4}$;   4) $4b - 5b + 6b = 5b$;

138°. Чи правильно, що рівність $12 - (5 - 9) = 16$ є тотожністю? Відповідь поясніть.

139°. Що треба вставити замість *, щоб отримати тотожність:
1) $2b + b = *$;   3) $b \cdot b \cdot b = *$;   5) $5(8b - 6) = *$;
2) $b \cdot * = 0$;   4) $2b + * = 0$;   6) $\frac{9}{15} = \frac{*}{5}$?

140°. Що треба вставити замість *, щоб отримати тотожність:
1) $5a - * = 2a$;   3) $4 \cdot (a - 2) = *$;
2) $a \cdot * = 1$;   4) $7a + * = 0$?

141°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення лівої частини рівності:
1) $10a - (6a - 9b) = 4a + 9b$;
2) $(0,7n - 0,6m) - 2(0,4n - 0,3m) = -0,1n$.

142°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення лівої частини рівності: $(17a-6b)+4(-5a+4b)=-3a+10b$.

143°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення правої частини рівності:

1) $a=-1\frac{2}{7}(a-7b)+2\frac{2}{7}a-9b$; 2) $c-d=4(d-c)-5(d-c)$.

144°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення правої частини рівності: $-6c=0,8(5c-3d)-4(2,5c-0,6d)$.

145°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення обох частин рівності:

1) $12a-4(3a-7b)=(4a+b)-(4a-27b)$;

2) $4,5m+\left(1\frac{1}{3}n+2,5m\right)-0,5n=7\left(m-\frac{1}{7}n\right)+1\frac{5}{6}n$.

146°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення обох частин рівності:

$$\left(2\frac{3}{4}m-10,4n\right)-4\left(\frac{3}{16}m-1,6n\right)=-2(2n-m).$$

147°. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння:

1) $4,9a-4(a-0,6b)=0,3(3a+8b)$;

2) $\left(p-\frac{1}{3}k\right)-\left(3p-\frac{2}{3}k\right)=(k-2p)-\frac{2}{3}k$.

148°. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння: $18p-4(2k+5p)=-\frac{1}{2}(16k+4p)$.

149. Чи є тотожністю рівність:

1) $5a-2=a+(4a-2)$; 3) $(2x-4y):2=x-2y$;
2) $14(b-b)=14$; 4) $6m\cdot(4+m):6mn=(4+m):n$?

150. Чи є тотожністю рівність:

1) $-c+d-2c+2=-3c+3d$; 2) $(9k-6k):3k=3k$?

151. Доведіть чи спростуйте тотожність:

1) $a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)=0$;

2) $c(n+m)-c(m-n)=2n(c+m)-2mn$;

3) $4(p+2k)-k(8-4p)=4(k-2p)$;

4) $1,2c(6-2p)=0,8(9c+6p)-p(2,4c-4,8)$.

152. Доведіть чи спростуйте тотожність:

1) $a(b-c-d)+a(b+c+d)=2ab$;

2) $-m(n+4)+n(m+4)=4(m-n)$.

153. Доведіть тотожність $8(a-b)+6(b-c)-4(a-c)=4a-2(b+c)$ різними способами.

154. Доведіть тотожність $2(n+p)-4m=2(-n+m)-6(m-p)+4(n-p)$ різними способами.

155. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $12x-5(5+3x)+3(x+4)$;

2) $8{,}5(y+2)-1{,}7(10+5y)-15{,}5$;

3) $a(b-4)+b(6-a)-2(3b-2a)$;

4) $7-1\frac{1}{2}m+6\left(\frac{1}{3}m-5\frac{1}{3}n\right)-0{,}5(m-64n)$.

156. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $9(5-y)+6(y-3)-3(4-y)$;

2) $m(n-2{,}8)+n(4{,}2-m)-1{,}4(3n-2m)-6$.

157*. Доведіть, що $5a(3b-2c)+4b(2c-3a)-7c(-a+b)-bc=15$, якщо $a(b-c)=5$.

158*. Доведіть, що за будь яких a і b значення виразу $5a+5b-(4b-2-0{,}5(2a-5b-3(2a-3b+2(a+b))))$ дорівнює 2.

159*. Який вираз треба підставити замість зірочки, щоб отримати тотожність:

1) $2(a+b)-2\cdot * =4b$;
2) $2(a+b)-2\cdot * =0$;
3) $2(a+b)-2\cdot * =4a+4b$;
4) $2(a+b)-2\cdot * =2a+6b$;
5) $2(a+b)-2\cdot * =4a-4b$;
6) $2(a+b)-2\cdot * =4b-2a$?

160*. Доведіть, що середнє арифметичне трьох послідовних натуральних чисел дорівнює середньому із цих чисел.

161*. Доведіть, що середнє арифметичне десяти натуральних чисел не може дорівнювати 5,8.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

162. Сергійко з друзями вирушили в похід до бази відпочинку, яка розташована на відстані 250 км від їх міста. Вони планували спочатку 2 год йти пішки зі швидкістю 5 км/год, а потім 4 год їхати автобусом зі швидкістю 60 км/год. Проте швидкість їх руху під час пішої частини походу становила лише 4 км/год. Якою має бути швидкість автобуса, щоб хлопці вчасно потрапили на базу? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та обчисліть його значення.

163. Одна ділянка землі має форму квадрата зі стороною a, а друга — форму прямокутника, довжина якого $2a$. Обидві ділянки огороджені. Яка з ділянок має довшу огорожу, якщо ділянки мають однакову площу? Складіть вираз для знаходження різниці довжин огорожей та знайдіть його значення, якщо $a = 80$ м.

164. Клієнт поклав у банк n грн. Якою буде сума на його рахунку через 2 роки, якщо банк нараховує 15 % річних?

165. Населення міста становить на сьогодні m тис. жителів та збільшується щороку на 3 %. Яким стане населення міста через 5 років?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

166. Обчисліть: 1) $3^4 + 2^2 \cdot 5^3$; 2) $(3^4 + 2^2) \cdot 5^3$.

167. Порівняйте значення виразів $a^2 + b^2$ і $(a+b)^2$, якщо $a = 4$, $b = -5$.

168. На уроці математики в 7-А класі присутні 30 учнів. Число учнів, які відсутні, становить $\frac{1}{16}$ загальної кількості учнів. Скільки учнів навчається в 7-А класі?

169. На прем'єрному показі нового фільму діти становили $\frac{9}{25}$ усіх глядачів. Скільки відсотків від усіх глядачів становили діти?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається числовим виразом; значенням числового виразу?
2. Назвіть дії першого ступеня, другого ступеня, третього ступеня.
3. Який порядок виконання дій у числовому виразі без дужок?
4. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками?
5. У якому випадку числовий вираз не має змісту?
6. Який вираз називають виразом зі змінними?
7. Поясніть, як обчислити значення виразу зі змінними.
8. Що таке допустимі значення змінних для виразу зі змінними?
9. Які вирази називаються раціональними; цілими?
10. Які вирази називаються тотожно рівними?
11. Що таке тотожне перетворення виразу?
12. Для чого використовують тотожні перетворення виразів?
13. Як зводять подібні доданки?
14. Сформулюйте правила розкриття дужок.
15. Як виносять спільний множник за дужки?
16. Що таке тотожність? Що означає — довести тотожність?
17. У чому полягає суть способу доведення тотожності перетворенням її лівої частини; правої частини?
18. У чому полягає суть способу доведення тотожності перетворенням обох її частин?
19. Поясніть суть способу доведення тотожності способом різницевого порівняння.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Знайдіть значення виразу $10{,}5:5-\left(3{,}4+2^2\cdot 2{,}5\right)$.

А. 11,3. **Б.** –11,3. **В.** –13,3. **Г.** –18,5.

2°. Винесіть спільний множник за дужки у виразі:

$$0{,}4ab-2ac+3{,}6ad.$$

А. $a(0{,}4b-2c+3{,}6d)$. **В.** $2a(0{,}2b-c+1{,}8d)$.

Б. $2a(0{,}4b-c+3{,}6d)$. **Г.** $2a(0{,}2b-c+3{,}6d)$.

3°. Спростіть вираз $4{,}5n+12{,}4-2n-1\frac{2}{9}n$.

А. $-1\frac{5}{9}n+12{,}4$. **В.** $12{,}4-1\frac{2}{9}n$.

Б. $13\frac{17}{45}n$. **Г.** $1\frac{5}{9}n+12{,}4$.

4. Знайдіть значення виразу $2\frac{1}{7}(14a+b)-(3b-2{,}8a)$, якщо $a=-0{,}5$ і $b=2\frac{1}{3}$.

А. –7,2. **Б.** 7,2. **В.** –11,4. **Г.** 11,4.

5*. Яке число треба поставити замість зірочки у рівності $*\left(4{,}5a-1\frac{5}{6}b\right)=-9a+3\frac{2}{3}b$, щоб отримати тотожність?

А. –0,2. **Б.** 2. **В.** –2. **Г.** –0,5.

РОЗДІЛ 2

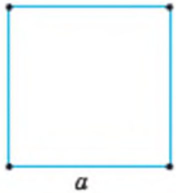
ОДНОЧЛЕНИ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке степінь з натуральним показником;
- які властивості дій зі степенями;
- який вираз називають одночленом;
- як звести одночлен до стандартного вигляду;
- що таке степінь одночлена;
- як підносити до степеня та множити одночлени;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 5. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

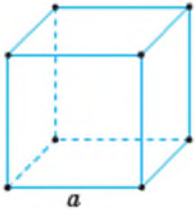
Подивіться на малюнки 3 і 4. Ви бачите квадрат зі стороною a (мал. 3) і куб з ребром a (мал. 4). Ви знаєте, як знайти площу квадрата й об'єм куба та як записати результат за допомогою відповідних виразів: a^2 і a^3.



Мал. 3

Узагалі, добуток n рівних множників, кожний з яких дорівнює a, можна записати за допомогою *степеня*: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n$.

У виразі a^n число a називають *основою степеня*. Воно показує, яке число множили саме на себе. Число n називають *показником степеня*. Він показує, скільки рівних множників було в добутку. Оскільки для лічби множників використовують натуральні числа, то виразу a^n дали назву «степінь з натуральним показником». Пізніше ви дізнаєтеся про степені з іншими показниками.



Мал. 4

Запам'ятайте!

Степенем **числа** a ***з натуральним показником*** n**, більшим за 1, називається добуток** n **множників, кожний із яких дорівнює** a**.**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$$

Вираз a^n читають так: «a в степені n» або «енний степінь числа a».

Задача 1. Запишіть вираз $27 \cdot 3 \cdot 9$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) 9; 3) 27.

Розв'язання.

1) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$;

2) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$;

3) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 27 = 27^2$.

Чому в означення степеня з натуральним показником не включено показник 1? Тому що немає сенсу говорити про добуток, у якому лише один множник. Степінь із показником 1 визначають окремо.

Запам'ятайте!

***Степенем** числа a **з показником 1** називається саме число a.*

$$a^1 = a$$

Якщо основа степеня дорівнює 1, то значення степеня за будь-якого натурального n дорівнює 1:

$$1^n = 1.$$

Якщо основа степеня дорівнює 0, то значення степеня за будь-якого натурального n дорівнює 0:

$$0^n = 0.$$

Задача 2. Розв'яжіть рівняння: $(x+5)^2=0$.

Розв'язання. $(x+5)^2=0$, $(x+5)\cdot(x+5)=0$, $x+5=0$, $x=-5$.

Зверніть увагу:

якщо значення степеня з натуральним показником дорівнює 0, то основа степеня дорівнює 0. Тобто, якщо $a^n=0$, то $a=0$.

Задача 3. Чи є рівними значення степенів:

1) 5^4 і $(-5)^4$; 2) 5^3 і $(-5)^3$?

Розв'язання. Обчислимо значення даних виразів:

1) $5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$, $(-5)^4=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=625$;
Отже, $5^4=(-5)^4$.

2) $5^3=5\cdot5\cdot5=125$, $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$.
Отже, $5^3\neq(-5)^3$.

Знак степеня залежить від знака основи степеня та від парності чи непарності показника степеня. Як ми побачили в задачі 3, добуток парної кількості від'ємних чисел є додатним, а добуток непарної кількості від'ємних чисел є від'ємним. Добуток будь-якої кількості (як парної, так і непарної) додатних чисел є додатним.

Зверніть увагу:

1) будь-який натуральний степінь додатного числа — число додатне:

$$a^n > 0,\ \text{якщо}\ a > 0,\ n\ \text{— натуральне число;}$$

2) парний натуральний степінь від'ємного числа — число додатне:

$$a^n > 0,\ \text{якщо}\ a < 0,\ n = 2k,\ k\ \text{— натуральне число;}$$

3) непарний натуральний степінь від'ємного числа — число від'ємне:

$$a^n < 0,\ \text{якщо}\ a < 0,\ n = 2k - 1,\ k\ \text{— натуральне число.}$$

Дію, за допомогою якої добуток рівних множників згортають у степінь, називають *піднесенням до степеня*. Це — п'ята арифметична дія, яка є дією *третього ступеня*. Під час обчислення значень виразів її виконують найпершою.

Задача 4. Обчисліть значення виразу $5x^2 + 10$ для $x = -3$.

Розв'язання. Підставимо у вираз $5x^2 + 10$ значення змінної –3:

$$5x^2 + 10 =$$
$$= 5 \cdot (-3)^2 + 10 =$$
$$= 5 \cdot 9 + 10 =$$
$$= 55.$$

Зверніть увагу:

у виразах, що містять степені, спочатку виконують піднесення до степеня, а потім — множення, ділення, додавання, віднімання.

Дізнайтеся більше

Уперше натуральні степені чисел охарактеризував Діофант Александрійський. У своїй знаменитій «Арифметиці» він описує перші натуральні степені чисел так: «Серед чисел є квадрати, що отримані множенням числа самого на себе, ці числа називаються стороною квадрата; куби, що отримані множенням квадратів на їх сторону; квадрато-квадрати — від множення квадратів самих на себе; квадрато-куби, що отримані множенням квадрата на куб його сторони; кубо-куби — від множення кубів самих на себе».

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке степінь числа; основа степеня; показник степеня?
2. Що означає піднести число a до степеня n?
3. Чому дорівнює a в степені 1?
4. Чому дорівнює 1 в степені n?
5. Чому дорівнює 0 в степені n?
6. Який знак парного степеня додатного числа; від'ємного числа?
7. Який знак непарного степеня додатного числа; від'ємного числа?
8. Який порядок виконання дій у виразі, що містить степені?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

170'. Чи правильно, що вираз a^n — це: 1) добуток чисел a і n; 2) a-ий степінь числа n; 3) n-ий степінь числа a?

171'. Чи правильно, що у виразі a^n число a показує: 1) скільки рівних множників було в добутку; 2) яке число множили саме на себе?
Як називається число a?

172'. Чи правильно, що у виразі a^n число n показує: 1) яке число множили саме на себе; 2) скільки рівних множників було в добутку?
Як називається число n?

173'. Прочитайте вираз:

1) 2^2; 2) $(-10)^3$; 3) $1,2^{10}$; 4) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$; 5) $(-5)^5$; 6) 0^2.

Назвіть основу і показник степеня. Що вони показують?

174'. Скільки разів взято множником число 0,5, якщо отримали степінь: 1) $0,5^2$; 2) $0,5^5$; 3) $0,5^n$; 4) $0,5^m$?

175'. Запишіть у вигляді степеня:
1) $2 \cdot 2 \cdot 2$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot (-1,5) \cdot (-1,5)$.

176'. Запишіть у вигляді добутку:
1) $(-15)^5$; 2) 10^4; 3) $(-4)^6$.

177′. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 4?

Таблиця 4

Степінь	2^2		7^8		$(-2,5)^3$		4^4			
Основа степеня		–5		0		0,9		1	$\frac{3}{5}$	–9
Показник степеня		6		3		10		2	14	3

178′. Чи є правильною рівність: 1) $1^n=-1$; 2) $0^n=n$; 3) $0^n=0$; 4) $1^n=1$?

179′. Обчисліть: 1) 0^6; 2) 0^{15}; 3) 1^9; 4) 1^{100}.

180′. Чи правильно, що для від'ємного числа a:

1) a^n — від'ємне число;
2) a^n — від'ємне число, якщо n — парне натуральне число;
3) a^n — від'ємне число, якщо n — непарне натуральне число;
4) a^n — додатне число;
5) a^n — додатне число, якщо n — непарне натуральне число;
6) a^n — додатне число, якщо n — парне натуральне число?

181′. Чи правильно, що у виразах, які містять степені, спочатку виконують: 1) додавання; 2) віднімання; 3) множення; 4) ділення; 5) піднесення до степеня?

182°. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)$;

2) $-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{-b}\cdot\frac{-a}{b}$;

3) $2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a\cdot 2a$.

183°. Обчисліть:

1) 2^6;
2) $(-1,1)^2$;
3) $(-4)^2$;
4) $0,1^4$;
5) $0,5^3$;
6) $(-2)^3$;
7) $(-3)^3$;
8) 3^3;
9) $(-0,2)^6$;
10) $(-5)^3$;
11) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$;
12) $\left(-\frac{5}{6}\right)^1$.

184°. Обчисліть:

1) $0,4^3$;
2) $(-6)^4$;
3) $(-25)^1$;
4) $(-0,1)^5$;
5) $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$;
6) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$.

185°. Знайдіть a^2, якщо a дорівнює: 1) 10; 2) –0,1; 3) –4; 4) $\frac{1}{5}$.

186°. Знайдіть m^3, якщо m дорівнює: 1) 10; 2) –0,1; 3) –4; 4) $\frac{1}{5}$.

187°. Знайдіть:

1) суму квадратів чисел 5, –2 і –4;
2) різницю кубів чисел –10 і 5;
3) суму квадрата числа 6 і четвертого степеня числа –3.

188°. Знайдіть:

1) суму квадратів чисел –1, 6 і –3;
2) квадрат суми чисел –1, 6 і –3;
3) різницю кубів чисел 5 і –7;
4) куб різниці чисел 5 і –7.

189°. Запишіть у вигляді степеня число: 1) 4; 2) 9; 3) 16; 4) 5. Скільки розв'язків має задача?

190°. Запишіть у вигляді степеня число: 1) 100; 2) 49; 3) 64; 4) 2. Скільки розв'язків має задача?

191°. Обчисліть:

1) 0^3;
2) 1^{12};
3) 0^{71};
4) -1^{111};
5) 1^3+0^{22};
6) $0^5-(-1)^9$.

192°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5=0$;
2) $(x+1)^3=0$;
3) $(-x)^2=0$;
4) $(8-x)^9=0$;
5) $(6+5x)^{25}=0$;
6) $(4x+20)^{111}=0$.

193°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8=0$; 2) $(15+x)^{13}=0$; 3) $(9-6x)^2=0$; 4) $(0,1x+8)^{17}=0$.

194°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

1) $(-8)^8$; 2) 10^7; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^7$; 4) $(-3,6)^5$; 5) $(-1)^9$; 6) $\left(-\frac{4}{7}\right)^6$?

195°. Поставте знак <, >, = між виразами:

1) 12^3 і 0;
2) $(-2)^5$ і $(-5)^2$;
3) $(-7,2)^5$ і 0^3;
4) 1^{23} і $(-1)^{32}$;
5) 23^1 і 32^1;
6) 80 і 3^4;
7) $(-2)^6$ і 2^6;
8) -2^6 і 2^6;
9) -2^6 і $(-2)^6$;
10) $0,5^3$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
11) $-0,2^6$ і $(-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2)\cdot(-0,2)$.

196°. Порівняйте значення виразів:

1) $(-4)^4$ і 4^4;
2) $(-4)^3$ і 4^3;
3) $(-1)^5$ і 1^5;
4) 1^7 і 1^9;
5) $(-1)^6$ і 1^6;
6) 0^3 і 0^{11}.

197°. Обчисліть:

1) $11^1 \cdot (-1)^{11}$;
2) $0^{11} \cdot (-4)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^4$;
3) $-(-3)^4 + 3^4 + 10^3 \cdot 1^6$;
4) $(-1)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1^{20}$.

198°. Обчисліть:

1) $34^3 \cdot 0^{12}$;
2) $-(-2)^5 - 2^5 + 1^3 \cdot 3^1$;
3) $-(-1)^3 + 5^2 - 2^4$;
4) $(-16)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0^4$.

199°. Обчисліть:

1) $(-6)^3 + (-6^2) \cdot 3$;
2) $(-6^3 + 6^2) \cdot 3$;
3) $-6 + 6 \cdot 3^2$;
4) $-6 + (-6) \cdot 3^2$.

200°. Обчисліть:

1) $(-10)^3 + (-1^2)$;
2) $((-5)^3 + 5^2) : 10$;
3) $(-12 + 8^2) : (-2)$;
4) $(-12 + 8)^2 \cdot (-2)$.

201°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \cdot 3^2 - x = 25$; 2) $4x = 8^2$; 3) $3^4 + x = (-9)^2$.

202. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:

1) $25 \cdot 5$; 2) $5 \cdot 25 \cdot 125$; 3) $25 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 25$.

203. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

1) $8 \cdot 4$; 2) $2 \cdot 4 \cdot 16$; 3) $32 \cdot 2 \cdot 64$.

204. Запишіть вираз $4 \cdot 64 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою:

1) 2; 2) 4; 3) 16.

205. Запишіть вираз $2 \cdot 8 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою:

1) 2; 2) 4; 3) 16.

206. Знайдіть a^4, якщо a дорівнює: 1) -2; 2) $-0{,}3$; 3) $\frac{1}{2}$.

207. Знайдіть m^5, якщо m дорівнює: 1) $0{,}2$; 2) -3; 3) $-\frac{2}{3}$.

208. Знайдіть значення виразу $(a+b)^2$, якщо:

1) $a = 2$, $b = -2{,}1$; 2) $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1\frac{2}{3}$; 3) $a = \frac{4}{5}$, $b = 2{,}2$.

209. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$, якщо:

1) $a = 2$, $b = -2{,}1$; 2) $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1\frac{2}{3}$; 3) $a = \frac{4}{5}$, $b = -2{,}2$.

210. Знайдіть різницю куба суми квадратів чисел -2 і 3 та квадрата суми кубів цих чисел.

211. Знайдіть число, квадрат якого дорівнює:

1) 0,16; 2) 0,0025; 3) $\frac{16}{121}$; 4) $1\frac{69}{100}$; 5) 1,44.

212. Куб якого числа дорівнює: 1) –8; 2) 0,125; 3) $-\frac{1}{125}$?

213. Обчисліть: 1) $-3\cdot(-5)^3+12\cdot(-14)^2-4^4\cdot3^2$;

2) $\left((-2)^4\cdot(-5)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\right):\left(2{,}2-\frac{1}{5}\right)^3$;

3) $-2^3\cdot(-5)^2\cdot(-2^2)\cdot(-5)^3\cdot(64-8^2)^7$.

214. Обчисліть: 1) $0{,}5^2+(-0{,}1)^2\cdot6^3$; 3) $(-0{,}4)^2+0{,}3^2\cdot(-1)^3+3^2$;
2) $(0{,}5^2+(-0{,}1)^2)\cdot6^3$; 4) $((-0{,}4)^2+0{,}3^2)\cdot((-1)^3+3^2)$.

215. Число 9065 можна записати як суму розрядних доданків: $9065=9\cdot10^3+0\cdot10^2+6\cdot10^1+5$. Запишіть у такому вигляді число: 1) 253608; 2) 22000.

216. Обчисліть: 1) $10^4+2\cdot10^3+3\cdot10^2+4\cdot10^1+5$;
2) $5\cdot10^5+6\cdot10^3+6\cdot10^2+5$.

217. Знайдіть суму чисел:
1) $2\cdot10^5+2\cdot10^4+2\cdot10^2+2\cdot10^1+2$ і $5\cdot10^5+5\cdot10^4+5\cdot10^2+5\cdot10^1+5$;
2) $9\cdot10^5+2\cdot10^4+4\cdot10^3+6\cdot10^1$ і $5\cdot10^6+8\cdot10^3+9\cdot10^2+3$.

218. Визначте знак виразу:

1) $-(-4)^{15}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; 2) $-9^5\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^6$; 3) $(-0{,}01)^{23}\cdot(-1)^8\cdot56^{65}$.

219. Запишіть у порядку зростання числа: $(-0{,}2)^2$, $(-0{,}2)^3$, $\left(\frac{1}{5}\right)^1$, $-(-0{,}2)^2$ і $-(-0{,}2)^3$.

220. Чи може a^2 бути меншим, ніж a? Наведіть приклад.

221. За якого натурального значення n виконується нерівність:

1) $(-6)^2<3^n<\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^2$; 2) $0^3\le0{,}5^n\le\left(\frac{1}{2}\right)^3$?

222. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1{,}2-3x)^4=0$;
2) $(2-x)^3=0$;
3) $2^3\cdot x^3\cdot(-x)^3=0$;
4) $(1-x)^6\cdot(9+x)^{12}=0$;
5) $x^8\cdot(15-x)^8=0$;
6) $(7{,}2+8x)^5\cdot\left(\frac{1}{12}-2x\right)^2=0$;
7) $|x-5|\cdot(x-6)^{99}=0$;
8) $|x+1|^3\cdot(x-10)^{10}=0$.

223*. Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $0{,}01 \cdot \frac{9}{25} \cdot 2\frac{4}{25} \cdot 10$;

2) $0{,}125 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25$;

3) $0{,}09 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}09 \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot (-0{,}3)$;
4) $4 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 3 \cdot 16$;

5) $-\frac{5}{8} \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}064) \cdot \frac{4}{125}$.

224*. За якого значення a вираз $|-a|^n$ для всіх натуральних значень n є: 1) додатним; 2) недодатним; 3) невід'ємним?

225*. За якого значення a вираз $(|-a| + a)^n$ для всіх натуральних значень n дорівнює: 1) нулю; 2) одиниці?

226*. Визначте знак виразу:
1) $a^3 \cdot (-a)^4$, якщо $a < 0$; 2) $a^2 + 32$; 3) $(-a)^7 \cdot (-a)^8$, якщо $a > 0$.

227*. Знайдіть значення виразу $(a^2-1) \cdot (a^3-1) \cdot (a^4-1) \cdot \ldots \cdot (a^{100}-1)$, якщо: 1) $a=-1$; 2) $a=1$; 3) $a=0$.

228*. Знайдіть значення виразу $(a^2-1) \cdot (a^2-2) \cdot (a^2-3) \cdot \ldots \cdot (a^2-100)$, якщо: 1) $a=8$; 2) $a=-6$.

229*. Спростіть вираз: 1) $1^1 + (-1)^2 + 1^3 + (-1)^4 + \ldots + 1^{19} + (-1)^{20}$;
2) $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{20}$.

230*. Знайдіть найменше значення виразу:
1) $a^2 - 4$; 2) $(a+3)^6 + 3$; 3) $|(-a)^3| + 98$.

231*. Розв'яжіть рівняння:
1) $(36 - x) \cdot (4^3 - 8^2) = 0$;

2) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (2^5 - x) = \frac{1}{0{,}2^3}$; 3) $12x = 6^3 \cdot \left(\frac{1^3}{6^2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)$.

232*. Розв'яжіть рівняння:
1) $(3-x)^2 + (x-2)^6 = 0$; 3) $(2-x)^2 + |x-2| = 0$;
2) $(100+x)^{100} + (x+10^2)^{10} = 0$; 4) $(5-x)^4 + (x+5)^4 = 0$.

233*. Квадрат числа складається з цифр 6, 5 і 2. Знайдіть це число.

234*. Доведіть: 1) $11^{10} - 1$ ділиться на 10; 2) $10^{10} + 5$ ділиться на 3.

235*. Доведіть: 1) $41^5 - 1$ ділиться на 10; 2) $10^5 + 17$ ділиться на 9.

236*. Доведіть, що вираз $\frac{10^n + 8}{9}$ є натуральним числом для будь-якого натурального n.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

237. Три кімнати мають форму квадратів зі сторонами відповідно a, b і c. Знайдіть суму площ чотирьох кімнат, якщо площа найбільшої з них дорівнює сумі площ трьох інших.

238. Дванадцяткова система числення була створена ще стародавніми шумерійцями (5 тис. до н. е.). Елементом такої системи нині може служити лічба дюжинами. Перший, другий і третій степені числа 12 мають власні назви: 1 дюжина = 12 штук, 1 грос = = 12 дюжин, 1 маса = 12 гросів. Скільки штук: 1) в 1 масі; 2) в 1 гросі?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

239. Знайдіть значення виразу:
1) $|-280| + 15756 : 26 - 906$; 2) $8585 : 101 - |-17| \cdot 5$.

240. Обчисліть: 1) 4 % числа 8,25; 2) 15 % числа 5,24.

241. Пристань A розміщена нижче за течією річки від пристані B на 70 км. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 30 км/год, а швидкість течії річки — 5 км/год. Знайдіть час, за який човен подолає: 1) шлях від A до B; 2) шлях від B до A.

§ 6. ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЯМИ

Ви знаєте, що додавання і віднімання — це дії першого ступеня, множення і ділення — дії другого ступеня, а піднесення до степеня — дія третього ступеня. Зі степенями можна виконувати всі ці дії. Наприклад:

$$3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36,$$
$$3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18,$$
$$3^3 \cdot 3^2 = 27 \cdot 9 = 243,$$
$$3^3 : 3^2 = 27 : 9 = 3,$$
$$(3^3)^2 = 27^2 = 729.$$

Проте безпосередні обчислення не завжди легко виконувати, наприклад, якщо основа і показник кожного зі степенів — великі числа. Якщо ж степені задано в буквеному вигляді, тоді безпосередні обчислення взагалі незастосовні.

Тут дії зі степенями виконують на основі *властивостей степенів*. При цьому розрізняють два випадки: 1) рівні основи; 2) різні основи.

1. Дії першого ступеня зі степенями

Для степенів як з рівними, так і з різними основами виконуються переставний і сполучний закони додавання.

2. Дії другого ступеня зі степенями

Для степенів як з рівними, так і з різними основами виконуються переставний і сполучний закони множення, а також розподільний закон множення відносно додавання.

Інші властивості дій другого ступеня зі степенями дозволяють згортати в один степінь добуток (або частку) двох степенів. Розглянемо спочатку степені з рівними основами.

Запам'ятайте!

Теорема 1 (основна властивість степенів).
Добуток двох степенів з рівними основами дорівнює степеню з тією ж основою і показником, що дорівнює сумі показників множників:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Дано: a^n, a^m, де a — будь-яке число, n і m — натуральні числа.

Довести: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Доведення. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток, а потім згорнемо отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ множників}} = a^{n+m}.$$

Отже, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

? Чи можна застосувати основну властивість степенів до множення кількох степенів з однією основою? Так. Наприклад:

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = (a^n \cdot a^m) \cdot a^k = a^{n+m} \cdot a^k = a^{n+m+k}.$$

Запам'ятайте!

Теорема 2 (властивість частки степенів із рівними основами).

Частка двох степенів з рівними основами, відмінними від нуля, дорівнює степеню з тією ж основою і показником, що дорівнює різниці показників діленого і дільника:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \ (n > m).$$

Д а н о: a^n, a^m, де $a \neq 0$, n і m — натуральні числа, $n > m$.

Д о в е с т и: $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Д о в е д е н н я. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток:

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}}}.$$

Оскільки $n > m$ і для $a \neq 0$ $\frac{a}{a} = 1$, то в отриманому виразі можна виділити m множників $\frac{a}{a}$, що дорівнюють 1, і $n - m$ множників, що дорівнюють a:

$$a^n : a^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ множників}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-m \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{a}}_{m \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{m \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ множників}}.$$

За означенням степеня:

$$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} = a^{n-m}.$$

Отже, $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Чому в теоремі 2 на показники степенів накладено обмеження $n > m$? Тому що для $n \le m$ у частці дістанемо степінь, показник якого не є натуральним числом.

Зверніть увагу:

дії другого ступеня зі степенями, що мають рівні основи, зводяться до відповідних дій першого ступеня з їх показниками:
— множення степенів — до додавання їх показників;
— ділення степенів — до віднімання їх показників.

Запам'ятайте!

Теорема 3 (властивість добутку степенів із різними основами і рівними показниками).
Добуток n-их степенів чисел a і b дорівнює n-му степеню добутку ab:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Д а н о: a^n, b^n, a і b — будь-які числа, n — натуральне число.

Д о в е с т и: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

Д о в е д е н н я. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток, перегрупуємо множники, а потім згорнемо отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множників}} = (ab)^n.$$

Отже, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

Сформулюємо без доведення *властивість степеня добутку* двох чисел: **n-й степінь добутку чисел a і b дорівнює добутку їх n-их степенів.** Тобто для будь-яких чисел a і b:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Розглянемо властивість ділення степенів.

Запам'ятайте!

Теорема 4 (властивість частки степенів із різними основами і рівними показниками).

Частка n-их степенів чисел a і b ($b \neq 0$) дорівнює n-му степеню частки $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Дано: a^n, b^n, a — будь-яке число, $b \neq 0$, n — натуральне число.

Довести: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Доведення. Спираючись на означення степеня, розгорнемо в добуток степені, що є відповідно діленим і дільником:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множників}}}.$$

Перегрупуємо компоненти отриманого виразу і застосуємо означення степеня:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множників}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Отже, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Сформулюємо без доведення *властивість степеня частки* двох чисел: **n-й степінь частки чисел a і b ($b \neq 0$) дорівнює частці їх n-их степенів**. Тобто для будь-якого числа a і $b \neq 0$:

$$\left(\frac{a}{a}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ або } (a : b)^n = a^n : b^n.$$

3. Дії третього ступеня зі степенями

Ви знаєте, що до дій третього ступеня належить дія піднесення до степеня. Степені також можна підносити до степеня з натуральним показником. Розглянемо властивість такої дії.

Запам'ятайте!

Теорема 5
(властивість піднесення степеня до степеня).
Для степеня з показником m його n-й степінь дорівнює степеню з тією ж основою і показником mn:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Дано: a^m, $(a^m)^n$, де m і n — натуральні числа.

Довести: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доведення. Скористаємось означенням та основною властивістю степеня. Тоді дістанемо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

У виразі $(a^m)^n$ показники m і n називатимемо відповідно внутрішнім і зовнішнім показниками.

Зверніть увагу:

Дія третього ступеня зі степенем зводиться до відповідної дії другого ступеня із внутрішнім і зовнішнім показниками:

піднесення степеня до степеня — до множення двох показників.

Дізнайтеся більше

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — український математик, академік АН УРСР (з 1929), доктор фізико-математичних наук (з 1924), професор Київського Політехнічного інституту. Народився в селі Човницях на Волині в сім'ї землеміра.

М. П. Кравчук був учителем багатьох видатних людей минулого століття: Архипа Люльки — конструктора реактивних авіадвигунів, Сергія Корольова — конструктора космічних кораблів, академіка Володимира Челомея. Методи М. П. Кравчука були використані в США, Японії та інших країнах для моделювання кібернетичної техніки, а також для створення першого у світі комп'ютера. М. П. Кравчук був співавтором першого тритомного словника української математичної термінології.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які дії зі степенями можна виконувати?
2. Які закони справджуються для дій зі степенями першого ступеня; другого ступеня?
3. Яка основна властивість степенів? Доведіть її.
4. Сформулюйте і доведіть властивість частки степенів з рівними основами.
5. Яка властивість добутку степенів з різними основами і рівними показниками? Доведіть її.
6. Сформулюйте і доведіть властивість частки степенів з різними основами і рівними показниками.
7. Яка властивість піднесення степеня до степеня? Доведіть її.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

242'. Яка з формул є правильною:
1) $b^n \cdot b^m = 2b^{n \cdot m}$; 2) $b^n \cdot b^m = b^{n \cdot m}$; 3) $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$?

243'. Назвіть показник степеня, якому дорівнює добуток степенів:
1) $5^3 \cdot 5^2$; 2) $6^6 \cdot 6^{10}$; 3) $7 \cdot 7^4$; 4) $8^2 \cdot 8^2$.

244'. Яка з формул є правильною:
1) $c^n : c^m = c^{n \cdot m}$; 2) $c^n : c^m = c^{n:m}$; 3) $c^n : c^m = c^{n-m}$?

245'. Назвіть показник степеня, якому дорівнює частка степенів:
1) $5^3 : 5^2$; 2) $6^{10} : 6^6$; 3) $7^4 : 7$; 4) $8^2 : 8^2$.

246'. Назвіть основу степеня, якому дорівнює добуток степенів:
1) $4^3 \cdot 2^3$; 2) $3^6 \cdot 12^6$; 3) $16^{10} \cdot 2^{10}$; 4) $8^2 \cdot 8^2$.

247′. Чи є правильною рівність:

1) $(12+4)^3 = 12^3 + 4^3$; 3) $(12 \cdot 4)^3 = 12^3 + 4^3$;
2) $(12+4)^3 = 12^3 \cdot 4^3$; 4) $(12 \cdot 4)^3 = 12^3 \cdot 4^3$?

248′. Назвіть основу степеня, якому дорівнює частка степенів:

1) $4^3 : 2^3$; 2) $12^6 : 3^6$; 3) $16^{10} : 2^{10}$; 4) $8^2 : 8^2$.

249′. Чи є правильною рівність:

1) $(12-4)^3 = 12^3 - 4^3$; 3) $(12 : 4)^3 = 12^3 - 4^3$;
2) $(12-4)^3 = 12^3 : 4^3$; 4) $(12 : 4)^3 = 12^3 : 4^3$?

250′. Яка з формул є правильною:

1) $(d^n)^m = d^{n+m}$; 2) $(d^n)^m = d^{n-m}$; 3) $(d^n)^m = d^{n:m}$; 4) $(d^n)^m = d^{n \cdot m}$?

251′. Назвіть показник степеня, якому дорівнює степінь степеня:

1) $(5^3)^2$; 2) $(6^6)^{10}$; 3) $(7^1)^4$; 4) $(8^2)^2$.

252°. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

1) $2^8 \cdot 2^3$; 2) $2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^{10}$; 3) $2 \cdot 2^{13} \cdot 2^{16}$; 4) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{10}$.

253°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

1) $8^5 \cdot 8$; 2) $8^{16} \cdot 8^9 \cdot 8^{20}$; 3) $8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^4$.

254°. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $10^7 \cdot 10^5$;
2) $0,3 \cdot 0,3^2$;
3) $(-4,5)^{33} \cdot (-4,5)^{44} \cdot (-4,5)^{55}$;
4) $-4 \cdot (-4)^9$;
5) $a \cdot a^{54} \cdot a^{36} \cdot a \cdot a^8$;
6) $(-n)^4 \cdot (-n)^4 \cdot (-n)^4$;
7) $2,1^4 \cdot 2,1^3 \cdot 2\frac{1}{10}$;
8) $(-xy)^5 \cdot (-xy)^8 \cdot (-xy)^{32}$;
9) $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$ $(b \neq 0)$;
10) $\left(\frac{2}{3b}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3b}\right)^{102} \cdot \left(\frac{2}{3b}\right)^{202}$ $(b \neq 0)$.

255°. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^6$;
2) $0,01 \cdot 0,01^9$;
3) $c^2 \cdot c^8$;
4) $(-p)^3 \cdot (-p)^{27}$;
5) $m^4 \cdot m^7 \cdot m^{12}$;
6) $a \cdot a^{67} \cdot a^3 \cdot a \cdot a$;
7) $(-x)^2 \cdot (-x)^{15} \cdot (-x)^{23}$;
8) $\frac{a}{c} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^6 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^4$ $(c \neq 0)$.

256°. Запишіть у вигляді добутку степенів:

1) 5^{m+n}; 2) 10^{n+p}; 3) $0,8^{n+m+1}$.

257°. Подайте степінь a^{64} у вигляді добутку двох степенів, один з яких: 1) a^{32}; 2) a^{62}; 3) a^{14}; 4) a^{30}.

258°. Подайте степінь m^{25} у вигляді добутку двох степенів, один з яких: 1) m^2; 2) m^5; 3) m^{15}; 4) m^{24}.

259°. Запишіть у вигляді степеня з основою 11:

1) $11^{14} : 11^4$; 2) $11^{10} : 11^6 : 11^1$; 3) $11^{25} : 11^{13} : 11^{11}$.

260°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:
1) $8^5 : 8$; 2) $8^{16} : 8^9 : 8^2$; 3) $8^8 : 8^3 : 8^4$.

261°. Обчисліть: 1) $\dfrac{5^9}{5^7}$; 2) $(0,2)^{14} : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$; 3) $\dfrac{(-0,6)^{22}}{(-0,6)^{20}}$; 4) $(-7)^8 : (-7)^5$.

262°. Запишіть у вигляді степеня частку:
1) $\dfrac{7^{19}}{7^3}$; 2) $\dfrac{0,9^{24}}{0,9^4}$; 3) $\dfrac{a^{25}}{a^{11}}$ $(a \neq 0)$; 4) $\dfrac{(-c)^{51}}{(-c)^{49}}$ $(c \neq 0)$.

263°. Запишіть у вигляді частки степенів: 1) 2^{n-m}; 2) 9^{n-3}; 3) 100^{10-m}.

264°. Запишіть у вигляді степеня з основою 0,1:
1) $0,1^9 \cdot 0,1^{15} : 0,1^6$; 2) $\dfrac{0,1^{10} \cdot 0,1^3}{0,1^6}$; 3) $\dfrac{0,1^{100} \cdot 0,1^{200}}{0,1^{80} \cdot 0,1^{170}}$.

265°. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:
1) $5^6 \cdot 5^9 : 5^3$; 2) $\dfrac{5^7 \cdot 5^4}{5^9}$; 3) $\dfrac{5^{25} \cdot 5^{25}}{5^{12} \cdot 5^8}$.

266°. Запишіть у вигляді степеня з основою 12:
1) $2^5 \cdot 6^5$; 2) $3^7 \cdot 4^7$; 3) $2^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$.

267°. Запишіть у вигляді степеня з основою 30:
1) $3^{21} \cdot 10^{21}$; 2) $6^9 \cdot 5^9$; 3) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6$.

268°. Знайдіть *, якщо:
1) $24^5 = 2^5 \cdot (*)^5$; 2) $36^7 = 6^7 \cdot (*)^7$; 3) $36^2 = 2^2 \cdot (*)^2 \cdot 9^2$.

269°. Знайдіть *, якщо:
1) $100^{11} = 2^{11} \cdot (*)^{11}$; 2) $100^8 = 25^8 \cdot (*)^8$; 3) $100^{34} = 2^{34} \cdot (*)^{34} \cdot 5^{34}$.

270°. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:
1) $12^8 : 6^8$; 2) $6^7 : 3^7$; 3) $16^4 : 8^4$; 4) $\dfrac{14^{11}}{7^{11}}$

271°. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:
1) $15^{10} : 5^{10}$; 2) $27^3 : 9^3$; 3) $42^5 : 14^5$.

272°. Обчисліть:
1) $(-6 \cdot 0,3)^3 : (-6)^3$; 2) $(4 \cdot 3)^3 : 12^2$; 3) $\dfrac{18^{20}}{9^{19} \cdot 2^{19}}$; 4) $\dfrac{22^5}{11^5}$.

273°. Обчисліть:
1) $(5 \cdot 8)^4 : (8)^4$; 2) $(2 \cdot 0,25)^5 : 0,25^5$; 3) $\dfrac{64^{42}}{32^{42} \cdot 2^{42}}$.

274°. Запишіть у вигляді степеня: 1) $(a^3)^2$; 2) $(a^5)^{10}$; 3) $(m^4)^6$; 4) $(c^m)^2$.

275°. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(3^5)^{10}$; 2) $((-4)^{11})^9$; 3) $((-3,5)^{10})^4$; 4) $((-1)^4)^{13}$; 5) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^7\right)^8$.

276°. Обчисліть: 1) $((-2)^2)^3$; 2) $((-10)^2)^3$; 3) $((-1)^5)^3$.

277°. Знайдіть a^6, якщо a^3 дорівнює: 1) 10; 2) –2; 3) –0,3; 4) $\frac{1}{2}$.

278°. Знайдіть n:

1) $(235)^{36}=(235^n)^9$;
2) $(8)^{36}=(8^n)^6$;
3) $(4,5)^{36}=(4,5^2)^n$;
4) $(5,09)^{36}=(5,09^n)^2$.

279°. Поставте знак <, >, = між виразами:

1) $((-2)^5)^3$ і $((-2)^5)^2$;
2) $((-2)^5)^2$ і $((-2)^2)^5$;
3) $(-1,7)^5$ і $(0^2)^2$;
4) $((-1)^5)^2$ і $(-1)^{32}$.

280°. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:

1) $(3^3)^5\cdot 3^2 : 3^{12}$; 2) $\dfrac{(3^{10})^4\cdot 3^7}{(3^{15})^2}$; 3) $\dfrac{3^{11}\cdot(3^4)^5}{3^{21}\cdot 3^3}$.

281°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

1) $(8^{11})^8 : (8^7)^{10}$; 2) $\dfrac{(8^9)^2\cdot 8^5}{(8^7)^3}$; 3) $\dfrac{8\cdot 8^5\cdot(8^2)^3}{8^{14}:(8^5)^2}$.

282. Запишіть у вигляді степеня з основою 0,5:

1) $0,25\cdot 0,125$; 2) $0,5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; 3) $0,00625\cdot 2\cdot 5$.

283. Запишіть у вигляді степеня з основою –2:

1) $-8\cdot 4$; 2) $-2\cdot 4\cdot 16$; 3) $-32\cdot 64$.

284. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(-20)^4\cdot 20^3$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-0,5)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$;
3) $a^1\cdot a^2\cdot a^3\cdot\ldots\cdot a^8$;
4) $a^2\cdot a^4\cdot\ldots\cdot a^{10}$.

285. Подайте степінь a^{30} у вигляді частки двох степенів, якщо дільник дорівнює: 1) a^8; 2) a^5; 3) a^{15}; 4) a^{29}.

286. Знайдіть x, якщо $b\neq 0$, $a\neq 0$ і:

1) $a^{12}b^{36}=a^2b^{10}\cdot x$;
2) $a^{12}b^{36}=a^4b^6\cdot x$;
3) $a^{12}b^{36}=a^{22}b^{36} : x$;
4) $a^{12}b^{36}=a^{100}b^{100} : x$.

287. Знайдіть x, якщо $b \neq 0$, $a \neq 0$ і:
1) $a^{12}b^{36} = ab \cdot x$;
2) $a^{12}b^{36} = b^{30} \cdot x$;
3) $a^{12}b^{36} = x : ab$;
4) $a^{12}b^{36} = x : b^{30}$.

288. Знайдіть значення виразу $a^2 \cdot b^2$, якщо:
1) $a = 27$, $b = -\frac{1}{54}$; 2) $a = -36$, $b = -1\frac{1}{9}$.

289. Знайдіть добуток:
1) $2{,}5 \cdot 10^3$ см і $2 \cdot 10^2$ м;
2) $8 \cdot 10^9$ м і $0{,}1 \cdot 10^3$ км;
3) $5{,}4 \cdot 10^3$ кг і $1{,}5 \cdot 10^{10}$;
4) $122 \cdot 10^8$ г і $0{,}5 \cdot 10^4$.

290. Знайдіть частку:
1) $6 \cdot 10^3$ м і $3 \cdot 10^2$ см;
2) 10^6 см і $0{,}1 \cdot 10^3$ м;
3) 10^4 кг і $5 \cdot 10^7$ г;
4) $4{,}8 \cdot 10^6$ г і $0{,}3 \cdot 10^4$.

291. Знайдіть значення виразу $(a \cdot b)^3 : c^3$, якщо:
1) $a = 7$, $b = -6{,}5$, $c = 45{,}5$; 2) $a = \frac{5}{7}$, $b = 6\frac{3}{10}$, $c = 4{,}5$.

292. Запишіть вираз у вигляді степеня:
1) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0{,}25 \cdot 4^{12}$;
2) $8 \cdot 0{,}3^2 \cdot 8^5 \cdot 0{,}3^4$;
3) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{11}$;
4) $5^{14} \cdot 0{,}01^8 \cdot 5^2 \cdot 0{,}01^8$;
5) $\left(\frac{5}{13}\right)^{66} \cdot \left(2\frac{3}{5}\right)^{36}$;
6) $\left(\frac{4}{17}\right)^{42} \cdot 4{,}25^{12}$.

293. Винесіть за дужки 3^n:
1) $3^{8n} + 3^{n+6}$; 2) $3^n - 2 \cdot 3^{2n}$; 3) $3^{3n+5} + 3^{n+1}$.

294. Винесіть за дужки 2^n:
1) $2^{5n} + 2^{n+1}$; 2) $2^n - 2^n \cdot 2^{2n}$; 3) $2^{5n+2} - 3 \cdot 2^{n+3}$.

295. Подайте степінь 5^{12} у вигляді степеня з основою:
1) 5^6; 2) 5^2; 3) 5^3; 4) 5^4.

296. Подайте степінь 4^{42} у вигляді степеня з основою:
1) 4^7; 2) $(-4)^6$; 3) 16; 4) 64.

297. Знайдіть m^{12}, якщо m^2 дорівнює:
1) 10; 2) 0,1; 3) $\frac{1}{2}$.

298. Знайдіть c^6, якщо c^3 дорівнює:
1) –10; 2) 0,1; 3) $-\frac{1}{5}$.

299. Запишіть у вигляді степеня:

1) $((2^2)^3)^4$; 2) $\left(\left(1\frac{1}{2}\right)^4\right)^2$; 3) $\left(\left(3\frac{1}{3}\right)^5\right)^3$; 4) $\left(\left(1\frac{1}{6}\right)^2\right)^3$.

300. Спростіть вираз:

1) $((2a^5)^2 \cdot a^3)^6 \cdot 0{,}5a^2 : (4a^{10})^3$ $(a \neq 0)$;

2) $((6a^4)^2 \cdot c^3 \cdot a^6)^2 : (27a^4 \cdot (4c)^3)$ $(c \neq 0,\ a \neq 0)$;

3) $\dfrac{(a^5 \cdot b^4)^3 \cdot a^{25}}{b^9 \cdot (a^{14} : a^8)^2}$ $(b \neq 0,\ a \neq 0)$; 4) $\dfrac{a^9 \cdot b^{13} \cdot (a^9)^4}{b^9 \cdot (a^{10} : a^8)^5}$ $(b \neq 0,\ a \neq 0)$.

301. Спростіть вираз:

1) $(a^{15} a^4)^3 : (a^{10} a^3)^2 (a \neq 0)$; 3) $(a^{15} : a^4)^3 \cdot (a^{10} : a^3)^2 (a \neq 0)$;

2) $(a^{15} a^4)^3 \cdot (a^{10} a^3)^2$; 4) $(a^{15} : a^4)^3 : (a^{10} : a^3)^2 (a \neq 0)$.

302. Обчисліть:

1) $-5 \cdot ((-5)^3)^4 : 25^5 \cdot (-10)^2$; 3) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(-\frac{49}{9}\right)^2$;

2) $((-1)^3)^7 : 5^4 \cdot ((-50)^2)^2$; 4) $-2^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-2^2) \cdot (-5)^3$.

303. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(a^8)^n : (a^n)^6 (a \neq 0)$; 3) $\dfrac{(c^5 \cdot c)^{4n}}{c^{10n}} \cdot (c^{5n+2})^2$ $(c \neq 0)$;

2) $(x^m)^n \cdot (x^n)^p$; 4) $(a^{2+n})^n \cdot a^{n(1-n)} : (-a)^{2n}$ $(a \neq 0)$.

304. Розв'яжіть рівняння:

1) $67(x^8 \cdot (-x)^8)^3 = 0$; 2) $((16 + 4x)^2)^5 = 0$.

305. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^3 \cdot (x^3 \cdot (-x)^3)^5 = 0$; 2) $((1{,}2 - 3x)^4)^6 = 0$.

306. Порівняйте значення виразів:

1) $((-4)^3)^5$ і $((-4)^5)^7$; 2) -9^8 і $(-3)^3$; 3) 5^{30} і 3^{50}; 4) 10^8 і 9^{12}.

307. Визначте знак виразу:

1) $((-a)^3 \cdot (-a)^5)^7$, якщо $a < 0$;

2) $(-x)^3 \cdot (-x \cdot y^3)^{15}$, якщо $x < 0,\ y > 0$.

308. Якою цифрою закінчується число:

1) 5^{45}; 2) 10^{23}; 3) 6^{10}; 4) 111^{222}?

309*. Винесіть за дужки a^n:

1) $2a^n + a^{4n+2}$; 2) $a^{2n}c + a^{n+10} + a^n$.

310*. Знайдіть знаменник дробу $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000}{19^{106}}$ після скорочення.

311*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{5}{13}\right)^4 \cdot 5{,}2^4 - x = 2$; 3) $81^2 - x^2 = 34^4 - 17^4 \cdot 2^4$;

2) $x : 7^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot (-0{,}25)^3$; 4) $-12x = 6^7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^5 \cdot 0{,}75^5$.

312*. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x = (-1{,}6)^4 : (0{,}8^4 : 0{,}5^4)$; 3) $4^8 = (36^7 : 9^7) \cdot x^2$;

2) $0{,}5^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 32x$; 4) $0{,}125 \cdot \frac{1}{8^2} x = \left(2\frac{1}{8}\right)^3 : 17^3$.

313*. Знайдіть значення виразу

$((a^1)^{100}) - 1) \cdot ((a^2)^{50}) - 1) \cdot ((a^4)^{25}) - 1) \cdot ((a^5)^{20}) - 1) \cdot ((a^{10})^{10}) - 1) \cdot$
$\cdot ((a^{20})^{50}) - 1) \cdot ((a^{25})^4) - 1) \cdot ((a^{50})^2) - 1) \cdot ((a^{100})^1) - 1)$, якщо:

1) $a = -1$; 2) $a = 1$; 3) $a = 0$.

314*. Доведіть, що число 3^{2015} закінчується цифрою 7.

315*. Якою цифрою закінчується число:

1) 209^{209}; 2) 2013^8; 3) 27^{22}; 4) 44^5?

316*. Порівняйте значення виразів:

1) 36^8 і $4^8 \cdot 3^7$; 3) 15^{20} і $9^9 \cdot 5^{21}$; 5) 28^{12} і 9^{18};

2) $6^{15} \cdot 2^{17}$ і $4^{14} \cdot 3^{16}$; 4) $4^9 \cdot 6^{12}$ і $8^{11} \cdot 3^8$; 6) 11^{24} і 5^{36}.

317*. Обчисліть $\dfrac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

318. Відстань від Землі до Сонця $150 \cdot 10^6$ км. За який час світло подолає цю відстань, якщо швидкість світла у вакуумі дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с?

319. Апогей — це найбільш можлива відстань від Землі до Місяця. Вона становить близько $4 \cdot 10^5$ км. За який час космічний апарат, що рухається зі швидкістю $2 \cdot 10^8$ м/год, подолає цю відстань?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

320. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{5} : \left(3{,}2 + 0{,}8\left(5{,}5 - 3\frac{1}{4}\right)\right)$;

2) $43{,}75 : 11\frac{2}{3} + 12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 23{,}4 : 1{,}8$.

321. Знайдіть різницю виразу $a - c$ і числа p, якщо:
1) $a = 93{,}06$, $c = 21{,}65$, $p = 103{,}06$;
2) $a = 340{,}5$, $c = 20{,}05$, $p = 214{,}5$.

322. У прямокутнику зі сторонами 10 дм і 20 дм кожну сторону збільшили на 50 %. Якого периметра прямокутник одержали.

323. У трикутнику зі сторонами 10 см, 8 см і 6 см кожну сторону зменшили на 20 %. На скільки сантиметрів зменшився периметр трикутника?

§ 7. ОДНОЧЛЕН. ДІЇ З ОДНОЧЛЕНАМИ

Ви вже знаєте, що таке числовий вираз і вираз зі змінними, які вирази називають сумою, різницею, добутком, часткою, натуральним степенем чисел (чи змінних), які вирази відносяться до цілих виразів.

Запам'ятайте!

Цілий вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називається *одночленом*.

Наприклад, кожен із добутків $5 \cdot 5$, $32a$, xy, $32axy$, x^2, $9 \cdot (-x^2)$ є одночленом.

Самі числа, змінні та їх натуральні степені також вважають одночленами. Наприклад, 5, -5, a, x^2, $-x^2$— одночлени. Їх називають *найпростішими одночленами*.

? Чи можна вважати одночленом вираз $5 \cdot \dfrac{1}{x}$? Ні, оскільки даний вираз не задовольняє означення одночлена.

З одночленами можна виконувати дії всіх трьох ступенів — додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня. Розглянемо властивості цих дій.

1. Дії першого ступеня з одночленами

Додавання одночленів підкоряється переставному і сполучному законам. Наприклад, $7x + xy = xy + 7x$, $(7x + xy) + 2 = 7x + (xy + 2)$. Ці рівності є правильними для будь-яких значень змінних.

Якщо додають (чи віднімають) одночлени з однаковою буквеною частиною, то їх суму спрощують і подають у вигляді одночлена. Справді, в отриманому виразі такі одночлени є подібними доданками і їх можна звести.

Задача 1. Чи можна подати у вигляді одночлена суму одночленів: 1) $25x^5y^2$ і $6{,}015x^5y^2$; 2) $25x^4y^2$ і $6{,}015x^5y^2$?

Розв'язання. 1. Одночлени $25x^5y^2$ і $6{,}015x^5y^2$ мають ту саму буквену частину x^5y^2, тому в сумі ці доданки є подібними і їх можна звести:

$$25x^5y^2 + 6{,}015x^5y^2 = 31{,}015x^5y^2.$$

Отже, суму даних одночленів можна подати у вигляді одночлена.

2. Одночлени $25x^4y^2$ і $6{,}015x^5y^2$ мають різні буквені частини x^4y^2 і x^5y^2, тому в сумі ці доданки не є подібними і їх не можна звести.

Отже, суму даних одночленів не можна подати у вигляді одночлена.

Запам'ятайте!

Суму (чи різницю) одночленів можна подати у вигляді одночлена лише тоді, коли вони мають ту саму буквену частину.

Зверніть увагу:

щоб подати у вигляді одночлена суму (чи різницю) одночленів:

1) з'ясуйте, чи є подібні доданки в даному виразі;
2) якщо всі доданки є подібними, то зведіть їх;
3) якщо подібних доданків немає або не всі доданки є подібними, то даний вираз не можна подати у вигляді одночлена.

2. Дії другого ступеня з одночленами

Множення одночленів підкоряється переставному і сполучному законам. Наприклад, $7x \cdot xy = xy \cdot 7x$, $(7x \cdot xy) \cdot 2 = 7x \cdot (xy \cdot 2)$. Ці рівності є правильними для будь-яких значень змінних.

Властивості ділення одночленів ви будете вивчати в курсі алгебри 8 класу.

? Чи можна добуток одночленів подати у вигляді одночлена? Так. Для цього користуються законами множення та основною властивістю степенів.

Задача 2. Знайдіть добуток одночленів $-0{,}2x^4y^6$ і $5axy^2$.

Розв'язання. Запишемо добуток усіх найпростіших одночленів, що входять до кожного із даних одночленів:

$$-0{,}2x^4y^6 \cdot 5axy^2 =$$
$$= -0{,}2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot y^2.$$

Застосувавши переставний і сполучний закони, згрупуємо числові множники та множники з відповідно однаковими змінними:

$$-0{,}2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot y^2 =$$
$$= (-0{,}2 \cdot 5) \cdot x^4x \cdot y^6y^2 \cdot a.$$

Застосуємо основну властивість степеня та обчислимо добуток числових множників:

$$(-0{,}2 \cdot 5) \cdot a \cdot x^4x \cdot y^6y^2 =$$
$$= -1 \cdot a \cdot x^5 \cdot y^8 = -ax^5y^8.$$

Отже, $-0{,}2x^4y^6 \cdot 5axy^2 = -ax^5y^8$.

В одночленах числовий множник 1 не записують, а від числового множника –1 залишають тільки знак «–» перед буквеною частиною одночлена.

Розв'язавши задачу 2, ми знайшли добуток двох одночленів та спростили його. На першому місці в отриманому добутку стоїть числовий множник, а на наступних місцях — степені різних змінних. Такий *вигляд одночлена* називають *стандартним*. Наприклад, одночлени $-0{,}2x^4y^6$, $5axy^2$ і $-ax^5y^8$ є одночленами стандартного вигляду.

Зверніть увагу:

будь-який одночлен можна записати в стандартному вигляді.

Якщо одночлен записано в стандартному вигляді, то числовий множник називають *коефіцієнтом одночлена*. Наприклад, одночлени $-0{,}2x^4y^6$, $5axy^2$ і $-ax^5y^8a$ мають відповідно коефіцієнти –0,2, 5 і –1.

Запам'ятайте!

Степенем одночлена **називається сума показників степенів змінних, що входять до нього.**

Наприклад, степінь одночлена $-0,2x^4y^6$ дорівнює 10, оскільки показниками степенів змінних x і y є відповідно числа 4 і 6, сума яких дорівнює 10. Міркуючи аналогічно, дістанемо, що степінь одночлена $5axy^2$ дорівнює 4. Степінь одночлена $-ax^5y^8$ дорівнює 14.

Вважають, що будь-яке число, відмінне від нуля — це одночлен, степінь якого дорівнює нулю.

3. Дія третього ступеня з одночленами

Ви знаєте, що дія третього ступеня — це дія піднесення до степеня. Одночлени також можна підносити до степеня, спираючись на властивості дій зі степенями. Розглянемо приклади.

Задача 3. Піднесіть до п'ятого степеня одночлен:
1) $2xy^2$; 2) $-ax^5y^8$.

Розв'язання.
1. $(2xy^2)^5 = (2)^5 \cdot x^5 \cdot (y^2)^5 = 32x^5y^{10}$.
2. $(-ax^5y^8)^5 = (-1)^5 \cdot a^5 \cdot (x^5)^5 \cdot (y^8)^5 = -a^5x^{25}y^{40}$.

Зверніть увагу:

щоб піднести одночлен до n-го степеня, піднесіть до цього степеня кожний множник даного одночлена та обчисліть коефіцієнт отриманого одночлена.

Дізнайтеся більше

Творцем сучасної буквеної символіки вважають французького математика **Франсуа Вієта** (1540–1603). До XVI ст. математичні викладки велися в основному словесно. Наслідуючи приклад античних учених, Вієт чітко розмежував числа, величини та відношення, зібравши їх у деяку систему «видів». Для цих видів Вієт запропонував спеціальну символіку, позначивши їх маленькими літерами латинської абетки. Для невідомих величин застосовувалися голосні літери,

для змінних — приголосні. Вієт показав, що, оперуючи символами, можна розв'язати задачу в загальному вигляді. Це поклало початок докорінних змін у розвитку алгебри: стали можливими символьні обчислення. Не випадково, що за це Вієта називають «батьком» алгебри, основоположником буквеної символіки.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке одночлен?
2. Що означає — додати одночлени?
3. Як додають (віднімають) одночлени з однаковою буквеною частиною?
4. Чи можна добуток одночленів подати у вигляді одночлена?
5. Який вигляд одночлена називають стандартним?
6. Що називають коефіцієнтом одночлена; степенем одночлена? Як обчислити степінь одночлена?
7. Як піднести одночлен до степеня?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

324'. Чи може бути одночленом вираз, що містить дію:

1) додавання;
2) віднімання;
3) множення;
4) ділення на змінну;
5) ділення на число;
6) піднесення до степеня?

325'. Які з даних одночленів є найпростішими:

1) xy; 2) -112; 3) k^2a^6; 4) b^5; 5) $\frac{5}{7}a$; 6) $0{,}32m$; 7) $-3nx$; 8) $2y$?

326'. Чи можна подати у вигляді одночлена суму:

1) $a+b+3a+(-b)$; 2) $a+a+(-3a)$; 3) $6x+4+12x$?

327'. Який із даних виразів є добутком одночленів $-5y$ і $4x^2$:

1) $-x^2y$; 2) $-2x^2y$; 3) $-20x^2y$?

328'. Чи є даний вираз одночленом стандартного вигляду:

1) x; 2) $x\cdot 8$; 3) $3x^2x$; 4) $-7x\cdot 9y$; 5) $x+y$; 6) $-2yx^2$?

Якщо так, то який у нього коефіцієнт?

329'. Чи правильно, що степінь одночлена $7nm^2p^2$ дорівнює:

1) 7; 2) 4; 3) 2; 4) 5?

330'. Які помилки допущено при піднесенні одночлена до квадрата:

1) $(0{,}2a)^2=0{,}4a^2$;
2) $(5ab^3)^2=5a^2b^5$;
3) $(-3xy)^2=-9x^2y^2$;
4) $\left(2\frac{1}{3}b^5a^7\right)^2=4\frac{1}{9}b^{10}a^2$?

331°. Чи можна подати у вигляді одночлена суму одночленів:

1) $34xy^2$ і $1\frac{8}{11}xy^2$; 2) $4{,}6x^9y^2$ і $4{,}6x^8y^2$; 3) $3543a$ і $4{,}6$?

332°. Чи є даний вираз одночленом: 1) a^3; 2) $a^2 \cdot 356$; 3) $x^2y^3z^{12}$; 4) $-3x : y$; 5) $x + x$; 6) $-2(a + b^2)$; 7) $2 - ba$; 8) 1; 9) 0; 10) 4^3; 11) $2\frac{12}{52}$; 12) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; 13) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$?

333°. Запишіть суму одночленів та спростіть її, якщо можна:

1) $10{,}1xy^2$ і $6{,}9xy^2$;
2) $0{,}125x$ і $-0{,}125x^2$;
3) $10ab$ і $-3ab$;
4) $-4a$ і $2a$;
5) $3n^3m^2$ і $-m^3n^2$;
6) $-6x$ і 9.

334°. Запишіть різницю одночленів та спростіть її:

1) $10{,}1xy$ і $6{,}9xy$; 2) $5\frac{1}{5}x^4$ і $0{,}4x^4$; 3) $10ab$ і $3ba$; 4) $-46a$ і $2a$.

335°. Подайте одночлен у вигляді добутку найпростіших одночленів:

1) $0{,}25xy^{16}$; 2) $-7\frac{5}{7}xyz^2$; 3) $55a^{10}b^5$; 4) $abxy^2$; 5) $2z^{10}x^{15}y^2$.

336°. Знайдіть добуток одночленів:

1) $2x$ і xy;
2) $5mn$ і $3mn$;
3) $-ab^2$ і a^2b;
4) $7{,}2x^4$ і $\frac{1}{9}x^5y$;
5) $2\frac{1}{6}a^3c^4$ і $3a^4$;
6) $-10ab^2$ і $-3b$;
7) $0{,}5m^3n^6$ і $0{,}08m^6n^3$;
8) $-1{,}2acb$ і $-\frac{3}{4}xyz$.

337°. Знайдіть добуток одночлена $10a^3c^4b^5$ і одночлена:

1) $1{,}6xy$; 2) $2\frac{1}{5}a^3c^4b^5$; 3) $-10ab^2$; 4) $-3b$; 5) $\frac{8}{25}ac^6b^{14}$; 6) $3a^4x^4$.

338°. Який із одночленів записано в стандартному вигляді:

1) -6; 2) $b \cdot 9$; 3) $2k^2 \cdot 3 \cdot l$; 4) $a^6 \cdot a^5$; 5) $9{,}37a$?

339°. Зведіть до стандартного вигляду одночлен:

1) $-0{,}5 \cdot x^{10} \cdot 26 \cdot y^2$;
2) $4 \cdot a \cdot y \cdot 0{,}1 \cdot a \cdot y^9$;
3) $\frac{2}{5} \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot a^3 \cdot a^3$;
4) $a^4 \cdot 0{,}5 \cdot b^8 \cdot a^2 \cdot 40 \cdot b^2$;
5) $-0{,}125 \cdot x^7 \cdot y^7 \cdot 16 \cdot x \cdot y^2$;
6) $6 \cdot a^4 \cdot b^{10} \cdot a \cdot c^{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^6 \cdot (-9)$.

340°. Зведіть до стандартного вигляду одночлен:

1) $-0{,}01 \cdot x \cdot x^3 \cdot x^6 \cdot 50$;
2) $y \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot y^{15} \cdot 40$;
3) $x^2 \cdot 5{,}4 \cdot y^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot y \cdot (-0{,}8) \cdot x$;
4) $a^{10} \cdot 0{,}02 \cdot b^{45} \cdot a^{25} \cdot a^{56} \cdot b^{43} \cdot a^9 \cdot b^{12}$.

341°. Який степінь має одночлен: 1) $56xy$; 2) $-\frac{5}{7}$; 3) $k^{32}l^{18}$; 4) a^6b^5; 5) $0{,}32a$; 6) $-4abcpxy$? Назвіть коефіцієнт одночлена.

342°. Який степінь має одночлен: 1) $-xyz$; 2) $0{,}001$; 3) $4p^2m^{46}$; 4) $a^{88}cb$; 5) $7{,}9x$; 6) $-1\frac{3}{4}a^3b^3$? Назвіть коефіцієнт одночлена.

343°. Піднесіть одночлен x^5zy^2 до степеня n, якщо n дорівнює:
1) 2; 2) 8; 3) 30.

344°. Піднесіть до четвертого степеня одночлен:

1) $-2x^5y^2$; 2) $0{,}01x^6y^8$; 3) $\frac{3}{10}a^5pb^{65}c$.

345°. Знайдіть куб одночлена:

1) $-0{,}2x^{21}y^{32}$; 2) $\frac{4}{5}xy$; 3) $4a^3c^4b^5$.

346. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 5?

Таблиця 5

Одночлен	$-xy$	$0{,}26a^2$	a	$1{,}75b$	$-7x$	$81y$	$0{,}5a^2$
Одночлен							
Сума одночленів	xy	0	$21a$	$-b$	$\frac{5}{8}x$	0	$1\frac{1}{2}a^2$

347. Знайдіть значення виразу $b-4a^3b^2+(-2b)^2aa^2+3b$, якщо:

1) $a=2{,}172$, $b=-1$; 2) $a=-\frac{1}{36}$, $b=-\frac{3}{4}$.

348. Знайдіть одночлен, квадрат якого дорівнює:

1) $16a^8b^{14}$; 2) $1\frac{9}{16}x^6y^8$; 3) $0{,}0001a^{100}c^{40}b^{50}$.

Скільки розв'язків має задача?

349. Подайте одночлен $21xma^3c^4$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких: 1) $-7ca$; 2) $1{,}2ma^2$.

350. Подайте одночлен xa^3 у вигляді добутку:
1) трьох одночленів стандартного вигляду;
2) чотирьох одночленів стандартного вигляду.

351. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 6?

Таблиця 6

Одночлен	$-xy$	$0{,}26a^2$	$0{,}2a$	$-1{,}25b^5a^2$	$-4xa^2$	$0{,}5a^2$
Одночлен						
Добуток одночленів	$4x^2y$	$26a^3$	$0{,}5a^6c^5$	$-b^{10}a^4$	a^2x^2	$\frac{1}{2}a^2$

352. Піднесіть до п'ятого степеня одночлен:

1) $2(xy^5)^8$; 2) $-0{,}1p^7(m^8)^2n$; 3) $1\frac{1}{2}b^3(b^2a)^6$.

353. Який степінь має одночлен:
1) $-6((y^6)^5)^3\cdot(y^8)^5)^2$; 2) $x^6\cdot x^5\cdot x^3$; 3) $(2y^3)^5\cdot((3y)^2)^2$; 4) $k^2l^6mpa^4b^5$?
Назвіть коефіцієнт одночлена.

354. Спростіть вираз: 1) $2\cdot(a^2)^3\cdot(a^2)^2-(5a^5)^2+(a^2)^4\cdot 6^3\cdot a^2$;
2) $2^3\cdot x^2\cdot y^{32}\cdot 5^3\cdot x^{31}\cdot 0{,}0001\cdot y^2$;
3) $(ba^3\cdot bc^3)\cdot(ab^2\cdot ac^2)$.

355. Знайдіть значення виразу $(a^2)^1\cdot(a^1)^2\cdot(a^2)^3\cdot(a^2)^3-a^{16}$, якщо:

1) $a=34\frac{3}{4}$; 2) $a=-0{,}000001$.

356. Зведіть одночлени до стандартного вигляду та знайдіть їх добуток: 1) $0{,}24x^4y^{16}$, $5z^2xy^2$ і $2z^{10}x^{15}y^2$;
2) $2\frac{5}{8}(y^6)^5\cdot(x^8)^2$, $-0{,}8zxy^9$ і $-\frac{3}{7}z^{12}y$;
3) $0{,}4x^4y^{21}$, $-1{,}5z^5(-x)\cdot(-y)^4$ і $0{,}02(-z)^6x^{15}y^2$.

357. Сторона квадрата чисельно дорівнює потроєному об'єму куба з ребром a см. Знайдіть площу квадрата.

358. Сторону a квадрата збільшили в чотири рази, а потім збільшили ще в $1\frac{2}{3}$ рази. На скільки збільшилася площа квадрата?

359. Сторону квадрата a зменшили на 10 %, а потім ще на 20 %. Знайдіть периметр отриманого квадрата.

360. Подайте одночлен $0{,}08x^{11}y^5$ у вигляді добутку двох одночленів, степінь одного з яких дорівнює: 1) 4; 2) 10; 3) 0.

361. Подайте одночлен $-xy^2$ у вигляді суми двох одночленів, коефіцієнт одного з яких дорівнює: 1) 4; 2) 0,25; 3) $\frac{1}{3}$.

Розгляньте різні випадки.

362. Визначте знак одночлена:
1) $(-b^{200})^{301}\cdot((-b)^{515})^{24}$, якщо $b<0$;
2) $(-a)^{1001}\cdot(-2a\cdot(-c)^{15})^5$, якщо $a<0$, $c>0$.

363*. Знайдіть значення змінних x і y, за яких сума одночленів $-(x^2)^2\cdot|(-y^3)^4|^3$ і $(xy^9)^4$ дорівнює 0.

364*. Знайдіть натуральні значення n, за яких рівність є правильною:
1) $(b^2\cdot a^5\cdot a^n)^{2n}=(ba^5)^{20}$; 2) $a^2\cdot b^2\cdot a^{8n}\cdot a^{2n}=b\cdot a^8\cdot b\cdot a^8\cdot(a^8)^2$.

365*. Спростіть вираз:

1) $(2ba^{n+1} \cdot 5b^n ba^{n+1})^2$;
3) $a^{n+1} \cdot b \cdot a^{n+6} \cdot b \cdot (2a^{n+1})^3 \cdot a^n$.

2) $(-2b)^3 \cdot (-x^3)^{2n} \cdot \frac{3}{4} x^{3n} b^5$;

Знайдіть степінь і коефіцієнт одночлена.

366*. Знайдіть значення виразу $(a^{n+1} \cdot b^n ba^{n+3})^2 \cdot (a(ba)^{n+1})^6$, якщо $a^{n+2} = 2$, $b^{4(n+1)} = 0{,}5$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

367. Початкову ціну a грн за 1 альбом знизили спочатку на 10 %, а потім ще на 10 %. На скільки менше коштують c альбомів після знижки?

368. Сторона квадрата дорівнює a. Кожну сторону поділили на три рівні частини. На середніх частинах побудували квадрати (мал. 5). Кожні три сторони отриманих квадратів поділили на три частини і на середніх частинах побудували нові квадрати (мал. 6). Знайдіть площу отриманої фігури.

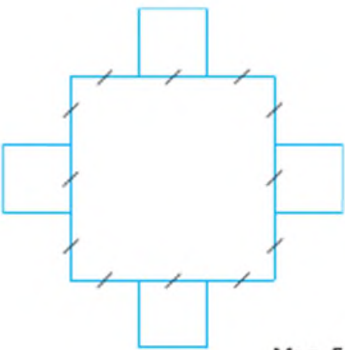
ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

369. Розв'яжіть рівняння:

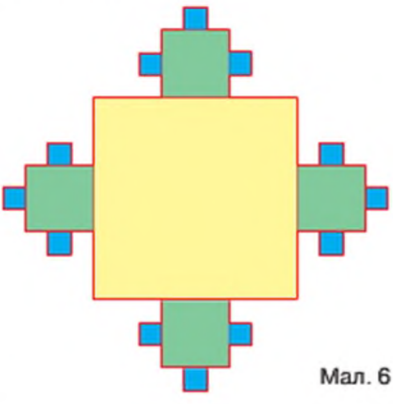
1) $6{,}9 - 2 \cdot (0{,}4 + x) = 0{,}5x + 1{,}1$;
2) $2{,}4x - 1{,}1(x - 2) = 3$.

370. На свято придбали 36 кг цукерок трьох видів у відношенні 2 : 3 : 4. Скільки кілограмів цукерок кожного виду купили?

371. На координатній прямій позначте точки, координати яких є цілими числами, більшими за –2 і меншими від 10.



Мал. 5



Мал. 6

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке степінь числа; основа степеня; показник степеня?
2. Що означає піднести число a до степеня n?
3. Чому дорівнює a в степені 1; 1 у степені n?
4. Який порядок виконання дій у виразі, що містить степені?
5. Які дії зі степенями можна виконувати?
6. Яка основна властивість степеня? Доведіть її.
7. Сформулюйте і доведіть властивість частки степенів з рівними основами.
8. Сформулюйте і доведіть властивість добутку (частки) степенів із різними основами і рівними показниками.
9. Яка властивість піднесення степеня до степеня? Доведіть її.
10. Що таке одночлен?
11. Чи можна добуток одночленів подати у вигляді одночлена?
12. Який вигляд одночлена називають стандартним?
13. Що таке коефіцієнт одночлена?
14. Що називають степенем одночлена?
15. Як піднести одночлен до степеня?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Порівняйте: -24^3 і $(-24)^3$.

А. $-24^3 > (-24)^3$.
Б. $-24^3 < (-24)^3$.
В. $-24^3 = (-24)^3$.
Г. Не можна визначити.

2°. Який із виразів є одночленом стандартного вигляду?

А. 9,51. **Б.** $a+b$. **В.** $a^3 \cdot a^5$. **Г.** $\frac{5}{a}$.

3°. Квадрат якого з одночленів, даних у відповідях, дорівнює $64a^4c^{16}$?

А. $64a^2c^8$. **Б.** $-8a^2c^8$. **В.** $8a^2c^4$. **Г.** $8a^4c^{16}$.

4. Знайдіть добуток одночленів $0{,}5(y^6)^3$ і $(2y^8)^5$.

А. y^{22}. **Б.** $5y^{58}$. **В.** $16y^{58}$. **Г.** $8y^{22}$.

5*. Подайте у вигляді одночлена вираз $\frac{(a^5 \cdot a)^3 \cdot 2a^2}{(a^{12} : a^8)^3}$ $(a \neq 0)$.

А. $4a^8$. **Б.** $2a^8$. **В.** $2a^5$. **Г.** $4a^{11}$.

РОЗДІЛ 3

МНОГОЧЛЕНИ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке многочлен;
- який вигляд многочлена називають стандартним;
- що називають степенем многочлена;
- які властивості дій з многочленами;
- про формули скороченого множення;
- як розкладати многочлен на множники;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 8. МНОГОЧЛЕН ТА ЙОГО СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД

Запишемо суму одночленів x^2, $-15xy$, $4x^5y^2$, -3, $-5x^5y^2$. Дістали вираз, що містить п'ять доданків:

$$x^2 + (-15xy) + (4x^5y^2) + (-3) + (-5x^5y^2).$$

Такий вираз називається *многочленом*, а кожен доданок цієї суми — *членом многочлена*.

Запам'ятайте!

Вираз, що є сумою кількох одночленів, називається *многочленом*.

Чи є многочленом різниця одночленів? Так, оскільки дію віднімання завжди можна замінити дією додавання:

$$7x - 2 = 7x + (-2).$$

Задача 1. Чи можна перетворити у многочлен вираз: 1) $3 : (5x^3 - y^2)$; 2) $3(5x^3 + y^2)$?

Розв'язання. 1. Вираз $3 : (5x^3 - y^2)$ не є цілим, оскільки містить ділення на вираз зі змінними. Тому його перетворити у многочлен не можна.

2. Вираз $3(5x^3 + y^2)$ можна перетворити в суму одночленів. Розкривши дужки, дістанемо вираз $15x^3 + 3y^2$, який є многочленом.

Многочлени із двома і трьома членами мають власні назви — *двочлен* і *тричлен* відповідно. Наприклад, $7x + xy$ — двочлен, а $7x + xy + 2$ — тричлен. Вважають, що будь-який одночлен також є многочленом.

Розглянемо многочлен $x^2 - 15xy + 4x^5y^2 - 3 - 5x^5y^2$. Його третій і п'ятий члени $4x^5y^2$ і $-5x^5y^2$ мають ту саму буквену частину x^5y^2. Це — *подібні члени многочлена*. Їх можна звести як подібні доданки у виразі:

$$4x^5y^2 - 5x^5y^2 = -x^5y^2.$$

Після зведення подібних членів даний многочлен міститиме не п'ять, а чотири члени, тобто набуде більш простого вигляду:

$$x^2 - 15xy + 4x^5y^2 - 3 - 5x^5y^2 = x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3.$$

В отриманому многочлені кожен член є одночленом стандартного вигляду і він не містить подібних членів. Вважають, що такий многочлен записано в *стандартному вигляді*.

Зверніть увагу:

щоб звести многочлен до стандартного вигляду:
1) подайте кожен член многочлена в стандартному вигляді;
2) зведіть подібні члени многочлена.

Знайдемо степінь кожного члена многочлена $x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3$. Члени x^2 і $-15xy$ мають степінь 2, член $-x^5y^2$ має степінь 7. Член -3 — це *вільний член многочлена*. Степінь вільного члена многочлена дорівнює нулю. Найвищий степінь має член $-x^5y^2$. Тому його називають *старшим членом* даного *многочлена*. Степінь многочлена визначають за степенем його старшого члена.

Запам'ятайте!

Якщо многочлен подано в стандартному вигляді, то *степенем* цього *многочлена* називається степінь його старшого члена.

Задача 2. Знайдіть степінь многочлена:
1) $x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3$; 2) $x^3y^2 - x^2y^3$.

Розв'язання. 1. Старшим членом многочлена $x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3$ є член $-x^5y^2$. Його степінь дорівнює 7. Тому степінь многочлена дорівнює 7.
2. Многочлен $x^3y^2 - x^2y^3$ має два члени однакового степеня 5. Отже, даний многочлен є многочленом п'ятого степеня.

Зверніть увагу:

щоб визначити степінь многочлена, знайдіть степінь кожного його члена та з'ясуйте, який із них є найбільшим.

Знайшовши степені членів многочлена, його можна *упорядкувати за степенями членів*. Для цього члени многочлена можна розмістити, наприклад, у порядку спадання їх степенів, починаючи запис зі старшого члена многочлена і закінчуючи його вільним членом, якщо він є:

$$x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3 = -x^5y^2 + x^2 - 15xy - 3.$$

Дізнайтеся більше

1. Серед многочленів виділяють особливі види многочленів, які знайшли широке застосування в математиці.

Симетричний многочлен — многочлен від n змінних (n — натуральне число), що не змінюється за будь-яких перестановок змінних. Наприклад: $-43xy + x^5y^2 + x^2y^5$, $x^2 - 9 + y^2$.

Справді, якщо в цих многочленах замінити x на y, а y на x, то дістанемо такий самий многочлен.

2. У математиці користуються поняттям алгебраїчної суми, яке об'єднує два поняття — «сума» і «різниця». Це пов'язано з тим, що різницю можна подати як суму: $a - b = a + (-b)$.

Алгебраїчна сума чисел — це числовий вираз, який містить лише суму (різницю) чисел. Наприклад, $2 + 5 - 6 + 7 - 8$ — алгебраїчна сума чисел 2, 5, –6, 7, –8.

Многочлен можна визначити як алгебраїчну суму одночленів. Наприклад, $x^2 - 2x + x^3 - 4$ — алгебраїчна сума одночленів x^2, $-2x$, x^3 і -4.

3. **Митропольський Юрій Олексійович** (1917–2008) — видатний математик, академік Національної академії наук України, заслужений діяч науки УРСР, лауреат Державної премії України в галузі науки й техніки, Герой України. Народився в с. Чернишівка Шишацького р-ну Полтавської обл. З 1951 р. Ю. О. Митропольський працює в Інституті математики НАН України, з яким пов'язана вся його подальша наукова діяльність. Наукову роботу вчений успішно поєднував з педагогічною — на механіко-математичному факультеті Київського університету. Він є автором понад 750 наукових праць. Серед його учнів — 25 докторів і 100 кандидатів фізико-математичних наук.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке многочлен?
2. Які члени многочлена називають подібними?
3. Як звести многочлен до стандартного вигляду?
4. Який член многочлена називають старшим?
5. Що називається степенем многочлена?
6. Як визначити степінь многочлена?
7. Як упорядкувати многочлен за степенями його членів?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

372'. Який із даних виразів є многочленом:
1) $3a^2 \cdot x^3$; 3) $x^3 + x^{12}$; 5) $5 : x^3$;
2) $2\frac{1}{5} - x$; 4) $4^3 + (x + 2,5)$; 6) $\frac{3}{x} + 5x$?

373'. Назвіть одночлени, сума яких є многочленом:
1) $4x + 3$; 2) $5x^5 + x^6 + x$; 3) $6x + 4 + x^3 + 2x^2$.

374'. Запишіть двочлен, що є сумою одночленів:
1) x^2 і x; 2) $2x$ і 6; 3) $4x$ і $6x$; 4) a^2 і a^3.

375'. Запишіть тричлен, що є сумою одночленів:
1) x^2, x і 5; 2) x, $4x$ і $2x$; 3) x^3, y^3 і z^3.

376'. Чи правильно виділено подібні члени многочлена:
1) $a^2 + 2x^2 + 2a + 2x + x$; 2) $a^2 + x^2 + a + x + x$; 3) $a^2 + x^2 + a + x + x$?

377'. У якому випадку правильно зведено подібні члени многочлена $-x^2 - x + 1 + 2x^2 + 3x + 4 + 2x$:
1) $-2x^2 - 3x + 5$; 2) $x^2 - x + 5$; 3) $x^2 - 5x + 5$; 4) $x^2 + 4x + 5$?

378'. Чи є старшим членом многочлена $x^3 + 5x^2 + 4x + x^5 + 3$ вираз:
1) x^3; 2) x^5; 3) $5x^2$; 4) 3; 5) $4x$?

379'. Який із даних многочленів записано в стандартному вигляді:
1) $x^2 + 3x + x^2 + 2$; 2) $x \cdot x + 5x + 2$; 3) $2x^2 - 2x^3$; 4) $-3x - x^2$?

380'. Чи можна згорнути в одночлен многочлен:
1) $3 + 4x + 3x$; 2) $x^2 + x^2$; 3) $3x + 5x + 4x$?

381°. Назвіть одночлени, які складають многочлен:
1) $x - 7$; 2) $-x - x^9 + 10x$; 3) $6x - 2 - 2y^2$; 4) $4 - 3n^3m + n^2 - 5mn^3$.

382°. Назвіть одночлени, які складають многочлен:
1) $7ac - 9a - 4$; 3) $-a - 0,6c - 2c^2$;
2) $6x^{12} - x + y$; 4) $-a^5c + y^2 - 5c^5a - 55$.

383°. Запишіть многочлен, що є сумою одночленів:

1) $4a^2$ і $-ab$; 2) -2, $3xy$, $-x^2$ і x^5y^2; 3) $-5x^8$, $-4x^4$ і 8.

384°. Запишіть многочлен, що є сумою одночленів:

1) $4m^2$, mn і $-pmn$; 2) $0{,}25x^2y$, $-2{,}8x^5$ і $-xy^3$; 3) -5, c^2a^3 і c^3a^2.

385°. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $6n+8{,}2n-5{,}9n-0{,}3n+7$;
2) $x^2+3x-4x^2+2x$;
3) $-ac+a^2-ca+3a^5+2ca$;
4) $4{,}5xy-6x^4-5\frac{1}{2}xy-0{,}4x^4y+xy$.

386°. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $-5x+11x-4x+9x$;
2) $3{,}8-7x^2+3{,}4-4x^2-3x^2$;
3) $-5m^2-5m+1+2m^2+9+2m$;
4) $-a^2+4c^2+3a^2-c^2a^2+4a^3-2a^2$.

387°. Який із даних многочленів записано в стандартному вигляді:

1) $x^2+3x+5x^2+2$;
2) $y^2+5y+2+x$;
3) $2x^2yz-2yx^3z$;
4) $(-3xy)^2-x^2x^3$?

388°. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:

1) $xx^2+y^2+\frac{1}{2}x^5+(-0{,}5x^5)$;
2) $100+p^2+1{,}4p-1{,}2p^2+0{,}6p-28$;
3) $-4+32ab^2a+ab^2+5-3ab+a^2b^2$.

389°. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:

1) $-yx^2+xyy+3x^2-8yyx$;
2) $0{,}5b+8+(-c)^3+3bc-\frac{1}{2}bc-5-6{,}5b+7c^3$.

390°. Чи правильно, що старшим членом многочлена $81a^3+25b^2+$ $+3a-b^5$ є вираз: 1) $81a^3$; 2) $25b^2$; 3) $3a$; 4) b^5; 5) $-b^5$; 6) 81?

391°. Знайдіть степінь многочлена:

1) $1+x$; 2) $4+3x$; 3) $1+x+x^2$; 4) $-2+7x+5x^2$.

392°. Знайдіть степінь многочлена:

1) $50+ab$; 2) $-50+a+b$; 3) $-27-27a^7b^7+a^8$.

393°. Упорядкуйте за степенями членів многочлен:

1) $2+4a+6a^8+1{,}8a^5+3a^2-2a^{10}-a^4$;
2) $xy^2+19x^2+3xy+3xy^3$;
3) $1{,}6ab+2\frac{1}{6}b^2a^2-2b^3a^3+3{,}7$;
4) $7x^4+\frac{1}{9}x^5-x^3-10x^2-76$.

394°. Дано многочлен $2xy-3x-xy^2-8x^4y+5$. Запишіть:
1) одночлени, які складають многочлен;
2) вільний член многочлена;
3) степінь многочлена;
4) многочлен, упорядкувавши за степенями його члени.

395°. Дано многочлен $-9+m+3mn^5-m^2-8mn^6$. Запишіть:
1) одночлени, які складають многочлен;
2) вільний член многочлена;
3) степінь многочлена;
4) многочлен, упорядкувавши за степенями його члени.

396. Зведіть подібні члени многочлена:
1) $7xy^2+7x^2y-4yx^2+4xy^2+xy-x^2y$;
2) $10a^2-7a-3b^2-3a+(-4a)-21a^2-4a+2{,}1b^2-2+(-5a^2)$;
3) $14m-3n^3-2m-3n^2-54m+4n^3+(-n)^3-n^3+m^2+3n^2$.

397. Спростіть многочлен $-0{,}5b-4a^3b^2+(2b)^2a^3+\dfrac{1}{4}b+a+(-0{,}5)^2b$ та знайдіть значення отриманого виразу, якщо:
1) $a=2\dfrac{1}{36}$, $b=-\dfrac{9}{73}$; 2) $a=-0{,}4$, $b=-1\dfrac{1}{3}$.

398. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:
1) $-(yz)^2+xy^2+x^{10}x-yyx$;
2) $(a^2)^4+0{,}3(a^2)^3+5(a^4)^2+0{,}7(a^2)^3-a^6$;
3) $y\,121{,}1y-6((-y)^4)^3-(y^2)^5(y^3)^5-(-11y)^2+(y^6y^5)^2y^3$;
4) $5\dfrac{1}{5}(x^2)^2+\dfrac{1}{8}(x^3x^5x^2)-0{,}4x^4+(-0{,}125x^{10})+81$;
5) $4y^2y^6+4+(-2^3)^2((-0{,}5y)^3)^3-(2y^2)^4$.
Який степінь отриманого многочлена?

399. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:
1) $10{,}1(y^2)^2+6{,}9xy^2+\dfrac{1}{8}y^8+(-0{,}125yy^7)$;
2) $(3k^8)^3-0{,}01(2k^3k)^6-k^3-1{,}2k^2+0{,}6kkk$;
3) $-a^2b^6+(-3a)^3+(-0{,}4b^2a)^2b^2-\dfrac{4}{5}b-2{,}4b+3a^3$;
4) $-x(0{,}3yx)^2+32xy^2+x^{10}xy^2-18yyx$;
5) $0{,}4zxy^2z+(-3xy)^2-x^2x^3-1{,}5z^2(-x)(-y)^2+x^5$.
Який степінь отриманого многочлена?

400. Визначте знак старшого члена многочлена:
$$-\frac{1}{2}x(-y)^3+xx+(-z)^5(-y)^8-0{,}5yxy^2-0{,}5+(-yz)^5(-y)^3+(-x)^2.$$

401. Спростіть вираз $0,24x^4y^{16} + z^2x^4yz^7 + 2xz^2x^4y^2 - 0,03(y^8)^2(2x^2)^3 - 0,8(zyx^2)^2 - \frac{3}{4}z^9y(-x^2)^2$ та упорядкуйте отриманий многочлен за степенями його членів.

402. Спростіть вираз $x\,x\,(x^2)^5 - 6((-x)^4)^3 - (x^2)^5(-x^3)^5 - (-10x)^3 + ((x^3)^5x^2x^4)^2 - x^{25}$ та упорядкуйте отриманий многочлен за степенями його членів.

403. Запишіть суму одночленів $-2,6$, $3xy^2$, x^8, $-x^2$, $100x^3y^2$, $-2x^8$, $4x^4y^2$ і x^8. Упорядкуйте многочлен за степенями його членів. Який степінь отриманого многочлена?

404. Скільки різних двочленів і тричленів можна утворити з одночленів $10a^3c$, $6xy$, a^3 і 7?

405. Подайте многочлен $5x^2 - x + 6$ у вигляді суми чотирьох одночленів, один з яких дорівнює: 1) $5x$; 2) $6x$; 3) 10.

406. Подайте многочлен $x^2 + 3x - 10$, у вигляді суми чотирьох одночленів, один з яких дорівнює: 1) $2x$; 2) $-x$; 3) 3.

407. Скільки многочленів, які у стандартному вигляді складаються із шести членів, можна утворити додаванням одночленів $10a^3$, b, $6xy$, $-10ac$, $10a$, $-3bc$ і 5? Запишіть ці многочлени.

408. Дано одночлени: $10a$, $6xy$, a^3 і 5. Утворіть многочлен, старший член якого дорівнює: 1) $10a$; 2) $6xy$; 3) 5; 4) a^3.

409. Дано одночлени: $10x^2y^4$, $6xy$, $0,02x^3$, $-10y$, $4,5x^2y^2$, $-5,4$, a, c^6b і $3x^4$. Утворіть многочлен, степінь якого дорівнює: 1) 7; 2) 6; 3) 4; 4) 3; 5) 1; 6) 0.

410. Знайдіть суму двох чисел, одне з яких дорівнює k % числа 48, а друге — d % числа 100.

411. Знайдіть суму двох чисел, одне з яких дорівнює 40 % числа k, а друге — 20 % числа d.

412. Відстань від Києва до Харкова на 329 км більша за відстань a км від Києва до Чернігова. Складіть вираз для знаходження довжини шляху Чернігів — Київ — Харків. З'ясуйте, яка відстань між містами Київ і Чернігів, та обчисліть значення складеного виразу.

413. Кожна сторона шестикутника дорівнює a. Одну його сторону збільшили у 2 рази, другу — у 3 рази, третю — у 4 рази і т.д. Знайдіть периметр отриманого шестикутника.

414. Строни a і c прямокутника зменшили відповідно на 10 % і на 20 %. Знайдіть периметр отриманого прямокутника. Відповідь запишіть у вигляді многочлена.

415*. Спростіть вираз:

1) $(2b \cdot 3b^n ba^n)^2 + (-4b)^3 (b^2)^n \cdot \frac{3}{4} a^{2n} b + a^2 b^{3n}$;

2) $a^{n+3} a^{n+2} + b^3 a^{n+2} + b\left(1\frac{1}{3} ba^{n+1}\right)^2 a^n$;

3) $(-1)^n (a^n)^n + (a^n)^n + 1$;

4) $(-2b^2)^n (0{,}125a^2)^n (2c)^{2n} + (abc)^{2n}$.

Знайдіть степінь многочлена, у який перетвориться даний вираз після спрощення.

416*. Скільки різних многочленів стандартного вигляду можна утворити з одночленів $10a^3$, $6xy$, a^3 і $-z^9$?

417*. Спростіть вираз $(ba^5)^{2n} a + ba^6 a^{10} + a^2 b^8 a^{8n} a^{4n} - b(a^8)^2 + ba^{3n} b^n c^3 a^{8n} c^2$ та упорядкуйте отриманий многочлен за степенями його членів.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

418. Початкову ціну a грн за 1 кг крупи знизили на 10 %, а початкову ціну b грн за 1 кг цукру знизили на 5 %. На скільки зменшиться загальна вартість 4 кг цукру і 8 кг крупи після знижки? За умовою задачі складіть вираз, спростіть його та обчисліть, якщо $a = 12$, $b = 10$.

419. На першу клітинку шахової дошки поклали k зерняток, на другу — у k разів більше, ніж на першу, на третю — у k разів більше, ніж на другу і т. д. Скільки зерняток буде на: 1) шести клітинках; 2) десяти клітинках? Відповідь запишіть у вигляді многочлена.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

420. Перетворіть у десятковий дріб: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $2\frac{1}{20}$; 3) $\frac{7}{80}$; 4) $1\frac{3}{4}$.

421. Марійка задумала деяке число, яке збільшила спочатку на $2\frac{1}{3}$, а потім — ще у 3 рази. У результаті отримала $6\frac{2}{3}$. Яке число задумала Марійка?

§ 9. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Ви знаєте, як додавати й віднімати одночлени. Розглянемо властивості дій першого ступеня з многочленами.

Запам'ятайте!

Додати (відняти) многочлени **— означає скласти вираз, що є сумою (різницею) даних многочленів, та спростити його, якщо це можливо.**

Задача 1. Знайдіть суму многочленів $15y^2 - x^2y + 3$ і $6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5$.

Розв'язання. Складемо вираз, що є сумою даних многочленів. Оскільки обидва многочлени є доданками, то при розкритті дужок знаки їх членів залишаються без змін:

$$(15y^2 - x^2y + 3) + (6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5) =$$
$$= 15y^2 - x^2y + 3 + 6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5.$$

Зведемо подібні члени отриманого многочлена.

$$15y^2 - x^2y + 3 + 6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5 =$$
$$= -10y^2 + 6x^2y - 2 + 6x^3y^2.$$

Упорядкуємо даний многочлен за степенями його членів:

$$-10y^2 + 6x^2y - 2 + 6x^3y^2 =$$
$$= 6x^3y^2 + 6x^2y - 10y^2 - 2.$$

Чи завжди сума многочленів має зміст? Так, оскільки многочлени-доданки і многочлен-сума не містять дію ділення на вираз зі змінними.

Задача 2. Знайдіть різницю многочленів $15y^2 - x^2y + 3$ і $6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5$.

Розв'язання. Складемо вираз, що є різницею даних многочленів. Розкриваючи дужки, знаки членів многочлена-від'ємника змінимо на протилежні:

$$(15y^2 - x^2y + 3) - (6x^3y^2 + 7x^2y - 25y^2 - 5) =$$
$$= 15y^2 - x^2y + 3 - 6x^3y^2 - 7x^2y + 25y^2 + 5 =$$

Зведемо подібні члени отриманого многочлена.

$$15y^2 - x^2y + 3 - 6x^3y^2 - 7x^2y + 25y^2 + 5 =$$
$$= 40y^2 - 8x^2y + 8 - 6x^3y^2.$$

Упорядкуємо даний многочлен за степенями його членів:

$$= 40y^2 - 8x^2y + 8 - 6x^3y^2 =$$
$$= -6x^3y^2 - 8x^2y + 40y^2 + 8.$$

Зверніть увагу:

під час додавання (віднімання) двох многочленів знаки членів другого компонента дії:
— залишаємо без змін, якщо виконуємо додавання;
— змінюємо на протилежні, якщо виконуємо віднімання.

Додавання многочленів підкоряється переставному і сполучному законам. Якщо позначити многочлени літерами A, B і C, то коротко можна записати так:

$A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$ для будь-яких A, B і C.

Для віднімання многочленів ці закони не справджуються, так само, як і для віднімання одночленів.

Дізнайтеся більше

1. Щоб коротко записати число, у якого a сотень, b десятків і c одиниць, використовують запис: $\overline{abc}$. Його розгортають у суму розрядних доданків так: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Скорочений запис числа використовують у розв'язуванні задач. Нерідко й умову задачі подають за допомогою такого запису числа. Розглянемо приклади.

Задача 3. Знайдіть усі трицифрові числа $\overline{acc}$, для яких виконується умова $\overline{acc} + \overline{caa} = 555$.

Розв'язання. $\overline{acc} = 100a + 10c + c$, $\overline{caa} = 100c + 10a + a$. Тоді

$\overline{acc} + \overline{caa} = 100a + 10c + c + 100c + 10a + a = 111a + 111c$. За умовою, $111a + 111c = 555$. Звідси $a + c = 5$. Оскільки a і c — цифри, то можливі такі випадки: $a = 1$, $c = 4$; $a = 3$, $c = 2$; $a = 2$, $c = 3$; $a = 4$, $c = 1$. Отже, шуканими числами є: 144, 322, 233, 411.

Задача 4. Знайдіть двоцифрове число, яке більше за суму своїх цифр на 18, а за добуток цифр — на 14.

Розв'язання. Нехай $\overline{ac}$ — шукане число, тоді $\overline{ac} = 10a + c$, $a + c$ — сума цифр шуканого числа, ac — добуток його цифр. За умовою, $10a + c - (a + c) = 18$, звідси $10a + c - a - c = 18$, $9a = 18$, $a = 2$. За умовою, $10a + c - ac = 14$. Ураховуючи, що $a = 2$, дістанемо: $20 + c - 2c = 14$, $c = 6$. Отже, 26 — шукане число.

2. Система числення — це система запису чисел за допомогою певного набору знаків і правил їх утворення. У десятковій системі числення для запису чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. У цій системі будь-яке ціле невід'ємне число можна подати за допомогою степенів числа 10 ($10^1 = 10$; $10^2 = 100$ і т. д.). Наприклад: $25 = 20 + 5 = 2 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^1 + 5 = 25_{10}$. Індекс внизу вказує систему числення, у якій записане дане число. Це число також називають основою системи числення. Отже, у десяткової системи числення основа 10.

Двійкова система числення — це система, у якій для запису чисел використовуються дві цифри: 0 і 1. Основою двійкової системи числення є число 2. Для запису числа у двійковій системі його подають за допомогою степенів числа 2. Наприклад, $4 = 2^2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 100_2$. Число 25 подають у вигляді такої суми чисел: $25 = 16 + 8 + 1$. Тобто $25 = 2^4 + 2^3 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$. Звідси $25 = 11001_2$.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що означає — додати многочлени?
2. Як віднімають многочлени?
3. Які закони справджуються для дій першого ступеня з многочленами?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

422'. Чи правильно виконано додавання двочлена $a + x$ і одночлена x:
1) $(a + x) + x = a + 2x$; 2) $(a + x) + x = a + x^2$?

423'. Чи правильно виконано віднімання одночлена x і двочлена $a + x$:
1) $(a + x) - x = a + x - x = a$;
2) $x - (a + x) = x - a + x = -a + 2x$;
3) $x - (a + x) = x - a - x = -a$?

424'. Назвіть знаки другого компонента дії, якщо шукаємо суму:
1) x і $x + y$; 2) x і $x - y$; 3) 2 і $x - 3$.

425'. Назвіть знаки другого компонента дії, якщо шукаємо різницю:
1) $2x$ і $3y + 4x$; 2) $2x$ і $6y - 2x$; 3) 4 і $y^2 + 8y$.

426°. Чи правильно виконано дії з многочленами:
1) $(1{,}8 + x) + (4x - 5) = 1{,}8 + x + 4x - 5 = 4{,}2 + 5x$;
2) $(2x^2 + x) - (x^2 + x - 4) = 2x^2 + x - x^2 - x + 4 = x^2 + 4$?

427°. Знайдіть суму одночлена і двочлена:
1) m і $m + m^2$; 2) k^2 і $k^2 - 3$; 3) mn і $nm + m^2$; 4) 10 і $5d + 0{,}4$.

428°. Знайдіть суму многочленів:

1) x^2+3x і x^2+2;
2) y^2+5y і $x-5y$;
3) $x+4$ і $-x-6$;
4) x^2+3x і $x-x^2$;
5) $1{,}25x$ і $0{,}25x+1{,}5x^2$;
6) x і $-x+y$;
7) $3c$ і $4d-3c$;
8) cd і $3+2cd-c^2$;
9) $-5d$ і $-d+(-d^2)+1$;
10) $-5z$ і z^2-5z+8;
11) $k^2+\frac{1}{2}k+1$ і $k^2-0{,}5k$;
12) $7k^2+2k+2$ і $-3k^2-k+4$.

429°. Знайдіть суму многочленів:

1) $x+y$ і $-x+y$;
2) $m+3n$ і $-m-n$;
3) x^2+y і x^2-y;
4) x^2+y і $-x^2-y$;
5) $a+3c$ і a^2-2a+3;
6) $3a-7$ і $-3a+7$;
7) $4k^2-k$ і $-4k^2+k$;
8) $4x^2+2x+xy$ і $-x+4xy$.

430°. Спростіть вираз:

1) $(-3ab+2a^2b)+(6ab-2a^2b+5b)$;
2) $\left(0{,}5a+\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)$;
3) $\left(1\frac{2}{3}a^2+6{,}3b^2\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2-4b^2\right)+\left(-a^2-2^2\right)$.

Знайдіть степінь отриманого многочлена.

431°. Спростіть вираз:

1) $(2a^2+3a+4b)+(2a-3a^2-b)$;
2) $(7xy^2+x^2y-5x^2+3y^2+2)+(3xy+3xy^2-x^2-3y^2)$.

Знайдіть степінь отриманого многочлена.

432°. Якими даними треба доповнити таблицю 7?

Таблиця 7

Одночлен	$2a$	x^2	y	$3ax$
Многочлен	$a+b+3$	$-5+x^2$	$-y+1$	$a-3ax$
Сума				
Різниця				

433°. Знайдіть різницю многочленів:

1) n і $n+n^2$;
2) k^2-5 і $2k^2+8$;
3) $2m^2+m^3$ і m^2-3m^3;
4) $10-c$ і c^2-c;
5) $1{,}25x$ і $0{,}25x+2{,}45x^2$;
6) x і $-x+y$;
7) $-5d+d^2$ і $-d+2d^2+1$;
8) $-3z+8$ і $-9z^2-3z+8$.

434°. Знайдіть різницю многочленів:

1) $0,9a+0,8b$ і $0,1a-0,2b$; 3) $0,2m^3+m+\frac{1}{2}$ і $0,5+m$;

2) $\frac{1}{2}+m$ і $\frac{3}{4}m+\frac{3}{2}+n$; 4) $100+k^2+1,4k$ і $1,2k^2-0,6k-100$.

435°. Якими даними треба доповнити таблицю 8?

Таблиця 8

Многочлен	$a+b$	$8x+x^2$	$y+5$	$4a^5-2$
Многочлен	$a-b$	$5+x^2-8x$	$-y+5$	a^5+3a
Сума				
Різниця				

436°. Знайдіть значення виразу:
1) $(4x+9)-(3x-4)-63$, якщо $x=-100$;
2) $(3x+2)-(x-7)+(-2x-14)+5$, якщо $x=0,643$;
3) $(x^4+x^3+x^2+3x)-(x^4+x^3+x^2-2x-25)-10$, якщо $x=5$.

437°. Знайдіть значення виразу $(2,5mn+3,5m+n)-$ $-(2,5mn+3,5m+3n)$, якщо $m=3,705$, $n=-0,98$.

438°. Запишіть многочлен $3a+a^2-4-a^3$ як суму двох многочленів, один з яких дорівнює: 1) a^2-4; 2) $2a+a^2$.

439°. Доведіть тотожність: $(2x+y)-(3x-y)+(x-2y)=0$.

440°. Запишіть у вигляді многочлена різницю чисел, перше з яких має a тисяч, 7 сотень, b десятків і 4 одиниці, а друге — $2a$ тисяч, 9 сотень, 9 десятків і b одиниць.

441°. Запишіть у вигляді многочлена суму чисел, перше з яких має x тисяч, y сотень і z десятків, а друге — z тисяч, y сотень, 5 десятків і 8 одиниць.

442. Знайдіть суму многочленів:
1) $4,8a^2+5,6b^2$, $3,7a^2-3b^2$, $-3,5a^2-2$, $-4,34-0,1b^2$ і $-5a^2+3,1b^2+2$;
2) $-\frac{5}{6}a^2+8,5b^2+6$, $-4a^2-2\frac{1}{2}b^2$, $\frac{1}{3}a^2+4-\frac{1}{2}b^2$, $\frac{1}{2}a^2+3-b^2$ і $-a^2+7,2b^2$;
3) $a^2bc^2+a^2cb^2-abc^2$, $-bac^2+acb$, $-c^2a^2b+a^2b^2c$ і $-abc+100$;
4) $x^{8n}+x^{6n}$, $-(x^2)^{2n}\cdot x^{4n}+(x^n)^2$ і $-x^{2n}\cdot(x^n)^4+(-x)^{2n}$.

443. Знайдіть суму многочленів:

1) $0{,}24a^2+b^2+4$, $0{,}36a^2+2{,}3b^2-0{,}5$, $-0{,}3a+0{,}41b+0{,}4a^2$ і $0{,}5+0{,}2b^2$;

2) $\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}b^2+5$, $\frac{4}{3}a^2+b^2-2{,}7$ і $-2a^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}$;

3) $3x^2y^2-x^2+3yx^2+y^2x$, $-5{,}4x^2y+y^2-6y^2x+y^2x^2$ і $-4y^2x^2+5y^2x+x^2+2{,}4x^2y$.

444. Якими даними треба доповнити таблицю 9?

Таблиця 9

Многочлен	$2x^2-y^2-6$		y^3-4y^4+5	$4a^2+a-2$
Многочлен		x^3+x-5		
Сума	$5x^2+3y^2-3$	$x^4+x^3+x^2+4x$		
Різниця			$-y^2+y^4-3$	a^2-a+3

445. Нехай $A=yx^2+2y^2x-2{,}4yx-2$, $B=3xy^2-5{,}2xy+15+y$, $C=17-5xy^2+\frac{1}{5}xy$. Спростіть вираз: 1) $A+B+C$; 2) $A-B+C$.

446. Доведіть тотожність: $a^2+2b^2+(3a^2+c-b^2)-(c+2a^2)=2a^2+b^2$.

447. Доведіть, що сума многочленів $\frac{1}{2}am-\frac{3}{4}a$, $-0{,}5am+\frac{1}{2}+2a$ і $-1{,}25a-6$ не залежить від значень змінних, що входять до них.

448. Доведіть, що сума многочленів $\frac{1}{6}mn^2+1\frac{1}{2}m^2n+3$, $\frac{2}{3}mn^2+2{,}5m^2n$ і $-\frac{5}{6}mn^2-4m^2n+4$ не залежить від значень змінних, що входять до них.

449. Запишіть многочлен $-3a^3-1+3a$ як суму двох многочленів, один з яких дорівнює: 1) $0{,}4a^2+1{,}6a^3$; 2) a^2+6; 3) $-a^3+8$.

450. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}4xy^2+5xy+0{,}25-(xy-1{,}8xy^2+0{,}75)-(3{,}2y^2x-3xy)$, якщо $xy=-1$;

2) $4y^2-y-5x^2+8-(3y^2-1{,}25y+10-6x^2)-0{,}25y$, якщо $x^2+y^2=2$.

451. Знайдіть значення виразу:

1) $3x^2+4x+1+(-x+5)-(2x^2-6x)$, якщо $x=3$;

2) $7y^2+(3y^2+y-4)-((2y)^2-3y+1)-3y$, якщо $y=-2$.

452. Знайдіть значення виразу:

1) $x-(-2)^3+x^n\cdot x-(-x+x^{1+n})-8$, якщо $x=0{,}607$;
2) $9x^2+(x^2-x^3)+(x^3-x^4)+...+(x^9-x^{10})-(4-x^{10})$, якщо $x=0{,}5$.

453. Доведіть, що різниця многочленів x^2+4x+2 і $x^2-12x-2$ є кратною числу 4 для будь-якого значення x.

454. Доведіть, що різниця многочленів $46a-3$ і $a-12$ є кратною числу 9 для будь-якого значення a.

455. Доведіть, що:
1) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
2) сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5;
3) сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться на 6.

456. Доведіть, що сума п'яти послідовних парних натуральних чисел ділиться на 10.

457. Позначимо $\overline{abc}$ — число, у якого a — кількість сотень, b — кількість десятків, c — кількість одиниць. Запишіть у вигляді многочлена вираз:
1) $\overline{abc}-\overline{ab}$; 2) $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}$.

458. Позначимо $\overline{ab}$ — число, у якого a — кількість десятків, b — одиниць. Запишіть у вигляді многочлена вираз:
1) $\overline{ba}-\overline{ab}$; 2) $\overline{ab}+\overline{aa}+\overline{ba}$.

459. Доведіть, що різниця двоцифрового числа і числа, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9.

460. Доведіть, що сума двоцифрового числа і числа, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 11.

461*. Доведіть, що сума многочленів $5x^4+0{,}3x^3+2x+6$, $-2x^3+7x^2-2x$ і $1{,}7x^3+10$ за будь-якого значення x набуває додатного значення.

462*. Позначимо $\overline{abc}$ — число, у якого a — кількість сотень, b — кількість десятків, c — кількість одиниць. Знайдіть усі трицифрові числа $\overline{abc}$, для яких виконується умова $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=444$.

463*. Сума трицифрового числа і числа, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, менша від числа 505 на кількість десятків даного числа, помноженого на 81. Знайдіть усі такі числа.

464*. У чотирицифрового числа перша цифра (кількість тисяч) — 7. Якщо в даному числі цю цифру переставити на останнє місце, то отримаємо число, менше від даного на 864. Знайдіть це число.

465*. Знайдіть трицифрове число $\overline{abc}$, якщо воно дорівнює сумі чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, і $\overline{ca}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

466. Ви поклали в банк A x грн під 20 % річних, а в банк B — y грн під 30 % річних. Який прибуток ви отримаєте через два роки?

467*. У вас є три відра, кожне з яких уміщує цілу кількість літрів. Якщо вилити повне перше відро води у друге, то вона займе $\frac{2}{3}$ його об'єму, а якщо вилити у третє, то $\frac{3}{4}$ його об'єму. Сума об'ємів трьох відер менша від 30 літрів. Знайдіть об'єми відер.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

468. Знайдіть довжину ліній Харківського метрополітену, що становить $62\frac{4}{3}$ % від довжини ліній Київського метрополітену, яка дорівнює 60 км.

469. Станція Арсенальна Київського метрополітену — найглибша у світі. Знайдіть її глибину, якщо вона становить 25 % від 420 м.

470. Морська вода містить 2 % солі. Скільки кілограмів солі треба додати до 20 кг морської води, щоб вміст солі в ній складав 4 %?

471. Морська вода містить 2 % солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 20 кг морської води, щоб вміст солі в ній складав 1 %?

§ 10. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Ви знаєте, як додавати й віднімати многочлени. Розглянемо властивості дій другого ступеня з многочленами.

1. Множення одночлена на многочлен

Запам'ятайте!

Помножити одночлен на многочлен **— означає скласти вираз, що є сумою добутків даного одночлена і кожного члена многочлена, та спростити його, якщо це можливо.**

Задача 1. Знайдіть добуток одночлена y^2 і многочлена $-x+7x^2y-2y-5$.

Розв'язання. Складемо вираз, що є добутком одночлена і многочлена та помножимо одночлен на кожний член многочлена:

$$y^2 \cdot (-x+7x^2y-2y-5) =$$
$$y^2 \cdot (-x) + y^2 \cdot 7x^2y - y^2 \cdot 2y - y^2 \cdot 5.$$

Подамо отриманий вираз як многочлен стандартного вигляду:

$$7x^2y^3 - xy^2 - 2y^3 - 5y^2.$$

Зверніть увагу:

щоб не помилитися, виконуючи множення одночлена на многочлен:

1) візьміть многочлен у дужки;
2) порахуйте кількість доданків у дужках;
3) щоразу називайте кількість доданків у дужках і номер того доданка, який множите на одночлен перед дужками, наприклад:
«У дужках чотири доданки, множимо перший доданок. У дужках чотири доданки, множимо другий доданок і т.д.».

Чи зміниться добуток одночлена і многочлена, якщо їх поміняти місцями? Ні. Наприклад, $y \cdot (x+1) = xy + y$, $(x+1) \cdot y = xy + y$. Звідси $y(x+1) = (x+1)y$.

Загалом, множення одночлена і многочлена підкоряється переставному і сполучному законам множення, а також розподільному закону множення відносно додавання.

2. Множення многочленів

Запам'ятайте!

Помножити многочлен на многочлен **— означає скласти вираз, що є сумою добутків кожного члена одного многочлена на кожен член іншого многочлена, та спростити його, якщо це можливо.**

Задача 2. Знайдіть добуток многочленів y^2-y і $2y-x-1$.

Розв'язання. Складемо вираз, що є добутком даних многочленів. Шуканий вираз є сумою добутків кожного члена першого многочлена на другий многочлен:

$$(y^2 - y)\cdot(2y - x - 1) =$$
$$= y^2\cdot(2y - x - 1) + (-y)\cdot(2y - x - 1).$$

Далі скористаємося правилом множення одночлена на многочлен:

$y^2\cdot(2y - x - 1) + (-y)\cdot(2y - x - 1) = 2y^3 - xy^2 - y^2 - 2y^2 + xy + y.$

Подамо отриманий многочлен у стандартному вигляді. Для цього зведемо подібні доданки:

$$= 2y^3 - xy^2 - y^2 - 2y^2 + xy + y =$$
$$= 2y^3 - xy^2 - 3y^2 + xy + y.$$

Зверніть увагу:

щоб помножити два многочлени:
— помножте кожний член одного многочлена на кожний член іншого многочлена і запишіть суму цих добутків;
— подайте кожний член отриманого многочлена у стандартному вигляді;
— зведіть подібні доданки, якщо вони є.

При множенні двочлена на двочлен можна скористатися формулою:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Чи можна підносити многочлени до степеня? Так. Наприклад:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b),$$
$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b).$$

Узагалі, *степенем многочлена з натуральним показником n, більшим за 1*, називається добуток n множників, кожний з яких є даним многочленом.

Множення многочленів підкоряється переставному і сполучному законам множення, а також розподільному закону множення відносно додавання. Якщо позначити многочлени літерами A, B і C, то коротко можна записати так:

$AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$, $(A + B)C = AC + BC$ для будь-яких A, B і C.

Дізнайтеся більше

У вас могло виникнути запитання: чи можна ділити многочлен на многочлен? Так. Ділити один многочлен на інший можемо за умови, що степінь многочлена-діленого не є меншим за степінь многочлена-дільника. За аналогією з числами, ділення многочлена на многочлен можна виконувати «кутом». Наприклад, треба поділити многочлен $2x^3+3x^2-x-4$ на двочлен $x-1$. Запишемо ділене і дільник так само, як і при діленні чисел. Члени многочлена-частки добираємо так само, як і цифри числа-частки.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^3+3x^2-x-4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3-2x^2} & 2x^2+5x+4 \\
-\,5x^2-x & \\
\underline{5x^2-5x} & \\
-\,4x-4 & \\
\underline{4x-4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $(2x^3+3x^2-x-4):(x-1)=2x^2+5x+4$.

Зауважимо, що як і при діленні чисел, не будь-які многочлени можна поділити націло один на одний. Більш ґрунтовно ділення многочленів ви зможете вивчати в поглибленому курсі алгебри.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як помножити одночлен на многочлен?
2. Як помножити многочлен на многочлен?
3. Що називається степенем многочлена з натуральним показником, більшим за 1?
4. Які закони справджуються для множення многочленів?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

472'. Чи правильно виконано множення одночлена і многочлена:

1) $x\cdot(x+1)=2x+1$; 2) $x\cdot(x+1)=x^2+1$; 3) $x\cdot(x+1)=x^2+x$?

473'. Чи правильно виконано множення многочленів:

1) $(1+x)\cdot(x+2)=2+2x$;
2) $(1+x)\cdot(x+2)=3+2x$;
3) $(1+x)\cdot(x+2)=x^2+2x+2$;
4) $(1+x)\cdot(x+2)=x^2+3x+2$?

474'. Яка з рівностей є правильною:

1) $(x+y)^2=(x+y)\cdot 2$;
2) $(1+x)^2=(1+x)\cdot(1+x)$;
3) $(y+x)^3=(y+x)\cdot(y+x)\cdot(y+x)$?

475°. Знайдіть добуток одночлена і двочлена:

1) $-x$ і $x+y$; 4) $-x$ і $x-1$; 7) x і $1-x$; 10) a^2+b^2 і 4;
2) x і $x-y$; 5) m і $m+2$; 8) x і $1+x$; 11) $mn-n$ і 7;
3) x і $x-1$; 6) $m-2$ і $-m$; 9) $a+b$ і -1; 12) m^2+6 і 5.

476°. Знайдіть добуток:

1) $(n-m)\cdot 2nm$; 5) $5d\cdot(d^2+d+1)$;
2) $10\cdot(-5d-0{,}4)$; 6) $(-p+3)\cdot(-0{,}2p^2)$;
3) $k^2\cdot(k^2+k+3)$; 7) $8x\cdot(-x^2+2x-1)$;
4) $0{,}2x\cdot(0{,}25x+1{,}5x^2+x)$; 8) $\frac{1}{3}x\cdot\left(-\frac{1}{3}y-x+xy-3\right)$.

477°. Знайдіть добуток:

1) $m\cdot(m+m^2)$; 3) $-2x(x^2+9)$;
2) $m\cdot(m-m^2)$; 4) $ab\cdot(a^2+b^2-ab+0{,}5)$.

478°. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $3a\cdot(a-a^2)$; 5) $(x+3y)\cdot(-10x^2)$;
2) $(a^2+b+c)\cdot 3b$; 6) $(x^2-4x)\cdot(-2xy)$;
3) $(-5a+b)\cdot(-2a^2)$; 7) $(0{,}1m+0{,}3n^2)\cdot 10mn$;
4) $2\cdot(3a^2+2a+4)$; 8) $a(b-c+cb)$.

479°. Спростіть вираз:

1) $3x\cdot(7y-x)\cdot 2$; 3) $(2k^2+5k-3)\cdot(-3k)$;
2) $y\cdot y\cdot(x-2y^2)$; 4) $b\cdot(a^2+b^2)\cdot ab$.

480°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(4-x)+3(2x-8)=0$; 3) $x(x-4)-(x^2+8)=0$;
2) $5(2+4x)-8(-x-1)=0$; 4) $(10x+7)4x-5x(8x-1)+33=0$.

481°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(4x-1)+4(x-2)-14=0$; 3) $x(x-8)+5x(x-1)-6x^2=26$;
2) $4(2-x)+5(8x-1)=0$; 4) $-4x^2(9+x)+3x(12x-1)=2(-2x^3-9)$.

482°. Знайдіть добуток двочленів:

1) $y+x$ і $-x-y$; 4) $-y+x$ і $x-y$; 7) $2x^2+x$ і x^2-4;
2) $y+x$ і $x+y$; 5) $2a+x$ і $2x+a$; 8) y^2+5 і x^2+2.
3) $y+x$ і $-x+y$; 6) $3a+b$ і $3a-b$;

483°. Знайдіть добуток двочленів:

1) $8+x$ і $4x-5$; 4) $x+3$ і $x+9$; 7) $2y+x$ і $2x+y$;
2) $x+4$ і $-x-6$; 5) $2x+1$ і $-x-4$; 8) x^2+4 і $-x^2-6$;
3) $2+x$ і $2x+1$; 6) $y-5$ і $x-4$; 9) x^2-2 і $-x^2+5$.

484*. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5-x)(x+6)+x(x-8)=0$;
2) $(x-1)(x+1)-(x-3)(x-2)=0$;
3) $(10-x)(9x-3)+(1+3x)(3x-1)=154$;
4) $(x-3)(x-4)=(x-8)(x+1)$.

485°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1-x)(x+1)+x(x-6)=0$;
2) $2x(x+5)-(2x-8)(x+10)=0$;
3) $(2x+6)(5x-3)-(1+10x)(x+12)=-30(x+1)$;
4) $(x-1)(x-6)=(x-2)(x-5)$.

486°. Знайдіть квадрат двочлена:

1) $n+m$; 2) $x+3$; 3) $a+2c$; 4) $2a-c$; 5) $-x-2$.

487°. Знайдіть квадрат двочлена:

1) $x+1$; 2) $x-1$; 3) $n-3m$; 4) $-y+4$.

488. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $a^2(a^2+1)-a^4(a^4+1)+a^8(a^8+1)-a^{16}(a^{16}+1)$;
2) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$;
3) $((x^3+1)x+1)x+1$;
4) $xyz(x^2y^2-z^2)+x^3(-zy^3+z^2)-z^3(-xy+2)$.

Який степінь утвореного многочлена?

489. Спростіть вираз:

1) $(x^2(x+y^2+xy)-(1+y)x^3)y^3-x^2y^5$;
2) $0{,}3abc(2ab+c)+(-b^2a^2-0{,}7acb)0{,}6c$;
3) $0{,}75x^{11}y^5\left(x^2+1\frac{1}{3}y^7x\right)-x^3y^3\left((xy)^9-\frac{1}{4}x^{10}y^2\right)+1$;
4) $16b^2a^{14}(a^2b^3-0{,}25ab)-3a^{13}(b^5a^3-b^3)$.

490. Доберіть одночлени, якими можна доповнити порожні клітинки таблиці 10.

Таблиця 10

Многочлен	$x+2y$	$3a+b+2a^3$	$3a+4b$	$2c^2+1-c$
Одночлен				
Добуток	$5x^3+10x^2y$	$6ab+2b^2+4ba^3$	$6a^2+8ab$	$2dc^3+dc-c^2d$

491. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)(x+5)+(0{,}5x-1)6x=4(1+x^2)$;
2) $(x-1)(2x-1)x+(1-2x^2)(x-1)=2x-1$;
3) $(x+6)^2-(x-2)^2=0$;
4) $(x+1)^2+(x-1)^2=2$.

492. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення x:

1) $(1+x)(x+9)-(4+x)(x+6)$;
2) $(4+x)(x-7)-x(x-3)$;
3) $(2x-1)(3x+2)-(2+6x)\left(x-\frac{1}{6}\right)$;
4) $(-1+0{,}24x)(x-5)+(3-0{,}8x)(0{,}3x-1{,}625)$.

493. Доведіть, що вираз набуває додатних значень за будь-якого значення m:

1) $2m(m^3+3m-2)-(-4m-1)$;
2) $(2+m)^2-4(m-2)+m^2$;
3) $(4+5m)(3m-1)-7(m-4)+72$.

494. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x+4)(x+3)-(x+4)(x+4)-2x+4$, якщо $x=-0{,}02$;
2) $3(x-2)^2+0{,}5x(2x+4)-(1-2x)^2-3$, якщо $x=-1{,}01$.

495. Спростіть вираз:

1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x+y)(x^2-xy+y^2)$;
2) $(2b-a)(4b^2+a^2+4ab)$;
3) $(0{,}2x+y)\left(\frac{1}{50}x^2-\frac{1}{5}xy+y^2\right)$;
4) $(x^2+4x+2x^3+3)(x+2)-2(x^3+1)(x+2)$;
5) $(-2x+4y)(-x+y)+4y(y-x)$;
6) $b(-a+b)(5-ab)-b^2(ba+2+a^2)$.

496. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(c^3+10)c-(c^2+10)(c^2+50)+60(c+1)^2-10(10c-5)$;
2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)-x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$;
3) $(x-0{,}8)(5-x)+x^2(x-4)-(2-x)^3-3x^2+0{,}2x$;
4) $(-a^2+3b^2)(-3b^2-a^2)-(a^2+4)^2+(2b+8)(1{,}5b^3+2)$;
5) $\left(-3\frac{1}{2}x^3y+1\frac{4}{5}y^2\right)(x^3-5y)+(9y^2-x^3)(-0{,}2x^3+y)-x^3y(17{,}5y-1)$;
6) $\left(\frac{4}{5}xy-0{,}3x^2\right)\left(zy-\frac{1}{2}x\right)-(1{,}6x+0{,}8xz)\left(y^2-\frac{3}{8}xy\right)-0{,}1x^2(1{,}5x+2y)$.

497. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(b^2-2b)b+2b(b-1)-b(b+1)^2$;
2) $(0{,}3a^3-2{,}1a^2-4)\left(\frac{1}{5}a^2-a-7\right)+a^4\left(0{,}3-\frac{3}{50}a\right)$;
3) $(2abc-4b^2c+5ac)(6c+3a^2)+6abc(2ba-2c-a^2)-3ac(10c+5a^2)$;
4) $(a+b+c)(a+b-c)-(b+a)^2$.

498. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a+b+c)^2$;
2) $(x+y+1)^2$;
3) $(a-b-c)^2$;
4) $(2x+3y+5)^2$.

499*. Спростіть вираз:

1) $x^{n+1}(x^{2n-1}+1)-(x^{n+1}+1)^2+x^n(-x^{2n}+x)$;
2) $x^n(x^n-x^m)+x^m(x^n-x^m)-x^{2m}(x^{2n}+1)-x^{2n}(x^{2m}+1)$;
3) $a^{n+2}-a(b^{n+1}+a^{n+1})-b^{2n}(a^2b\cdot b^2a-(ab)^3)$;
4) $a^{n+1}b^n(b^3+a^2)+a^3b(-a^nb^{n-1}-b^{n+2}a^{n-2}+1)$.

500*. Знайдіть добуток $(x-1)(x-2)\ldots(x-100)$, якщо:

1) $x=34$; 2) $x=87$.

501*. Доведіть тотожність:

1) $(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)=a^6-1$;
2) $(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)=a^5+1$;
3) $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(d+b)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$;
4) $2(a+b+c)^2-(c+b)^2-(a+c)^2-(a+b)^2=2(ab+bc+ac)$.

502*. Спростіть вираз:

1) $(2x-3y)(2x+3y)^2-(2x+3y)(2x-3y)^2$;
2) $(x-y)^4+(x+y)^4$;
3) $(m-1)^3+(m+1)^3$;
4) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

503*. Доберіть цілі значення a, b і c, за яких для довільного x є правильною рівність:
$ax^2(x+1)+b(x^2+1)(x-6)+cx(x^2+1)=5x+x^2+6$.

504*. Добуток двоцифрового числа і суми його цифр на 20 більший, ніж сума квадратів його цифр. Знайдіть це число.

505*. Помноживши двоцифрове число на суму його цифр, отримали 814. Знайдіть це число.

506*. Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати це саме число, то отримане число буде більшим за дане в 77 разів. Знайдіть це число.

507*. Знайдіть шестицифрове число, яке зменшується в три рази при перенесенні останньої цифри, що дорівнює 1, на перше місце.

508*. Знайдіть усі числа $\overline{abc}$, якщо $0{,}1\,\overline{ab}\cdot c=c+a+b$.

509*. Доведіть, що число $1+123457\cdot123455$ є квадратом цілого числа.

510*. Доведіть, що число $20142014+20142013\cdot20142014\cdot20142015$ є кубом цілого числа.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

511. Площа прямокутника — 100 м^2. Якщо кожну його сторону збільшити на 5 м, то площа прямокутника збільшиться на 170 м^2. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

512. Стіл в x разів дешевший від шафи, а стілець — в x разів дешевший від стола. Скільки заплатили за 16 стільців, 3 столи і 2 шафи, якщо стілець коштує a грн?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

513. З одного населеного пункту в протилежних напрямках виїхали два велосипедисти. Перший їхав зі швидкістю 8 км/год, а другий — зі швидкістю, більшою на 4 км/год. На якій відстані один від одного будуть знаходитися велосипедисти через 2 год після виїзду?

514. Із двох населених пунктів, відстань між якими 40 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Перший їхав зі швидкістю 10 км/год, а другий — зі швидкістю, більшою на 5 км/год. На якій відстані один від одного будуть знаходитися велосипедисти через 2 год після виїзду?

§ 11. КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА

Ви вже знаєте, як додавати, віднімати і множити многочлени. Як і числа, многочлени можна підносити до степеня з натуральним показником. Для цього достатньо помножити многочлен на себе стільки разів, скільки показує число в показнику степеня. В окремих випадках піднесення до степеня дозволяє спрощувати дії з многочленами. Розглянемо їх.

Запам'ятайте!

Теорема 1 (про квадрат суми двох одночленів).

Квадрат суми двох одночленів дорівнює сумі квадратів цих одночленів та їх подвоєного добутку:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Д а н о: одночлени a і b.

Д о в е с т и: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Д о в е д е н н я. Перетворимо вираз у лівій частині цієї рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = \\
&= (a+b)\cdot(a+b) = \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 = \\
&= a^2 + b^2 + 2ab.
\end{aligned}
$$

Отже, $a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$.

Звідси $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, що і вимагалося довести.

Запам'ятайте!

Теорема 2 (про квадрат різниці двох одночленів).
Квадрат різниці двох одночленів дорівнює сумі квадратів цих одночленів без їх подвоєного добутку:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Д а н о: одночлени a і b.

Д о в е с т и: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Д о в е д е н н я. Перетворимо вираз у лівій частині цієї рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2 = \\
&= (a-b)\cdot(a-b) = \\
&= a^2 - ab - ab + b^2 = \\
&= a^2 + b^2 - 2ab.
\end{aligned}
$$

Отже, $a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab$.

Звідси $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, що і вимагалося довести.

Зверніть увагу:

щоб піднести до квадрата двочлен, що є сумою (різницею) одночленів:

1) піднесіть до квадрата кожен член двочлена;
2) додайте ці квадрати;
3) додайте (відніміть) подвоєний добуток членів двочлена.

Доведені тотожності є *формулами скороченого множення*. Знаючи їх, не треба кожного разу множити двочлен сам на себе. Щоб знайти квадрат двочлена (суми або різниці), достатньо застосувати відповідну формулу. Ці формули мають назви *«квадрат суми»* і *«квадрат різниці»* відповідно. Ви можете зустріти їх і в такому вигляді:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Оскільки ці рівності є тотожностями, то їх можна застосовувати й у зворотному порядку, наприклад, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Оскільки тричлен $a^2 + 2ab + b^2$ можна *згорнути* у квадрат двочлена, то такий тричлен називають *повним квадратом двочлена*.

? Чи є повним квадратом двочлена тричлен $a^2 - 2ab + b^2$? Так. Оскільки його можна згорнути у квадрат двочлена: $(a-b)^2$.

Задача 1. Спростіть вираз $(a+b)^2 - ab$.

Розв'язання. Щоб спростити даний вираз, знайдемо квадрат суми за відповідною формулою скороченого множення і в отриманому многочлені зведемо подібні доданки:

$$(a+b)^2 - ab =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - ab =$$
$$= a^2 + ab + b^2.$$

Розв'язавши задачу, ми отримали тричлен $a^2 + ab + b^2$, схожий на повний квадрат. Але він не є повним квадратом, оскільки $a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab$. Міркуючи аналогічно, дістанемо: $a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab$. Тричлени $\mathbf{a^2 + ab + b^2}$ і $\mathbf{a^2 - ab + b^2}$ відповідно називають *неповним квадратом суми* і *неповним квадратом різниці*. Вони використовуються в інших формулах скороченого множення.

Зверніть увагу:

— повний квадрат двочлена можна згорнути у квадрат двочлена;

— неповний квадрат двочлена не можна згорнути у квадрат двочлена.

Задача 2. Знайдіть значення виразу 97^2.

Розв'язання. Подамо основу степеня як різницю $100 - 3$ та застосуємо відповідну формулу скороченого множення: $(100-3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$.
Отже, $97^2 = 9409$.

Зверніть увагу:

формули квадрата суми і квадрата різниці можна застосовувати до будь-яких цілих виразів.

Дізнайтеся більше

До формул скороченого множення відносять ще дві формули — куба суми двох одночленів та куба різниці двох одночленів. Формулу куба суми двох одночленів можна отримати, подавши куб двочлена як добуток другого і першого степенів даного двочлена та розгорнувши цей добуток у многочлен:

$(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)=$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

Користуючись попередньою формулою, знайдемо куб різниці двох одночленів:

$(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Отримали *формули куба суми та куба різниці:*

$$\mathbf{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,}$$
$$\mathbf{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.}$$

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть теорему про квадрат суми двох одночленів; квадрат різниці двох одночленів.
2. Які тотожності називають формулами скороченого множення?
3. Запишіть формули для обчислення квадрата суми та квадрата різниці.
4. Який вираз називається повним квадратом; неповним квадратом?
5. Чи можна згорнути повний квадрат у квадрат двочлена? А неповний квадрат?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

515′. Укажіть правильне твердження:

1) квадрат суми двох одночленів дорівнює сумі цих одночленів та їх добутку;
2) квадрат суми двох одночленів дорівнює різниці квадратів цих одночленів та їх подвоєного добутку;

3) квадрат різниці двох одночленів дорівнює різниці квадратів цих одночленів;

4) квадрат різниці двох одночленів дорівнює різниці суми квадратів цих одночленів та їх подвоєного добутку.

516′. Чи правильно, що:

1) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$;
3) $(a+b)^2=a^2+b^2+4ab$;
2) $(a+b)^2=a^2+b^2+ab$;
4) $(a+b)^2=a^2+b^2-2ab$?

517′. Укажіть правильну формулу:

1) $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$;
3) $(a-b)^2=a^2-ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
4) $(a-b)^2=a^2-ab-b^2$.

518′. Чи є тотожністю рівність:

1) $a^2-ab+b^2=(a-b)^2$;
3) $a^2+4ab+b^2=(a+b)^2$;
2) $a^2+2ab+2b^2=(a+b)^2$;
4) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$?

519°. Який із наступних виразів дорівнює квадрату двочлена $x+y$:

1) x^2+y^2+xy;
3) $2x^2+2y^2+2xy$;
2) x^2+y^2+2xy;
4) x^2+2y^2+xy?

520°. Яка із наступних рівностей є тотожністю:

1) $x^2-z^2+2xz=(x-z)^2$;
3) $x^2+z^2-2xz=(x-z)^2$;
2) $x^2-4xz-z^2=(x-z)^2$;
4) $x^2-2xz-z^2=(x-z)^2$?

521°. Чи правильно, що $16+8d+d^2$ дорівнює:

1) $(4+4d)^2$; 2) $(4+d)^2$; 3) $(16+d)^2$; 4) $(4+2d)^2$?

522°. Чи правильно, що $(x-3)^2$ дорівнює:

1) x^2+9-3x;
3) x^2+9-6x;
2) x^2-9-6x;
4) x^2+3-3x?

523°. Чи правильно, що $25-10c+c^2$ дорівнює:

1) $(5-5c)^2$; 2) $(5+c)^2$; 3) $(5-c)^2$; 4) $(c-5)^2$?

524°. $39^2=(30+9)^2$. Чи правильно, що 39^2 дорівнює:

1) $30^2+9^2-2\cdot30\cdot9$;
3) $30+9-30\cdot9$;
2) $30^2-9^2-30\cdot9$;
4) $30^2+9^2+2\cdot30\cdot9$?

525°. Укажіть правильну рівність:

1) $6^2+5^2-2\cdot6\cdot5=11^2$;
3) $6^2+5^2-2\cdot6\cdot5=30^2$;
2) $6^2+5^2-2\cdot6\cdot5=1^2$;
4) $6^2+5^2-2\cdot6\cdot5=22^2$.

526°. Яка з рівностей є тотожністю:

1) $21^2=20^2-2\cdot20\cdot1+1^2$;
3) $21^2=20^2+20\cdot1+1^2$;
2) $21^2=20^2+2\cdot20\cdot1+1^2$;
4) $21^2=21^2+2\cdot21\cdot1+1^2$?

527°. Чи правильно, що $16+4a^2+16a$ дорівнює:

1) $(4+4a)^2$; 2) $(2+2a)^2$; 3) $(16+2a)^2$; 4) $(4+2a)^2$?

528°. Який із наступних виразів дорівнює $(2x+5y)^2$:

1) $4x^2+10xy+25y^2$;
2) $2x^2+10xy+5y^2$;

3) $4x^2+20xy+25y^2$; 4) $4x^2+40xy+25y^2$?

529°. Оберіть правильну рівність:

1) $(2ac+5)^2=4a^2c^2+10ac+25$;
3) $(2ac+5)^2=20ac+25+4a^2c^2$;
2) $(2ac+5)^2=2a^2c^2+25+20ac$;
4) $(2ac+5)^2=20ac+4a^2c^2+5$.

530°. Піднесіть до квадрата двочлен-суму:

1) $3x+4$; 2) $6a+4$; 3) $5y+4$; 4) $2x+5$.

531°. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2x+3y)^2$;
3) $(3d+8c)^2$;
2) $(7a+5c)^2$;
4) $(9x+2b)^2$.

532°. Піднесіть до квадрата двочлен-різницю:

1) $2-3x$; 2) $6b-5$; 3) $7y-1$; 4) $8x-3$.

533°. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(4a-5y)^2$;
3) $(4d-7a)^2$;
2) $(10b-3c)^2$;
4) $(3x-8y)^2$.

534°. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $0{,}2x+0{,}5y$;
3) $0{,}1a-0{,}7d$;
2) $0{,}3b+2c$;
4) $0{,}5b-8c$.

535°. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $0{,}3y+0{,}4a$;
3) $0{,}7a-0{,}5b$;
2) $0{,}2d+3c$;
4) $0{,}4x-6c$.

536°. Використовуючи формулу квадрата суми, обчисліть:

1) 51^2; 2) 62^2; 3) 83^2; 4) 111^2.

537°. Використовуючи формулу квадрата різниці, обчисліть:

1) 39^2; 2) 59^2; 3) 18^2; 4) 107^2.

538°. Використовуючи формулу квадрата суми та квадрата різниці, обчисліть:

1) 28^2; 2) 42^2; 3) 99^2; 4) 105^2.

539°. Тричлен $16x^2-24x+9$ згорнули у квадрат двочлена. Який вираз отримали:

1) $4x+3$; 2) $4x-3$; 3) $(4x+3)^2$; 4) $(4x-3)^2$?

540°. Чи можна згорнути у квадрат двочлена вираз:

1) $9x^2+6xy-y^2$;
3) $9x^2-6xy+y^2$;
2) $9x^2+6xy+y^2$;
4) $9x^2-6xy-y^2$?

541°. Чи можна згорнути у квадрат двочлена вираз:

1) $t^2+10t+25$; 2) $4x^2+4xy+y^2$; 3) $4c^2-8c+4$?

542°. Даний тричлен згорніть у квадрат суми двох одночленів:

1) $1+4a+4a^2$;
3) $b^2+10b+25$;
2) $4+12a+9a^2$;
4) $b^2+8b+16$.

543°. Даний тричлен згорніть у квадрат різниці двох одночленів:

1) $9-6a+a^2$;
2) $49-14a+a^2$;
3) $4b^2-20b+25$;
4) $9b^2-24b+16$.

544°. Даний тричлен згорніть у квадрат двочлена:

1) $4+4x+x^2$;
2) $81-18y+y^2$;
3) $36b^2+24b+4$;
4) $64c^2-80c+25$.

545°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2a+3b)^2=*+12ab+9b^2$;
2) $(3a-b)^2=9a^2-*+b^2$;
3) $(4c+5d)^2=16c^2+40cd+*$;
4) $(6d-4c)^2=36d^2-*+16c^2$.

546°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(*+6b)^2=a^2+12ab+36b^2$;
2) $(3a-*)^2=9a^2-12ab+4b^2$;
3) $(*+8d)^2=16c^2+64cd+64d^2$;
4) $(*-4c)^2=9d^2-24cd+16c^2$.

547°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(a+5b)^2=*+10ab+25b^2$;
2) $(2c+9d)^2=4c^2+36cd+*$;
3) $(*-b)^2=64a^2-16ab+b^2$;
4) $(2d-*)^2=4d^2-28cd+49c^2$.

548°. Спростіть вираз:

1) $(5+b)^2-10b$;
2) $(4-2b)^2+16b$;
3) $(5+7y)^2-70y$;
4) $(5x+1)^2-10x$;
5) $(4+b)^2-4b(b+2)$;
6) $(3-2a)^2-3(3-2a)$;
7) $(6+y)^2-y(y-6)$;
8) $(4x+1)^2+2x(3-8x)$;
9) $(0{,}5+b)^2-b(b+1)$;
10) $(0{,}3-0{,}3a)^2-0{,}9(1-0{,}2a)$;
11) $(0{,}1+y)^2-0{,}2(y+0{,}05)$;
12) $(0{,}5x+10)^2-2x(5+0{,}125x)$.

549°. Виконайте вказані дії:

1) $(0{,}3+x)^2-x(x+0{,}6)$;
2) $(0{,}5d-0{,}1)^2-0{,}1(0{,}1-d)$;
3) $(0{,}4y+2)^2-0{,}8(2y+5)$;
4) $(5a+0{,}7)^2-5a(5a+1{,}4)$.

550°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3+x)^2-x^2=0$;
2) $(2x-1)^2-4x^2=0$;
3) $x^2-(5-x)^2=0$;
4) $9x^2-(4-3x)^2=0$.
5) $(3x+1)^2-x(9x+1)=0$;
6) $(4x-1)^2-4x(4x+1)=1$;
7) $(5+x)^2-x(x+5)=0$;
8) $(7-3x)^2=3x(3x-14)$.

551°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(4+x)^2=x^2$;
2) $(3x-2)^2=9x^2$;
3) $(6+x)^2=x(x+12)$;
4) $(7-2x)^2-4x(x-8)=1$.

552. Доведіть тотожність:

1) $(x+y)^2=(-x-y)^2$;
2) $(x-y)^2=(y-x)^2$;
3) $(2x+4y)^2=4(-x-2y)^2$;
4) $(3x-6y)^2=9(2y-x)^2$.

553. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(-x+2y)^2$;
2) $(-3y-4x)^2$;
3) $(-5a-6b)^2$;
4) $(-2xy+7)^2$.

554. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $10x^2+2x$;
2) $-3y^3-4y^2$;
3) $-5a^3b^2+6b^3$;
4) $-2cd^2+7c^4$.

555. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $3c^2+5c$;
2) $-4y^3-y^2$;
3) $-3c^2d-2d^2$;
4) $-2ab^4+6a^5$.

556. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $3x(-0,2x+2y)^2$;
2) $4y^2(-5y^2+4x^2)^2$;
3) $6ab(-2a+0,3b)^2$;
4) $10y^3(8x+0,01y)^2$.

557. Спростіть вираз:

1) $(-0,5a-6b)^2(2a+3b)$;
2) $(-0,02xy+10)^2(5x+0,01y)$;
3) $(-5c-9d)(c+3d)^2$;
4) $(-0,1ab+5)(15a+0,2b)^2$.

558. Спростіть вираз:

1) $10x(-0,01x+4)^2$;
2) $40c^2(-0,5c^2+4)^2$;
3) $(-0,5xy+20)^2(6x+0,1y)$;
4) $(-3c-0,7d)(5c+0,4d)^2$.

559. Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^2-(-a+b)^2=4ab$;
2) $(a-b)^2-(-a+b)^2=0$;
3) $(a+b)^2+(-a+b)^2=2a^2+2b^2$.

560. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(10+x)(-0,01x+1)+(1+0,1x)^2$, якщо $x=5$;
2) $(4x+1)^2+2x(-4-8x)$, якщо $x=24$.

561. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(0,5+2x)^2-(-0,5+2x)^2$, якщо $x=2,5$;
2) $(2x+9)^2-x(41+4x)$, якщо $x=10$.

562. Розв'яжіть рівняння:

1) $(4+x)^2=(x-2)(x-6)$;
2) $(2x+3)^2=(2x+1)(2x+6)$;
3) $(2x-1)^2=(2x-0,5)(2x-2)$;
4) $(7-x)^2=(x-8)(x-5)$.

563. Розв'яжіть рівняння:

1) $(-6+3x)^2=(-9x-3)(-x+2)$;
2) $(-x+5)^2=(-0,2x+1)(-5x+15)$;
3) $(8x-2)^2=(-32x-10)(-2x+0,5)$;
4) $(9-2x)^2=(4x-9)(x-3)$.

564. Використовуючи формули квадрата суми і квадрата різниці, обчисліть суму квадратів чисел:

1) 55 і 45;
2) 43 і 41;
3) 64 і 24;
4) 199 і 201.

565. Сторону квадрата зменшили на 3 см, при цьому його площа зменшилася на 27 см^2. Знайдіть сторону початкового квадрата.

566. Периметр квадрата збільшили на 16 см, при цьому його площа збільшилася на 40 см^2. Знайдіть сторону початкового квадрата.

567. Сторону квадрата збільшили на 7 см, при цьому його площа збільшилася на 231 см^2. Знайдіть сторону початкового квадрата.

568. **Виведіть формулу квадрата тричлена $a+b+c$.**

569. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $a-b+c$; 3) $a-b-c$; 5) $-a-b+c$;
2) $a+b-c$; 4) $-a+b+c$; 6) $-a-b-c$.

570. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a-2b+4)^2$; 3) $(-x+4y+5)^2$;
2) $(3+4b-c)^2$; 4) $(-2b-3b^2+1)^2$.

571. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(x-2y+3)^2$; 3) $(-3x+4y+2)^2$;
2) $(5+b-3c)^2$; 4) $(-2c^2-3c+4)^2$.

572. Доведіть тотожність: $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

573*. **Виведіть формулу квадрата многочлена $a+b+c+d$.**

574*. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $a-b-c-d$; 3) $a+b-c+d$;
2) $-a+b-c-d$; 4) $-a+b-c+d$.

575*. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $(x-y-z-1)^2$; 3) $(4x+5+6z-2t)^2$;
2) $(2x+3+5a+4y)^2$; 4) $(3c-2-5c^2+4c^3)^2$.

576*. Сторони трьох квадратів є послідовними натуральними числами. Різниця суми площ першого і другого квадратів та площі третього квадрата дорівнює 12. Знайдіть сторони цих квадратів.

577*. Периметри трьох квадратів є послідовними парними натуральними числами. Різниця суми площ першого і третього квадратів та площі другого квадрата дорівнює 6,75. Знайдіть сторони цих квадратів.

578*. Дано три послідовні непарні натуральні числа. Відомо, що квадрат їх суми більший за подвоєну суму квадратів цих чисел на 227. Знайдіть ці числа.

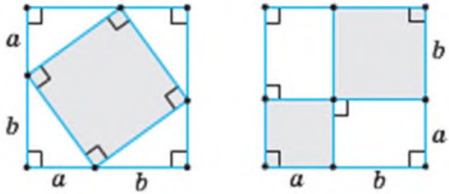
579*. Натуральне число при діленні на 9 дає в остачі 3. Доведіть, що квадрат цього числа ділиться на 9.

580*. Деяке натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 1, а інше натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 2. Доведіть, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

581. Восени Марія Іванівна вирішила зменшити ділянку городу квадратної форми, на якій вона садила картоплю. Кожну сторону городу вона зменшила на 1 м, при цьому його площа зменшилася на 9 м^2. Скільки картоплі потрібно приготувати Марії Іванівні навесні, якщо для засаджування 1 м^2 городу потрібно 4 кг картоплі?

582. Чи є рівними площі незафарбованої частини фігур на малюнку 7?



Мал. 7

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

583. Обчисліть:

1) $2^4 \cdot 4^3$; 2) $\left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 0{,}125 \cdot 2^{11}$.

584. Відомо, що для деяких значень x і y значення виразу $x - y$ дорівнює 10. Якого значення за тих самих значень x і y набуває вираз:

1) $3x - 3y$; 2) $y - x$; 3) $\frac{1}{5}(2y - 2x)$?

§ 12. РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

Ви вже знаєте, що таке формули скороченого множення, і вмієте користуватися формулами квадрата суми двох одночленів і квадрата різниці двох одночленів. Ще одну формулу дістанемо, довівши наступну теорему.

Запам'ятайте!

Теорема (про добуток суми і різниці двох одночленів).
Добуток суми і різниці двох одночленів дорівнює різниці їх квадратів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Дано: одночлени a і b.

Довести: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Доведення. Перетворимо вираз у лівій частині цієї рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$(a+b)(a-b) =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 =$$
$$= a^2 - b^2.$$

Отже, $a^2 - b^2 = a^2 - b^2$.

Звідси $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, що і вимагалося довести.

Цю формулу також відносять до формул скороченого множення.

Оскільки доведена рівність є тотожністю, то її можна застосовувати і в зворотному порядку:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Ця тотожність називається *формулою різниці квадратів*. Вона дозволяє заміняти різницю квадратів двох одночленів добутком їх суми і різниці.

Зверніть увагу:

— різниця квадратів двох одночленів дорівнює добутку суми і різниці цих одночленів;
— квадрат різниці двох одночленів дорівнює добутку цієї різниці на себе;
— квадрат суми двох одночленів дорівнює добутку цієї суми на себе.

? Чи можна застосовувати формулу різниці квадратів не лише до найпростіших одночленів? Так.

Задача 1. Подайте у вигляді добутку двочлен $9x^6y^2 - 25$.

Розв'язання. Перший член даного двочлена містить змінні x і y у парних степенях, а його коефіцієнт $9 = 3^2$. Отже, цей одночлен можна подати як квадрат іншого одночлена:

$9x^6y^2 = (3x^3y)^2$. Число 25 є квадратом числа 5. Звідси випливає, що даний двочлен можна подати як різницю квадратів і застосувати відповідну формулу скороченого множення:

$$9x^6y^2 - 25 = \\ = (3x^3y)^2 - 5^2 = \\ = (3x^3y + 5)(3x^3y - 5).$$

Задача 2. Знайдіть значення виразу $27^2 - 23^2$.

Розв'язання. Застосуємо відповідну формулу скороченого множення:

$27^2 - 23^2 = (27 + 23) \cdot (27 - 23) = 50 \cdot 4 = 200.$

Отже, $27^2 - 23^2 = 200$.

Зверніть увагу:

формулу різниці квадратів можна застосовувати до будь-яких цілих виразів.

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання, чи можна подати як добуток різницю n-х степенів двох одночленів. Виявляється, що так:
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
Користуючись цією формулою, можна подати як добуток, наприклад, такий вираз:
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

2. **Степанець Олександр Іванович** (1942–2007) — відомий український математик. Народився в селі Комарівка на Чернігівщині в родині сільського вчителя. У 1960–1965 навчався на механіко-математичному факультеті Київського державного університету імені Тараса Шевченка. У 1969 захистив кандидатську дисертацію, а в 1974 — докторську. З 1990 був завідувачем відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, а 1996 обійняв посаду заступника директора Інституту математики НАН України. У 1997 О. І. Степанця було обрано членом-кореспондентом НАН України.
Олександр Іванович був головою видавничої ради Інституту математики НАН України, відповідальним редактором збірників праць Інституту математики НАН України з теорії наближення

функцій, членом редакційних колегій «Українського математичного журналу» та «Українського математичного вісника». У його науковому доробку — 200 наукових праць, зокрема 7 монографій. Він підготував 32 кандидатів та 6 докторів наук.

О. І. Степанець — лауреат Республіканської премії ім. М. Островського (1974), премії ім. М. В. Остроградського НАН України (2000) та премії ім. М. М. Крилова НАН України (2007).

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте та доведіть теорему про добуток суми і різниці одночленів.
2. Запишіть формулу різниці квадратів.
3. Чому дорівнює квадрат різниці одночленів?
4. Чому дорівнює квадрат суми одночленів?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

585'. Укажіть правильне твердження:
1) добуток суми і різниці двох одночленів дорівнює сумі їх квадратів;
2) добуток суми і різниці двох одночленів дорівнює різниці їх квадратів;
3) добуток суми і різниці двох одночленів дорівнює добутку їх квадратів.

586'. Чи правильно, що:
1) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$;
2) $(a+b)(a-b)=a^2-2b^2$;
3) $(a+b)(a-b)=a-b$;
4) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$?

587'. Укажіть правильну формулу:
1) $a^2-b^2=(a-b)(a-b)$;
2) $a^2-b^2=(a+b)(a+b)$;
3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
4) $a^2-b^2=(2a+2b)(2a-2b)$.

588'. Чи є тотожністю рівність:
1) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
2) $(b-a)(a-b)=b^2-a^2$;
3) $(b+b)(a+a)=b^2+a^2$;
4) $(b-a)(b+a)=b^2-a^2$?

589°. Який із наступних виразів дорівнює добутку $(x+y)(x-y)$:
1) x^2+y^2;
2) x^2-y^2;
3) y^2-x^2;
4) x^2+y^2+xy?

590°. Чи правильно, що $(x-5)(x+5)$ дорівнює:
1) x^2+25; 2) x^2-25; 3) x^2-5; 4) $x-25$?

591°. Чи правильно, що $(d-4)(d+4)$ дорівнює:
1) d^2+16; 2) $d-16$; 3) d^2-16; 4) $d-16$?

592°. Яка із наступних рівностей є тотожністю:

1) $(3-a)(3+a)=9+a^2$;
2) $(3-a)(3+a)=a^2-9$;
3) $(3-a)(3+a)=9-a$;
4) $(3-a)(3+a)=9-a^2$?

593°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $(2+3a)(2-3a)$:

1) $4+9a^2$;
2) $4-3a^2$;
3) $4-9a^2$;
4) $4-3a^2$?

594°. Чи правильно, що $49\cdot 51=\ldots$

1) $(50-1)(50+1)=50^2+1^2=2500+1=2501$;
2) $(50-1)(50+1)=50^2-1^2=2500-1=2499$;
3) $(50-1)(50+1)=50^2+1^2-2\cdot 50\cdot 1=2500+1-100=2401$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

595°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $(2a+5b)(2a-5b)$:

1) $4a^2+25b^2$;
2) $4a^2-5b^2$;
3) $2a^2-5b^2$;
4) $4a^2-25b^2$?

596°. Яка з наступних рівностей є тотожністю:

1) $(3+4c)(3-4c)=9-4c^2$;
2) $(3+4c)(3-4c)=9-16c^2$;
3) $(3x+2y)(3x-2y)=9x^2-4y^2$;
4) $(3x+2y)(3x-2y)=9x^2-4y$?

597°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2a-5b)(2a+5b)=*-25b^2$;
2) $(9x-3b)(9x+3b)=81x^2-*$;
3) $\left(\frac{4}{7}d+5c\right)\left(5c-\frac{4}{7}d\right)=25c^2-*$;
4) $(2x-6xy)(2x+6xy)=*-36x^2y^2$.

598°. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(x+3y)(-x+3y)$;
2) $(a+2b)(a-2b)$;
3) $(c+5d)(5d-c)$;
4) $(-x+6y)(6y+x)$.

599°. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(t+4z)(-t+4z)$;
2) $(d+6c)(6c-d)$.

600°. Спростіть вираз:

1) $\left(-\frac{1}{3}x+2y\right)\left(\frac{1}{3}x+2y\right)$;
2) $\left(2a-\frac{5}{6}b\right)\left(\frac{5}{6}b+2a\right)$;
3) $(0{,}1c+4d)(4d-0{,}1c)$;
4) $(-1{,}1x+10y)(10y+1{,}1x)$.

601°. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2b+5d)(2b-5d)$;
2) $(4xy+2)(2-4xy)$;
3) $\left(-0{,}2b+\frac{2}{7}d\right)\left(0{,}2b+\frac{2}{7}d\right)$;
4) $(9xy-4a)(4a+9xy)$.

602°. Чи правильно, що a^2-16 дорівнює:

1) $(a-16)(a+1)$;
2) $(a-4)^2$;
3) $(a-4)(a+4)$;
4) $(a+4)(a+4)$?

603°. Яка із наступних рівностей є тотожністю:

1) $16-c^2=(16-c)(16+c)$;
2) $16-c^2=(4-c^2)(4+c^2)$;
3) $16-c^2=(4-c)(4+c)$?

604°. Чи правильно, що $29^2-21^2=\ldots$

1) $(29-21)(29-21)=8\cdot 8=64$;
2) $(29+21)(29-21)=50\cdot 8=400$;
3) $(29+21)(29+21)=50\cdot 50=2500$;
4) $29-21=8$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

605°. Чи є тотожністю наступна рівність:

1) $4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$;
2) $25-9c^2=(5-3c)(5+3c)$;
3) $81-25d^2=(9+5d)(5d-9)$;
4) $36a^2-4b^2=(4a-6b)(4a+6b)$?

606°. Чи є тотожністю наступна рівність:

1) $16a^2-25c^2=(4a+5c)(4a-5c)$; 2) $64b^2-9t^2=(3b-8t)(3t+8b)$?

607°. Якому з наступних виразів тотожно дорівнює двочлен $4x^4y^{10}-36$:

1) $(2x^2y^2-6)(2x^2y^2+6)$;
2) $(2x^4y^5-4)(2x^4y^5+4)$;
3) $(2x^2y^5-6)(2x^2y^5+6)$;
4) $(4x^2y^5-6)(4x^2y^5+6)$?

608°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $4a^2b^2-25=(*-5)(*+5)$;
2) $9a^2-\frac{1}{9}c^2=(3a-*)(3a+*)$;
3) $0{,}16a^2b^4-\frac{1}{4}c^4=(0{,}4ab^2-*)(0{,}4ab^2+*)$.

609°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

1) $36x^2y^8-16$;
2) $81a^6-4b^4$;
3) $49c^2-9d^8$;
4) $64a^2-100c^{12}$.

610°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

1) $25-16x^2y^2$;
2) $49a^{14}-9b^6$;
3) $16-9c^4d^8$;
4) $100a^2-4c^{20}$.

611°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

1) $0{,}36x^2-0{,}16$;
2) $\frac{4}{9}c^2-\frac{25}{36}$;
3) $0{,}49-0{,}01d^2$;
4) $\frac{1}{81}-\frac{4}{25}y^2$.

612°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

1) $-9+100t^2$;
2) $-x^2+16y^2$;
3) $-4a^2+9b^2$;
4) $-36c^2+0{,}25$.

613°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

1) $0{,}09c^2-0{,}04$;
2) $\frac{1}{9}b^2-\frac{9}{25}$;
3) $-25+121z^2$;
4) $-49x^2+16$.

614°. Використовуючи формулу різниці квадратів, обчисліть:

1) 70^2-68^2;
2) $1{,}01^2-0{,}99^2$;
3) $63\cdot 57$;
4) $10{,}5\cdot 9{,}5$.

615°. Використовуючи формулу різниці квадратів, обчисліть:

1) 25^2-24^2;
2) $10{,}2^2-9{,}8^2$;
3) $0{,}97\cdot 1{,}03$;
4) $503\cdot 497$.

616. Спростіть вираз:

1) $(5+b)^2-b^2$;
2) $(4-2b)^2-4b^2$;
3) $49y^2-(5+7y)^2$;
4) $25x^2-(5x+1)^2$.

617. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(2x^2y^2+xy)^2-x^2y^2$;
2) $\left(\frac{2}{3}a^2b^2+4\right)^2-16$;
3) $(0{,}2c^2d^2+cd)^2-0{,}04c^4d^4$;
4) $(5x^4+6y^2)^2-36y^4$.

618. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(a^2c^2+3ac)^2-9a^2c^2$;
2) $\left(\frac{4}{9}x^2y+5\right)^2-25$;
3) $(0{,}6c^6+d)^2-0{,}36c^{12}$;
4) $(1{,}1a^4+4d^6)^2-1{,}21a^8$.

619. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(1+0{,}1x)(-0{,}1x+1)-1$, якщо $x=10$;
2) $(2x+6)(2x-6)+9(4-x)$, якщо $x=2$.

620. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-1)^2-4x^2=0$;
2) $x^2-(6+x)^2=9x$;
3) $(5+x)^2-x^2=5x$;
4) $25x^2-(7-5x)^2=14x$.

621°. Розв'яжіть рівняння:

1) $9x^2-(4-3x)^2=0$.
2) $(7x-2)^2-49x^2=2x$.

622. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-a-0{,}6bc)(a-0{,}6bc)$;
2) $(-0{,}01xy-5)(5-0{,}01xy)$;
3) $\left(5ax^3-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-5ax^3\right)$;
4) $(-a^3x-ax^3)(-a^3x+ax^3)$.

623. Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^2-(-a-b)^2=0$;
2) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
3) $(b-2a)^2-(b-a)^2=3a^2-3b^2$.

624. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2)$;
2) $(2+x)(2-x)(4+x^2)$;
3) $(x-y)(y+x)(y^2+x^2)$.

625. Спростіть вираз:

1) $(-0{,}5xy-2)(2-0{,}5xy)$;
2) $\left(5bc^4-1\frac{1}{5}\right)\left(-1\frac{1}{5}-5bc^4\right)$;
3) $(3+a)(3-a)(a^2+9)$;
4) $(5+bc)(5-bc)(25+b^2c^2)$.

626. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(1+x)(1-x)(1+x^2)(1+x^4)$, якщо $x=2$;
2) $(2a+3b)(-2a+3b)(4a^2+9b^2)$, якщо $a=3$, $b=2$.

627. Доведіть, що:

1) 34^2-1 ділиться на 11;
2) 53^2-4 ділиться на 5;
3) 111^2-9 ділиться на 12.

628. Виконайте дії:

1) $(a+b+c)(a+b-c)$;
2) $(a-b+c)(a+b-c)$;
3) $(a-b+c)(a-b-c)$.

629. Спростіть вираз:

1) $(x+y+2)(x-y+2)$;
2) $(xy+x^2+y^2)(xy-x^2-y^2)$;
3) $(x-y-z)(x+y-z)$.

630. Сторона одного квадрата на 4 см більша за сторону іншого, а різниця їх площ дорівнює 24 см^2. Знайдіть периметри цих квадратів.

631. Периметр одного квадрата на 48 см більший за периметр іншого, а різниця їх площ дорівнює 288 см^2. Знайдіть сторони цих квадратів.

632. Сторона одного квадрата на 6 см менша від сторони іншого, а різниця їх площ дорівнює 64 см^2. Знайдіть відношення довжин сторін цих квадратів.

633*. Доведіть, що:

1) $99^2+20^2=101^2$;
2) $112^2+15^2=113^2$;
3) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

634*. Доведіть, що квадрат непарного натурального числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

635*. Доведіть тотожність: $(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+2n)^2=(2n+1)^2$.

636*. Обчисліть: $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})$.

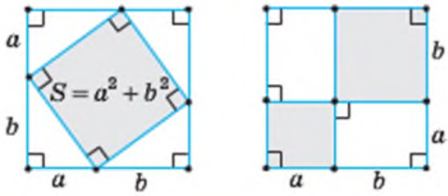
637*. Різниця квадратів двох двоцифрових натуральних чисел, записаних тими самими цифрами, дорівнює 495. Знайдіть ці числа.

638*. Дано три послідовні непарні натуральні числа. Відомо, що різниця квадратів двох більших чисел менша за квадрат найменшого числа на 65. Знайдіть ці числа.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

639. Тато вирішив переклеїти шпалери в дитячій кімнаті. Стіна з вікном має форму квадрата зі стороною 3,2 м, вікно також має форму квадрата зі стороною 1,3 м. Чи вистачить татові шпалер для поклейки цієї стіни, якщо він купив 2 рулони розміром 10 м х 0,53 м?

640. Чи є рівними площі зафарбованої частини фігур на малюнку 8?



Мал. 8

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

641. Знайдіть значення виразу:

1) $3a+5b$, якщо $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{7}{4}$; 2) $0{,}4c+0{,}16c^2+16$, якщо $c=-5$.

642. Піднесіть одночлен $2a^2b^3c^6$ до: 1) квадрата; 2) куба; 3) четвертого степеня.

643. Вкладник вніс до банку 5000 грн, а через рік отримав 5750 грн. Під який відсоток річних були покладені гроші? Скільки грошей отримає вкладник через три роки?

644. Зі слова «математизований» навмання обирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру «а»?

§ 13. СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

Перелік формул скороченого множення, які ви знаєте, у цьому параграфі доповнимо ще двома формулами. Для цього спочатку доведемо наступну теорему.

Запам'ятайте!

Теорема 1 (про добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх різниці).

Добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих одночленів:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Дано: одночлени a і b.

Довести: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Доведення. Перетворимо вираз у лівій частині цієї рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=$$
$$=a^3+b^3.$$

Отже, $a^3+b^3=a^3+b^3$.

Звідси $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, що і вимагалося довести.

Запам'ятайте!

Теорема 2 (про добуток різниці двох одночленів і неповного квадрата їх суми).

Добуток різниці двох одночленів і неповного квадрата їх суми дорівнює різниці кубів цих одночленів:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Дано: одночлени a і b.

Довести: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Доведення. Перетворимо вираз у лівій частині цієї рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=$$
$$=a^3-b^3.$$

Отже, $a^3-b^3=a^3-b^3$.

Звідси $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, що і вимагалося довести.

Загалом дістали:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Ці формули також є формулами скороченого множення. Вони дозволяють полегшувати перетворення виразів.

Оскільки доведені рівності є тотожностями, то їх можна застосовувати і в зворотному порядку:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Ці тотожності називаються відповідно *формулою суми кубів* і *формулою різниці кубів*.

Чи можна застосовувати формулу суми (різниці) кубів не лише до найпростіших одночленів? Так.

Задача 1. Подайте у вигляді добутку двочлен $8 - x^6y^{15}$.

Розв'язання. Число 8 є кубом числа 2. Другий член x^6y^{15} даного двочлена можна подати як куб іншого одночлена: $x^6y^{15} = (x^2y^5)^3$. Звідси випливає, що до даного двочлена можна застосувати формулу різниці кубів:

$$8 - x^6y^{15} =$$
$$= 2^3 - (x^2y^5)^3 =$$
$$= (2 - x^2y^5)\,(2^2 + 2x^2y^5 + (x^2y^5)^2) =$$
$$= (2 - x^2y^5)\,(4 + 2x^2y^5 + x^4y^{10}).$$

Зверніть увагу:

- **сума кубів двох одночленів дорівнює добутку суми цих одночленів і неповного квадрата їх різниці;**
- **різниця кубів двох одночленів дорівнює добутку різниці цих одночленів і неповного квадрата їх суми;**
- **різниця квадратів двох одночленів дорівнює добутку суми і різниці цих одночленів.**

Задача 2. Знайдіть значення виразу $25^3 + 125$.

Розв'язання. Подамо другий доданок як степінь 5^3 та застосуємо відповідну формулу скороченого множення:

$$25^3 + 5^3 = (25 + 5) \cdot (25^2 - 25 \cdot 5 + 5^2) =$$
$$= 30 \cdot 25 \cdot (25 - 5 + 1) = 30 \cdot 25 \cdot 21 =$$
$$= 630 \cdot 100 : 4 = 15\,750.$$

Отже, $25^3 + 125 = 15\,750$.

Зверніть увагу:

формули суми кубів і різниці кубів можна застосовувати до будь-яких цілих виразів.

Дізнайтеся більше

Натуральні числа мають багато цікавих властивостей. Проте довести їх буває складніше, ніж виявити. Розглянемо приклад. Дільниками числа 6 є числа 1, 2, 3, 6. Для кожного із цих чисел визначимо кількість їх дільників. А саме: число 1 має один дільник, число 2 має два дільники, число 3 — два дільники, число 6 — чотири дільники. Отже, дістали набір чисел: 1, 2, 2, 4. Виявляється, що сума кубів цих чисел дорівнює квадрату їх суми, тобто: $1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$. Справді:

$$1^3+2^3+2^3+4^3=1+8+8+64=81;$$

$$(1+2+2+4)^2=9^2=81.$$

Щоб перевірити цю властивість ще раз, візьмемо число 16. Його дільники — 1, 2, 4, 8, 16. Знайшовши кількість дільників кожного із цих чисел, отримаємо набір чисел: 1, 2, 3, 4, 5. Складемо відповідні числові вирази:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=1+8+27+64+125=225;$$

$$(1+2+3+4+5)^2=15^2=225.$$

Отже, $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$.

Проте довести такий факт досить складно. Спробуйте. Можливо, ви зможете це зробити.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть теорему про добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх різниці.
2. Запишіть формулу суми кубів.
3. Запишіть формулу різниці кубів.
4. Чому дорівнює сума кубів двох одночленів?
5. Чому дорівнює різниця кубів двох одночленів?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

645'. Укажіть правильне твердження:

1) добуток різниці двох одночленів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих одночленів;

2) добуток суми двох одночленів і повного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих одночленів;

3) добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих одночленів;

4) добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх суми дорівнює різниці кубів цих одночленів.

646′. Чи правильно, що:

1) $(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$; 3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;
2) $(a+b)(a^2-2ab+b^2)=a^3+b^3$; 4) $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$?

647′. Чи правильно, що:

1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$; 3) $(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-b^3$;
2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$; 4) $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$?

648′. Чи правильно, що:

1) $a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$; 3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+2ab+b^2)$;
2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; 4) $a^3-b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$?

649′. Чи правильно, що:

1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; 3) $a^3+b^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$;
2) $a^3+b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; 4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$?

650°. Який із наступних виразів дорівнює добутку $(x+y)(x^2-xy+y^2)$:
1) x^3-y^3; 2) x^3+y^3; 3) x^2-y^2; 4) y^2+x^2?

651°. Чи правильно, що $(a+2)(a^2-2a+4)$ дорівнює:
1) a^2+4; 2) a^3+4; 3) a^3-8; 4) a^3+8?

652°. Чи правильно, що $(t+3)(t^2-3t+9)$ дорівнює:
1) t^2+27; 2) t^3+9; 3) t^3+27; 4) t^3-27?

653°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $(2+3d)(4-6d+9d^2)$:
1) 2^3+3d^3; 2) $2^3-(3d)^3$; 3) $2^3+(3d)^3$; 4) $2^2-(2b)^2$?

654°. Який із наступних виразів дорівнює добутку $(m-n)(m^2+mn+n^2)$:
1) n^3-m^3; 2) m^3+n^3; 3) m^3-n^3; 4) m^2-n^2?

655°. Чи правильно, що $(b-5)(b^2+5b+25)$ дорівнює:
1) b^2-25; 2) b^3+125; 3) b^3-125; 4) b^3-25?

656°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $(1-5b)(1+5b+25b^2)$:
1) $1+(5b)^3$; 2) $1-(5b)^3$; 3) $1-5b^3$; 4) $1-(5b)^2$?

657°. Яка із наступних рівностей є тотожністю:

1) $(x-1)(x^2-x+1)=x^3-1$; 3) $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$;
2) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$; 4) $(1-x)(1-x+x^2)=1-x^3$?

658°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $(2-t)(4+2t+t^2)$:
1) $8+t^3$; 2) $8-t^3$; 3) $4+t^3$; 4) $8-t^2$?

659°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2a+4b)(4a^2-8ab+16b^2)=*+64b^3$;
2) $(5x-3b)(25x^2+15bx+9b^2)=125x^3-*$;
3) $(-2x+6y)(36y^2+12xy+4x^2)=*-8x^3$.

660°. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(b+c)(b^2-bc+c^2)$;
2) $(a-x)(a^2+ax+x^2)$;
3) $(m+t)(m^2-mt+t^2)$;
4) $(c+2d)(c^2-2cd+4d^2)$;
5) $(x-3m)(x^2+3mx+9m^2)$;
6) $(2b+3d)(9d^2-6bd+4b^2)$;
7) $(xy+4)(x^2y^2-4xy+16)$;
8) $\left(0{,}1a-\frac{2}{7}b\right)\left(0{,}01a^2+\frac{1}{35}ab+\frac{4}{49}b^2\right)$.

661°. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(a-n)(a^2+an+n^2)$;
2) $(b+5d)(b^2-5bd+25d^2)$;
3) $(y-4x)(y^2+4xy+16x^2)$;
4) $(5mn-2a)(25m^2n^2+10amn+4a^2)$.

662°. Чи правильно, що a^3-8 дорівнює:

1) $a(a-2)(a+2)$;
2) $(a-2)^3$;
3) $(a-2)(a^2+a+4)$;
4) $(a-2)(a^2+2a+4)$?

663°. Чи правильно, що $1-27y^3$ дорівнює:

1) $(1-3y)(1+9y+9y^2)$;
2) $(1-3y)(1-3y+9y^2)$;
3) $(1-3y)(1+3y+9y^2)$;
4) $(1-3y)(1+6y+9y^2)$?

664°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1+x)(x^2-x+1)-x^3=x$;
2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3+x=2$;
3) $x^3-(x-3)(x^2+3x+9)-3x=0$.

665°. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1-x)(1+x+x^2)+x^3-x=0$;
2) $(3x+1)(9x^2-3x+1)-27x^3+2x=3$.

666°. Чи є тотожністю дана рівність:

1) $8c^3-1=(2c-1)(c^2-2c+1)$;
2) $8c^3-1=(2c-1)(4c^2-2c+1)$;
3) $8c^3-1=(2c-1)(4c^2+2c+1)$;
4) $8c^3-1=(2c-1)(4c^2+4c+1)$?

667°. Чи правильно, що $11^3+9^3=\ldots$:

1) $(11+9)(11^2+9^2)=20\cdot(121+81)=4040$;
2) $(11+9)(11^2+11\cdot9+9^2)=20\cdot(121+99+81)=6020$;
3) $(11+9)(11^2-2\cdot11\cdot9+9^2)=20\cdot(121-198+81)=80$;
4) $(11+9)(11^2-11\cdot9+9^2)=20\cdot(121-99+81)=2060$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

668°. Чи правильно, що $11^3-10^3=\ldots$:

1) $(11-10)(11^2+10^2)=1\cdot(121+100)=221$;
2) $(11-10)(11^2+11\cdot10+10^2)=1\cdot(121+110+100)=331$;
3) $(11-10)(11^2+2\cdot11\cdot10+10^2)=1\cdot(121+220+100)=441$;
4) $(11-10)(11^2-11\cdot10+10^2)=1\cdot(121-110+100)=111$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

669°. Використовуючи формули суми та різниці кубів, обчисліть:

1) 7^3+3^3; 2) 9^3-8^3; 3) $1{,}1^3+0{,}9^3$; 4) $0{,}9^3-0{,}8^3$.

670°. Використовуючи формули суми та різниці кубів, обчисліть:

1) 7^3-6^3; 2) $0{,}4^3+0{,}6^3$.

671°. Якому із наступних виразів тотожно дорівнює двочлен $8x^6y^{12}-27$:

1) $(2x^3y^6-3)(4x^6y^8+6x^3y^6+9)$;
2) $(2x^2y^4-3)(4x^4y^8+12x^2y^4+9)$;
3) $(2x^2y^4-3)(4x^4y^8+6x^2y^4+9)$?

672°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

1) $8a^3b^3-125=(*-5)(4a^2b^2+10ab+25)$;
2) $0{,}216a^6b^9-\frac{1}{27}c^{12}=\left(0{,}6a^2b^3-\frac{1}{3}c^4\right)\left(*+0{,}2a^2b^3c^4+\frac{1}{9}c^8\right)$.

673°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

$27a^3-0{,}001c^3=(3a-*)(9a^2+0{,}3ac+0{,}01c^2)$.

674°. Подайте двочлен у вигляді добутку двох виразів:

1) $216x^3y^9-0{,}125$; 3) $343c^3-\frac{1}{8}a^{18}$;
2) $27a^6-\frac{1}{64}b^{12}$; 4) $64m^3-1000n^{12}$.

675°. Подайте двочлен у вигляді добутку двох виразів:

1) $1000-0{,}008x^6y^6$; 2) $\frac{1}{216}-8c^{12}d^{21}$; 3) $64a^{24}-c^{33}$.

676. Спростіть вираз:

1) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^3-b^3)$;
2) $(3x-y)(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)(9x^2-3xy+y^2)$;
3) $(m-0{,}1n)(m^3+0{,}001n^3)(m^2+0{,}1mn+0{,}01n^2)$.

677. Спростіть вираз:

1) $(b+4c)(b^2-4bc+16c^2)(64c^3-b^3)$;
2) $(n^3+0{,}125t^3)(n^2+0{,}5nt+0{,}25t^2)(n-0{,}5t)$.

678. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(1+x)(1-x+x^2)(1-x^3)$, якщо $x=2$;
2) $(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)-8a^3$, якщо $a=12{,}25$, $b=-0{,}1$.

679. Спростіть вираз:

1) $(3+b)^3-b^3$; 3) $343y^6-(5+7y^2)^3$;
2) $(5-4a)^3+64a^3$; 4) $125x^3-(5x+1)^3$.

680. Спростіть вираз:

1) $(a^2c^2+3ac)^3-a^6c^6$; 3) $(0{,}6m^3+n)^3-0{,}216m^9$.
2) $\left(\frac{4}{9}x^2y+5\right)^3-125$;

681. Обчисліть, не використовуючи калькулятор:

1) $\dfrac{77^3-65^3}{12}-\left(77^2+65^2\right)$; 2) $\dfrac{39^3-21^3}{18}+39\cdot21$; 3) $\dfrac{71^3+49^3}{120}-71\cdot49$.

682. Доведіть, що: 1) 79^3-29^3 ділиться на 25.
2) 10^6-1 ділиться на 3.

683. Доведіть, що: 1) 41^3+19^3 ділиться на 20;
2) 54^3-24^3 ділиться на 60.

684. Розв'яжіть рівняння:
1) $(1+2x)(4x^2-2x+1)-4x(2x^2-5)=21$;
2) $(x+3)(x^2-3x+9)-x(x-4)(x+4)=59$;
3) $(x-6)(x^2+6x+36)-x(x-7)(x+7)=29$;
4) $(x-5)(x^2+5x+25)-x(x-3)^2=2x(3x+8)$.

685. Розв'яжіть рівняння:
1) $(1+x)(x^2-x+1)-0{,}04x(25x^2-5)=20$;
2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x-1)^2=4x(0{,}5x+6{,}5)$.

686. Ребро одного куба на 2 см більше за ребро іншого куба, а сума їх об'ємів дорівнює 152 см^3. Знайдіть довжини ребер обох кубів.

687. Периметр основи одного куба на 12 см більший за периметр основи іншого куба, а різниця їх об'ємів дорівнює 117 см^3. Знайдіть довжини ребер обох кубів.

688. Різниця периметрів основ двох кубів дорівнює 4 см, а сума їх об'ємів — 341 см^3. Знайдіть відношення довжин ребер кубів.

689*. Доведіть, що сума кубів двох послідовних натуральних чисел ділиться на 4.

690*. Доведіть, що: 1) 328^3+172^3 ділиться на 2000;
2) 731^3-611^3 ділиться на 120.

691*. Два натуральні числа при діленні на 13 дають в остачі 1 і 3 відповідно. Доведіть, що різниця кубів цих чисел ділиться на 13.

692*. Доведіть, що вираз $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ набуває невід'ємних значень при будь-яких числових значеннях змінних x і y.

693*. Доведіть тотожність:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(x+z).$$

694*. Доведіть, що $x^3+x^2y-xyz+y^2z+y^3=0$, якщо $x+y+z=0$.

695*. Обчисліть:

1) значення виразу a^3+b^3, якщо $a+b=-3$, $ab=-10$;

2) значення виразу a^3-b^3, якщо $b-a=5$, $ab=14$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

696. Для зберігання овочів тато виготовив ящик, що має форму куба з ребром 1 м. Проте ящик виявився завеликим. Тато вирішив зменшити кожне ребро на 30 см. На скільки зменшився об'єм ящика? Який об'єм нового ящика?

697. Для виготовлення каркасних макетів двох кубів Сергій розрахував, що йому знадобиться 1,8 м і 1,44 м проволоки (не враховуючи потреб на закріплення згинів). Яке ребро в більшого і меншого кубів? Порівняйте їх об'єми.

698. Цукор і сіль мама зберігає в ємностях, які мають форму куба з ребрами 12 см і 8 см відповідно. На скільки більше за об'ємом мама зберігає цукру аніж солі?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

699. Знайдіть значення виразу $3a^2 + 10ab + 2b^2$:

1) якщо $a = -2$, $b = 5$; 2) якщо $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{5}{6}$.

700. Доведіть тотожність $5(a-b)+6(b-c)-3(a-c)=3(a-c)+(b-a)$ різними способами.

701. Туристична фірма у липні збільшила вартість путівки на 25 %, а в жовтні — зменшила на 10 %. Як змінилася вартість путівки?

§ 14. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Ви вже знаєте, як розгорнути в многочлен добуток многочленів. Нерідко виникає потреба виконати обернену дію — згорнути многочлен у добуток кількох множників. Таку дію називають *розкладанням многочлена на множники*.

Запам'ятайте!

Розкласти многочлен на множники **— означає перетворити його в добуток кількох виразів.**

Для розкладання многочлена на множники застосовують різні способи. Розглянемо їх.

1. Винесення спільного множника за дужки

Задача 1. Розкладіть на множники многочлен

$$-6x^5y^7-24x^4y^3+8x^2y^4.$$

Розв'язання. 1. Визначимо коефіцієнт спільного множника членів даного многочлена. Для цього спочатку знайдемо НСД чисел 6, 24 і 8. Він дорівнює 2. Оскільки коефіцієнт першого члена від'ємний, то зручно за коефіцієнт спільного множника взяти число –2.

2. Визначимо буквену частину спільного множника членів даного многочлена. Кожен член многочлена містить: а) степені змінної x, найнижчим з яких є другий степінь; б) степені змінної y, найнижчим з яких є третій степінь. Тому буквеною частиною спільного множника є вираз x^2y^3.

3. Винесемо спільний множник $-2x^2y^3$ за дужки:

$$-6x^5y^7-24x^4y^3+8x^2y^4=$$
$$=-2x^2y^3(3x^3y^4+12x^2-4y).$$

Зверніть увагу:

щоб перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки, виконайте обернену дію, тобто розкрийте дужки.

2. Застосування формул скороченого множення

За формулами скороченого множення можна відразу подати у вигляді добутку особливі многочлени, такі як повний квадрат суми чи різниці, різниця квадратів, сума і різниця кубів. Для цього застосовують такі формули:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b),$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b),$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Розглянемо, як можна застосувати формули скороченого множення в більш складних випадках.

Задача 2. Розкладіть на множники двочлен $16x^4y^6-x^2y^4$.

Розв'язання. Задачу можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1. Оскільки обидва члени даного двочлена містять змінні x і y в парних степенях і коефіцієнт першого члена $16=4^2$, то кожен доданок можна подати як квадрат деякого одночлена:

$$16x^4y^6 - x^2y^4 =$$
$$= (4x^2y^3)^2 - (xy^2)^2.$$

Дістали різницю квадратів одночленів, яку можна розкласти на множники за відповідною формулою:

$$(4x^2y^3)^2 - (xy^2)^2 =$$
$$= (4x^2y^3 + xy^2)(4x^2y^3 - xy^2).$$

І в перших, і в других дужках міститься двочлен, який ще можна розкласти на множники, винісши за дужки спільний множник. Тоді дістанемо:

$$(4x^2y^3 + xy^2)(4x^2y^3 - xy^2) =$$
$$= xy^2(4xy + 1) \cdot xy^2(4xy - 1) =$$
$$= x^2y^4(4xy + 1)(4xy - 1).$$

Спосіб 2. У даному двочлені $16x^4y^6 - x^2y^4$ спочатку винесемо за дужки спільний множник, а потім вираз у дужках розкладемо на множники за формулою різниці квадратів:

$$16x^4y^6 - x^2y^4 =$$
$$= x^2y^4(16x^2y^2 - 1) =$$
$$= x^2y^4(4xy + 1)(4xy - 1).$$

Зверніть увагу:

якщо спочатку винести спільний множник за дужки, то застосовувати формули скороченого множення буде легше.

3. Спосіб групування

Якщо многочлен містить більш як три члени, то застосовують спосіб групування.

Задача 3. Розкладіть на множники многочлен:

$$2x^2 - x + 2xy - y.$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки так: перший — із другим, а третій — із четвертим. У кожному з цих двочленів винесемо спільний множник за дужки:

$$2x^2 - x + 2xy - y =$$
$$= (2x^2 - x) + (2xy - y) =$$
$$= x(2x - 1) + y(2x - 1).$$

Отримали вираз, кожен доданок якого містить спільний множник $2x - 1$. Винесемо цей спільний множник за дужки:

$$x(2x - 1) + y(2x - 1) =$$
$$= (2x - 1)(x + y).$$

Отже, $2x^2 - x + 2xy - y = (2x - 1)(x + y)$.

Чи можна в многочлені з чотирма членами згрупувати доданки по-іншому: перший — із третім, а другий — із четвертим? Так. Переконайтеся в цьому самостійно на прикладі многочлена, який дано в задачі 3.

Зверніть увагу:

групуючи члени многочлена, будьте уважними щодо знаків:
- якщо за дужки виносите множник зі знаком «+», то знаки всіх членів у дужках залишайте без змін;
- якщо за дужки виносите множник зі знаком «–», то знаки всіх членів у дужках змінюйте на протилежні.

Дізнайтеся більше

Калужнін Лев Аркадійович (1914–1990) — видатний український математик-алгебраїст, доктор фізико-математичних наук, професор.

У 1923 мати з 9-річним Львом емігрували до Німеччини, де він закінчив реальне училище, навчався спочатку в Берлінському, а потім у Гамбурзькому університетах. У 1938 Лев Аркадійович переїхав до Франції, де слухав лекції у Сорбонні. З 1946 працював в Інституті вищих наукових досліджень Паризької академії наук, де в 1948 захистив докторську дисертацію. У 1951–1955 — професор Берлінського університету. З 1955 працював в Київському університеті (професор кафедри математичного аналізу, теорії ймовірностей та алгебри). У 1957 Л. А. Калужнін захистив докторську дисертацію вже в Україні. У 1959–1970 — завідувач кафедри алгебри та математичної логіки, у 1970–1986 — професор цієї кафедри. Є автором понад 130 наукових та науково-методичних праць. Створив потужну наукову школу. Серед його учнів — 18 кандидатів та 4 доктори наук. Наукові дослідження належать до різних розділів алгебри і дискретної математики, але найвагоміші результати стосуються теорії груп.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що означає — розкласти многочлен на множники?
2. Які способи розкладання многочлена на множники ви знаєте?
3. Як перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

702'. Укажіть правильне завершення твердження: «Розкласти многочлен на множники — означає...»:
1) замінити в многочлені знаки «+» і «–» на знак множення;
2) перетворити його в суму двох виразів;
3) розставити дужки в многочлені;
4) перетворити його в добуток кількох виразів.

703'. Чи правильно винесено спільний множник за дужки:
1) $2a+6b=2(a+b)$;
2) $2a+6b=2(a+2b)$;
3) $2a+6b=2(a+3b)$?

704'. Чи правильно винесено спільний множник за дужки:
1) $ab+bc=a(b+c)$;
2) $ab+bc=b(a+c)$;
3) $ab+bc=c(a+b)$?

705'. Чи правильно розкладено вираз на множники:
1) $9-b^2=(9+b)(9-b)$;
2) $9-b^2=(3-b)(3-b)$;
3) $9-b^2=(3-b)(3+b)$?

706'. Чи правильно розкладено вираз на множники:
1) $c^2-b^2=(c-b)(c-b)$;
2) $c^2-b^2=(b-c)(c-b)$;
3) $c^2-b^2=(c-b)(c+b)$?

707'. Чи правильно розкладено вираз на множники:
1) $a^3-d^3=(a-d)(a^2-ad+d^2)$;
2) $a^3-d^3=(a-d)(a^2+ad+d^2)$;
3) $a^3-d^3=(a-d)(a^2+2ad+d^2)$?

708'. Чи правильно розкладено вираз на множники:
1) $t^3-1=(t-1)(t^2-t+1)$;
2) $t^3-1=(t-1)(t^2+2t+1)$;
3) $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$?

709°. Чи правильно, що $2x^2+8x$ дорівнює:
1) $2x(x+8)$;
2) $2x(x^2+4)$;
3) $2x(x+4)$?

710°. Чи правильно, що $6x^2+2x+10x^3$ дорівнює:
1) $2x(4x+1+5x^2)$;
2) $2x(3x+2+5x^2)$;
3) $2x(3x+1+5x^2)$?

711°. Чи правильно, що $4x^2-9$ дорівнює:
1) $(2x-3)(2x+3)$;
2) $(2x^2-3)(2x^2+3)$;
3) $(2x-3)(2x-3)$?

712°. Чи правильно, що a^3-8 дорівнює:
1) $(a-4)(a^2-a+2)$;
2) $(a-2)(a^2-a+4)$;
3) $(a-2)(a^2+2a+4)$?

713°. Чи правильно, що x^3-3x^2+2x-6 дорівнює:
1) $(x-3)(2x^2-6)$; 2) $(x-3)(x^2+2)$; 3) $(2x-6)(x^2+1)$?

714°. Чи правильно, що a^3-2a^2+2a-4 дорівнює:
1) $(a+2)(a^2-2)$; 2) $(a-1)(a^2+4)$; 3) $(a-2)(a^2+2)$?

715°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $25a^2+35$:
1) $5(5a^2+6)$; 2) $25(a^2+10)$; 3) $5(5a^2+7)$?

716°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $9x^4+12x^3$:
1) $3x^3(3x^2+4)$; 2) $3x^3(3x+4)$; 3) $4x^3(3x+4)$?

717°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $x^4y^6+x^3y^4$:
1) $x^4y^4(y^2+1)$; 2) $x^3y^4(xy^2+1)$; 3) $x^3y^4(xy+1)$?

718°. Яка з наступних рівностей є тотожністю:
1) $3x^3y^2+6x^3y^5=3x^3y^2(1+y^2)$;
2) $3x^3y^2+6x^3y^5=3x^3y^2(1+2y^2)$;
3) $3x^3y^2+6x^3y^5=3x^3y^2(y^2+2)$?

719°. Яка з наступних рівностей є тотожністю:
1) $12xz^2+8x^3z^2=4xz^2(4+2x^2)$;
2) $12xz^2+8x^3z^2=2xz^2(6+4x^2)$;
3) $12xz^2+8x^3z^2=4xz^2(3+2x^2)$?

720°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:
1) $2a^2+4a^3+6a^4=* \cdot (1+2a+3a^2)$;
2) $9b^3+12b^2+18b^5=3b^2(3b+*+6b^3)$;
3) $25a^2b^2+40a^3b^3+65a^5b^5=* \cdot (5+8ab+13a^3b^3)$;
4) $19b^3c^3+38b^2c^5+19b^2c^4=19b^2c^3(b+*+c)$.

721°. Уставте замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:
1) $15n^2+10n^7+35n^3=* \cdot (3+2n^5+7n)$;
2) $42m^5n^4+49m^4n^5+35m^3n^3=* \cdot (6m^2n+7mn^2+5)$.

722°. Розкладіть на множники многочлен способом винесення спільного множника за дужки:
1) $2m^2+4m+6m^3$;
2) $6n^4+9n^6+12n^3$;
3) $0{,}4a^3+1{,}6a^5+0{,}8a^2$.

723°. Розкладіть на множники многочлен способом винесення спільного множника за дужки:

1) $12b^5+24b^3+6b^2$;
2) $36c^4+18c^7+27c^3$;
3) $1{,}5d^3+2d^5+3d^8$.

724°. Розкладіть на множники многочлен способом винесення спільного множника за дужки:
1) $a^3b+ab^3+a^2b^2$;
2) $a^4b^3+a^3b^4+a^2b^2$;
3) $a^2b^3+a^3b^2+a^4b^4$.

725°. Розкладіть на множники вираз способом винесення спільного множника за дужки:
1) $x(y+4)-y(4+y)$;
2) $2m(n^2-1)-3n(1-n^2)$;
3) $b(3b+5)-9b-15$.

726°. Розкладіть на множники вираз способом винесення спільного множника за дужки:
1) $a(5b+6)-b(6+5b)$;
2) $7(m^3-2)-5m(2-m^3)$;
3) $y(2y+1)-4y-2$.

727°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $1-16b^2$:
1) $(4b-1)(1+4b)$;
2) $(1-16b)(1+16b)$;
3) $(1-4b)(4b+1)$?

728°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $9x^4-16$:
1) $(3x^2+16)(3x^2-16)$;
2) $(3x^2+4)(3x^2-4)$;
3) $(3x-4)(3x+4)$?

729°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $25m^2-4$;
2) $9-36n^4$;
3) $0{,}04a^4-0{,}81$.

730°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $64-25a^2$;
2) $16b^2-9$;
3) $0{,}49a^4-0{,}04$.

731°. Уставте замість зірочок такий одночлен, щоб утворилася тотожність:
1) $4a^2-25b^2=(*-5b)(*+5b)$;
2) $81x^2y^4-16a^6=(*-4a^3)(*+4a^3)$;
3) $\frac{1}{9}c^2d^4-0{,}16a^2=(*-0{,}4a)(*+0{,}4a)$.

732°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) a^2b^6-25;
2) $b^{12}c^4-36$;
3) $x^4y^2-0{,}81$.

733°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $4m^2n^2-1$;
2) $b^{10}c^6-16$;
3) $x^8y^4-0{,}36$.

734°. Чи правильно, що $4x^2y^2-y^4$ дорівнює:
1) $(2xy-y^2)(2xy+y^2)$;
2) $(2x^2y^2-y^2)(2x^2y^2+y^2)$;
3) $(2xy-y^4)(2xy+y^4)$?

735°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $x^4y^6 - x^6y^4$:
1) $(x^2y^3 - x^3y^2)(x^2y^3 + x^3y^2)$;
2) $(x^2y^2 - x^3y^3)(x^2y^2 + x^3y^3)$;
3) $(x^3y^2 - x^2y^3)(x^2y^3 + x^3y^2)$?

736°. Уставте замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:
1) $a^6 - 16a^4 = (*) \cdot (a^3 + 4a^2)$;
2) $9b^6 - 36b^2 = (3b^3 - 6b) \cdot (*)$;
3) $100n^2 - 81m^8 = (*) \cdot (10n - 9m^4)$.

737°. Уставте замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:
1) $a^4 - 4a^8 = (*) \cdot (a^2 + 2a^4)$;
2) $49b^2 - 36b^{10} = (7b - 6b^5) \cdot (*)$;
3) $121n^6 - 64m^{12} = (*) \cdot (11n^3 - 8m^6)$.

738°. Чи правильно, що $27x^3 + 8$ дорівнює:
1) $(3x + 2)(9x^2 - 12x^2 + 4)$;
2) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$;
3) $(3x - 2)(9x^2 + 6x^2 + 4)$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

739°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $27x^6 - 125$:
1) $(3x^2 - 5)\ (9x^4 - 15x^2 + 25)$;
2) $(3x^2 - 5)(9x^4 + 15x + 25)$;
3) $(3x^2 - 5)(9x^4 + 15x^2 + 25)$?

740°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $8a^6 - 27$; 2) $b^{12} + 64$; 3) $0{,}125x^3 - 1$.

741°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $b^6 + 125$; 2) $a^{12} - 0{,}001$; 3) $216 - x^9$.

742°. Чи правильно, що $216x^3 + 8y^6$ дорівнює:
1) $(6x + 2y^2)(36x^2 - 24xy^2 + 4y^2)$;
2) $(6x + 2y^2)(36x^2 - 12xy^2 + 4y^4)$;
3) $(6x + 2y^2)(6x^2 - 12xy^2 + 2y^2)$?

У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

743°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $a^2b^6 - a^4b^8$; 2) $a^{12}b^3 - a^6b^6$; 3) $a^3b^3 + a^6b^6$.

744°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $4m^2n^6p^4 - 16$; 2) $27a^3b^6 - 8c^9$; 3) $125a^3b^3 + 64d^3$.

745°. Розкладіть на множники многочлен, використовуючи формули скороченого множення:
1) $16a^2b^6c^2 - 36$; 2) $125a^6b^6 - 27m^6$; 3) $343m^3b^9 + 8n^6$.

746°. Який із наступних виразів дорівнює виразу $x^2+3x+x+3$:
1) $(x+3)(x+1)$; 2) $(x+3)(3x+1)$; 3) $(x+1)(3x+3)$?

747°. Чи правильно, що xy^2-x^2y+x-y дорівнює:
1) $(x-y)(xy-1)$; 2) $(x-y)(1-xy)$; 3) $(x+y)(xy-1)$?
У неправильних рівностях укажіть, де допущено помилку.

748°. Розкладіть многочлен на множники способом групування:
1) $2a^3+4a+a^2+2$;
2) $b^3-3b^2+5b-15$;
3) $16m^4-8m^3+6m-3$.
4) $a^3b+ab^3+a^2+b^2$;
5) $bc^2-b^2c+5b-5c$;
6) $m^2n^2-n^4+6m^2-6n^2$.

749°. Розкладіть многочлен на множники способом групування:
1) $3x^3+x+3x^2+1$;
2) $5a^2-15ab+2a-6b$;
3) $0{,}4mn+1{,}6+0{,}8m^2n+3{,}2m$.

750°. Уставте замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:
1) $a^3-2a^2+4a-8=(a-2)\cdot(*)$;
2) $2b^4-6b^3+9b-27=(*)\cdot(2b^3+9)$.

751°. Уставте замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:
1) $x^4+4x^3+5x^3+20=(*)\cdot(x^3+5)$;
2) $4b^6-12b^4+7b^2-21=(b^2-3)\cdot(*)$.

752. Розкладіть на множники многочлен:
1) $21m^2n+14mn^2+56m^2n^2$;
2) $36m^3n^4+9m^3n^5+72m^5n^4$;
3) $0{,}4x^2y^3+6{,}4x^3y^7+2{,}8x^2y^6+2{,}4x^4y^2$.

753. Розкладіть на множники многочлен:
1) $32b^5c^5+24b^{13}c^{10}+16b^8c^6$;
2) $16a^{12}c^4+64a^7c^7+48a^9c^3+80a^8c^6$;
3) $15b^5d^6+225b^4d^7+45b^8d^5+60b^{10}d^{12}$.

754. Розкладіть на множники вираз:
1) $(2y+3)^2-(5x+1)^2$;
2) $(4n^2+1)^2-(3+n^2)^2$;
3) $(3b+5a)^2-(5b-3a)^2$.

755. Розкладіть на множники вираз:
1) $(2b+3)^2-(5+b)^2$;
2) $(5a+4)^2-25a^2$;
3) $(2m+3)^2-(3-2m)^2$.

756. Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $(3xy+4)^2-9x^2y^2$;
2) $\left(\frac{2}{3}ab+5\right)^2-\frac{4}{9}a^2b^2$;
3) $(7+6y^2)^2-36y^4$.

757. Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $(m^2n^2+3)^2-m^2n^2$;
2) $\left(\frac{4}{9}x^2y+5\right)^2-\frac{16}{81}x^4y^2$;
3) $(1{,}2a^2-4)^2-1{,}44a^4$.

758. Розкладіть на множники вираз:
1) $(3x+4)^3-27x^3$;
2) $(-2b+3a)^3+8b^3$.
3) $(4n^2+1)^3+(1-4n^2)^3$.

759. Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $a^2-x^2+2x-2a$;
2) $x^3-8+(x+2)^2-2x$;
3) $3x^3-3y^3+5x^2-5y^2$.

760. Розкладіть на множники вираз і знайдіть його значення:
1) $16x^4-(2x-1)^4$, якщо $x=0{,}5$;
2) $(2x+5)^3-(2x-5)^3$, якщо $x=-0{,}1$.

761. Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $a^2(a+b)+2a(a+b)+a+b$;
2) $x^2(x+2)-4x(x+2)+4(x+2)$;
3) $9m^2(2m+3)-36(2m+3)$.

762. Розкладіть на множники вираз:
1) $2-a^3b^3-ab$;
2) $(a+b)^2-c^2+a+b+c$;
3) $(a-b)^2-(c+d)^2-a+b-c-d$.

763. Розкладіть на множники вираз:
1) $(m-n)^2-p^2-2m+2n-2p$;
2) $(a+b)^3-(a-b)^3-2b$;
3) $(a+b)^3+(a-b)^3-2a^3$.

764. Розкладіть на множники вираз:
1) $(3x+4)^4-81x^4$; 2) $(2a+3b)^4-9b^2$; 3) $(5xy-1)^4-1$.

765. Доведіть, що: 1) 4^3-1 ділиться на 7;
2) 169^2-44^2 ділиться на 15;
3) 222^2-78^2 ділиться на 360.

766. Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $9x^2+6x+1-16y^2$;
2) $16+9b^2-12b-25a^2$;
3) $9c^2-64-16d-d^2$.

767. Розкладіть на множники многочлен:
1) x^2-5x+6; 2) y^2-3y+2.

768. Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^2-8x+15$; 2) $m^2-7m+12$.

769*. Розкладіть на множники многочлен:
1) x^4+5x^2-6; 2) x^4-3x^2-4.

770*. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-16=0$;
2) $(2x-1)^2-25=0$;
3) $x^2-(3+x)^2=3x$.

771*. Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) x^4+x^2+1;
2) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

772*. Розкладіть на множники вираз:
$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$.

773*. Розкладіть на множники вираз: $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$.

774*. Доведіть, що вираз $n^4+3n^3-n^2-3n$ ділиться на 6 при будь-якому натуральному значенні n.

775*. Доведіть, що вираз $(2n-1)^3-(2n-1)$ ділиться на 24 при будь-якому натуральному значенні n.

776*. Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3-10a^2+23a-6$;
2) $12x^3+25x^2+44x+24$.

777*. За умови, що $2a^2+4a-1=-6$ за деякого значення змінної a, знайдіть значення виразу:

1) $-6a^2-12a+3$;
2) a^2+2a;
3) $12a^4+48a^3+42a^2-12a$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

778. У трикімнатній квартирі одна кімната має підлогу форми квадрата зі стороною a, друга — форми квадрата зі стороною b, а третя — форми прямокутника зі сторонами a і b відповідно. Сума площ підлог першої, другої та подвоєної площі третьої кімнати дорівнює 49 м^2. Знайдіть периметр кімнати, що має форму прямокутника.

779*. Відомо, що різниця квадратів віку тата семикласниці Іринки та самої дівчинки дорівнює добутку чисел 49 і 25. Знайдіть вік тата і дівчинки.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

780. Розв'яжіть рівняння:

1) $|5x-2|=8$;
2) $2|x|+3(x-1)=5$.

781. Перше число на 40 % більше за друге, а їх середнє арифметичне дорівнює 36. Знайдіть ці числа.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке многочлен?
2. Які члени многочлена називаються подібними?
3. Як звести многочлен до стандартного вигляду?
4. Який член многочлена називається старшим?
5. Що називається степенем многочлена? Як його визначити?
6. Що означає додати многочлени?
7. Які закони справджуються для дій першого ступеня з многочленами?
8. Як помножити одночлен на многочлен? Многочлен на многочлен?
9. Які закони справджуються для множення многочленів?
10. Сформулюйте теорему про квадрат суми двох одночленів.
11. Які тотожності називають формулами скороченого множення?
12. Запишіть формули для обчислення квадрата суми та квадрата різниці.
13. Який вираз називається повним квадратом? Неповним квадратом?
14. Чи можна згорнути повний квадрат у квадрат двочлена? А неповний квадрат?
15. Сформулюйте теорему про добуток суми і різниці двох одночленів.
16. Запишіть формулу різниці квадратів.
17. Чому дорівнює квадрат різниці двох одночленів?
18. Сформулюйте теорему про добуток суми двох одночленів і неповного квадрата їх різниці.
19. Запишіть формулу суми кубів.
20. Запишіть формулу різниці кубів.
21. Що означає розкласти многочлен на множники?
22. Які способи розкладання многочлена на множники ви знаєте?
23. Як перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№1

1°. Знайдіть степінь многочлена $9m^3 + 1 + 2m^6 - m^4 + 8m$.

А. 9. **Б.** 3. **В.** 8. **Г.** 6.

2°. Знайдіть добуток одночлена $-a$ і многочлена $a - 3b^2$

А. $a^2 - 3b^2$. **Б.** $-a^2 + 3b^2a$. **В.** $-2a - 3b^2$. **Г.** $-a^2 + 3b^2$.

3°. Зведіть подібні члени многочлена $y + 1{,}1y - 6y^3 + 2y - 1{,}1y^3 - y^2 - 0{,}1y + 7\frac{1}{10}y^3$.

А. $2y - 2\frac{1}{10}y^3 - y^2$. **Б.** $\frac{1}{10}y^3 - y^2$. **В.** $-y^2$. **Г.** $-y^2 + 4y$.

4. Знайдіть різницю многочленів $3x - x^2 + 2$ і $-13 + x^2$.

А. $3x - 9$. **Б.** $3x - 9 - 2x^2$. **В.** $3x + 9 - 2x^2$. **Г.** $3x - 11$.

5*. Спростіть вираз: $(\frac{1}{4}xy + 3a)(0{,}0625x^2y^2 - \frac{3}{4}xya + 9a^2)$.

А. $\frac{1}{16}x^2y^2 + 9a^2$. **В.** $x^3y^3 + 27a^3 + \frac{3}{4}x^2y^2a$.

Б. $\frac{1}{64}x^3y^3 + 27a^3$. **Г.** $\frac{25}{64}x^3y^3 + 27a^3$.

№2

1°. Подайте вираз $(7a + 5b)^2$ у вигляді многочлена.

А. $7a^2 + 35ab + 5b^2$. **В.** $49a^2 + 70ab + 25b^2$.

Б. $49a^2 + 35ab + 25b^2$. **Г.** $7a^2 + 70ab + 5b^2$.

2°. Піднесіть до квадрата вираз $0{,}3x - 0{,}1y$.

А. $0{,}3x^2 - 0{,}03xy + 0{,}1y^2$. **Б.** $0{,}9x^2 - 0{,}06xy + 0{,}1y^2$.

В. $0{,}09x^2 - 0{,}06xy + 0{,}01y^2$. **Г.** $0{,}09x^2 - 0{,}06xy - 0{,}01y^2$.

3°. Розкладіть многочлен $8c^6 - 125$ на множники.

А. $(2c^2 - 5)(4c^4 + 20c^2 + 25)$. **Б.** $(2c^3 - 5)(4c^6 + 10c^3 + 25)$.

В. $(2c^2 + 5)(4c^4 - 10c^2 + 25)$. **Г.** $(2c^2 + 5)(4c^6 - 20c^2 + 25)$.

4. Обчисліть, не користуючись калькулятором: $101^2 - 99^2$.

А. 200. **Б.** 4. **В.** 400. **Г.** 1.

5*. Розкладіть на множники вираз: $(x - y)^2 - z^2 - 4x^2 + 4xy + 4xz$.

А. $(x - y - z)(z - y - 3x)$. **В.** $(x - y + z)(z - y + 5x)$.

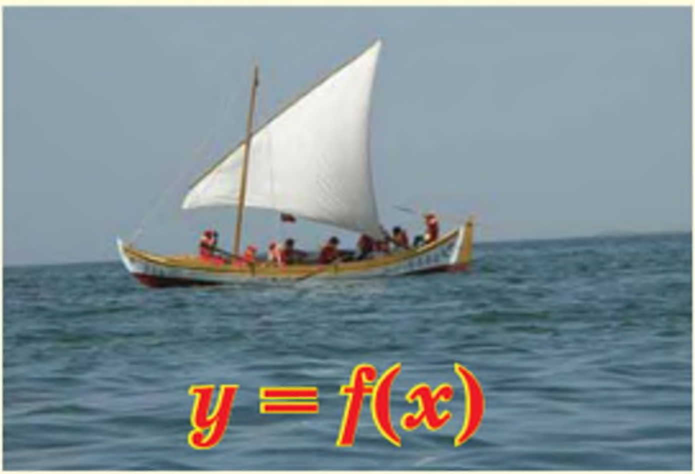
Б. $(x - y + z)(z - y - 4x)$. **Г.** $(x - y - z)(z + y + 3x)$.

РОЗДІЛ 4

ФУНКЦІЇ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке функція, її область визначення і область значень;
- про способи задання функції;
- що називають графіком функції та як його побудувати;
- яка функція називається лінійною та які її властивості;
- що є графіком лінійної функції та як його побудувати;
- яка функція називається прямою пропорційністю та які її властивості;
- що є графіком прямої пропорційності та як його побудувати;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



§ 15. ЩО ТАКЕ ФУНКЦІЯ

У повсякденному житті різні величини часто пов'язані між собою і навіть залежать одна від одної. Наприклад: шлях, який пробігає пантера за певний час залежить від її швидкості; вартість деякої кількості однакових товарів залежить від ціни одного такого товару; периметр і площа квадрата залежать від довжини його сторони тощо. У математиці, фізиці, хімії, біології та інших науках вивчають різні залежності між величинами.

Ви знаєте, що об'єм куба з ребром a знаходять за формулою: $V = a^3$. У цьому випадку кажуть, що ребру a *відповідає* об'єм V. До того ж, якщо сторону куба збільшувати або зменшувати, то відповідно буде змінюватись і його об'єм. Це означає, що величини a і V є *змінними величинами*, причому величина V залежить від величини a. Тому довжину сторони куба a вважають *незалежною змінною*, а його об'єм V — *залежною змінною*. У цій залежності кожному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної V. Таку відповідність між змінними a і V називають *функціональною залежністю*.

? Чи кожна відповідність двох змінних є функціональною залежністю? Ні. Розглянемо приклад.

У приміському автобусі ціна на квиток залежить від відстані між початковим пунктом маршруту та певною зупинкою на маршруті (табл. 11).

Таблиця 11

Відстань (у км)	0–4	4,1–12	12,1–20	20,1–26	26,1–28	28,1–33	33,1–37
Вартість квитка (у грн)	3	5,73	8,02	10,32	12,61	14,9	17,2

Очевидно, що між змінними величинами «відстань» та «вартість квитка» існує залежність. Якщо вважати незалежною змінною відстань, а залежною змінною — вартість квитка, то така відповідність є функціональною залежністю, оскільки кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної. Проте, якщо вважати незалежною змінною вартість квитка, а залежною змінною — відстань, то за ціною квитка пасажира ми не зможемо *однозначно визначити*, на яку саме відстань цей пасажир проїде від початкового пункту маршруту автобуса. Тому така відповідність не є функціональною залежністю.

Запам'ятайте!

Правило, згідно з яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної, називається *функцією*.

Функцію найчастіше позначають літерою f, незалежну змінну — літерою x, а залежну змінну — літерою y. Тоді функціональну залежність змінної y від змінної x коротко записують: $y = f(x)$ і читають: «Ігрек дорівнює еф від ікс».

Чи можна позначати функцію, залежну та незалежну змінні іншими літерами? Так. Наприклад, $y = h(x)$ (y — залежна змінна, x — незалежна змінна, h — функція), $s = g(t)$ (s — залежна змінна, t — незалежна змінна, g — функція), $z = f(\varphi)$ (z — залежна змінна, φ — незалежна змінна, f — функція) тощо.

Незалежну змінну називають *аргументом функції*, а залежну змінну — *функцією*. Тому для функції $y = f(x)$ змінна x — це аргумент, а y — функція. Правило f, яке задає функцію, найчастіше подають у вигляді формули. Наприклад, $f(x) = x + 2$, $f(x) = x^3$ або $y = x + 2$, $y = x^3$. Для певного значення x відповідне значення y чи $f(x)$ називають *значенням функції*.

Обчислюючи значення функції, обов'язково вказують відповідне значення аргументу. Наприклад, запис $f(3)$ означає, що значення функції знаходять для значення аргументу, яке дорівнює 3, тобто для $x = 3$. Наприклад, для функції $f(x) = x^3 + 2$ аргументу $x = 3$ відповідає значення функції $f(3) = 3^3 + 2 = 27 + 2 = 29$.

Задача 1. Знайдіть значення функції $y = x^3 - 8$, якщо $x = -1; 0; 2$.

Розв'язання. Щоб знайти значення функції для заданих значень аргументу, підставимо ці значення аргументу у формулу, що задає функцію:

якщо $x = -1$, то $f(-1) = (-1)^3 - 8 = -1 - 8 = -9$;

якщо $x = 0$, то $f(0) = 0^3 - 8 = 0 - 8 = -8$;

якщо $x = 2$, то $f(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$.

Запам'ятайте!

Усі можливі значення аргументу утворюють *область визначення функції*, а відповідні значення залежної змінної — *область значень функції*.

Область визначення та область значень функції $y = f(x)$ коротко позначають $D(f)$ та $E(f)$ відповідно.

Задача 2. Периметр прямокутника зі сторонами a і b дорівнює 28 см. Складіть формулу залежності довжини сторони a від довжини сторони b. Назвіть аргумент цієї функції та знайдіть її область визначення й область значень.

Розв'язання. 1. Периметр прямокутника зі сторонами a і b обчислюють за формулою $P = 2(a + b)$. За умовою задачі $P = 28$ см. Отже, $28 = 2(a + b)$. Звідси $a + b = 14$ і $a = 14 - b$.

2. Для функції $a = 14 - b$ змінна b є аргументом.

3. Довжини сторін прямокутника можуть набувати лише додатних значень, тому $b > 0$ і $a > 0$. Оскільки $a + b = 14$, то значення і незалежної змінної b, і залежної змінної a не можуть бути більшими за 14. Звідси $0 < b < 14$ і $0 < a < 14$. Отже, область визначення даної функції: $0 < b < 14$, а її область значень: $0 < a < 14$.

Зверніть увагу:

функція вважається заданою, якщо:

1) задано область її визначення;
2) указано правило, згідно з яким для кожного значення аргументу можна знайти відповідне значення залежної змінної (функції).

Функцію можна задавати різними способами.

У задачі 2 ми задали функцію *за допомогою формули* $a = 14 - b$, тобто *аналітично*. Цю ж функцію можна задати *описово*, тобто словесно охарактеризувати залежність двох заданих величин, наприклад, так: довжина сторони a прямокутника дорівнює різниці його півпериметра 14 і довжини другої сторони b. Будь-яка задача, за умовою якої ми складаємо формулу функціональної залежності, задає функцію описово.

Існує ще один спосіб задання функції — *табличний*. Назва цього способу підказує, що залежність між аргументом і функцією можна подати у вигляді таблиці. Наприклад, такою є таблиця 12.

Таблиця 12

x	–2	–1	0	1	2
$y(x)$	4	–2	–4	–2	4

Проте табличний спосіб задання функції має деякі недоліки у порівнянні з попередніми. Ви бачите, що в таблиці 12 указано лише п'ять значень аргументу і функції. Отже, область визначення й область значень цієї функції утворюють по п'ять чисел. Якщо ж областю визначення деякої функції є, наприклад, усі натуральні числа, то задати її таблично просто неможливо. Хоча і для таких функцій нерідко виникає потреба складати таблиці (нехай і неповні), наприклад, щоб перейти від аналітичного до *графічного способу* задання функції. Докладніше про це ви дізнаєтесь у наступному параграфі.

Зверніть увагу:

щоб задати функцію, використовують такі способи:
— аналітичний;
— описовий;
— табличний;
— графічний.

Дізнайтеся більше

Функція — одне з основних наукових понять. У сучасному формулюванні воно з'явилось не одразу. Спочатку це поняття було зовсім нечітким. Перші спроби описати поняття «функція» були здійснені наприкінці XVII ст. **Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем** (1646–1716), а також його учнями і послідовниками — братами Йоганном і Якобом Бернуллі. Термін «функція» належить Лейбніцу і походить від латинського слова *function*, що означає «виконання», «здійснення». Термін «аргумент функції» походить від латинського *argumentum*. Область визначення функції $f(x)$ позначають $D(f)$ або $dom\ f$ (від англ. *domain*, що означає «область»). Область значень функції $f(x)$ частіше позначають $E(f)$, рідше — $R(f)$ (від франц. *range*) або $cod(f)$ (від англ. *codomain* — «співобласть»). Нині вивченню функцій та їх властивостей присвячено величезний розділ математики — *математичний аналіз*.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Наведіть приклад функціональної залежності.
2. Сформулюйте означення функції.
3. Як позначають функцію?
4. Як називають незалежну змінну?
5. Що таке область визначення функції?
6. Як називають залежну змінну?
7. Що таке область значень функції?
8. Назвіть способи задання функції.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

782'. Прочитайте запис: 1) $y = h(x)$; 2) $s = g(t)$; 3) $z = f(j)$. Назвіть залежну і незалежну змінні.

783'. Чи правильно, що x є аргументом функції:
1) $y = 3x + 2$; 2) $x = 4t - 5$; 3) $z = 4j^2 - 5j + 1$?

784'. Чи правильно, що y є функцією від a, якщо:
1) $y = 3a + 2$; 2) $a = y^3 + 2y$; 3) $p = y^4 + 2y - 7$?

785'. Наведіть приклад функції, заданої аналітично. Назвіть її область визначення та область значень.

786'. Наведіть приклад функції, заданої за допомогою таблиці. Назвіть її область визначення та область значень.

787°. Кожна сторона п'ятикутника дорівнює a. Чи пов'язані функціональною залежністю периметр P цього п'ятикутника та довжина його сторони? Якщо так, то назвіть незалежну і залежну змінні.

788°. Кілограм помідорів коштує 14 грн. Чи пов'язані функціональною залежністю вартість помідорів та їх маса? Якщо так, то назвіть незалежну і залежну змінні.

789°. Кожному натуральному числу відповідає вдвічі більше натуральне число. Чи є дана залежність функцією? Якщо так, то запишіть її у вигляді формули.

790°. Наприкінці першого семестру класний керівник 7-А класу оголосив учням їх рейтинг у класі. Відомо, що:

1) кожному учню поставили у відповідність його рейтингову оцінку;

2) кожній рейтинговій оцінці поставили у відповідність учня, який її отримав.

Яка із цих двох залежностей є функціональною?

791°. Велосипедист їхав зі швидкістю 18 км/год. Запишіть у вигляді формули залежність пройденого ним шляху S від часу t. Знайдіть значення отриманої функції, якщо:

1) $t = 3$ год; 2) $t = 3{,}5$ год; 3) $t = 10{,}2$ год.

792°. Поїзд рухався зі швидкістю 75 км/год. Запишіть у вигляді формули залежність пройденого ним шляху S від часу t. Знайдіть значення отриманої функції, якщо:

1) $t = 9$ год; 2) $t = 11{,}5$ год; 3) $t = 20{,}4$ год.

793°. Функцію задано формулою: $g = 2t^2 + 4$. Назвіть:

1) аргумент функції; 2) область визначення функції; 3) область значень функції.

794°. Функцію задано формулою: $z = 5 - 7r^2$. Назвіть:

1) аргумент функції; 2) область визначення функції; 3) область значень функції.

795°. Знайдіть значення функції $y = 5x - 6$, якщо:

1) $x = -3$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$; 4) $x = 2$; 5) $x = 4$.

796°. Знайдіть значення функції $y = -3x + 1$, якщо:

1) $x = -2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$; 4) $x = 3$; 5) $x = 5$.

797°. Накресліть у зошиті й заповніть таблицю 13, якщо $y(x) = -3x^2 + 2x - 1$.

Таблиця 13

x	–2	–1	0	1	2
$y(x)$					

798°. Накресліть у зошиті й заповніть таблицю 14, якщо $f(x) = -3x^3 + x + 4$.

Таблиця 14

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$					

799°. Працівники фабрики відраховують у пенсійний фонд 5 % своєї заробітної плати. Уведіть змінні та запишіть формулу залежності відрахувань у пенсійний фонд від розміру заробітної плати.

800°. Страховий агент отримує 6,5 % від продажу страхових полісів. Уведіть змінні та запишіть формулу залежності доходу страхового агента від розміру проданих страхових полісів.

801°. Знайдіть $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(1{,}5)$, $y(2)$, якщо:
1) $y=|x|-2$; 2) $y=|x-2|$; 3) $y=|2-x|$; 4) $y=1-2|x|$.

802°. Знайдіть $y(-3)$, $y(-1{,}5)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(3)$, якщо:
1) $y=|x|-3$; 2) $y=|x-3|$; 3) $y=|3+x|$; 4) $y=3-2|x|$.

803. Кожному натуральному числу поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 6. Чи є така залежність функціональною? Якщо так, то знайдіть її область визначення й область значень.

804. За даними таблиці 15 знайдіть невідомі величини, якщо $f(x)=-3x+8$.

Таблиця 15

x	–2		1		
$f(x)$		6		0	–1

805. За даними таблиці 16 знайдіть невідомі величини, якщо $g(x)=7-5x$.

Таблиця 16

x	–3				2,4
$g(x)$		12	0	–3	

806. Тетянка живе в багатоповерховому будинку. Вона порахувала кількість сходинок від входу до першого поверху, а потім до кожного з чотирьох наступних поверхів і занесла ці дані до таблиці 17.

Таблиця 17

Поверх	1	2	3	4	5
Кількість сходинок	4	15	26	37	48

Якби дівчинка продовжила заповнювати таблицю, то скільки сходинок вона б записала у клітинці, що відповідає:
1) 8 поверху; 2) 11 поверху; 3) 21 поверху? Уведіть змінні та складіть формулу залежності кількості сходинок від поверху.

807. Складіть із кроком 0,5 таблицю значень функції, заданої формулою $y=x^2(2-3x)$, якщо $-1 \le x \le 2$.

808. Складіть із кроком 1 таблицю значень функції, заданої формулою $y=3(1-x^2)$, якщо $-3 \le x \le 4$.

809. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y=\dfrac{3}{x-2}$; 2) $y=x^2+4x+2$; 3) $y=\dfrac{5x+2}{3}$; 4) $y=-\dfrac{2}{4-3x}$.

810. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y=x^3-7x$; 2) $y=\dfrac{5}{x-5}$; 3) $y=-\dfrac{3}{7-21x}$; 4) $y=-\dfrac{6x+1}{7}$.

811. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $y=3x^2$; 3) $y=-x^2+1$; 5) $y=x^3-3$;

2) $y=x^2+2$; 4) $y=-2x^2+7$; 6) $y=4x-3$.

812. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $y=2x^2$; 2) $y=-2x^2$; 3) $y=2x^3$.

813. Знайдіть $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, якщо:

1) $y=\begin{cases}3x, x<0,\\ x^2+2, x\geq 0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}3x-1, x<1,\\ 2x^2, x\geq 1.\end{cases}$

814*. Чи задає функцію наступна рівність:

1) $|y|=x+1$; 2) $|y|+|x|=1$; 3) $|y|-2|x|=4$; 4) $|x-y|=2$?

Відповідь поясніть.

815*. Паперовий квадрат зі стороною 50 см потрібно розрізати на певну кількість менших квадратів. Задайте формулою функцію знаходження кількості маленьких квадратів залежно від довжини їх сторони. Скільки маленьких квадратів можна отримати, якщо сторона кожного дорівнює: 1) 25 см; 2) 10 см; 3) 5 см; 4) 4 см?

816*. Потяг долає відстань в 1 км між сусідніми стовпами за 90 с. На скільки кілометрів за годину потрібно збільшити швидкість потяга, щоб зменшити цей час до 1 хв?

817*. Складіть формулу, яка задає наступну функцію: значення функції дорівнює потроєному аргументу, якщо він кратний числу 3; значення функції дорівнює подвоєному аргументу, якщо його остача від ділення на число 3 дорівнює 1; значення функції дорівнює аргументу, якщо його остача від ділення на число 3 дорівнює 2.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

818. Оленка планує запросити на день народження n гостей. Мама доручила дівчинці купити кожному з гостей по 250 г цукерок та крім цього ще 400 г цукерок. Задайте формулою залежність маси цукерок, які потрібно купити, від кількості гостей.

819. На пересування містом татів автомобіль витрачає щодня 8 л бензину. Задайте формулою функцію для визначення об'єму витраченого бензину залежно від кількості днів. Скільки літрів бензину потрібно купити татові, щоб йому вистачило на: 1) 5 днів; 2) 7 днів; 3) 10 днів; 4) 14 днів?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

820. Сума деякого числа та його $\frac{2}{3}$ дорівнює 40. Знайдіть невідоме число.

821. Подайте дроби $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{23}$, $\frac{13}{33}$ у вигляді десяткових та округліть їх до сотих.

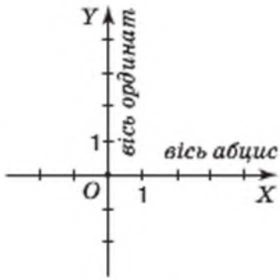
822. Розкладіть на множники вираз:
1) $(2x+5)^2-(4x+5)^2$; 2) $(3n^2+2)^2-(3+2n^2)^2$.

823. У трикутнику сторони дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Кожну сторону збільшили на 40 %. Як змінився периметр трикутника (у %)? Знайдіть його.

§ 16. КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Із курсу математики 5—6 класів ви знаєте, що таке шкала, координатна пряма і координатна площина. Пригадаємо основні відомості.

Щоб увести *прямокутну систему координат* на площині, треба: провести дві координатні прямі з рівними одиничними відрізками так, щоб вони перетиналися під прямим кутом у початку їх відліку (*початку координат*); стрілками вказати додатний напрямок на кожній з осей; визначити, яку з осей вважати першою координатною віссю (*віссю абсцис*), а яку — другою (*віссю ординат*) (мал. 9).



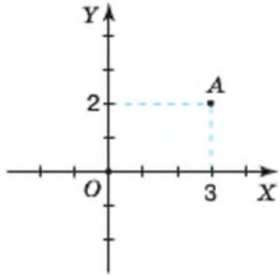
Мал. 9

Запам'ятайте!

Площина з уведеною на ній системою координат називається *координатною площиною*.

Координатні осі позначають так: OX (вісь абсцис) і OY (вісь ординат).

Кожній точці на площині можна поставити у відповідність пару чисел, взятих у певному порядку, і навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини. Така упорядкована пара чисел називається *координатами точки в даній системі координат*. На малюнку 10 точка A має координати: $x = 3$, $y = 2$.



Мал. 10

Коротко записують: A (3; 2). Читають: «Точка A з координатами 3 і 2».

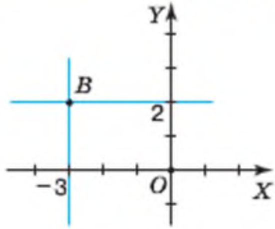
Зверніть увагу:

щоб визначити координати точки в даній системі координат:
1) через дану точку проведіть прямі, паралельні осям координат;
2) на координатних осях відмітьте числа, які відповідають точкам перетину цих прямих з осями;
3) з отриманих чисел утворіть упорядковану пару — координати точки.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює 0. Якщо точка лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює 0. І навпаки, якщо абсциса (ордината) точки дорівнює нулю, то точка лежить на осі ординат (абсцис). Початок координат O має координати (0; 0).

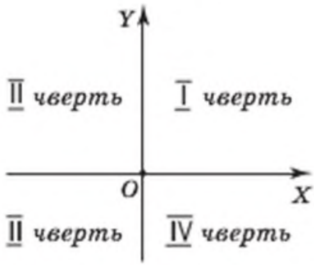
Задача 1. На координатній площині побудуйте точку B (–3; 2).

Розв'язання. Уведемо систему координат на площині (мал. 11). На осі абсцис відмітимо число –3, що є першою координатою даної точки, а на осі ординат — число 2, яке є другою її координатою. Через ці точки на осях координат проведемо дві прямі, паралельні осям (мал. 11). Точка перетину побудованих прямих — шукана точка B (–3; 2).



Мал. 11

Координатні осі розбивають координатну площину на чотири частини. Їх називають *координатними чвертями* і позначають так: I чверть, II чверть, III чверть, IV чверть (мал. 12).



Мал. 12

Подивіться на малюнки 13 і 14. Ви бачите ту саму лінію, яку зображено як геометричну фігуру на площині (мал. 13) і як *графік* на координатній площині (мал. 14). За першим малюнком можна з'ясувати геометричні властивості даної лінії — яка її форма, розміри, взаємне розміщення її частин тощо. За другим малюнком можна з'ясувати не лише геометричні, а й алгебраїчні властивості цієї лінії. Наприклад, її точкам властиве таке:

1) абсциси змінюються від –4 до 4, а ординати від –16 до 16;

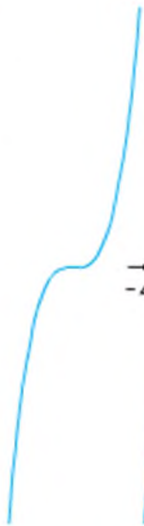
2) кожній абсцисі відповідає єдина ордината;

3) якщо $x = 0$, то $y = 0$;

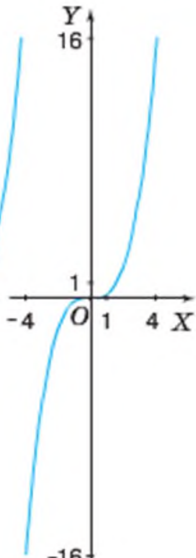
4) якщо значення x додатне (від'ємне), то і значення y додатне (від'ємне);

5) зі збільшенням абсциси ордината збільшується, а зі зменшенням — зменшується;

6) абсциси й ординати точок пов'язані певною залежністю. Якщо цю залежність подати формулою, то дістанемо: $y = 0{,}25x^3$, де $-4 \le x \le 4$.



Мал. 13



Мал. 14

Чи є отримана залежність функцією? Так, оскільки залежність $y = 0{,}25x^3$ задовольняє означення функції, причому для будь-яких чисел.

Виходить, що на малюнку 14 зображено лише частину графіка функції $y = 0{,}25x^3$ (тільки для $-4 \le x \le 4$). Якщо надавати x інших значень із області визначення даної функції, зокрема менших від -4 або більших за 4, то зображену лінію можна продовжити, причому нескінченно.

Запам'ятайте!

Графіком функції $y = f(x)$ **називається зображення на координатній площині всіх точок, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати — відповідними значеннями даної функції.**

На малюнку зображають лише частину графіка функції, а говорять: «Графік функції».

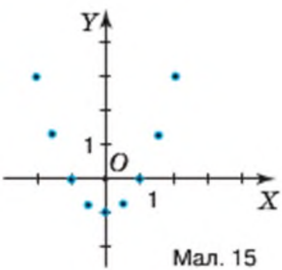
Задача 2. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 1$.

Розв'язання. Область визначення даної функції — будь-які числа. Складемо таблицю її значень для $-2 \le x \le 2$ із кроком 0,5 (табл. 18).

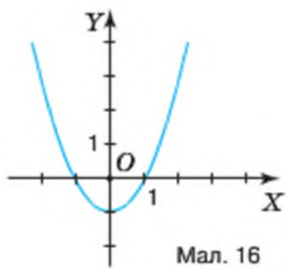
Таблиця 18

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y\ (x)$	3	1,25	0	–0,75	–1	–0,75	0	1,25	3

Пари значень x і y у таблиці 18 є координатами точок шуканого графіка. На координатній площині побудуємо ці точки (мал. 15).



Мал. 15



Мал. 16

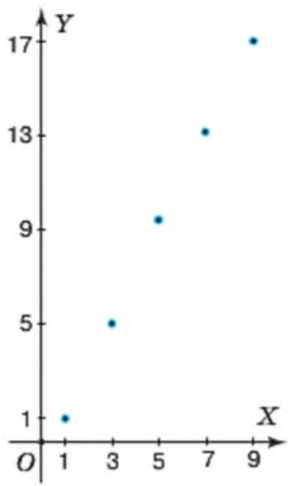
Оскільки область визначення даної функції — усі числа, то її графіку належать й інші точки. Щоб їх побудувати, треба взяти менший крок для абсцис. Якщо крок буде досить маленьким, то отримаємо майже суцільну лінію. Це простіше зробити, скориставшись комп'ютером. Ми ж будемо вважати, що побудовані точки можна з'єднати плавною лінією (мал. 16). Отриманий графік — шуканий.

Зверніть увагу:

щоб побудувати графік функції:

1) знайдіть її область визначення;
2) складіть таблицю значень функції для кількох значень аргументу;
3) на координатній площині побудуйте точки за їх координатами з таблиці;
4) з'єднайте ці точки плавною лінією, якщо це допускає область визначення функції.

Чи може графік функції складатися лише з окремих точок? Так. Наприклад, графік функції $y = 3n + 2$, де n — натуральні непарні одноцифрові числа, містить лише 5 точок (мал. 17).



Мал. 17

Задача 3. Чи належить графіку функції $y = -x + 2$ точка: 1) $A(-3; 5)$; 2) $B(1; 3)$?

Розв'язання. 1. Підставимо координати точки A у формулу, що задає функцію, та виконаємо обчислення: $5 = -(-3) + 2$, або $5 = 5$. Дістали правильну числову рівність, тому точка A належить графіку даної функції.

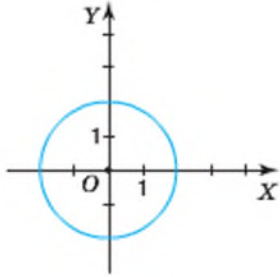
2. Підставимо координати точки B у формулу, що задає функцію, та виконаємо обчислення: $1 \neq -3 + 2$, або $1 \neq -1$. Дістали неправильну числову рівність, тому точка B не належить графіку даної функції.

Зверніть увагу:

— якщо координати точки задовольняють формулу, якою задано функцію, то ця точка належить графіку функції.

— якщо точка належить графіку функції, то її координати задовольняють формулу, якою задано функцію.

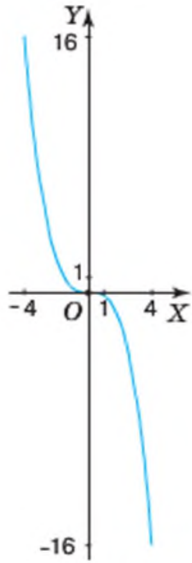
? Чи будь-яка лінія, яку побудовано в прямокутній системі координат XOY, задає функцію? Ні. Наприклад, коло на малюнку 18 не може задавати функцію, оскільки існують такі значення незалежної змінної x (зокрема $-2 < x < 2$), яким на даному зображенні відповідає більше ніж одне значення залежної змінної y.



Мал. 18

Загалом уважають, що *функцію задано графічно* у прямокутній системі координат, якщо в цій системі зображення містить принаймні одну точку і на ньому немає двох точок з рівними абсцисами, але різними ординатами. Звідси випливає, що **будь-яка пряма, перпендикулярна до осі OX, перетинає графік функції не більше, ніж в одній точці.**

Подивіться на малюнок 19. Ви бачите графік функції $y = -0,25x^3$. Порівняємо його з графіком функції $y = 0,25x^3$ (див. мал. 14). Для функції $y = 0,25x^3$ характерна така властивість: що більшими є абсциси точок, то більшими є їх ординати. Таку функцію називають *зростаючою*. У функції $y = -0,25x^3$ властивість інша: що більшими є абсциси точок, то меншими є їх ординати. Таку функцію називають *спадною*.



Мал. 19

Дізнайтеся більше

1. **Рене Декарт** (1596 — 1650) — французький філософ, фізик, математик, засновник аналітичної геометрії — розділу геометрії, в якому геометричні фігури та їх властивості досліджуються засобами алгебри. У математиці Декарт, крім декартової системи координат, дав поняття змінної величини і функції, увів багато алгебраїчних означень. У фізиці він сформулював закон збереження кількості руху, запровадив поняття імпульсу сили. У психології вчений відкрив поняття про рефлекс і принцип рефлекторної діяльності.
2. Уперше прямокутну систему координат увів Рене Декарт у своїй роботі «Міркування про метод», яка побачила світ у 1637 р. Тому прямокутну систему координат називають також *прямокутною декартовою системою координат*. Координатний метод опису геометричних об'єктів поклав початок аналітичній геометрії. Значний вклад у розвиток координатного методу також вніс П'єр Ферма (1601 — 1665).

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Поясніть, як побудувати прямокутну систему координат на площині.
2. Яку назву мають осі координат? Точка їх перетину?
3. Що називають координатною площиною?
4. Поясніть, як визначити координати точки.
5. Які координати має початок координат?
6. Які координати має точка, що лежить на осі абсцис; на осі ординат?
7. На скільки координатних чвертей розбивають площину координатні осі?
8. Що називається графіком функції?
9. Чи будь-яка геометрична фігура може бути графіком функції?
10. Як побудувати графік функції?
11. Як визначити, чи належить точка графіку функції?
12. Поясніть, яка функція називається зростаючою; спадною.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

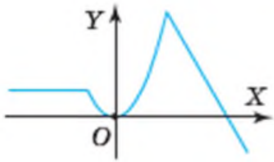
824'. Дано точку $A(-3; 7)$. Чи правильно, що:
1) абсциса точки A дорівнює: а) –3; б) 3; в) –7; г) 7;
2) ордината точки A дорівнює: а) –3; б) 3; в) –7; г) 7?

825'. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, у якій координатній чверті міститься точка:

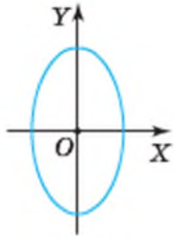
$A(-1{,}5;\ 2{,}3)$, $B(5{,}19;\ -4{,}72)$, $C\left(1\frac{2}{3}; -2\frac{2}{3}\right)$, $D\left(-5\frac{1}{4}; 4{,}77\right)$, $E\left(6\frac{8}{9}; 108\right)$, $F(-102; -203)$, $K(-3{,}345; 1{,}032)$, $L\left(-45\frac{23}{33}; -47{,}85\right)$.

826'. Чи може бути графіком деякої функції лінія, зображена:
1) на малюнку 20; 2) на малюнку 21; 3) на малюнку 22?

Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

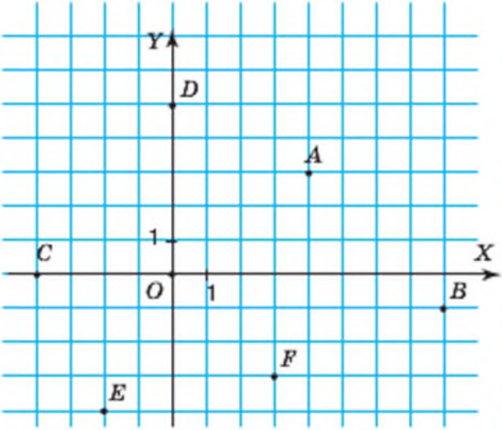
827'. Чи правильно, що точка O (0; 0) належить графіку функції:
1) $y = 3x - 3$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = -x^2$?

828'. Чи правильно, що графік функції $y = x^2$ проходить через точку:
1) A (1; 1); 2) B (–2; –4); 3) C (0; 0)?

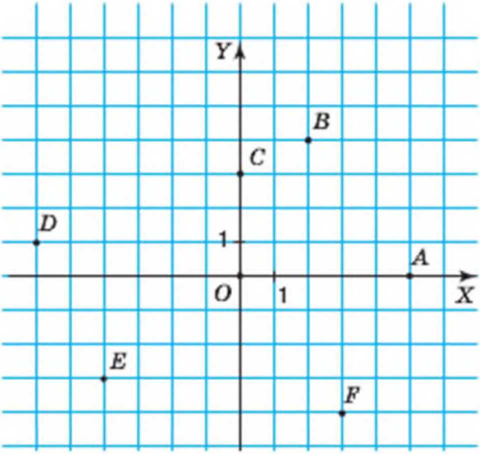
829°. Які з даних точок $A(-4{,}5;\ 0)$, $B(8{,}03;\ 1{,}05)$, $C(0{,}6;\ 3{,}1)$, $D(0;\ -1{,}77)$, $E\left(5\frac{2}{7}; 0\right)$, $F(0{,}3;\ 0)$, $K\left(0; -1\frac{1}{7}\right)$, $L(0{,}33;\ 0{,}66)$, $M(0; 0)$ лежать на осі: 1) абсцис; 2) ординат?

830°. Накресліть систему координат. На осі OX позначте точку з абсцисою: 1) 2,5; 2) –3,5; 3) 5; 4) –1,5.
Запишіть координати цих точок.

831°. Накресліть систему координат. На осі OY позначте точку з ординатою: 1) 3; 2) –0,5; 3) 3,5; 4) –4. Запишіть координати цих точок.



Мал. 23



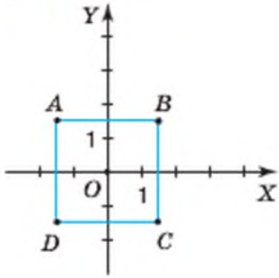
Мал. 24

832°. Визначте координати точок, зображених на малюнку 23.

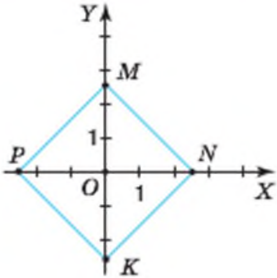
833°. Визначте координати точок, зображених на малюнку 24.

834°. Задайте прямокутну систему координат на площині та позначте на ній точки: A (2; 1), B (2; –1), C (–1,5; 3,5), D (3; –2,5), E (3; 3), F (4; 3), G (–3; –4), H (–4; –3). Побудуйте прямі AC, DG, EH, BF.

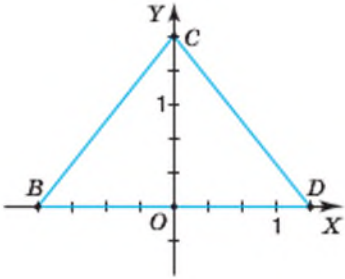
835°. Задайте прямокутну систему координат на площині та позначте на ній точки: K(–1,4; –1,2), L(–1,4; 0,6), M(–1,6; –0,8), N(0,6; –1). Побудуйте прямі KM, LM, LN.



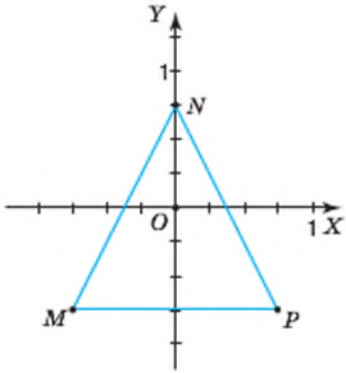
Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

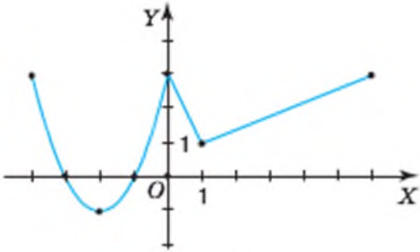


Мал. 28

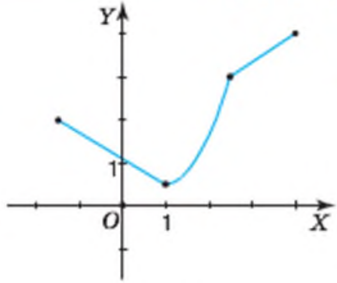
836°. Визначте координати вершин квадрата, зображеного:
1) на малюнку 25; 2) на малюнку 26.

837°. Визначте координати вершин трикутника, зображеного:
1) на малюнку 27; 2) на малюнку 28.

838°. На малюнку 29 зображено графік деякої функції. Користуючись графіком, знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) значення y, якщо $x = -2$; 0; 1; 3,5;
4) значення x, за яких $y = 0$;
5) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
6) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
7) значення аргументу, за яких функція зростає;
8) значення аргументу, за яких функція спадає.



Мал. 29



Мал. 30

839°. На малюнку 30 зображено графік деякої функції. Користуючись графіком, знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) значення y, якщо $x = -1{,}5;\ 1;\ 2{,}5;\ 4$;
4) значення x, за яких $y = 0$;
5) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
6) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
7) значення аргументу, за яких функція зростає;
8) значення аргументу, за яких функція спадає.

840°. Функцію задано формулою: $y = -x^2 + 2$. Перемалюйте в зошит і заповніть таблицю 19.

Таблиця 19

x	–2	–1	0	1	2
y					

Користуючись даними таблиці, побудуйте графік функції.

841°. Функцію задано формулою: $y = 2x^2 - 1$. Перемалюйте в зошит і заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

x	–2	–1	0	1	2
y					

Користуючись даними таблиці, побудуйте графік функції.

842°. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x(3x - 1)$, де $-2 \le x \le 2$, з кроком 0,5. Користуючись даними таблиці, побудуйте графік даної функції.

843°. Чи належить графіку функції $y = -x^2 - 3$ точка:
1) $A\,(-1; -4)$; 2) $B\,(1; 4)$; 3) $C\,(0; 3)$; 4) $D\,(-2; -5)$?

844°. Яка з точок $M(-1; -2)$, $N(1; -2)$, $P(2; -7)$, $R(-2; 7)$ належить графіку функції $y=-x^3-1$?

845°. Назвіть будь-які чотири точки, які належать графіку функції:
1) $y=-2x^2+1$; 2) $y=0{,}5x^3-1$.

846°. Чи належить графіку функції $y=4-x^2$ точка:
1) $K(-1; 3)$; 2) $L(1; -3)$; 3) $M(2; 0)$; 4) $N(-2; 6)$?

847°. Чи проходить через початок координат графік функції:
1) $y=5x^2$; 2) $y=-3x^2+4$; 3) $y=-\frac{5}{6}x$?

848°. Чи перетинає вісь абсцис графік функції:
1) $y=2x^2+3$; 2) $y=-3x^2-4$; 3) $y=\frac{7}{2x-3}$?

849°. У якій точці перетинає вісь ординат графік функції:
1) $y=4x-4$; 2) $y=-3x^2+3$; 3) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{12}$?

850°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції:
1) $y=5x-15$; 2) $y=-x^2+9$; 3) $y=-\frac{2}{11}x+\frac{7}{33}$?

851°. Графік функції $y=x^2+n$ проходить через точку $N(-2; 6)$. Знайдіть значення n.

852°. Графік функції $y=k-2x^2$ проходить через точку $K(1; 2)$. Знайдіть значення k.

853°. Графік функції $y=x^2-m$ проходить через точку $M(-1; -4)$. Знайдіть значення m.

854°. Графік функції $y=ax-1$ проходить через точку $A\left(-1; -1\frac{2}{3}\right)$. Знайдіть значення a.

855°. Графік функції $y=4-cx$ проходить через точку $C\left(2; 2\frac{1}{3}\right)$. Знайдіть значення c.

856°. Графік функції $y=bx-1$ проходить через точку $B\left(2; \frac{1}{3}\right)$. Знайдіть значення b.

857. Запишіть координати точки M, якщо з точкою $N(-5{,}5; 4{,}2)$ вона має:
1) рівні абсциси, але протилежні ординати;
2) рівні ординати, але протилежні абсциси;

3) протилежні абсциси і протилежні ординати;
4) рівні абсциси і рівні ординати.

858. Дано точку $D(4{,}8; -1{,}5)$. Запишіть координати точки C, якщо її абсциса й ордината:
1) протилежні до відповідних координат точки D;
2) утричі менші від абсциси й ординати точки D відповідно;
3) на 1,3 більші за абсцису й ординату точки D відповідно.

859. Дано точку $K\left(-3\frac{1}{3}; 2\frac{6}{7}\right)$. Запишіть координати точки L, якщо її абсциса й ордината:
1) відповідно дорівнюють півсумі та піврізниці абсциси й ординати точки K;
2) у 5 разів менші від абсциси й ординати точки K відповідно;
3) на $\frac{5}{14}$ більші за абсцису й ординату точки K відповідно.

860. Побудуйте пряму MN, якщо $M(1; 1)$, $N(-3; -3)$. Визначте координати ще чотирьох точок цієї прямої. Яку закономірність ви помітили?

861. Побудуйте пряму PQ, якщо $P(-3{,}5; 3{,}5)$, $Q(2; -2)$. Визначте координати ще чотирьох точок цієї прямої. Яку закономірність ви помітили?

862. Кожному натуральному числу поставили у відповідність суму його потроєного квадрата та числа, протилежного до числа 3. Задайте цю функцію формулою та побудуйте її графік.

863. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 1$, якщо $-1 \le x \le 4$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = 0; 1{,}5; 2{,}5$;
2) значення x, за яких $y = -0{,}75; 0; 3$;
3) значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає.

864. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^2 + 1$, якщо $-3 \le x \le 1$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -2{,}5; -1; 0$;
2) значення x, за яких $y = 1; 2; 3{,}25$;
3) значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає.

865. Побудуйте графік функції:

1) $y = 0,5x^2 - 1,5$, якщо $-3 \le x \le 3$;

2) $y = \dfrac{5x+2}{3}$, якщо $-2 \le x \le 1$;

3) $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}$, якщо $-2 \le x \le 2$;

4) $y = 0,2x^2 - 1,2$, якщо $-4 \le x \le 4$;

5) $y = -\dfrac{4}{7}x + 1$, якщо $-7 \le x \le 7$;

6) $y = \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{1}{9}$, якщо $-3 \le x \le 3$.

866. Побудуйте графік функції:

1) $y = -1,5x^2 + 3$, якщо $-2 \le x \le 1$;

2) $y = \dfrac{3x-2}{4}$, якщо $-2 \le x \le 3$;

3) $y = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}$, якщо $-1 \le x \le 2$.

867. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків. Укажіть, за яких значень аргументу графік функції $y = x^2$ лежить вище, ніж графік функції $y = -x$.

868. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = -x^3$ та $y = x$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків. Укажіть, за яких значень аргументу графік функції $y = -x^3$ лежить нижче, ніж графік функції $y = x$.

869*. Побудуйте множину точок $M(x; y)$, якщо:

1) $-3 \le x < 1$, $y = 2$;
2) $-2 \le y < 2$, $x = 1$;
3) $-3,5 \le x < 0,5$, $y = 2,5$;
4) $-6 \le y < 3$, $x = -\dfrac{1}{3}$.

870*. Побудуйте множину точок $Q(x; y)$, якщо:

1) $-2 \le x < 1,5$, $-2 \le y < 1,5$;
2) $-4 \le y < -2$, $-3 \le x < -1$;
3) $-0,5 \le x < 0,5$, $-3 \le y < 3$;
4) $-2,5 \le y < -0,5$, $-3,5 \le x < 0$.

871*. Побудуйте всі точки $P(x; y)$ такі, що $|x| \le 2$, $|y| \le 5$ і:

1) ордината точки P протилежна до її абсциси;
2) модуль ординати точки P дорівнює її абсцисі;
3) абсциса точки P удвічі менша від її ординати.

872*. Побудуйте графіки функцій $y = |x|$ та $y = -x^2 + 2$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

873*. Побудуйте графіки функцій:

1) $y=\begin{cases} x, \text{ якщо } -3 \le x < -1, \\ x^2, \text{ якщо } -1 \le x < 2, \\ 4, \text{ якщо } 2 \le x < 5; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} -3, \text{ якщо } -4 \le x < -2, \\ -x^2+1, \text{ якщо } -2 \le x < 1, \\ x-1, \text{ якщо } 1 \le x < 4; \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} 2x, \text{ якщо } -2 \le x < 0, \\ 2x^2, \text{ якщо } 0 \le x < 1, \\ 2, \text{ якщо } 1 \le x < 6; \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} -1, \text{ якщо } -5 \le x < -1, \\ -2x^2+1, \text{ якщо } -1 \le x < 0, \\ \frac{2}{5}x+1, \text{ якщо } 0 \le x < 5. \end{cases}$

874*. Побудуйте графік функції, якщо її область визначення — множина всіх чисел, а кожне значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, що не перевищує відповідного значення аргументу.

875*. Побудуйте графік функції, якщо її область визначення — множина всіх чисел, а кожне значення функції дорівнює різниці між значенням аргументу та найбільшим цілим числом, що не перевищує відповідного значення аргументу.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

876. У понеділок до магазину завезли 5 ящиків цукерок «Ромашка» по 10 кг у кожному. Щодня магазин продає 6,5 кг цукерок. Запишіть у вигляді формули залежність маси цукерок, що залишились в магазині, від дня тижня. Визначте, скільки цукерок залишиться у магазині в середу, п'ятницю та неділю. Побудуйте графік отриманої функції.

877. Побудуйте графік зміни температури за будь-який день тижня, знімаючи покази через кожні 2 години. З'ясуйте:
1) у який час дня температура була найвищою;
2) у який час дня температура була найнижчою;
3) коли в цей день температура знижувалась;
4) коли в цей день температура підвищувалась.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

878. Обчисліть, не використовуючи калькулятор:
1) 26^2-16^2; 2) 117^2-17^2; 3) 206^2; 4) 198^2.

879. Одна сторона трикутника дорівнює $2\frac{2}{13}$ м, друга — у $\frac{7}{26}$ раза менша від першої, а третя — у $\frac{5}{26}$ раза більша за другу. Знайдіть периметр трикутника.

880. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:
1) 225 і 400; 2) 144 і 360; 3) 630 і 780.

881. Андрій поклав у банк 3000 гривень на два роки під 15 % річних. Скільки грошей отримає Андрій через два роки?

§ 17. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

У дослідженні реальних процесів і явищ функції відіграють особливу роль — математичних моделей. Найбільш важливим функціям математики дають власні назви. Однією з них є *лінійна функція*. Розглянемо приклади, що приводять до лінійної функції.

Нехай 1 кг цукерок коштує 25 грн. Тоді залежність між масою m цукерок та їх вартістю p можна подати як функцію:

$$p = 25m.$$

Нехай розмір місячної зарплати страхового агента складається з 2000 грн та 10 % від прибутку з продажу страхових полісів. Тоді залежність зарплати s страхового агента від вартості проданих полісів k матиме вигляд:

$$s = 0{,}1k + 2000.$$

В обох прикладах дістали функцію, яку можна в загальному вигляді задати формулою $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

Запам'ятайте!

Функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент, k і b — деякі числа, називається *лінійною функцією*.

У цієї функції: область визначення — усі числа, область значень — усі числа.

Що є графіком лінійної функції? Розглянемо приклад.

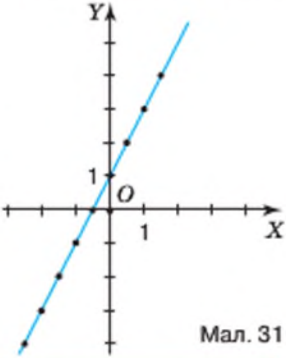
Задача 1. Побудуйте графік функції $y = 2x + 1$.

Розв'язання. Дана функція є лінійною за означенням. Область її визначення — усі числа. Для побудови графіка цієї функції оберемо, наприклад, десять довільних значень змінної x та знайдемо відповідні їм значення функції (табл. 21).

Таблиця 21

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

На координатній площині побудуємо точки з координатами (–2,5; –4), (–2; –3), (–1,5; –2), (–1; –1), (–0,5; 0), (0; 1), (0,5; 2), (1; 3), (1,5; 4), (2; 5). Прикладемо лінійку до цих точок. Бачимо, що всі вони лежать на одній прямій (цей факт ви зможете строго довести в старшій школі). З'єднаємо побудовані точки суцільною лінією, тобто проведемо через них пряму. Ця пряма і є графіком даної функції (мал. 31).



Мал. 31

Запам'ятайте!

Графіком лінійної функції є пряма.

Скільки значень лінійної функції треба знайти, щоб побудувати її графік? Графіком лінійної функції є пряма. Для її побудови достатньо двох точок. Цей факт вам відомий із курсу геометрії.

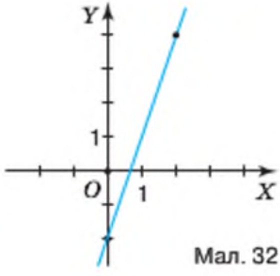
Задача 2. Побудуйте графік функції $y = 3x - 2$.

Розв'язання. Дана функція є лінійною. Тому для побудови графіка достатньо побудувати дві його точки. Для цього складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу (табл. 22).

Таблиця 22

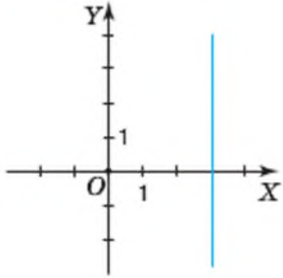
x	0	2
$y(x)$	–2	4

На координатній площині позначимо точки з координатами (0; –2) і (2; 4). Проведемо через них пряму. Ця пряма і є графіком даної функції (мал. 32).



Мал. 32

? Чи можна вважати графіком лінійної функції пряму, перпендикулярну до осі абсцис? Ні. Тому що в точок такої прямої (наприклад, прямої $x = 3$ на мал. 33) абсциса та сама, а ординати набувають будь-яких значень. Тобто одному значенню x відповідає безліч значень y. Отже, тут немає функціональної залежності. А це означає, що не можна говорити й про будь-який різновид функції зокрема про лінійну функцію.



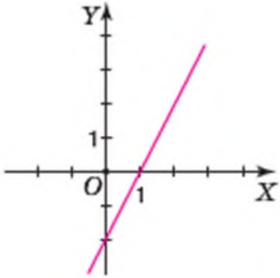
Мал. 33

Запам'ятайте!

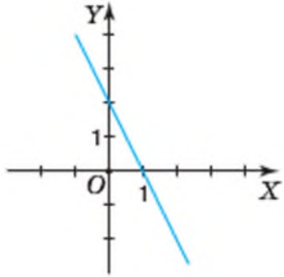
Кожна пряма, яка не перпендикулярна до осі абсцис, є графіком лінійної функції.

За допомогою графіка можна з'ясувати не лише область визначення та область значень лінійної функції, а й деякі інші її властивості. Зокрема, за графіком легко побачити, за яких значень аргументу значення функції дорівнює нулю, а за яких — є додатним чи від'ємним. Розглянемо приклад.

Задача 3. На малюнках 34 і 35 зображено графіки функцій $y = 2x - 2$ і $y = -2x + 2$. Користуючись графіком, знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.



Мал. 34



Мал. 35

Розв'язання.

1. За малюнком 34 для функції $y = 2x - 2$ дістанемо:
а) $y = 0$, якщо $x = 1$; б) $y > 0$, якщо $x > 1$; в) $y < 0$, якщо $x < 1$.

2. За малюнком 35 для функції $y = -2x + 2$ дістанемо:
а) $y = 0$, якщо $x = 1$; б) $y > 0$, якщо $x < 1$; в) $y < 0$, якщо $x > 1$.

? Як характеризує лінійну функцію число k? Поміркуємо.

Подивіться на малюнки 34 і 35. На першому із цих малюнків графік утворює з додатним променем осі OX гострий кут, а на другому — тупий. У функції $y = 2x - 2$ коефіцієнт $k > 0$, а у функції $y = -2x + 2$ коефіцієнт $k < 0$. Оскільки коефіцієнт k характеризує кут, який графік лінійної функції утворює з додатним променем осі OX, то число k так і називають — *кутовий коефіцієнт*.

Зверніть увагу:

графік функції $y = kx + b$ утворює з додатним променем осі OX:
— гострий кут, якщо $k > 0$;
— тупий кут, якщо $k < 0$.

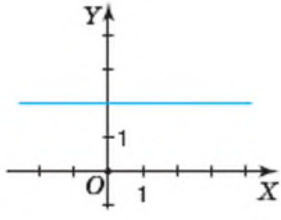
? Як характеризує лінійну функцію число b? Поміркуємо.

Знову звернемося до малюнків 34 і 35. Ви бачите, що графік функції $y = 2x - 2$ перетинає вісь OY у точці з ординатою -2 (мал. 34), а графік функції $y = -2x + 2$ перетинає вісь OY в точці з ординатою 2 (мал. 35). Загалом, число b у формулі $y = kx + b$ показує ординату точки перетину графіка лінійної функції з віссю OY.

Зверніть увагу:

графік лінійної функції $y = kx + b$ перетинає вісь OY у точці:
— з додатною ординатою, якщо $b > 0$;
— з від'ємною ординатою, якщо $b < 0$;
— з ординатою, що дорівнює 0, якщо $b = 0$.

Аналізуючи графіки функцій на малюнках 34 і 35, можна виявити ще й такі властивості даних функцій. На малюнку 34 більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, функція $y = 2x - 2$ є зростаючою. У неї $k > 0$. На малюнку 35 більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Отже, функція $y = -2x + 2$ є спадною. У неї $k < 0$. На малюнку 36 ви бачите приклад особливого випадку лінійної функції, у якої $k = 0$. Це функція $y = 2$.



Мал. 36

Зверніть увагу:

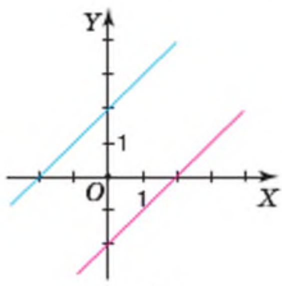
лінійна функція $y = kx + b$:
- — зростає, якщо $k > 0$;
- — спадає, якщо $k < 0$;
- — є сталою, якщо $k = 0$.

Дізнайтеся більше

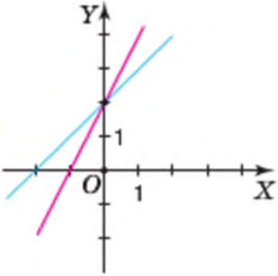
Із курсу геометрії ви знаєте, що дві прямі на площині або перетинаються, або паралельні, або збігаються. Те саме можна сказати і про взаємне розміщення графіків двох лінійних функцій. Яким воно є, можна з'ясувати, не будуючи графіків, а аналітично — за формулами, якими задано дані функції.

Нехай дві лінійні функції задано формулами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Щоб з'ясувати, яким є розміщення графіків цих функцій, розглянемо такі випадки.

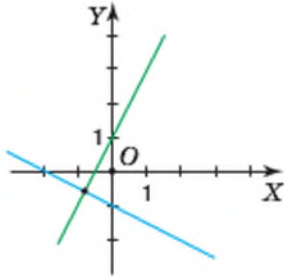
1. Якщо графіки даних функцій збігаються, то $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ за будь-яких значень змінної x. Тоді обидві формули набуватимуть того самого вигляду, якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 = b_2$.
2. Якщо графіки даних функцій паралельні, то їх кутові коефіцієнти мають бути рівними, тобто $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$. Наприклад, на малюнку 37 зображено графіки функцій $y = x + 2$ і $y = x - 2$, які є паралельними. У цих функцій $k_1 = k_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = -2$.
3. Якщо графіки даних функцій перетинаються, то їх кутові коефіці-



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

єнти мають бути різними, тобто $k_1 \neq k_2$. Наприклад, на малюнку 38 зображено графіки функцій $y = x + 2$ і $y = 2x + 2$. У них $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тому вони перетинаються. Щоб знайти точку їх перетину, прирівняємо праві частини відповідних формул: $x + 2 = 2x + 2$, звідси $x = 0$. Тоді $y(0) = 0 + 2 = 2$. Отже, графіки даних функцій перетинаються в точці A (0; 2).

5. Особливим є випадок, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$. У цьому випадку графіки даних функцій взаємно перпендикулярні. Наприклад, на малюнку 39 зображено графіки функцій $y = 2x + 1$ і $y = -0{,}5x - 1$, які є взаємно перпендикулярними. У цих функцій $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot (-0{,}5) = -1$.

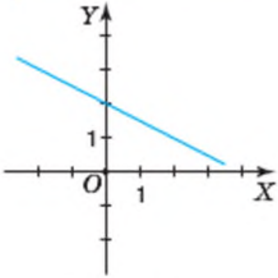
ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яка функція називається лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Скільки значень лінійної функції треба знайти, щоб побудувати її графік?
4. Як побудувати графік лінійної функції?
5. За яких значень k лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою; спадною; сталою?
6. Як характеризує лінійну функцію число b?

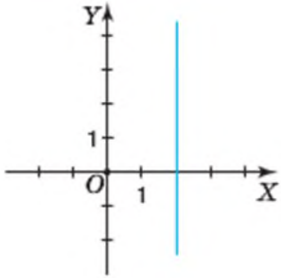
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

882'. На якому з малюнків 40—41 зображено графік лінійної функції?

883'. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:
1) $y = 2x^2 + x + 1$; 2) $y = 2 + x^3$; 3) $y = 4 - 5x$?



Мал. 40



Мал. 41

884′. Чи правильно, що графік функції $y = x$ проходить через точку:
1) A (2; 2); 2) B (–2; –4); 3) C (1; 1)?

885′. Чи правильно, що дана функція зростає:
1) $y = -3x + 3$; 2) $y = 2$; 3) $y = 5x - 1$?

886′. Чи правильно, що дана функція спадає:
1) $y = 4x - 3$; 2) $y = -2$; 3) $y = -6x + 2$?

887′. Чи правильно, що дана функція є сталою:
1) $y = -3x + 3$; 2) $y = 4x$; 3) $y = -0{,}5$?

888°. Назвіть кутовий коефіцієнт функції:
1) $y = 4x + 5$; 2) $y = -3 - 6x$; 3) $y = 4 + \frac{2}{3}x$.

889°. Назвіть кутовий коефіцієнт функції:
1) $y = 3x - 7$; 2) $y = -4 - 0{,}5x$; 3) $y = \frac{1}{6} + \frac{2}{5}x$.

890°. Чи правильно, що графік функції $y = 4x - 5$ перетинає вісь OY у точці:
1) з додатною ординатою;
2) з від'ємною ординатою;
3) з ординатою, що дорівнює 0?

891°. Чи правильно, що графік функції y = –5x +7 перетинає вісь OY у точці:
1) з додатною ординатою;
2) з від'ємною ординатою;
3) з ординатою, що дорівнює 0?

892°. Відомо, що графік функції $y = kx + b$ перетинає вісь OY у точці A (0; –3). Яким у такому випадку буде значення b:
1) додатним; 2) від'ємним; 3) рівним нулю?

893°. Відомо, що графік функції $y = kx + b$ перетинає вісь OY у точці C (0; 1,7). Яким у такому випадку буде значення b:

1) додатним; 2) від'ємним; 3) рівним нулю?

894°. Який кут — тупий чи гострий — утворює з додатним променем осі OX графік функції:

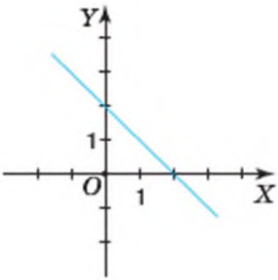
1) $y = 5x - 1$; 2) $y = 4 + 3x$; 3) $y = 0{,}3 - 1{,}6x$?

895°. Який кут – тупий чи гострий – утворює з додатним променем осі OX графік функції :

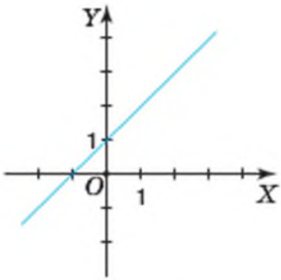
1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 0{,}5x - 7$; 3) $y = 0{,}8 - 1{,}2x$?

896°. На малюнку 42 зображено графік деякої лінійної функції. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -1$; 0; 1; 2,5;
2) значення x, за якого $y = 0$;
3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає.



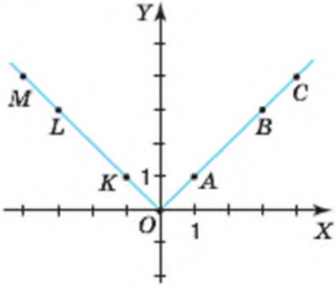
Мал. 42



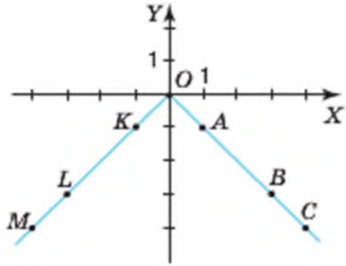
Мал. 43

897°. На малюнку 43 зображено графік деякої лінійної функції. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -1$; 0; 1; 2,5;
2) значення x, за якого $y = 0$;
3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
5) значення аргументу, за яких функція зростає;
6) значення аргументу, за яких функція спадає.



Мал. 44



Мал. 45

898°. На малюнках 44—45 зображено графіки деяких функцій. Серед точок, позначених на графіку, укажіть пари точок:
1) із рівними ординатами. Які в цих точок абциси?
2) із протилежними абцисами. Які в цих точок ординати?
Яку закономірність помітили? Чи задовольняють координати точок кожної пари функцію, задану формулою:

а) $y=|x|$; б) $y=-|x|$?

899°. Пара точок із рівними ординатами належить графіку: а) $y=|x|$; б) $y=-|x|$. Визначте координати другої точки, якщо одна з них має координати: 1) (–2; –2); 2) (3; 3); 3) (1; –1); 4) (–7; –7); 5) (1,25; 1,25); 6) (4,1; 4,1)?

900°. Якому з графіків функцій $y=|x|$ чи $y=-|x|$ належить точка з координатами: 1) (–2; –2); 2) (1; –1); 3) (–1; 1); 4) (–1; –1); 5) (–0,3; 0,3); 6) (1,5; 1,5)?

901°. Функцію задано формулою $y = 2x - 5$. Накресліть у зошиті таблицю 23 та заповніть її.

Таблиця 23

x	–2	–1	0	1	2
y					

902°. Функцію задано формулою $y = -x + 3$. Накресліть у зошиті таблицю 24 та заповніть її.

Таблиця 24

x	–2	–1	0	1	2
y					

903°. Знайдіть $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(2{,}5)$, якщо:

1) $y=|x-1|-1$;
3) $y=1-|1-x|$;
2) $y=|x-1|+1$;
4) $y=1-|x+1|$.

904°. Знайдіть $y(-3)$, $y(-1{,}5)$, $y(0)$, $y(3)$, якщо:

1) $y=|x-2|-1$;
3) $y=3-|2-x|$;
2) $y=|x-2|+1$;
4) $y=3-|x+2|$.

905°. Чи належить графіку функції $y=5x-2$ точка:

1) $A(1; -3)$; 2) $B(1; 3)$; 3) $C(0; 2)$; 4) $D(-1; -7)$?

906°. Яка з точок $M(-1; -3)$, $N(1; 3)$, $P(2; 4)$, $R(-2; 0)$ належить графіку функції $y=-x-2$?

907°. Назвіть будь-які три точки, що належать графіку функції:

1) $y=-2x+7$; 2) $y=0{,}5x-1{,}5$.

908°. Чи належить графіку функції $y=4-3x$ точка:

1) $K(-1; 1)$; 2) $L(1; 1)$; 3) $M(2; 2)$; 4) $N(-2; -10)$?

909°. Побудуйте графік функції:

1) $y=x-1$; 2) $y=-x-1$; 3) $y=-x+1$; 4) $y=x+1$.

910°. Побудуйте графік функції:

1) $y=2x+1$; 2) $y=-2x+1$; 3) $y=-2x-1$; 4) $y=2x-1$.

911°. Графік якої з функцій перетинає вісь ординат у точці з додатною ординатою:

1) $y=6x-5$;
3) $y=-6x-5$;
5) $y=-\frac{3}{8}x+2$;
2) $y=-6x+5$;
4) $y=\frac{4}{7}x-1$;
6) $y=-2{,}6x-3{,}5$;?

912°. Графік якої з функцій перетинає вісь ординат у точці з від'ємною ординатою:

1) $y=-7x-6$; 2) $y=-7x+6$; 3) $y=7x-6$?

913°. У якій точці перетинає вісь ординат графік функції:

1) $y=2x-3$; 2) $y=-3x+9$; 3) $y=-\frac{2}{5}x+\frac{8}{15}$?

914°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції:

1) $y=3x-12$;
3) $y=-\frac{7}{9}x-\frac{14}{27}$;
5) $y=-6x+15$;
2) $y=-7x+21$;
4) $y=5x+18$;
6) $y=-\frac{2}{7}x-\frac{15}{28}$?

915°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції:

1) $y = 4x + 14$; 2) $y = -8x + 20$; 3) $y = -\frac{3}{8}x - \frac{15}{32}$?

916°. Графік функції $y = 4x + m$ проходить через точку M (–2; 8). Знайдіть значення m.

917°. Графік функції $y = -2,4x + k$ проходить через точку K (5; –6). Знайдіть значення k.

918°. Графік функції $y = 6x - a$ проходить через точку $A\left(-\frac{1}{3};\ -2\right)$.

Знайдіть значення a.

919°. Графік функції $y = bx - 1$ проходить через точку $B\ \left(-1; -\frac{3}{5}\right)$.

Знайдіть значення b.

920°. Графік функції $y = ax + 3$ проходить через точку A (–2; 1). Знайдіть значення a.

921°. Графік функції $y = 7 - cx$ проходить через точку C (–4; –5). Знайдіть значення c.

922. Побудуйте графік функції:

1) $y = 0,5x - 1,5$; 2) $y = -\frac{2x+1}{3}$; 3) $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$.

Користуючись графіком, знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.

923. Побудуйте графік функції:

1) $y = -1,5x + 3$; 2) $y = \frac{3-2x}{5}$; 3) $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

Користуючись графіком, знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.

924. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = 2x - 0,5$ і $y = -0,5x + 2$; 2) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ і $y = \frac{x}{2} + 3$.

Користуючись графіками функцій, знайдіть координати їх точок перетину.

925. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = 3x - 1$ і $y = -2x + 4$; 2) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ і $y = \frac{x}{5} - 1\frac{2}{5}$.

Користуючись графіками функцій, знайдіть координати їх точок перетину.

926. Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо:

1) $f(x)=\begin{cases}3x, x<0,\\ 2x-1, x\geq 0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2x-3, x\leq -1,\\ 2x+1, x\geq -1.\end{cases}$

927. Знайдіть область значень функції:

1) $y=x+1$; 2) $y=|x|$; 3) $y=|x|+2$; 4) $y=|x|-3$.

928. Знайдіть область значень функції:

1) $y=2x$; 2) $y=|x|-5$.

929. На малюнках 46—47 зображено графіки деяких функцій.

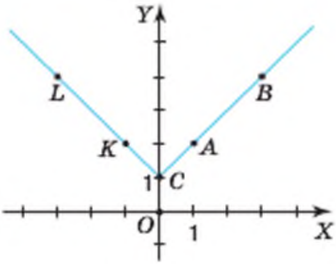
1. Якому з графіків функцій належить точка з координатами: а) (0; 1); б) (0; –1)?

2. Серед точок, позначених на графіку, укажіть пари точок:

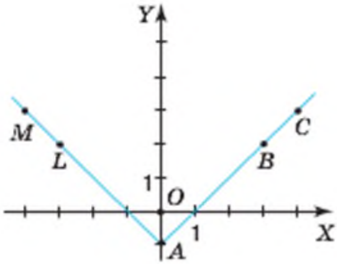
а) із рівними ординатами. Які в цих точок абсциси?

б) із протилежними абсцисами. Які в цих точок ординати?

3. Укажіть малюнок, на якому позначено пари точок із координатами, що задовольняють функцію, задану формулою: а) $y=|x|+1$; б) $y=|x|-1$.



Мал. 46



Мал. 47

930. На малюнках 48—49 зображено графіки деяких функцій.

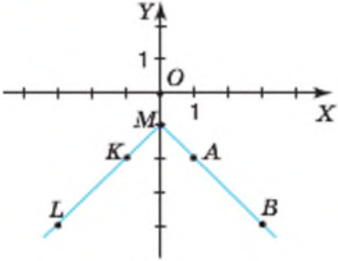
1. Якому з графіків функцій належить точка з координатами: а) (0; 1); б) (0; –1)?

2. Серед точок, позначених на графіку, укажіть пари точок:

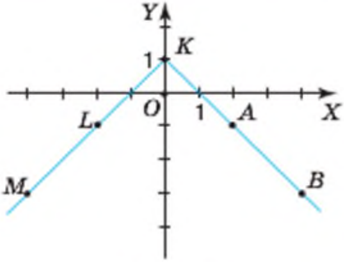
а) із рівними ординатами. Які в цих точок абсциси?

б) із протилежними абсцисами. Які в цих точок ординати?

3. Укажіть малюнок, на якому позначено пари точок із координатами, що задовольняють функцію, задану формулою: а) $y=-|x|+1$; б) $y=-|x|-1$.



Мал. 48



Мал. 49

931. Графік функції $y = ax + b$ проходить через точки A (–1; –3) і B (0; 2). Знайдіть значення a і b.

932. Задайте формулою будь-яку лінійну функцію, графік якої проходить через точку: 1) A (–1; 1); 2) B (5; 5).

933. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точку A (–1; –10), а його кутовий коефіцієнт дорівнює НСД чисел 42 і 91. Знайдіть значення k і b.

934. Графік функції $y = ax + c$ проходить через точку B (1; 14), а його кутовий коефіцієнт дорівнює НСД чисел 96 і 112. Знайдіть значення a і c.

935*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x-2, \text{ якщо } x \le -1, \\ 3x, \text{ якщо } -1 \le x < 2, \\ 2x+4, \text{ якщо } x \ge 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \le -2, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ якщо } -2 \le x < 2, \\ 2x-3, \text{ якщо } x \ge 2; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5, \text{ якщо } x \le -2, \\ -x+3, \text{ якщо } -2 < x < 2, \\ 0{,}5x, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x \le -1, \\ -2x+0{,}5, \text{ якщо } -1 < x < 0, \\ 0{,}5x+1, \text{ якщо } x \ge 0. \end{cases}$

936*. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| + x$; 2) $y = |x| - x$; 3) $y = \dfrac{|x|}{x}$.

937*. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x+1| + 5$;
3) $y = |x-3| - |1-x|$;
2) $y = |x-1| + |x-2|$;
4) $y = 2|x-3| - 3|x+2|$.

938*. Побудуйте множину точок, координати яких задовольняють рівняння:

1) $|y| = x - 3$; 2) $|x| + |y| = 1$; 3) $|x| - |y| = -1$.

Чи є отримане зображення графіком функції? Відповідь обґрунтуйте.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

939. На початку тижня мама дала Іринці 50 грн для власних витрат. Щодня дівчинка витрачала по 2 грн 50 к. на проїзд до школи і назад та 5 грн 50 к. на обід. Інших витрат протягом тижня в Іринки не було. Запишіть у вигляді формули залежність суми грошей, що залишилась у дівчинки, від дня тижня. Побудуйте графік отриманої функції.

940. Для пошиття одного робочого халату треба 1,7 погонного метра тканини. Запишіть у вигляді формули залежність загальної кількості погонних метрів тканини від кількості халатів, які треба пошити. Скільки метрів тканини треба, щоб пошити 5, 8, 25, 100 таких робочих халатів?

941. Дві групи піших туристів, вийшовши не одночасно з однієї бази за тим самим маршрутом, мали зустрітися в поході й далі продовжити його разом. Перша група вирушила з бази о 7 год і рухалася зі швидкістю 3 км/год. Друга група вирушила з бази через дві години і рухалася зі швидкістю 5 км/год. Через скільки годин після виходу другої групи вони зустрінуться? Розв'яжіть задачу графічно.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

942. Знайдіть n, якщо:

1) $(25)^{24} = (25^n)^4$;
2) $(6)^{48} = (6^n)^{16}$;
3) $(2{,}3)^{54} = (2{,}3^9)^n$;
4) $\left(\frac{3}{7}\right)^{28} = \left(\left(\frac{3}{7}\right)^4\right)^n$.

943. Сума деякого числа, його $\frac{1}{6}$ та $\frac{1}{8}$ дорівнює 124. Знайдіть невідоме число.

944. Знайдіть найменше чотирицифрове число, якщо воно ділиться на 2, 5, 9 і його запис містить цифру 3.

945. У прямокутнику сторони дорівнюють 10 см і 15 см. Меншу сторону збільшили на 40 %, а більшу — зменшили на 40 %. Як змінився периметр прямокутника (у %)?

§ 18. ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Ви знаєте, що залежність вартості p цукерок від їх кількості m, якщо їх ціна становить 25 грн за кілограм, можна виразити формулою $p = 25m$, або в загальному вигляді $y = kx$. Така залежність є особливим випадком лінійної функції $y = kx + b$, коли $b = 0$, а $k \neq 0$. Кожне значення такої функції пропорційне відповідному значенню її аргументу з коефіцієнтом пропорційності k.

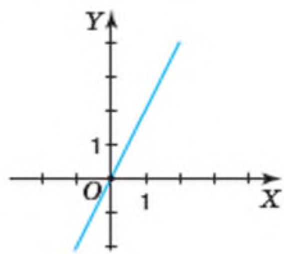
Запам'ятайте!

Функція, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — аргумент, k — число ($k \neq 0$), називається *прямою пропорційністю*.

? Чому не можна вважати прямою пропорційністю функцію $y = kx$, якщо $k = 0$? Тому що за такого значення коефіцієнта k дана функція є сталою. Тобто зі зміною аргументу значення функції не змінюється, а отже, немає пропорційної залежності y від x.

Оскільки пряма пропорційність є різновидом лінійної функції, то вона має всі властивості останньої. Розглянемо особливі властивості прямої пропорційності.

1. Пара чисел (0; 0) задовольняє формулу $y = kx$ за будь-якого значення k. Тому **графік прямої пропорційності завжди проходить через початок координат** (мал. 50).



Мал. 50

2. Графік прямої пропорційності не може збігатися з віссю ординат, оскільки будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не відображає функціональної залежності.

3. Графік прямої пропорційності не може збігатися з віссю абсцис, оскільки функція $y = 0$ не є прямою пропорційністю.

Звідси випливає, що **кожна пряма, яка проходить через початок координат і не збігається з осями координат, є графіком прямої пропорційності.**

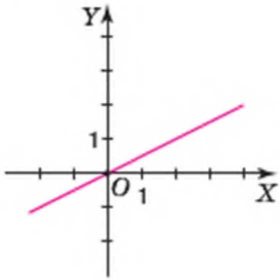
Запам'ятайте!

Властивості функції $y = kx$:

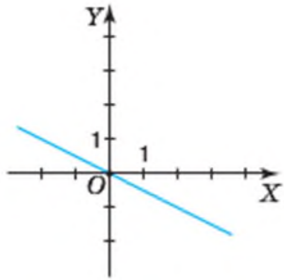
1) **область визначення — усі числа;**
2) **область значень — усі числа;**
3) **функція зростає, якщо $k > 0$;**
4) **функція спадає, якщо $k < 0$;**
5) **графіком є пряма, що проходить через початок координат;**
6) **графік не збігається з осями координат.**

? Чи можна вважати число k кутовим коефіцієнтом прямої пропорційності? Так, оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції.

Подивіться на малюнки 51 і 52. Ви бачите графік функції $y = 0,5x$ (мал. 51) і графік функції $y = -0,5x$ (мал. 52). Перший графік утворює з додатним променем осі OX гострий кут, а другий графік — тупий кут. Формули, що задають ці функції, відрізняються знаком коефіцієнта k: у першої функції $k > 0$, а в другої — $k < 0$.



Мал. 51



Мал. 52

Зверніть увагу:

графік функції $y = kx$ утворює з додатним променем осі OX:

— **гострий кут**, якщо $k > 0$;

— **тупий кут**, якщо $k < 0$.

Дізнайтеся більше

1. **Владислав Кирилович Дзядик** (1919 – 1998) — український математик, доктор фізико-математичних наук (1960), професор, член-кореспондент НАН України (з 1969 р.), Соросівський професор. Народився в смт. Сахновщина Харківської області. Вищу освіту здобув на механіко-математичному факультеті Дніпропетровського університету (1951). Працював учителем у школі на Волині, викладачем у Луцькому педагогічному інституті та Київському університеті, а з 1960 – в Інституті математики НАН України. У 1963 році створив відділ теорії функцій Інституту математики, яким керував до 1990 року. Цей відділ існує й дотепер. В. К. Дзядик довгий час працював переважно в галузі теорії функцій. Розробив спеціальні математичні методи та перетворення, які названо на його честь «методи Дзядика» і «перетворення Дзядика».
2. Нехай функцією $y = kx$ задано залежність шляху y, який проходить той чи інший об'єкт, від часу x. Значення цієї функції може змінюватися в часі або швидше, або повільніше, залежно від значення коефіцієнта функції:
   — для $k > 0$ — що більше k, то швидше збільшується значення функції;
   — для $k < 0$ — що менше k, то швидше зменшується значення функції.
   Виходить, що коефіцієнт k показує, наскільки швидко змінюється функція $y = kx$. Тому по-іншому цей коефіцієнт називають *швидкістю зміни функції «пряма пропорційність»*. Спираючись на графіки функцій, наприклад, для $k > 0$ (див. мал. 50, 51), можна сказати і так: що більша швидкість зміни функції $y = kx$, то «крутіший» її графік.
   Наприклад, якщо у функцію $y = kx$ замість коефіцієнта k підставити значення швидкості сапсана (320 км/год), літака (наприклад, для Ан-124 Руслан — це 865 км/год) і супутника (28 440 км/год), то очевидно, що найшвидше функція, яка задає залежність шляху від часу, зростає в супутника, а найповільніше — у сапсана (мал. 53—55).

Мал. 53

Мал. 54

Мал. 55

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яка функція називається прямою пропорційністю?
2. Назвіть властивості прямої пропорційності.
3. Що є графіком прямої пропорційності?
4. Які властивості графіка прямої пропорційності?
5. У якому випадку графік функції $y = kx$ утворює з додатним променем осі OX гострий кут; тупий кут?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

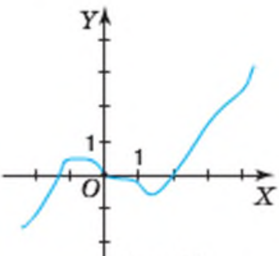
946'. Чи правильно, що функція $y = kx + b$ є прямою пропорційністю, якщо:

1) $k = 0$; 2) $b = 0, k \neq 0$; 3) $k = 1$; 4) $b = 1$?

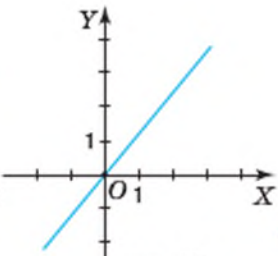
947'. Чи правильно, що графіком прямої пропорційності є пряма, яка:

1) паралельна осі абсцис;
2) паралельна осі ординат;
3) збігається з віссю ординат;
4) збігається з віссю абсцис;
5) проходить через початок координат і не збігається з осями координат?

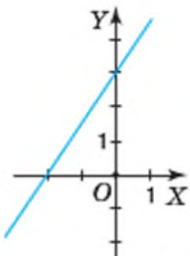
948'. На якому з малюнків 56—58 зображено графік прямої пропорційності?



Мал. 56



Мал. 57



Мал. 58

949′. Чи правильно, що точка O (0; 0) належить графіку функції:
1) $y=3x-3$; 2) $y=2x$; 3) $y=5$?

950′. Назвіть кутовий коефіцієнт функції:
1) $y=4x$; 2) $y=-0{,}7x$; 3) $y=\frac{2}{3}x$.

951′. Чи правильно, що дана функція зростає:
1) $y=-3x$; 2) $y=2x$; 3) $y=5$?

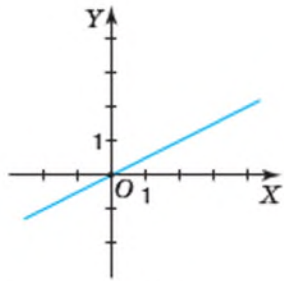
952′. Чи правильно, що дана функція спадає:
1) $y=4x$; 2) $y=-7x$; 3) $y=-6$?

953′. Який кут – тупий чи гострий — утворює з додатним променем осі OX графік функції :
1) $y=3x$; 2) $y=-7x$; 3) $y=-0{,}6x$?

954°. Чи є прямою пропорційністю дана функція:
1) $y=-t+2$; 2) $x=4t$; 3) $t=-2$?
Відповідь поясніть.

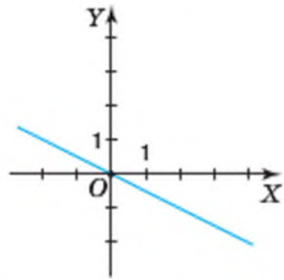
955°. Яка з точок A (1; 1), B (2; 2), C (–3; 3), D (2; –2), E (–2; –2) належить графіку функції $y=x$?

956°. Яка з точок A (1; 2), B (2; 1), C (–3; 6), D (–3; –6), E (–2; –1) належить графіку функції $y=2x$?



Мал. 59

957°. На малюнку 59 зображено графік прямої пропорційності. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x=-1$; 0; 1; 2;
2) значення x, за якого $y=0$;
3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне.



Мал. 60

958°. На малюнку 60 зображено графік прямої пропорційності. Користуючись графіком, знайдіть:
1) значення y, якщо $x=-2$; –1; 0; 1;
2) значення x, за якого $y=0$;
3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне.

959°. Функцію задано формулою $y = 3x$. Накресліть у зошиті таблицю 25 та заповніть її.

Таблиця 25

x	–2	–1	0	1	2
y					

960°. Відомо, що деяка функція є прямою пропорційністю з кутовим коефіцієнтом $k = 1{,}5$. Виконайте такі завдання:

1) задайте дану функцію формулою;

2) складіть таблицю значень функції для всіх цілих значень аргументу від –3 до 6;

3) побудуйте графік даної функції.

961°. Відомо, що деяка функція є прямою пропорційністю з кутовим коефіцієнтом $k = -2{,}1$. Виконайте такі завдання:

1) задайте дану функцію формулою;

2) складіть таблицю значень функції для всіх цілих значень аргументу від –4 до 3;

3) побудуйте графік даної функції.

962°. Чи проходить через початок координат графік функції:

1) $y = 5x - 1$; 2) $y = -3x + 1$; 3) $y = 1$; 4) $y = -\dfrac{7}{12}x$?

963°. Чи належить графіку функції $y = \dfrac{5}{6}x$ точка:

1) A (3; –2,5); 2) B (6; 1); 3) C (6; 5); 4) D (12; 10)?

964°. Чи належить графіку функції $y = -1{,}3x$ точка:

1) K (–1; 1,3); 2) L (1; 1,3); 3) M (3; 3,9); 4) N (–3; 3,9)?

965°. Яка з точок M (–1; –0,4), N (1; –0,4), P (5; 2), R (–5; 2) належить графіку функції $y = -0{,}4x$?

966°. Знайдіть будь-які три точки, що належать графіку функції:

1) $y = -1{,}2x$; 2) $y = 3{,}5x$; 3) $y = -\dfrac{3}{7}x$.

967°. Побудуйте графік функції:

1) $y = x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = 0{,}25x$.

968°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 4x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -\dfrac{2}{3}x$.

969°. Графік функції $y = nx$ проходить через точку M (–2; 5). Знайдіть значення n.

970°. Графік функції $y = kx$ проходить через точку K (–3; 2). Знайдіть значення k.

971°. Графік функції $y = bx$ проходить через точку $B\left(-1; \frac{4}{7}\right)$. Знайдіть значення b.

972. Задайте формулою функцію, що є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку:

1) A (1; 4);
2) B (–2; 5);
3) C (–2; –3);
4) D (2 ; –1);
5) E (3 ; –2);
6) $F\left(-\frac{3}{11}; \frac{5}{33}\right)$.

Побудуйте графік одержаної функції.

973. Задайте формулою функцію, що є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку:

1) A (2; 7);
2) B (–6 ; 4);
3) $C\left(-\frac{3}{28}; \frac{1}{7}\right)$.

Побудуйте графік одержаної функції.

974. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, ордината якої втричі менша від відповідної абсциси. Побудуйте графік одержаної функції.

975. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, абсциса якої у 8 разів більша за відповідну ординату. Побудуйте графік одержаної функції.

976. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт дорівнює середньому арифметичному всіх парних додатних одноцифрових чисел. Побудуйте графік одержаної функції.

977. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним десятій частині середнього арифметичного всіх двоцифрових чисел, кратних числу 5 і менших від числа 42. Побудуйте графік одержаної функції.

978. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним дев'ятій частині середнього арифметичного всіх двоцифрових чисел, кратних числу 9 і менших від числа 55. Побудуйте графік одержаної функції.

979. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої проходить через точку:

1) $A\left(-1;\ \frac{1}{3}\right)$; 2) B (4,4; –5,5); 3) $C\left(2\frac{2}{3};1\frac{7}{9}\right)$.

Побудуйте графік одержаної функції.

980*. Побудуйте графік функції:
1) $y=2|x|$; 2) $y=-4|x|-x$; 3) $y=3|x-1|-3x-3$.

981*. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, ордината якої на 3 більша за абсцису, а кутовий коефіцієнт є цілим числом. Скільки випадків треба розглянути? Побудуйте графіки всіх одержаних функцій.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

982. Щодня магазин продає товару на суму 8000 грн. Запишіть у вигляді формули залежність кількості грошей, одержаної за проданий товар від кількості робочих днів. Визначте, на яку суму грошей у магазині буде продано товару за місяць, якщо в ньому було 28 робочих днів. Побудуйте графік одержаної функції.

983. Щоб покласти 1 м^2 плитки майстер використовує 2 кг спеціального будівельного клею. Задайте формулою залежність маси клею від площі стіни, яку треба облицювати плиткою. Визначте, скільки клею знадобиться для облицювання у ванній кімнаті трьох стін прямокутної форми з розмірами 2,5 м x 3 м кожна.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

984. Скільки триметрових стрибків потрібно зробити кенгуру, щоб подолати шлях завдовжки 450 м + 450 дм + 450 см + 450 мм?

985. Перше число в 3,5 рази більше за друге, а третє — на 2,8 менше від першого. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює 13,2. Знайдіть ці числа.

986. Розв'яжіть рівняння: $\left(\frac{7}{8}-y\right)\cdot 1\frac{3}{16}=\frac{41}{64}+\frac{1}{4}$.

987. Знайдіть найбільше трицифрове число, якщо воно ділиться на 3, 5, 9 і його запис містить цифру 7.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як побудувати прямокутну систему координат на площині.
2. Яку назву мають осі координат; точка їх перетину?
3. Що називають координатною площиною?
4. Поясніть, як визначити координати точки.
5. Які координати має початок координат?
6. На скільки координатних чвертей розбивають площину координатні осі?
7. Сформулюйте означення функції.
8. Що називають аргументом функції?
9. Що таке область визначення функції?
10. Що таке область значень функції?
11. Назвіть способи задання функцій.
12. Що називають графіком функції?
13. Чи будь-яка геометрична фігура може бути графіком функції?
14. Як побудувати графік функції?
15. Як визначити, чи належить точка графіку функції?
16. Поясніть, яка функція називається зростаючою? Спадною?
17. Яка функція називається лінійною?
18. Що є графіком лінійної функції?
19. Як побудувати графік лінійної функції?
20. За яких значень k лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою; спадною; сталою?
21. Як характеризує лінійну функцію число b?
22. Яка функція називається прямою пропорційністю?
23. Яка пряма є графіком прямої пропорційності?
24. У якому випадку графік функції $y = kx$ утворює з додатним променем осі OX гострий кут; тупий кут?
25. Яке число називають кутовим коефіцієнтом?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Знайдіть значення функції $y = 2x^2 - 3$, якщо $x = -2$.

А. –5. **Б.** 5. **В.** 1. **Г.** –11.

2°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції $y = 5x - 12$?

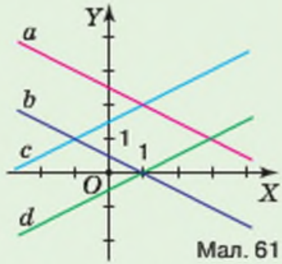
А. $A\left(\frac{5}{12}; 0\right)$. **Б.** $B(0; 12)$. **В.** $C(2{,}4; 0)$. **Г.** $D\left(0; \frac{5}{12}\right)$.

3°. Яка з точок $A(-1; -1)$, $B(-1; -3)$, $C(-1; 1)$ чи $D(1; -1)$ належить графіку функції $y = -2x^3 + 1$?

А. A. **Б.** B. **В.** C. **Г.** D.

4. На малюнку 61 зображено графіки чотирьох лінійних функцій $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ і $d(x)$. У яких функцій кутові коефіцієнти додатні?

А. a і c.
Б. b і d.
В. a і b.
Г. c і d.



Мал. 61

5*. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним до середнього арифметичного всіх додатних двоцифрових чисел, кратних числу 4 і менших від числа 41.

А. $y = 24x + b$.
Б. $y = -26x$.
В. $y = -220x$.
Г. $y = -40x$.

РОЗДІЛ 5

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

У розділі дізнаєтесь:

- які рівняння називають рівносильними;
- про властивості рівносильності рівнянь;
- що таке лінійне рівняння з однією змінною;
- які особливості лінійного рівняння з двома змінними;
- про графік лінійного рівняння із двома змінними;
- що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними;
- якими способами розв'язують системи рівнянь;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 19. РІВНЯННЯ. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОСИЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ

Ви вже знаєте, що таке вираз зі змінними та як знайти його значення для заданих значень змінних. На практиці доводиться складати ще й рівності зі змінними. Розглянемо приклад.

У пішому поході туристи, як правило, щогодини долають на 0,5 км менше, ніж за попередню годину. Нехай за першу годину туристи проходять x км, тоді за три години разом вони подолають відстань $x + (x - 0,5) + (x - 1)$ км. Відстань x може бути різною для різних груп туристів, оскільки залежить від натренованості учасників походу. Тому отриманий вираз є виразом зі змінною. Нехай відстань, яку подолають туристи за 3 год, дорівнює 13,5 км. Тоді отриманий вираз зі змінною і дане число можна прирівняти:

$$x + (x - 0,5) + (x - 1) = 13,5.$$

Дістали *рівність зі змінною*.

Чи є отримана рівність рівнянням? Ні. Але ця рівність може набути смислу рівняння, якщо поставити вимогу знайти значення змінної, що перетворює дану рівність зі змінною на правильну числову рівність.

Запам'ятайте!

Рівнянням **називається рівність зі змінною, значення якої треба знайти.**

Значення змінної, яке перетворює рівняння на правильну числову рівність, називають *коренем рівняння*.

Наприклад, коренем рівняння $x + (x - 0,5) + (x - 1) = 13,5$ є число 5, оскільки $5 + (5 - 0,5) + (5 - 1) = 13,5$. Інакше кажуть: *«Число 5 задовольняє рівняння»*.

Рівняння може мати більше, ніж один корінь. Наприклад, у рівнянні $(x-5)(x+3)=0$ — два корені. Це числа 5 і –3, оскільки $(5-5)(5+3)=0$ і $(-3-5)(-3+3)=0$. А в рівнянні $x - x = 0$ — безліч коренів, оскільки будь-яке число задовольняє це рівняння.

Зверніть увагу:

скільки б коренів не мало рівняння, кожен його корінь задовольняє це рівняння.

Рівняння може не мати коренів. Наприклад, у рівнянні $0 \cdot x = -12$ немає коренів, бо не існує числа, яке в добутку з числом 0 дає число –12.

Запам'ятайте!

Розв'язати рівняння **— означає знайти всі його корені або встановити, що рівняння не має жодного кореня.**

Рівняння, які мають одні й ті самі корені, називають *рівносильними*. Наприклад, рівняння $2(x-6)+10=12$ і $2x=14$ є рівносильними, оскільки і перше, і друге рівняння мають один корінь і цей корінь — число 7. Рівняння, які не мають коренів, також вважають рівносильними.

Під час розв'язування рівнянь використовують такі властивості.

Запам'ятайте!

Властивості рівносильності рівнянь

1. **Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.**
2. **Якщо в рівнянні перенести доданок із однієї частини в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.**
3. **Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.**
4. **Якщо перше рівняння рівносильне другому, то друге рівняння рівносильне першому.**
5. **Якщо перше рівняння рівносильне другому, а друге — третьому, то перше рівняння рівносильне третьому.**

Задача. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{6}-7=1-\frac{x-3}{3}$.

Розв'язання. Застосуємо властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення. Обидві частини рівняння помножимо на 6, щоб позбутися дробів:

$$\frac{x}{6}-7=1-\frac{x-3}{3} \quad \Big| \cdot 6,$$

$$\frac{x}{6}\cdot 6-7\cdot 6=1\cdot 6-\frac{x-6}{3}\cdot 6,$$

$$x-42=6-2(x-3).$$

Розкриємо дужки в правій частині рівняння:

$$x-42=6-2x+6.$$

Доданок $-2x$ перенесемо з протилежним знаком у ліву частину рівняння, а доданок -42 — у праву його частину:

$x+2x=6+6+42.$

Зведемо подібні доданки:

$3x=54.$

Поділивши обидві частини рівняння на 3, дістанемо:

$x=18.$

Отже, число 18 є коренем рівняння $\frac{x}{6}-7=1-\frac{x-3}{3}$.

Рівняння класифікують за різними основами. Однією з таких основ є кількість змінних у рівнянні. Наприклад, рівняння $4x+7=15$ є рівнянням з однією змінною, рівняння $2x(3-5,1y)=0$ — із двома змінними, а рівняння $x^2+y^2+z^2=1$ — із трьома змінними.

Рівняння також можна поділити на види за степенем многочлена, який «породжує» рівняння. Наприклад, рівняння $4x+7-15=0$ «породжується» многочленом $4x+7-15$. Цей многочлен — першого степеня, тому дане рівняння є рівнянням першого степеня. Міркуючи аналогічно, дістанемо, що рівняння $2x(3-5,1y)=0$ і $x^2+y^2+z^2=1$ є рівняннями другого степеня. Такі рівняння, а також рівняння вищих степенів ви вивчатимете в наступних класах.

Дізнайтеся більше

1. Перші скорочені позначення для невідомих величин зустрічаються ще у Діофанта (III ст.). Його трактат «Арифметика» є збіркою задач на складання рівнянь, а їх розв'язання подано за певною системою.

   У X ст. «Арифметика» була перекладена арабською мовою, після чого ісламські математики (Абу Каміл та ін.) продовжили деякі з досліджень Діофанта. У Європі інтерес до «Арифметики» з'явився після того, як Рафаель Бомбеллі знайшов цей твір у Ватиканській бібліотеці та опублікував 143 задачі з нього у своїй «Алгебрі» (1572 р.). У 1621 р. вийшов класичний, детально прокоментований латинський переклад «Арифметики» Діофанта, виконаний Баше де Мезіріаком. Методи Діофанта мали великий вплив на наукову діяльність багатьох видатних математиків та розвиток математики як науки.
2. **Конфорович Андрій Григорович** (1923–1997) — фахівець у галузі історії математики і популяризації математичних знань в Україні. У його доробку — понад 200 друкованих праць. Вони присвячені математичній підготовці учнів, олімпіадам з математики, аналізу науково-популярної літератури з математики і кібернетики, застосуванням математики, питанням історії математики, математичним іграм і головоломкам. Основні з них: «Дорогами Унікурсалії», «Визначні математичні задачі», «Колумби математики», «Математична мозаїка», «Математичні софізми і парадокси», «Математика служить людині», «Добрий день, Архімеде!» та інші. Майже 20 років А. Г. Конфорович був заступником відповідального редактора й активним дописувачем збірника науково-популярних статей «У світі математики». На його сторінках він опублікував багато цікавих і актуальних статей, значна частина яких стосувалася життєвого і творчого шляху визначних математиків. Це статті: «Нільс Генрік Абель», «Леонард Ейлер», «Готфрід Вільгельм Лейбніц», «Ісаак Ньютон» та ін.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке рівняння?
2. Що називають коренем рівняння?
3. Що означає «розв'язати рівняння»?
4. Які рівняння називають рівносильними?
5. Сформулюйте властивості рівносильності рівнянь.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

988'. Яке з чисел –5, –1, 0, 2, чи 4 є коренем рівняння:
1) $5x+25=0$; 2) $6y-8=8$; 3) $0{,}4x-1{,}6=0$; 4) $4y-12=4$?

989'. Чи правильно, що дане рівняння: а) має рівно один корінь; б) має більше ніж один корінь; в) не має коренів; в) має безліч коренів:
1) $-2x+8=0$;
2) $0y+25=0$;
3) $6x-11=-11$;
4) $6+2y=6-y+3y$;
5) $(x-5)(x+2)=0$;
6) $y(y-8)(4-y)=0$?

990'. Назвіть число, яке задовольняє рівняння:
1) $2x+12=0$; 2) $3y-1=8$; 3) $-5x-10=10$; 4) $4y-4=0$.

991'. Дано рівняння $4x-9=0$. Чи отримаємо рівносильне йому рівняння, якщо:
1) до лівої частини даного рівняння додамо число 9;
2) до правої частини даного рівняння додамо число –9;
3) до обох частин даного рівняння додамо число –9;
4) до обох частин даного рівняння додамо число 9?
Відповідь поясніть.

992'. Дано рівняння $-5x+10=0$. Чи отримаємо рівносильне йому рівняння, якщо:
1) доданок 10 перенести у праву частину рівняння;
2) доданок 10 перенести з протилежним знаком у праву частину рівняння;
3) обидві частини рівняння поділити на 5;
4) змінити знаки всіх доданків на протилежні?
Відповідь поясніть.

993°. Якщо розв'язувати рівняння $2x+24=0$, то чи буде правильним такий крок:
1) $2x=24$; 2) $2x=-24$; 3) $24=-2x$; 4) $x+12=0$?
Відповідь поясніть.

994°. Яку властивість рівносильності треба використати, щоб від рівняння $0,5x - 2 = 0$ перейти до рівняння:
1) $0,5x = 2$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $5x - 20 = 0$; 4) $-0,5x + 2 = 0$?
Відповідь поясніть.

995°. Чи рівносильне рівнянню $2x + 8 = 0$ рівняння:
1) $2x + 8 - 8 = -8$; 2) $2x = -8$; 3) $x + 4 = 0$; 4) $4x + 16 = 0$?
Відповідь поясніть.

996°. Чи є рівносильним рівнянню $5y - 20 = 0$ рівняння:
1) $5y - 20 + 20 = 20$; 2) $5y = 20$; 3) $-5y + 20 = 0$; 4) $y - 4 = 0$?
Відповідь поясніть.

997°. Наведіть приклад чотирьох рівносильних рівнянь.

998°. Складіть три рівносильні рівняння.

999°. Чи є рівносильними рівняння:
1) $x = -x$ і $5x = 6x$;
2) $y - 3y = 3$ і $3y - y = 3$;
3) $2(x + 1) = -2(5 + x)$ і $2x = -4$;
4) $5(y - 2) - 5 = 0$ і $4x = -12$?
Відповідь обґрунтуйте.

1000°. Чи є рівносильними рівняння:
1) $2x = 5 - 4x$ і $6x = 5$;
2) $y - 12 = -y$ і $3y = 18$?
Відповідь обґрунтуйте.

1001°. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x - 4 = 6$;
2) $5 - 2y = 11$;
3) $16 = 12 - 4x$;
4) $-5 = 5y + 15$;
5) $2x = 4x + 12$;
6) $-7y = 18 - 5y$;
7) $6z + 3 = 66 + 3z$;
8) $5x - 22 = 5 - 4x$;
9) $-12 - 7y = -4 + y$;
10) $2y + 3y = 28 - 2y$;
11) $18 - 12x + 3x = 6 - 5x$;
12) $5y - 10 - 9y = 12y - 42$.

1002°. Розв'яжіть рівняння:
1) $12 - 4x = 40$;
2) $7y - 27 = -2y$;
3) $15 - 3y = 14 - 2y$;
4) $26 + 2x = 7x - 9$;
5) $35 + 17y - 5 = 2y$;
6) $12z = 5z - 18 - 2z$.

1003°. Складіть рівняння з однією змінною, коренем якого є число:
1) -2; 2) $1\frac{3}{5}$.

1004°. Складіть рівняння з однією змінною, коренем якого є число:
1) 5; 2) 0.

1005°. Знайдіть корінь рівняння:
1) $(4x + 1) - (2x - 8) = 15$;
2) $4 + 2(x - 5) = 4x$;
3) $\frac{5 - x}{4} = x$;
4) $\frac{y}{2} + \frac{y}{4} = 12$;

5) $5y-3(6y-4)=9$;

6) $\dfrac{x-3}{10}=\dfrac{1-2x}{5}+3$.

1006°. Знайдіть корінь рівняння:

1) $2x+4(8-x)=2$;

2) $16-8(y+1)=y-10$;

3) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{1+2x}{3}$;

4) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{x-2}{3}$.

1007. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x-4)-2(5-6x)=18$;

2) $9(y+2)=8(1-y)+24$;

3) $0{,}4x-2{,}6=5(0{,}2-x)-0{,}3(x+4)$;

4) $0{,}5(2-x)+2(4x-0{,}2)+5{,}9=-5{,}5x$;

5) $(1{,}2-4y)\cdot 2=5y-0{,}4(5-15y)-1{,}3$;

6) $\dfrac{2y-3}{5}-\dfrac{1-y}{4}=\dfrac{y+5}{8}+\dfrac{1}{10}$;

7) $\dfrac{3z+5}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+z}{3}+3$;

8) $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{5x+6}{15}=\dfrac{2x-5}{6}-\dfrac{8-3x}{5}+\dfrac{41}{60}$.

1008. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(9+x)-6(x-3)=0$;

2) $7y-0{,}3(5-2y)=0{,}4y+4{,}5$.

3) $\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{3}$;

4) $\dfrac{3-y}{3}+\dfrac{5y}{2}=1-\dfrac{3-y}{6}$.

1009. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $x^2-2x-8=(x-4)(x+4)-2(x-8)$ є будь-яке число;

2) рівняння $4(y+1)(y-1)(y-8)=0$ має три корені;

3) рівняння $(x+5)(x+4)=x(x+9)+4$ не має коренів.

1010. Доведіть, що:

1) рівняння $(x+6)(x-6)-(5+x)^2=9$ має один корінь;

2) рівняння $2y(y-5)=(y+4)^2+y^2-10y$ не має коренів.

1011*. Доведіть, що рівняння $0{,}7(x-3)-(0{,}5-2x)=0{,}9(3x-1)+0{,}1$ рівносильне рівнянню: 1) $x^2=-1$; 2) $|x|=-5$; 3) $-16x^4=81$.

1012*. Розв'яжіть рівняння, якщо $a\neq 0, b\neq 0$:

1) $(x+a)^2-2=-2x-(a^2-x)$;

2) $x+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$;

3) $\frac{y}{a}-\frac{y}{b}=\frac{a-b}{a^2}$;

4) $\frac{(2a-b)x+a^2-b^2}{ab}=\frac{3x}{b}+\frac{(a+b)^2}{b}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1013. Про видатного математика давнини Діофанта відомо дуже мало, навіть невідомі роки його життя. На гробниці Діофанта напис складено у формі задачі. Розв'яжіть її та встановіть, скільки років прожив Діофант.

Подорожній! Поховано тут Діофанта.
І числа розкажуть тобі,
Який дивний шлях він життєвий пройшов.
Шосту частину його становило дитинство.
Минула частина дванадцята —
І пухом покрилось його підборіддя.
Сьому — в бездітному шлюбі прожив Діофант.
Минуло п'ять літ. Ощасливлений був він
Народженням первенця — сина,
Якому судилась лише половина життя його батька.
У глибокій журбі старець закінчив шлях на землі,
Ще проживши років чотири з часу,
Коли сина не стало.
Скажи, віку якого досягши, славетний помер Діофант.

1014. Складіть і розв'яжіть задачу про свій вік та значні події у вашому житті.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1015. Обчисліть:
1) $2 \cdot 5^4 + 6^3 : 12 + 3^2$;
2) $(4 \cdot 5^2 - 4^3) : (2^2 + 2)$.

1016. Квадрат і прямокутник мають однаковий периметр. Довжина прямокутника на 2 см більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см. На скільки площа прямокутника менша від площі квадрата?

§ 20. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Ви вже знаєте, що рівняння можна поділити на види за кількістю змінних. У цьому параграфі розглядатимемо рівняння з однією змінною.

Запам'ятайте!

Рівняння виду $ax+b=0$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називається *лінійним рівнянням з однією змінною.*

Числа a і b називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння. Число b інакше називають *вільним членом* даного рівняння.

Чи можна вважати лінійним рівнянням з однією змінною рівняння виду $ax=c$? Так. Рівняння $ax=c$ і $ax+b=0$ є рівносильними, якщо $c=-b$. Тому будемо вважати, що $ax=c$ — це інша форма запису лінійного рівняння.

Усі інші рівняння з однією змінною, які рівносильні рівнянню $ax+b=0$, *зводяться* до лінійного рівняння шляхом тотожних перетворень. Наприклад, рівняння $mx+nx+p=0$ можна звести до лінійного рівняння так: $(m+n)x+p=0$, $kx+p=0$, де $k=m+n$.

Залежно від того, яких значень набувають коефіцієнти a і b, лінійне рівняння з однією змінною може мати різну кількість коренів (табл. 25).

Таблиця 25

Значення a і b	Вигляд рівняння	Розв'язання	Кількість коренів
$a\neq 0$, $b\neq 0$	$ax+b=0$	$ax=-b$, $x=-\dfrac{b}{a}$	1 корінь
$a\neq 0$, $b=0$	$ax=0$	$x=0:a$, $x=0$	1 корінь
$a=0$, $b\neq 0$	$0\cdot x+b=0$	$0\cdot x=-b$, не існує числа, яке в добутку з числом 0 дасть число $-b$. Тому рівняння коренів не має	немає коренів

$a=0$, $b=0$	$0\cdot x=0$	$0\cdot x=0$, замість x можна підставити будь-яке число й отримати число 0. Тому будь-яке значення x є коренем рівняння	безліч коренів

Ви знаєте, що рівняння можна поділити на види й за іншою основою — залежно від степеня многочлена, який породжує дане рівняння. Якщо многочлен — першого степеня, то і відповідне рівняння є рівнянням першого степеня.

? Чи кожне лінійне рівняння з однією змінною є рівнянням першого степеня? Ні. Наприклад, лінійні рівняння $0\cdot x+b=0$ і $0\cdot x=0$ не є рівняннями першого степеня.

Зверніть увагу:

— лінійне рівняння з однією змінною є рівнянням першого степеня лише тоді, коли $a\neq 0$;
— лінійне рівняння з однією змінною може мати або 1 корінь, або безліч коренів, або не мати коренів;
— рівняння першого степеня з однією змінною завжди має 1 корінь.

Розв'язування багатьох рівнянь з однією змінною зводиться до розв'язування лінійних рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $-3(x-12)=2x+11$.

Розв'язання. Зведемо дане рівняння до лінійного. Для цього застосуємо властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$-3x+36=2x+11.$$

Перенесемо доданки в ліву частину рівняння та зведемо подібні доданки:

$$-3x-2x+36-11=0.$$

Отримали лінійне рівняння:

$$-5x+25=0.$$

Звідси $-5x=-25$ і $x=5$.

Отже, число 5 є коренем рівняння $-3(x-12)=2x+11$.

За допомогою рівнянь можна розв'язувати різноманітні задачі. Для цього за умовою задачі складають рівняння, розв'язавши яке, дістають відповідь. Такий спосіб розв'язування задач називають *алгебраїчним*. Він передбачає наступні етапи: 1) аналіз умови задачі та складання рівняння; 2) розв'язування рівняння; 3) запис відповіді.

Задача 2. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 250 км, виїхали назустріч один одному два автобуси. Швидкість одного з них на 5 км/год більша за швидкість іншого. Знайдіть швидкість кожного автобуса, якщо вони зустрілися через 2 год після початку руху.

Розв'язання. Нехай x км/год — швидкість першого автобуса, тоді $(x+5)$ км/год — швидкість другого автобуса. Складемо короткий запис даних задачі у вигляді таблиці 26.

Таблиця 26

Автобуси	Швидкість	Час	Шлях
І автобус	x	2 год	$2x$ } 250 км
ІІ автобус	$x+5$	2 год	$2(x+5)$ } 250 км

Складемо та розв'яжемо рівняння:

$2x + 2(x + 5) = 250,$

$2x + 2x + 10 = 250,$

$4x = 250 - 10,$

$4x = 240, \mid : 4$

$x = 60.$

Отже, швидкість першого автобуса дорівнює 60 км/год. Тоді швидкість другого автобуса становить $x+5=60+5=65$ (км/год).

Дізнайтеся більше

1. Найдавніші давньоєгипетські математичні тексти відносять до початку ІІ тис. до н. е. Математика тоді використовувалася в астрономії, мореплавстві, вимірюванні земельних ділянок, під час будівництва будинків, гребель, каналів і військових укріплень. Грошових розрахунків, як і самих грошей, у Єгипті не було. Єгиптяни писали на папірусі. Однією з історичних пам'яток, які

дійшли до нас, є папірус Рінда. Це давньоєгипетський навчальний посібник з арифметики та геометрії періоду Середнього царства, переписаний (бл. 1650 до н. е.) на папірус, який зберігся дотепер, переписувачем на ім'я Ахмес. Усі завдання з папірусу Рінда мають прикладний характер і пов'язані з практикою будівництва, розмежуванням земельних ділянок тощо. Запис рівняння $x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37$ у цьому папірусі має такий вигляд (мал. 62):

Мал. 62

2. Ім'я **Мирона Онуфрійовича Зарицького** (1889–1961) — талановитого математика, обдарованого педагога і популяризатора математичних знань, майже невідоме в Україні, хоча свого часу на праці українського вченого посилалися або цитували їх окремі положення французький математик Фреше, німецький математик Гільберт, професор з Варшави Серпінський та ін. Наукові інтереси М. О. Зарицького охоплюють здебільшого теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсної змінної. Мирон Онуфрійович був великим знавцем історії математики, особливо античної, читав курси лекцій з історії математики у Львівському університеті, опублікував кілька праць з історії точних наук.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке рівняння називається лінійним?
2. Що таке коефіцієнти лінійного рівняння?
3. Яке число називають вільним членом лінійного рівняння?
4. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?
5. Поясніть, як розв'язати задачу алгебраїчним методом.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1017′. Назвіть коефіцієнти лінійного рівняння з однією змінною:

1) $4x+16=0$;
2) $7y-28=0$;
3) $-0{,}5x-15=0$;
4) $-\frac{1}{4}y+\frac{2}{3}=0$.

Яке число є вільним членом рівняння?

1018′. Чи є лінійним рівнянням з однієї змінною таке рівняння:
1) $5x=25$; 2) $2y+2=8$; 3) $3x-4y=12$; 4) $5y^2-2y=0$?
Відповідь поясніть.

1019′. Яке із чисел –8, –3, –2, 2, 3 чи 8 є коренем рівняння:
1) $10x+20=0$; 2) $4y-12=0$; 3) $0{,}3x+2{,}4=0$; 4) $-3y-9=0$?

1020′. Скільки коренів має рівняння:
1) $-6x+6=6$; 2) $0y+25=0$; 3) $5x=5x$; 4) $8y+2=0$?

1021°. Складіть лінійне рівняння з однією змінною, якщо:
1) $a=8$, $b=-5$; 2) $a=1\frac{1}{3}$, $b=-0{,}2$. Розв'яжіть отримане рівняння.

1022°. Складіть лінійне рівняння з однією змінною, якщо $a=-4$, $b=2{,}8$. Розв'яжіть отримане рівняння.

1023°. Знайдіть корінь рівняння:

1) $20-5x=0$;
2) $0{,}4y+6=0$;
3) $1{,}8x+9=9$;
4) $11y-0{,}6=-0{,}6$;
5) $\frac{2}{3}x+5=-5$;
6) $-2\frac{1}{4}y-20=-2{,}25y$.

1024°. Знайдіть корінь рівняння:

1) $15x-12=0$;
2) $20-0{,}5y=0$;
3) $\frac{1}{2}x+15=15$;
4) $\frac{2}{5}y+2{,}7=0{,}4y$.

1025°. Складіть лінійне рівняння з однією змінною, коренем якого є число: 1) –4; 2) $2\frac{2}{5}$.

1026°. Складіть лінійне рівняння з однією змінною, коренем якого є число: 1) 7; 2) –2,2.

1027°. У двох 7-х класах навчаються 59 учнів, причому в 7-А класі на 5 учнів більше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчається в кожному класі?

1028°. На двох полицях стоять 63 книжки, причому на одній із них на 9 книжок менше, ніж на іншій. Скільки книжок стоїть на кожній полиці?

1029°. У трьох цехах фабрики працює 1040 робітників. У другому цеху працює на 50 робітників більше, ніж у першому, а в третьому — на 20 робітників менше, ніж у другому. Скільки робітників працює в кожному цеху?

1030°. У трьох сувоях 800 м тканини. У другому сувої тканини на 20 м менше, ніж у першому, і на 15 м більше, ніж у третьому. Скільки метрів тканини в кожному сувої?

1031°. Периметр прямокутника дорівнює 80 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них утричі більша за іншу.

1032°. Периметр прямокутника дорівнює 70 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них на 5 см більша за іншу.

1033. Зведіть рівняння до лінійного та розв'яжіть його:

1) $2(x+1)=4(1-x)+4$;
2) $0{,}7(3y-1{,}5)=3{,}2(1-2y)$;
3) $-2(x-2)+(6x-1)\,2=10x-14$;
4) $6y-0{,}5(4-y)=5-1{,}5y$;
5) $2-\frac{1}{6}(7-2x)=(x-3)\frac{5}{12}$;
6) $\frac{2}{5}(y-9)-0{,}3(9-y)=\frac{3}{5}(2y-3)$;
7) $\frac{x+6}{2}+\frac{5-4x}{3}=\frac{8-x}{6}$;
8) $\frac{4y-5{,}1}{3}-\frac{1{,}7-3y}{4}=\frac{y+0{,}5}{2}$;
9) $(x-1)(x+1)+2(x-3)=x^2$;
10) $5y(5y-2)=(5y-1)(5y+1)$;
11) $(y-6)^2-y(y+8)=2$;
12) $(3z+1)^2=9z(z+2)-2$.

1034. Зведіть рівняння до лінійного та розв'яжіть його:

1) $5-2(3-y)=3(1-2y)$;
2) $0{,}4(3x-4)=3{,}2(x-2)$;
3) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x+0{,}5\right)-3=-\frac{1}{3}x-1{,}5$;
4) $(y-2)(y+4)=(y+6)^2$;
5) $(x-4)^2-(x+4)^2=16$;
6) $3y^2+12y-3(y+1)^2=21$.

1035. За якого значення змінної:

1) значення виразу $4(x-2)(x+2)$ дорівнює значенню виразу $(2x-1)^2-1$;
2) значення виразу $5(y+3)(y-1)$ на 4 більше за значення виразу $(3+2y)^2+y^2$;
3) значення виразу $3(x-1)^2$ на 3 менше від значення виразу $(x-6)(x+6)+2x^2$;
4) значення виразу $y(y-2)$ у 16 разів менше від значення виразу $(4y-5)^2+7$?

1036. За якого значення змінної:

1) значення виразу $x(x-3)$ на 12 менше від значення виразу $(x-6)(x+2)$;

2) значення виразу $(y-5)^2$ дорівнює значенню виразу $y(y-1)-2$?

1037. Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному із двох пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 455 км, і зустрілись через 3,5 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість іншого.

1038. Відстань між пунктами A і B дорівнює 310 км. Два автомобілі одночасно виїхали з цих пунктів назустріч один одному і зустрілись через 2 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 5 км/год менша від швидкості іншого.

1039. Два автобуси одночасно і в протилежних напрямках виїхали з двох містечок, відстань між якими становить 40 км. Швидкість одного автобуса на 10 км/год менша від швидкості іншого. Знайдіть швидкість кожного автобуса, якщо через 2 год відстань між ними становила 260 км.

1040. Автомобілі виїхали одночасно із пункту A в протилежних напрямках. Один автомобіль їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж інший. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо через 2,5 год відстань між ними становила 375 км.

1041. Мотоцикліст за 3 год проїжджає ту саму відстань, що автомобіліст за 1,5 год. Знайдіть швидкість мотоцикла і швидкість автомобіля, якщо швидкість автомобіля на 40 км/год більша, ніж швидкість мотоцикла.

1042. Велосипедист за 1,5 год проїжджає ту саму відстань, що турист проходить за 5 год. Знайдіть швидкість велосипедиста і швидкість туриста, якщо швидкість велосипедиста на 7 км/год більша, ніж швидкість туриста.

1043. Катер долає відстань між двома пристанями за течією річки за 2 год, а проти течії — за 3 год. Знайдіть відстань між цими пристанями, якщо власна швидкість катера дорівнює 15 км/год.

1044. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо моторний човен долає цю відстань за течією річки за 3 год, а проти течії — за 4 год. Швидкість течії річки дорівнює 5 км/год.

1045. Знайдіть чотири послідовні натуральні числа, якщо добуток перших двох із цих чисел на 18 менший від добутку двох наступних чисел.

1046. Знайдіть три послідовні натуральні числа, якщо квадрат більшого із цих чисел на 10 більший за добуток інших двох чисел.

1047*. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2+2x=0$;
2) $y^2+3y-5y-15=0$;
3) $x^3-4x^2-x+4=0$;
4) $5y^3+3y^2=20y+12$.

1048*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(2\frac{1}{18}-\left(1\frac{1}{27}-\left(x-\frac{1}{9}\right)\right)\right)+3\frac{5}{54}=5$;

2) $\left(\left(6\frac{3}{7}-\frac{0,75x-2}{0,35}\right)2,8-1\frac{3}{4}\right):\frac{1}{20}=165$;

3) $\left(6,2+3\frac{9}{16}:\left(\frac{2,75}{3,5y-45}-\frac{7}{24}\right)\right)\frac{3}{38}=1\frac{1}{5}$;

4) $\left(3,25-\frac{0,53\left(4\frac{7}{12}-2,5y\right)}{0,75}\right):6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$.

1049*. Розв'яжіть рівняння, якщо $a\neq 0$:

1) $ax+1=5-2x$;
2) $(a-1)x+2=a+1$;
3) $(a^2-4)x+2=a$;
4) $a(y-b)=b\,(a-2)+2y$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1050. Мотузку завдовжки 48 м треба розрізати на 3 частини, довжини яких відносяться, як 2 : 3 : 7. Знайдіть довжину кожної частини мотузки.

1051. Садову ділянку, довжина якої у 2 рази більша за ширину, обгородили парканом завдовжки 240 м. Визначте розміри цієї ділянки.

1052. Чи можна визначити, яка з двох ділянок землі матиме більшу площу, якщо: 1) довжина першої ділянки вдвічі більша за її ширину, а довжина другої — утричі більша за її ширину; 2) обидві ділянки мають огорожу однакової довжини?

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1053. Обчисліть значення виразу $2b-5(2-4b)+2(6-9b)-2$, якщо:
1) $b=0,5$; 2) $b=-20$.

1054. Точка C лежить на відрізку AB, $AB=20$ см, $AC-CB=2$ см. Знайдіть довжину відрізків AC і CB.

§ 21. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Ви знаєте, що рівняння можуть бути як з однією змінною, так і з двома змінними. Наприклад, $5(2x + y) = 15$ — це рівняння з двома змінними x і y.

На відміну від рівняння з однією змінною, рівняння з двома змінними може задовольняти лише *пара значень змінних*, які входять до нього. Наприклад, рівняння $5(2x+y)=15$ задовольняють такі пари значень x і y, як: -1 і 5, 0 і 3, 2 і -1 тощо. Узагалі для даного рівняння таких пар чисел — безліч. Справді, з даного рівняння випливає, що $2x+y=3$. Звідси $y=-2x+3$, а вираз $-2x+3$ має зміст для будь-яких значень x. Отже, яким би не було значення x, існує таке відповідне йому значення y, що в парі зі значенням x задовольняє дане рівняння.

Зрозуміло, що пара чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, є *упорядкованою*. Справді, рівняння $5(2x+y)=15$ задовольняє, наприклад, пара значень змінних $x=2$ і $y=-1$:

$$5 \cdot (2 \cdot 2 + (-1)) = 15.$$

А от пара значень змінних $x = -1$ і $y = 2$ не задовольняє дане рівняння:

$$5 \cdot (2 \cdot (-1) + 2) \neq 15.$$

Упорядковану пару чисел a і b коротко записують так: $(a; b)$.

Зверніть увагу:

для рівнянь із двома (чи більше) змінними термін «корінь» не використовують.

Запам'ятайте!

Упорядкована пара чисел, що задовольняє рівняння з двома змінними, називається *розв'язком* цього *рівняння*.

Щоб описати всі розв'язки рівняння з двома змінними, шукають так званий *загальний розв'язок*, тобто формулу, яка виражає залежність однієї змінної від іншої в цьому рівнянні. Наприклад, для рівняння $5(2x + y) = 15$ загальний розв'язок має вигляд: $2x + y = 3$ або, що те саме, $y = -2x + 3$ чи $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$.

Серед рівнянь із двома змінними виділяють особливий їх вид — лінійні рівняння.

Запам'ятайте!

Рівняння виду $ax + by + c = 0$, де x і y — змінні, a, b і c — деякі числа, називається *лінійним рівнянням із двома змінними*.

Числа a, b і c називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння з двома змінними. Число c інакше називають *вільним членом* даного рівняння.

? Чи можна вважати лінійним рівнянням із двома змінними рівняння виду $ax + by = d$? Так. Це інша форма запису лінійного рівняння з двома змінними.

Залежно від того, яких значень набувають коефіцієнти a, b і c, лінійне рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$ може мати розв'язки або не мати їх.

Рівняння $ax + by + c = 0$ не має розв'язків лише тоді, коли $a = 0$, $b = 0$, а вільний член $c \neq 0$. Справді, за таких значень коефіцієнтів дане рівняння набуває вигляду: $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$. Але не існує такої пари значень x і y, яка б задовольняла це рівняння.

В усіх інших випадках рівняння $ax + by + c = 0$ має безліч розв'язків. Проте лише тоді, коли $a \neq 0$ і $b \neq 0$, значення x і y залежать одне від одного. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння $ax + by + c = 0$ можна подати або як залежність y від x, або як залежність x від y:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ або } x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}.$$

Якщо хоча б один із коефіцієнтів a чи b дорівнює 0, то відповідно або y набуває лише одного числового значення, або x, а друга змінна може набувати будь-яких значень:

якщо $a=0$, то $y=-\frac{c}{b}$, x — будь-яке число;

якщо $b=0$, то $x=-\frac{c}{a}$, y — будь-яке число.

Якщо всі три коефіцієнти рівняння $ax+by+c=0$ дорівнюють 0, то це рівняння задовольняє будь-яка пара чисел і таких пар — безліч.

Лінійні рівняння з двома змінними, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Рівняння з двома змінними, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними. Властивості рівносильності лінійних рівнянь із двома змінними аналогічні таким самим властивостям рівнянь з однією змінною. Сформулюйте їх самостійно.

Шукаючи розв'язки лінійного рівняння з двома змінними, використовують властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення виразів.

Задача 1. Знайдіть три розв'язки рівняння $5x+2y-11=0$.

Розв'язання. Задачу можна розв'язати двома способами.
Спосіб 1. Оберемо довільно три значення змінної x, а потім знайдемо значення змінної y, розв'язуючи відповідне рівняння:
1) нехай $x=0$, тоді $5\cdot0+2y-11=0$, звідси $2y=11$ і $y=5{,}5$;
2) нехай $x=4$, тоді $5\cdot4+2y-11=0$, звідси $2y=-9$ і $y=-4{,}5$;
3) нехай $x=-1$, тоді $5\cdot(-1)+2y-11=0$, звідси $2y=16$ і $y=8$.
Отже, серед розв'язків даного рівняння є пари чисел: (0; 5,5), (4; –4,5) і (–1; 8).

Спосіб 2. Знайдемо загальний розв'язок даного рівняння. Для цього виразимо, наприклад, y через x:
$5x+2y-11=0,$
$2y=-5x+11, \mid :2$
$y=-2{,}5x+5{,}5.$
Тоді:
1) якщо $x=0$, то $y=-2{,}5x+5{,}5=-2{,}5\cdot0+5{,}5=5{,}5$;
2) якщо $x=4$, то $y=-2{,}5x+5{,}5=-2{,}5\cdot4+5{,}5=-4{,}5$;
3) якщо $x=-1$, то $y=-2{,}5x+5{,}5=-2{,}5\cdot(-1)+5{,}5=8$.
Отже, серед розв'язків даного рівняння є пари чисел: (0; 5,5), (4; –4,5) і (–1; 8).

Зверніть увагу:

щоб знайти загальний розв'язок лінійного рівняння з двома змінними x і y, достатньо розв'язати це рівняння відносно однієї з його змінних:

— розв'язати відносно y рівняння $ax+by+c=0$ — означає перетворити дане рівняння так, щоб усамітнити змінну y, тобто виразити y через x;

— розв'язати відносно x рівняння $ax+by+c=0$ — означає перетворити дане рівняння так, щоб усамітнити змінну x, тобто виразити x через y.

Рівняння з двома змінними, так само, як і рівняння з однією змінною, можна поділити на види і за іншою основою — залежно від степеня многочлена, який породжує дане рівняння. Якщо многочлен першого степеня, то і відповідне рівняння є рівнянням першого степеня.

? Чи кожне лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням першого степеня? Ні. Наприклад, лінійні рівняння $0\cdot x+0\cdot y+c=0$ і $0\cdot x+0\cdot y+0=0$ не є рівняннями першого степеня.

Дізнайтеся більше

Мал. 63

1. «Коротка книга поповнення і протиставлення» (від арабського кітаб аль-джебр вальмукабале) — відома книга арабського вченого Мухаммеда ібн Муси аль-Хорезмі, від назви якої започаткували термін «алгебра». Ця книга є важливою віхою становлення алгебри як науки про розв'язування рівнянь. Вона століттями визначала характер алгебри як практичної науки. Книга ділиться на три частини: рівняння першого та другого степенів із вправами; практична тригонометрія; розв'язування задач на поділ спадщини. На малюнку 63 наведено першу сторінку книги. Аль-Хорезмі в цій книзі започаткував традицію поводитися з рівняннями так, як торговець поводиться з гирями на терезах. Він запропонував рівняння розглядати як рівність мас на обох шальках терезів. А для них можна проводити такі перетворення: докладати на обидві шальки терезів гирі однакові маси або знімати їх.

2. Розглядаючи особливості лінійних рівнянь з однією чи двома змінними, ми записували такі рівняння в загальному вигляді: $ax + b = 0$ та $ax + by + c = 0$. Їх коефіцієнти a і b та a, b і c ми вважали деякими числами (а не змінними!), які можуть набувати будь-яких значень. Якщо змінювати значення коефіцієнтів у загальному рівнянні, щоразу будемо отримувати нове конкретне рівняння, але того самого вигляду: $3x + 1 = 0$, $-2x + 5 = 0$ чи $0{,}25x - 8 = 0$ тощо. У математиці такі фіксовані, але невідомі для даного загального рівняння числа, інакше називають *параметрами* (від грец. παραμετρεω — відмірюю, розмірюю). Отже, будь-яке рівняння, записане в загальному вигляді, можна вважати *рівнянням з параметрами* (одним чи кількома).
Розв'язати рівняння з параметрами означає: 1) знайти всі набори значень параметрів (їх називають *контрольними значеннями параметрів*), за яких дане рівняння або має розв'язок, або не має його, або має якісь особливості розв'язку, що відрізняють цей розв'язок від інших розв'язків; 2) для кожного значення параметра (набору значень параметрів, якщо параметрів — кілька) знайти всі корені або вказати, за яких значень параметра рівняння коренів не має. Отже, розв'язування рівняння з параметрами розбивають на кілька випадків (залежно від контрольних значень параметрів), щоб для кожного з них записати відповідь через параметри однозначно. Розглянемо приклади.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $ax = 10$ відносно x.

Розв'язання. У рівнянні $ax = 10$ параметр a є коефіцієнтом біля змінної x. Тому, якщо $a = 0$, то рівняння стане особливим — воно не матиме розв'язку. Справді, у цьому випадку дане рівняння набуде вигляду: $0 \cdot x = 10$. А таке рівняння не має коренів. Для всіх інших значень параметра a розв'язок існує і його можна подати в загальному вигляді: $x = \frac{10}{a}$. Коротко розв'язання задачі можемо записати так.
1. Нехай $a = 0$, тоді $0 \cdot x = 10$ — коренів немає.
2. Нехай $a \neq 0$, тоді $x = \frac{10}{a}$ — корінь рівняння.

Відповідь: якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{10}{a}$; якщо $a = 0$, то коренів немає.

Задача 2. За яких значень параметра a рівняння $(a-2)y=a^2-4$ має безліч коренів?

Розв'язання. Рівняння $(a-2)y=a^2-4$ є лінійним рівнянням з однією змінною y. Таке рівняння матиме безліч коренів, якщо набуде вигляду $0 \cdot y=0$. Отже, для розв'язання задачі достатньо розглянути один випадок, коли одночасно $a-2=0$ і $a^2-4=0$. Із першої рівності отримуємо: $a=2$. Другу рівність перетворимо так: $(a-2)(a+2)=0$, звідси дістанемо: $a=2$ або $a=-2$. Рівності $a-2=0$ і $a^2-4=0$ справджуються одночасно лише тоді, коли $a=2$. Справді, якщо $a=-2$, то задане рівняння набуває вигляду: $-4 \cdot y=0$. А таке рівняння має єдиний корінь — 0, що не передбачено вимогою задачі. Отже, лише за $a=2$ рівняння $(a-2)y=a^2-4$ має безліч коренів.

Відповідь: $a=2$.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке лінійне рівняння з двома змінними?
2. Що є розв'язком лінійного рівняння з двома змінними?
3. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з двома змінними?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1055'. Назвіть коефіцієнти лінійного рівняння з двома змінними: 1) $2x+3y-16=0$; 2) $5x-y+12=0$; 3) $x-2y-1=0$; 4) $5x-15y=0$. Яке число є вільним членом даного рівняння?

1056'. Чи є лінійним рівнянням із двома змінними таке рівняння:

1) $3x+4y=1$; 2) $2y+2=0$; 3) $3x-\frac{1}{3}y+5=0$; 4) $3x-8=0$?

Відповідь поясніть.

1057'. Чи є розв'язком рівняння $x-y+5=0$ є пара чисел:
1) $(-2; 3)$; 2) $(0; -5)$; 3) $(1; 4)$; 4) $(0; 5)$?

1058°. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, якщо відомі його коефіцієнти:

1) $a=8$, $b=-5$, $c=4$;
2) $a=\frac{1}{7}$, $b=-0,2$, $c=2,5$;
3) $a=1$, $b=-1$, $c=-1$;
4) $a=2$, $b=-5$, $c=0$.

1059°. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, якщо відомі його коефіцієнти:

1) $a = -4$, $b = 2$, $c = 0$; 2) $a = 5$, $b = -1$, $c = 1$.

1060°. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:

1) (2; 8); 2) (–1; 5).

1061°. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел (–4; 0).

1062°. Виразіть змінну y через змінну x у рівнянні:

1) $3x + y - 5 = 0$; 3) $8x - 3y + 10 = 0$;

2) $-4x + 2y + 7 = 0$; 4) $3x - \frac{1}{3}y - 2 = 0$.

Знайдіть три будь-які розв'язки цього рівняння.

1063°. Виразіть змінну y через змінну x у рівнянні:

1) $4x + y + 7 = 0$; 2) $16x - 4y + 5 = 0$.

Знайдіть два будь-які розв'язки цього рівняння.

1064°. Запишіть загальний розв'язок даного рівняння, розв'язавши його відносно x:

1) $x + 2y - 8 = 0$; 3) $-8x - 16y + 2{,}4 = 0$;

2) $2x - 2y + 7 = 0$; 4) $4x - 1\frac{1}{7}y - 2 = 0$.

Знайдіть три будь-які розв'язки цього рівняння.

1065°. Запишіть загальний розв'язок даного рівняння, розв'язавши його відносно y:

1) $x - 5y + 12 = 0$; 2) $-7x - 14y + 1\frac{1}{6} = 0$.

Знайдіть два будь-які розв'язки цього рівняння.

1066. Знайдіть три будь-які розв'язки рівняння:

1) $4x + 2(y - 1) = 0$; 3) $5(2y - x) - 8 = 0$;

2) $6(x + 2) - 2y + 12 = 0$; 4) $9\left(y - \frac{1}{4}y\right) + 6 = 0$.

Розв'яжіть задачу двома способами.

1067. Знайдіть два будь-які розв'язки рівняння:

1) $2(2x - y) - 3 = 0$; 2) $8x - 5(y - 8x - 5\left(y - \frac{1}{4}\right) = 0) = 0$.

Розв'яжіть задачу двома способами.

1068. Розв'язком рівняння $4x + 0{,}1y - 1{,}3 = 0$ є пара чисел $(1;\ b)$. Знайдіть b.

1069. Розв'язком рівняння $0{,}5x + 2y - 1{,}5 = 0$ є пара чисел $(a;\ -1)$. Знайдіть a.

1070. Серед розв'язків рівняння $2x + y = 12$ знайдіть таку пару, яка б складалася із: 1) двох однакових чисел; 2) двох чисел, одне з яких удвічі більше за інше.

1071. Серед розв'язків рівняння $x - 3y = 16$ знайдіть таку пару, яка б складалася із: 1) двох протилежних чисел; 2) двох чисел, одне з яких утричі менше від іншого.

1072*. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язок якого має вигляд: 1) $(x; 5x - 1)$; 2) $(y; 2y + 4)$.

1073*. За якого значення n пара чисел $(-2; 1)$ є розв'язком рівняння:
1) $2x + ny - 4 = 0$;
2) $nx + 3y - 2,5 = 0$;
3) $x + 0,5y - n = 0$;
4) $5x + (n - 1)y - 2 = 0$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1074. Складіть лінійне рівняння з двома змінними за такими даними: 1) периметр прямокутника зі сторонами a см і b см дорівнює 80 см; 2) 2 кг цукерок і 3 кг печива коштують 125 грн; 3) за 3 год до зустрічі два автобуси проїхали відстань 300 км; 4) книжка дорожча за зошит на 12 грн.

1075. Складіть задачу, подібну до попередньої, про: 1) кількість дівчат і хлопців у вашому класі; 2) покупку зошитів у лінійку і в клітинку.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1076. Обчисліть значення виразу $\dfrac{a + 3b}{a - 3b}$, якщо:

1) $a = 4$, $b = -2$;
2) $a = -0,5$, $b = \dfrac{2}{3}$.

1077. Знайдіть три послідовні непарні числа, сума яких дорівнює 369.

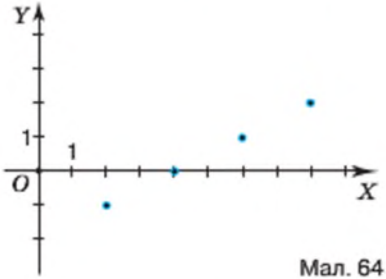
§ 22. ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Ви знаєте, що кожній упорядкованій парі чисел відповідає певна точка на координатній площині. Оскільки кожний розв'язок рівняння з двома змінними x і y — це упорядкована пара чисел, то всі його розв'язки можна зобразити точками на координатній площині. У цих точок абсциса — це значення змінної x, а ордината — відповідне значення змінної y. Відтак дістанемо *графік рівняння з двома змінними*.

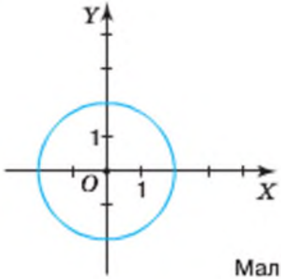
Запам'ятайте!

***Графіком рівняння з двома змінними* називається зображення на координатній площині всіх точок, координати яких задовольняють дане рівняння.**

Подивіться на малюнки 64 і 65. Ви бачите графік рівняння $0,5x - y = 2$, де x — парне одноцифрове число (мал. 64), і графік рівняння $x^2 + y^2 = 4$ (мал. 65). Перший графік містить усього чотири точки, оскільки змінні x і y можуть набувати лише по чотири відповідні значення. Другий же графік є лінією на координатній площині. Він містить безліч точок, оскільки змінна x може набувати будь-яких значень від –2 до 2 і таких чисел – безліч. Відповідних значень y теж безліч. Вони змінюються від – 2 до 2.

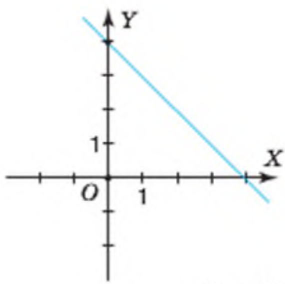


Мал. 64



Мал. 65

На малюнку 66 зображено графік рівняння $x + y = 4$. На відміну від графіка рівняння $x^2 + y^2 = 4$ (див. мал. 65), кожній абсцисі точок даного графіка відповідає єдина ордината. А це означає, що на малюнку 66 зображено графік функції. Переконайтеся самостійно, що графік рівняння на малюнку 64 також є графіком функції.



Мал. 66

Зверніть увагу:

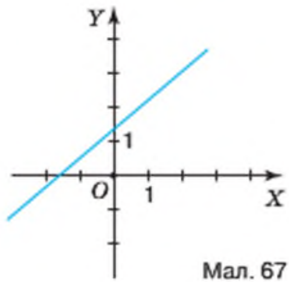
не в кожного рівняння його графік є графіком функції, проте кожен графік функції є графіком деякого рівняння.

Рівняння $x + y = 4$ є лінійним рівнянням із двома змінними. Розв'язавши його відносно y, дістанемо: $y = -x + 4$. Отриману рівність можна розуміти як формулу, що задає лінійну функцію $y = -x + 4$. Графіком такої функції є пряма. Отже, графіком лінійного рівняння $x + y = 4$, який зображено на малюнку 66, є пряма.

Чи можна стверджувати, що графік будь-якого лінійного рівняння з двома змінними є прямою? Ні. Наприклад, лінійне рівняння $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ задовольняє будь-яка пара чисел, а тому графік цього рівняння містить усі точки координатної площини.

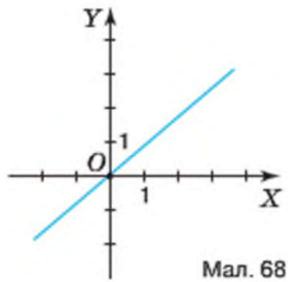
З'ясуємо, що є графіком лінійного рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$, залежно від значень коефіцієнтів a, b і c. Можливими є такі випадки.

1. Нехай $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ можна подати у вигляді: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Дістали рівність, що задає лінійну функцію $y(x)$. Її графіком, а значить, і графіком даного рівняння, є **пряма, що не проходить через початок координат** (мал. 67).



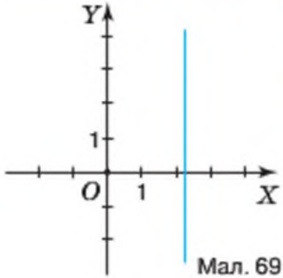
Мал. 67

2. Нехай $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $ax + by + 0 = 0$, або $y = -\frac{a}{b}x$. Дістали рівність, що задає пряму пропорційність $y(x)$. Її графіком, а значить, і графіком даного рівняння, є **пряма, що проходить через початок координат** (мал. 68).



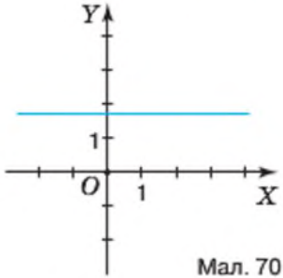
Мал. 68

3. Нехай $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $ax + 0 \cdot y + c = 0$, або $x = -\frac{c}{a}$.



Мал. 69

Дістали рівність, що не задає функцію $y(x)$. Цю рівність задовольняють такі пари чисел $(x; y)$, у яких $x = -\frac{c}{a}$, а y — будь-яке число. На координатній площині ці точки лежать на прямій, паралельній осі OY. Отже, графіком даного рівняння є **пряма, паралельна осі ординат** (мал. 69).



Мал. 70

4. Нехай $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $ax + 0 \cdot y + 0 = 0$, або $x = 0$. Цю рівність задовольняють такі пари чисел $(x; y)$, у яких $x = 0$, а y — будь-яке число. На координатній площині ці точки лежать на осі OY. Отже, графіком даного рівняння є **пряма, що збігається з віссю ординат.**

5. Нехай $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $0 \cdot x + by + c = 0$, або $y = -\frac{c}{b}$. Ця рівність задає функцію $y(x)$, що набуває тих самих значень для будь-яких значень x, тобто є сталою. Її графіком, а значить, і графіком даного рівняння, є **пряма, паралельна осі абсцис** (мал. 70).

6. Нехай $a = 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $0 \cdot x + by + 0 = 0$, або $y = 0$. Отримали сталу функцію $y(x)$, у якої кожна точка графіка лежить на осі OX. Отже, графіком даного рівняння є **пряма, що збігається з віссю абсцис.**

7. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, або $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. А таке лінійне рівняння не має розв'язків, тому його **графік не містить жодної точки координатної площини.**

8. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді рівняння $ax + by + c = 0$ набуває вигляду $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$, або $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. А таке лінійне рівняння має безліч розв'язків, тому його **графіком є вся координатна площина.**

Можемо підсумувати отримані результати.

Запам'ятайте!

Графік лінійного рівняння з двома змінними $ax+by+c=0$:
- **є прямою, якщо або $a\neq 0$, або $b\neq 0$;**
- **є всією площиною, якщо $a=0$, $b=0$ і $c=0$;**
- **не містить жодної точки координатної площини, якщо $a=0$, $b=0$ і $c\neq 0$.**

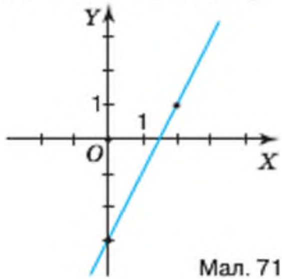
Задача. Побудуйте графік рівняння $2x-y-3=0$.

Розв'язання. Рівняння $2x-y-3=0$ є лінійним. Тому його графіком є пряма $y=2x-3$. Для її побудови достатньо задати дві точки, що належать цій прямій. Складемо таблицю значень y для двох довільних значень x, наприклад, для $x=0$ і $x=2$ (табл. 27).

Таблиця 27

x	0	2
y	–3	1

На координатній площині позначимо точки з координатами (0; –3) і (2; 1) та проведемо через них пряму (мал. 70). Ця пряма — шуканий графік рівняння $2x-y-3=0$.



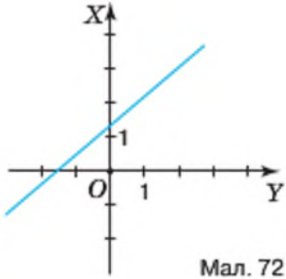
Мал. 71

Чи можна ототожнювати графік лінійного рівняння з двома змінними і графік рівняння першого степеня з двома змінними? Ні, оскільки існують лінійні рівняння, що не є рівняннями першого степеня. Наприклад, такими є рівняння $0\cdot x+0\cdot y+c=0$ і $0\cdot x+0\cdot y+0=0$.

Зверніть увагу:
- графік лінійного рівняння з двома змінними може бути прямою, всією площиною або не містити жодної точки координатної площини;
- графік рівняння першого степеня з двома змінними завжди є прямою.

Дізнайтеся більше

1. Нехай $a \neq 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння можна подати ще й у такому вигляді: $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$. Дістали лінійну функцію $x(y)$. Її графіком є пряма. Для побудови такого графіка треба по-іншому упорядкувати осі координат: першою координатною віссю (незалежної змінної) вважати вісь OY, а другою (залежної змінної) — вісь OX. Тоді вісь OY зручно розташувати горизонтально, а вісь OX — вертикально (мал. 72). Графік рівняння у цьому випадку теж буде порізному розміщуватися на координатній площині, залежно від значень коефіцієнтів b і c. Дослідіть це самостійно.



Мал. 72

2. **Микола Миколайович Боголюбов** (1909–1992) — видатний вітчизняний математик і механік, фізик-теоретик, засновник наукових шкіл з нелінійної механіки і теоретичної фізики, академік АН УРСР (від 1948) і АН СРСР (від 1953). Народився в м. Нижній Новгород Російської імперії. У 1921 р. сім'я переїхала до Києва. Після закінчення семирічної школи Боголюбов самостійно вивчав фізику та математику і з 14-ти років уже брав участь у семінарі кафедри математичної фізики Київського університету під керівництвом академіка Д. О. Граве. У 1924 р. в 15-річному віці Боголюбов написав першу наукову працю, а наступного року був прийнятий до аспірантури АН УРСР до академіка М. М. Крилова, яку закінчив у 1929 р., отримавши у 20 років ступінь доктора математичних наук.
У 1929 р. М.М. Боголюбов став науковим співробітником Української академії наук, у 1934 почав викладати в Київському університеті (від 1936 р. — професор). Із кінця 40-х років XX ст. одночасно працював у Росії. Був директором Об'єднаного інституту ядерних досліджень, а згодом — директором Математичного ін-

ституту імені В. А. Стєклова в Москві, викладав у Московському державному університеті імені Михайла Ломоносова. У 1966 р. став першим директором створеного ним Інституту теоретичної фізики АН УРСР у Києві, одночасно (1963–1988) він — академік-секретар Відділу математики АН СРСР.

М.М. Боголюбов — двічі Герой Соціалістичної Праці (1969, 1979), нагороджений Ленінською премією (1958), Державною премією СРСР (1947, 1953, 1984), Золотою медаллю ім. М.В. Ломоносова АН СРСР (1985).

21 вересня 2009 р. на фасаді Червоного корпусу Київського національного університету імені Тараса Шевченка була відкрита меморіальна дошка геніальному вченому-академіку Миколі Боголюбову на честь століття від дня його народження.

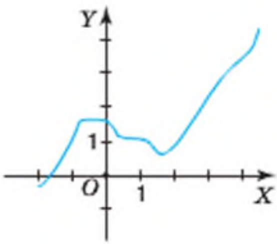
У 1992 р. Національною академією наук України була заснована Премія НАН України імені М. М. Боголюбова, яка вручається Відділенням математики НАН України за видатні наукові роботи в галузі математики і теоретичної фізики. На честь вченого була названа мала планета «22616 Боголюбов».

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

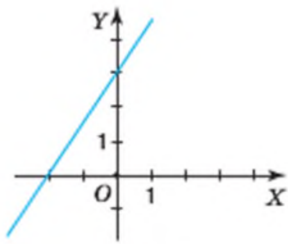
1. Що є графіком лінійного рівняння з двома змінними?
2. У якому випадку графіком рівняння з двома змінними є пряма; площина?
3. У якому випадку графік лінійного рівняння з двома змінними проходить через початок координат?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1078´. На якому з малюнків 73—74 зображено графік лінійного рівняння з двома змінними? Відповідь поясніть.



Мал. 73



Мал. 74

1079′. За яких значень коефіцієнтів a, b і c пряма $ax + by + c = 0$:
1) проходить через початок координат;
2) паралельна осі абсцис;
3) паралельна осі ординат;
4) збігається з віссю абсцис;
5) збігається з віссю ординат?

1080°. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку лінійного рівняння з двома змінними $6x - 2y + 1 = 0$ точка:
1) $A(-1; 2{,}5)$; 2) $B(0; 3{,}5)$; 3) $C(-2; 5{,}5)$; 4) $D(1{,}5; 5)$.

1081°. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку лінійного рівняння з двома змінними $3x + 3y - 5 = 0$ точка:
1) $A\left(-1; \dfrac{2}{5}\right)$; 2) $B\left(0; 1\dfrac{2}{5}\right)$.

1082°. Для даного лінійного рівняння з двома змінними знайдіть значення y, що відповідає заданому значенню x:
1) $2x + y - 4 = 0$, якщо $x = 0$;
2) $4x - 2y + 5 = 0$, якщо $x = 0$;
3) $3x + 3y - 1 = 0$, якщо $x = 2$;
4) $-5x - y + 6 = 0$, якщо $x = 2$.

1083°. Для даного лінійного рівняння з двома змінними знайдіть значення y, що відповідає заданому значенню x:
1) $3x - y + 2 = 0$, якщо $x = 0$; 2) $6x - 5y - 7 = 0$, якщо $x = 2$.

1084°. Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними:
1) $2x + y - 4 = 0$;
2) $6x - 2y + 12 = 0$;
3) $5x - 10y = 0$;
4) $-x + 2y + 8 = 0$;
5) $-\dfrac{2}{3}x - 2y + 4 = 0$;
6) $x - \dfrac{1}{4}y = 0$;
7) $5x - 10 = 0$;
8) $-2y + 4 = 0$;
9) $x - y = 0$.

1085°. Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними:
1) $4x + y - 3 = 0$;
2) $9x - 3y + 12 = 0$;
3) $-4x - 8y = 0$;
4) $10x - 5y - 1\dfrac{1}{4} = 0$;
5) $2x + 6 = 0$;
6) $y - 3 = 0$.

1086°. Знайдіть координати точки перетину графіка лінійного рівняння з двома змінними $2x - 3y - 18 = 0$ з віссю:
1) абсцис; 2) ординат.

1087°. Знайдіть координати точки перетину графіка лінійного рівняння з двома змінними $5x + 4y - 20 = 0$ з віссю:
1) абсцис; 2) ординат.

1088. На прямій, що є графіком рівняння $0{,}5x + 2y - 4 = 0$, позначено точку. Знайдіть ординату цієї точки, якщо її абсциса дорівнює:
1) 4; 2) –2.

1089. На прямій, що є графіком рівняння $4x + y - 1 = 0$, позначено точку, ордината якої дорівнює –3. Знайдіть абсцису цієї точки.

1090. Доведіть, що графіки рівнянь $4x - 3y - 11 = 0$, $5x + 2y - 8 = 0$ і $0{,}5x - y - 2 = 0$ проходять через точку $A\ (2; -1)$.

1091. Доведіть, що графіки рівнянь $2x - 5y + 11 = 0$ і $-x + 2y - 5 = 0$ проходять через точку $B\ (-3; 1)$.

1092. Побудуйте графік рівняння:

1) $2(x + 1) = y + 4$;
2) $2(3y - 1{,}5) - 3(1 - 2x) = 0$;
3) $(x - y) + 2(x + y) = 5$;
4) $3(x - 1) = 4y - 3$;
5) $\dfrac{x - 2y}{3} = -2$;
6) $\dfrac{2x - y}{2} - 1 = y - 2$;
7) $x - 4 = 2(y + 0{,}5x)$;
8) $2y - x + 2(4x - y) = 6$.

1093. Побудуйте графік рівняння:

1) $x + 1 = 5(2y - 1)$;
2) $4(x - 2) = 2 - (y + 10)$;
3) $\dfrac{2 - y}{5} = x - 1$;
4) $\dfrac{x + y}{9} - \dfrac{x - y}{3} = -20$;
5) $4(x - y) = 4 - 4y$;
6) $7x - 2y = 2(1 + 3{,}5x)$.

1094*. Графік лінійного рівняння з двома змінними проходить через точку $A(3; -2)$. Знайдіть невідомий коефіцієнт рівняння:
1) $ax + 3y - 3 = 0$; 2) $2x - by + 8 = 0$; 3) $-x + 3y - c = 0$.

1095*. Визначте вид чотирикутника, вершинами якого є точки перетину графіків рівнянь:
$x - y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $-x - y + 4 = 0$, $-x - y - 4 = 0$.

1096*. Побудуйте графік рівняння:

1) $a - 4b + 1 = 0$;
2) $0 \cdot a + 2b + 6 = 0$;
3) $3a + 0 \cdot b - 12 = 0$;
4) $0 \cdot a + 0 \cdot b + 5 = 0$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1097. Складіть лінійне рівняння з двома змінними за такими даними: 1) 3 кг цукерок і 2 кг печива коштують 120 грн; 2) 2 ручки дорожчі за 5 олівців на 20 грн. Побудуйте графік складеного рівняння.

1098. Побудуйте графік рівняння до задачі про: 1) кількість дівчат і хлопців у вашому класі; 2) покупку зошитів у лінійку й у клітинку.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1099. Турист пройшов 12 км за 3 год. За скільки годин турист подолає відстань 20 км із такою самою швидкістю руху?

1100. Якою має бути швидкість поїзда за новим розкладом, щоб він міг проїхати відстань між двома станціями за 2,5 год, якщо відповідно до старого розкладу, рухаючись зі швидкістю 100 км/год, він долав її за 3 год?

§ 23. СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Ви вже знаєте, як розв'язати задачу за допомогою лінійного рівняння з однією змінною. За допомогою лінійних рівнянь із двома змінними також можна розв'язувати задачі. Розглянемо приклад.

Задача 1. Сума двох чисел дорівнює 3, а різниця подвоєного першого числа і потроєного другого числа дорівнює 11. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. У задачі два невідомі числа. Нехай перше число дорівнює x, а друге — y. Сума цих чисел дорівнює 3, отже, маємо рівняння: $x + y = 3$. За умовою, різниця подвоєного першого числа і потроєного другого числа дорівнює 11, отже, маємо рівняння: $2x - 3y = 11$. Ми склали два лінійні рівняння з двома змінними. Шукані числа мають задовольняти обидва рівняння одночасно. Щоб це показати, запишемо отримані рівняння одне під одним і об'єднаємо їх фігурною дужкою:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - 3y = 11. \end{cases}$$

Дістали *систему двох лінійних рівнянь із двома змінними*. Якщо дібрати таку пару чисел $(x; y)$, яка задовольнятиме обидва рівняння системи, то систему буде розв'язано. Застосувавши *спосіб перебору*, отримаємо пару чисел $(4; -1)$, яка задовольняє систему. Справді:

$$\begin{cases} 4 + (-1) = 3, \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11. \end{cases}$$

Отже, одним із шуканих чисел є число 4, а другим — число -1.

Запам'ятайте!

Розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними **називають таку пару чисел (x; y), яка одночасно є розв'язком кожного рівняння системи.**

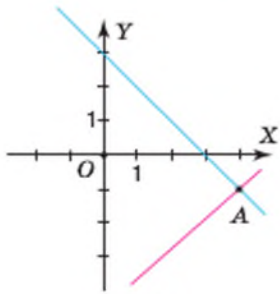
Розв'язати систему рівнянь **— означає знайти всі її розв'язки або встановити, що розв'язків немає.**

У загальному вигляді систему двох лінійних рівнянь із двома змінними записують так: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$

Розв'язуючи задачу 1, ми застосували спосіб перебору, який не завжди є зручним. Знайти потрібну пару чисел можна за допомогою графіків рівнянь системи. Координати точки перетину цих графіків є розв'язком системи. Такий спосіб розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними називають *графічним*.

Подивіться на малюнок 75. Ви бачите, що в одній системі координат побудовано графіки рівнянь $x + y = 3$ і $2x - 3y = 11$, які склали за умовою задачі 1. Ці прямі перетинаються в точці $A(4; -1)$. Координати цієї точки одночасно є розв'язком і першого, і другого рівнянь системи $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$.

Отже, пара чисел $(4; -1)$ є розв'язком цієї системи, а значить, вона дає відповідь і до самої задачі 1.



Мал. 75

Зверніть увагу:

щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом, треба:

1) в одній системі координат побудувати графік кожного з рівнянь системи;
2) визначити координати точки перетину цих графіків, якщо це можливо.

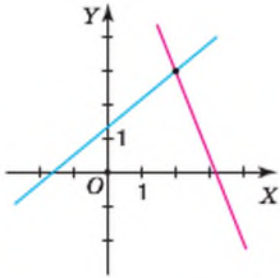
Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними? Поміркуємо, спираючись на графіки рівнянь системи.

Із курсу геометрії ви знаєте, що на площині дві прямі або перетинаються, або паралельні, або збігаються. Отже, для системи двох лінійних рівнянь із двома змінними можливі три випадки:

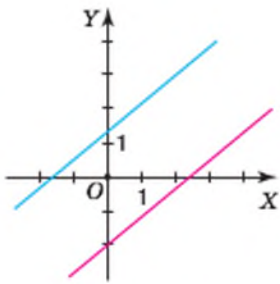
— система має єдиний розв'язок (мал. 76), якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

— система не має розв'язків (мал. 77), якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

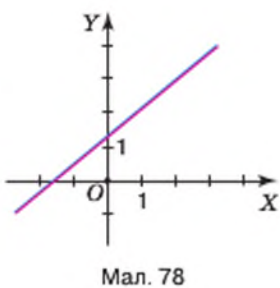
— система має безліч розв'язків (мал. 78), якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.



Мал. 76



Мал. 77



Мал. 78

Задача 2. Розв'яжіть графічно систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 2x - y = -3. \end{cases}$

Розв'язання. У рівняннях системи відповідні коефіцієнти при x і y не пропорційні: $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$, тому система має єдиний розв'язок. Зведемо рівняння системи до вигляду лінійної функції, розв'язавши кожне з них відносно y:

$$\begin{cases} y = -3x - 2, \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

Для кожного рівняння системи визначимо дві точки, через які проходить його графік, склавши таблицю значень відповідної функції.

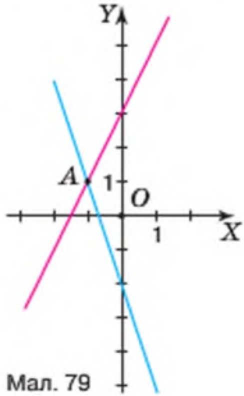
$y = -3x - 2$

x	0	1
y	−2	−5

$y = 2x + 3$

x	0	1
y	3	5

На координатній площині побудуємо графіки лінійних рівнянь: $3x + y = -2$ через точки (0; –2) і (1; –5) та $2x - y = -3$ через точки (0; 3) і (1; 5). Побудовані прямі (мал. 79) перетинаються в точці $A(-1; 1)$. Отже, пара чисел (–1; 1) є шуканим розв'язком системи, заданої в умові задачі.



Мал. 79

Чи можна побудувати графік лінійного рівняння, не зводячи його до вигляду лінійної функції? Так. Можна визначити координати точок, що лежать на осях. Наприклад, для рівняння $x - y = -2$ це точки (0; 2) і (–2; 0).

Використання графічного способу розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними, як і способу перебору, викликають певні утруднення: прямі не завжди зручно зображати в зошиті або складно точно визначити координати точки перетину. У наступному параграфі ви дізнаєтеся про інші способи розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними.

Дізнайтеся більше

1. **Володимир Йосипович Левицький** (1872—1956) є «основоположником математичної культури нашого народу», — так сказав про Володимира Левицького академік Михайло Кравчук. І мав на це всі підстави. Вважалося, що саме професор В. Й. Левицький першим написав українською мовою справжню фахову статтю з математики. Він був незмінним редактором першого українського наукового часопису з природничих наук, приділяв значну увагу згуртуванню математиків-українців для наукової роботи. Великою заслугою В. Левицького було те, що він зібрав і впорядкував матеріали з української математичної термінології, що була надрукована в 1903 р.
2. Задачі, що відповідають сучасним задачам на складання і розв'язування систем рівнянь із кількома змінними, зустрічаються ще у вавилонських і єгипетських рукописах II ст. до н.е.,

а також у працях давньогрецьких, індійських і китайських мудреців. У китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» у словесній формі викладено правила розв'язування систем рівнянь, описано деякі закономірності пошуку розв'язків. Книга була остаточно відредагована фінансовим чиновником Чжан Цаном (помер у 150 р. до н. е.) і була призначена для землемірів, інженерів, чиновників і торговців. У ній зібрано 246 задач.

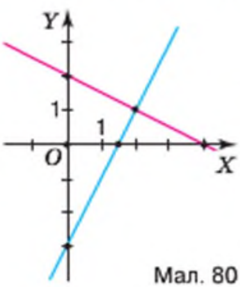
ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Що називають розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
3. Що означає — розв'язати систему лінійних рівнянь із двома змінними?
4. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом?
5. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?

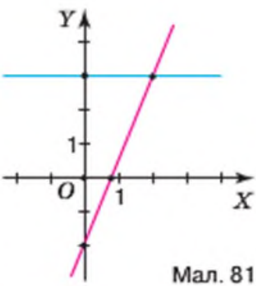
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1101´. Перевірте, чи є розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними $\begin{cases} x+y-6=0, \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ пара чисел: 1) (1; 5); 2) (2; 4)?

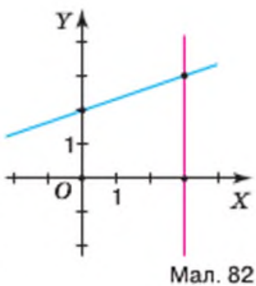
1102´. Назвіть розв'язок систем двох лінійних рівнянь із двома змінними за малюнками 80—82.



Мал. 80



Мал. 81



Мал. 82

1103´. Перше рівняння системи має вигляд $3x - y + 5 = 0$. Наведіть приклади коефіцієнтів другого рівняння системи, щоб система: 1) мала один розв'язок; 2) не мала розв'язків; 3) мала безліч розв'язків.

1104°. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, якщо система: 1) не має розв'язків; 2) має безліч розв'язків.

1105°. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел: 1) (1; 3); 2) (–1; 2); 3) (0; 5); 4) (0; 0).

1106°. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел: 1) (2; 0); 2) (1; –2).

1107°. Розв'яжіть графічно систему двох лінійних рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y - 4 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 9 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2x - y - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ 4x + y - 2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ -2x + 5y - 10 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ 6x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

1108°. Розв'яжіть графічно систему двох лінійних рівнянь з двома змінними:

1) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x - y - 1 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x - y - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ 6x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

1109. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:
1) $2x + y - 7 = 0$ і $2x - y = 1$; 2) $3x + y - 2 = 0$ і $x + 2y + 6 = 0$.

1110. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:
$2x + y - 1 = 0$ і $-x + y - 4 = 0$.

1111. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x - y = -7, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x - 4) + 3(y + 1) + 3 = 0, \\ 4(x + 1) - 2(y - 1) - 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x - 2y = 9, \\ 7x + 2y = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{2y - x}{3} = 1, \\ 3(x - 1) = 2y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = -6, \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3(x + 1) = 4y + 1, \\ \dfrac{3x + 2y + 2}{6} = x + y. \end{cases}$

1112. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x-y=7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ -2x+5y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x-1)+2(y-1)+8=0, \\ 3(2-x)-5(1+y)-13=0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2}=x-1, \\ 5(x-1)=1+4x-y. \end{cases}$

1113. До рівняння $x-y+2=0$ доберіть друге рівняння так, щоб отримана система двох лінійних рівнянь із двома змінними: 1) мала один розв'язок; 2) не мала розв'язків; 3) мала безліч розв'язків.

1114. До рівняння $-x+y-1=0$ доберіть друге рівняння так, щоб отримана система двох лінійних рівнянь із двома змінними:
1) мала один розв'язок;
2) не мала розв'язків;
3) мала безліч розв'язків.

1115*. За якого значення a прямі $x-2y=4$ і $2x+y=a$ перетинаються в точці, що лежить на осі:
1) абсцис; 2) ординат?

1116*. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x+ay=10, \\ 3x+2y=9, \end{cases}$ якщо пара чисел (–2; 4) є розв'язком першого рівняння системи.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1117. Тетянка за 3 зошити і 2 ручки заплатила 16 грн, а Сергійко за ручку і 4 зошити — 13 грн. Скільки коштує зошит і скільки коштує ручка? Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними та розв'яжіть її графічно.

1118. Складіть задачу, подібну до попередньої задачі, та розв'яжіть її графічним способом.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1119. Туристи відправились у триденний похід. За перший день вони пройшли $\frac{4}{15}$ усього шляху, за другий — $\frac{1}{2}$ решти, а за третій — останні 11 км. Який шлях подолали туристи за три дні?

1120. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{2x-3}{4}=2{,}5x;$
2) $\dfrac{8y+7}{6}-\dfrac{5y-2}{2}-\dfrac{2y-3}{4}=3.$

§ 24. АНАЛІТИЧНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Ви вже знаєте, що систему лінійних рівнянь із двома змінними можна розв'язати графічно. Проте існують інші, більш точні способи розв'язування таких систем — *аналітичні способи*. У цьому параграфі ви дізнаєтесь про два з них.

До аналітичних способів розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними відносять *спосіб підстановки* і *спосіб додавання*.

1. Спосіб підстановки

Задача 1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 5x - 2y = 21. \end{cases}$

Розв'язання. У першому рівнянні виразимо y через x:
$y = -2x + 12$.
Отриманий вираз $-2x + 12$ підставимо замість y у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} y = -2x + 12, \\ 5x - 2 \cdot (-2x + 12) = 21. \end{cases}$$

Дістали, що друге рівняння системи містить лише одну змінну x. Розв'яжемо його:
$5x + 4x - 24 = 21$,
$9x = 45$,
$x = 5$.
Отримане число 5 підставимо замість x у перше рівняння системи. Дістали рівняння з однією змінною y. Розв'яжемо його:
$y = -2 \cdot 5 + 12$,
$y = 2$.
Отже, пара чисел (5; 2) є розв'язком даної системи.

Коротко розв'язання цієї системи можна записати так:

$$\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 5x - 2y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x + 12, \\ 5x - 2 \cdot (-2x + 12) = 21. \end{cases}$$

$5x + 4x - 24 = 21$,
$9x = 45$,
$x = 5$.

$\begin{cases} y = -2\cdot 5 + 12, \\ x = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2, \\ x = 5. \end{cases}$

Відповідь: (5; 2).

Зверніть увагу:

щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки, треба:

1) з'ясувати, у якому рівнянні системи та яку змінну зручніше виразити через іншу;
2) в обраному рівнянні виразити обрану «зручну» змінну через іншу;
3) підставити знайдений вираз в інше рівняння системи;
4) розв'язати отримане рівняння відносно «зручної» змінної;
5) підставити отриманий корінь у те рівняння системи, з якого виразили «зручну» змінну через іншу;
6) розв'язати отримане рівняння відносно іншої змінної;
7) записати пару чисел, яка є розв'язком системи.

2. Спосіб додавання

Задача 2. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x + 3y = 10, \\ 5x - 3y = -4. \end{cases}$

Розв'язання. У рівняннях даної системи коефіцієнти біля змінної y є протилежними числами 3 і –3, тому, якщо додати $3y$ і $-3y$, то ці доданки взаємно знищаться. Саме на цьому ґрунтується суть способу додавання — два рівняння системи додають, щоб позбутися однієї змінної й отримати рівняння з однією змінною.

Додамо обидва рівняння системи. Для цього суму лівих частин цих рівнянь прирівняємо до суми їх правих частин:

$x + 3y + 5x - 3y = 10 + (-4)$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$6x = 6$,

$x = 1$.

Підставимо замість x число 1 в одне з рівнянь заданої системи, наприклад, у перше рівняння, та розв'яжемо його:

$1 + 3y = 10$,

$3y = 9$,

$y = 3$.

Отже, пара чисел (1; 3) є розв'язком даної системи.

Коротко розв'язання цієї системи можна записати так:

$$\begin{cases} x+3y=10, \\ 5x-3y=-4; \end{cases}$$

$$\underline{}$$

$6x=6,$

$x=1.$

$$\begin{cases} x+3y=10, \\ x=1; \end{cases} \begin{cases} 1+3y=10, \\ x=1; \end{cases} \begin{cases} 3y=9, \\ x=1; \end{cases} \begin{cases} y=3, \\ x=1. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 3).

? Чи можна розв'язати способом додавання систему в задачі 1? Так. Для цього треба помножити на 2 перше рівняння системи. Тоді коефіцієнти біля y в обох її рівняннях стануть протилежними числами 2 і –2, а доданки $2y$ і $-2y$ взаємно знищаться під час додавання рівнянь системи:

$$\begin{cases} 2x+y=12, \; \big| \cdot 2 \\ 5x-2y=21; \end{cases} \begin{cases} 4x+2y=24, \\ 5x-2y=21; \end{cases}$$

$9x=45.$

? Чи можна перетворити рівняння цієї системи так, щоб під час додавання її рівнянь взаємно знищились доданки зі змінною x? Так. Для цього треба перше рівняння системи помножити на 5, а друге — на (–2).

Зверніть увагу:

щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання, треба:

1) з'ясувати, для якої змінної її коефіцієнти в обох рівняннях зручно перетворити на протилежні числа;
2) для коефіцієнтів «зручної» змінної знайти додаткові множники, які дозволять перетворити ці коефіцієнти на протилежні числа;
3) відповідно помножити рівняння системи на ці додаткові множники;
4) додати отримані рівняння та розв'язати рівняння-суму як рівняння відносно другої змінної;
5) підставити знайдений корінь в одне з рівнянь системи;
6) розв'язати отримане рівняння як рівняння відносно «зручної» змінної;
7) записати пару чисел, яка є розв'язком системи.

Задача 3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17. \end{cases}$

Розв'язання. Дану систему можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1 (підстановки).

$$\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17; \end{cases} \begin{cases} 2x=12+3y, \\ 3x-4y=17; \end{cases} \begin{cases} x=6+1{,}5y, \\ 3(6+1{,}5y)-4y=17. \end{cases}$$

$$18+4{,}5y-4y=17,$$
$$0{,}5y=-1,$$
$$y=-2.$$

$$\begin{cases} y=-2, \\ x=6+1{,}5y; \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ x=6+1{,}5\cdot(-2); \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ x=3. \end{cases}$$

Отже, (3; –2) — шуканий розв'язок системи.

Спосіб 2 (додавання).

$$\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17; \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{matrix} \right. \quad \begin{cases} 6x-9y=36, \\ -6x+8y=-34. \end{cases}$$

$$-y=2,$$
$$y=-2.$$

$$\begin{cases} y=-2, \\ 2x-3y=12; \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ 2x-3\cdot(-2)=12; \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ 2x+6=12; \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ x=3. \end{cases}$$

Отже, (3; –2) — шуканий розв'язок системи.

За допомогою систем двох лінійних рівнянь із двома змінними розв'язують задачі, що містять дві невідомі величини.

Задача 4. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 310 км, виїхали назустріч один одному два автомобілі. Швидкість одного з них на 5 км/год більша за швидкість іншого. Знайдіть швидкості кожного автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після початку руху.

Розв'язання. Нехай x км/год — швидкість першого автомобіля, y км/год — швидкість другого автомобіля.

Складемо короткий запис даних задачі (табл. 28).

Таблиця 28

Автомобілі	Швидкість	Час	Шлях	
І автомобіль	x, на 5 км/год >	2 год	$2x$	310 км
ІІ автомобіль	y	2 год	$2y$	

Нехай швидкість першого автомобіля на 5 км/год більша за швидкість другого, тоді перше рівняння системи таке:
$x-y=5$ (або $x-5=y$, або $x=y+5$).
Друге рівняння системи таке: $2x+2y=310$.
Можемо записати систему рівнянь: $\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+2y=310. \end{cases}$

Нагадаємо, що для спрощення обчислень можна ділити обидві частини рівняння на одне й те саме число, відмінне від 0. Якщо, поділимо друге рівняння системи на 2, тоді отримаємо систему:
$$\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=155. \end{cases}$$
Розв'язавши цю систему рівнянь або способом підстановки, або способом додавання, отримаємо її розв'язок (80; 75). Отже, швидкість першого автомобіля — 80 км/год, а швидкість другого — 75 км/год.

Чи можна розв'язати задачу 3 алгебраїчним методом, але не складаючи систему рівнянь? Так, якщо швидкість другого автомобіля позначити, як $(x+5)$ км/год.

Дізнайтеся більше

1. **Софі Жермен** (1776 — 1831) — визначна французька жінка-математик і філософ, ще з дитинства захоплювалась математичними творами, особливо історією математики. Оскільки в той час жінок не приймали до Політехнічної школи, вона брала участь у письмових іспитах під псевдонімом «мосьє Ле Блан» (реальна особа, учень Лагранжа). С. Жермен листувалася із Ж. Даламбером, Ж. Фур'є, К. Гауссом, А. Лежандром та ін. З Лагранжем та Лежандром їй вдалося зустрітись особисто, вони зацікавились талановитою ученицею, стали спрямовувати і заохочувати її навчання.

Жермен цікавилася теорією чисел, окремі формули якої названі тепер її ім'ям. За свідченням Лагранжа

(1828), їй вдалося довести окремий випадок Великої теореми Ферма. За дослідження згинання пластинок у теорії пружності їй, першій із жінок, присуджено премію Паризької академії наук (1816), а саму роботу використано під час будівництва Ейфелевої вежі (1889).

2. Існує ще один спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними — за допомогою трьох так званих *визначників системи*. Кожен визначник складають за певними правилами з коефіцієнтів біля змінних у рівняннях системи й обчислюють його значення, а потім знаходять розв'язок. У таблиці 29 наведено приклади застосування цього способу для системи в загальному вигляді та її конкретного випадку.

Таблиця 29

Розв'язання в загальному вигляді	**Приклад**
$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17 \end{cases}$
$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ Якщо $\lvert A\rvert \neq 0$, то система має єдиний розв'язок	$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=2\cdot(-4)-3\cdot(-3)=1$ Оскільки $1\neq 0$, то система має єдиний розв'язок
$\lvert A_x\rvert=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$	$\lvert A_x\rvert=\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 17 & -4 \end{vmatrix}=12\cdot(-4)-17\cdot(-3)=3$
$\lvert A_y\rvert=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$	$\lvert A_y\rvert=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}=2\cdot 17-3\cdot 12=-2$
$x=\dfrac{\lvert A_x\rvert}{\lvert A\rvert}$	$x=\dfrac{3}{1}=3$
$y=\dfrac{\lvert A_y\rvert}{\lvert A\rvert}$	$y=\dfrac{-2}{1}=-2$
Відповідь: $(x;\ y)$.	*Відповідь*: (3; –2).

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які є аналітичні способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?
3. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1121'. Виразіть змінну x через змінну y у рівнянні:

1) $x-2y-3=0$;
2) $x+3y+9=0$;
3) $2x-4y+5=0$;
4) $-3x+6y-9=0$.

1122'. Виразіть змінну y через змінну x у рівнянні:

1) $5x+y-15=0$;
2) $4x-y+6=0$;
3) $4x+2y-12=0$;
4) $-3x+2y=4$.

1123'. Яке рівняння дістанемо, якщо замість x підставити вираз $2y$ у рівняння:

1) $x-2y=3$;
2) $3x+3y=9$;
3) $2x+y=5$;
4) $2x-4y=5$?

Знайдіть розв'язок одержаного рівняння.

1124'. Яке рівняння дістанемо, якщо замість y підставити вираз $5x$ у рівняння:

1) $5x+y=30$;
2) $4x-y=6$;
3) $3x+2y=13$;
4) $10x-4y=5$?

Знайдіть розв'язок одержаного рівняння.

1125'. Чи є протилежними числами коефіцієнти біля змінної x у системі:

1) $\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=6, \\ -2x-y=2? \end{cases}$

1126'. Чи є протилежними числами коефіцієнти біля змінної y у системі:

1) $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ x+3y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+5y=3, \\ 4x+5y=6? \end{cases}$

1127′. Дано систему $\begin{cases} 2x-3y=12, \\ 3x-4y=17. \end{cases}$ Які додаткові множники дозволять перетворити на протилежні числа коефіцієнти біля змінної:
1) x; 2) y?

1128′. Чи правильно додали два рівняння:

1) $\begin{array}{r} 2x+5y=6 \\ \underline{-2x-y=2} \\ 4y=6; \end{array}$

2) $\begin{array}{r} 2x-3y=6 \\ \underline{x+3y=3} \\ 3x=9? \end{array}$

1129°. Розв'яжіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки:

1) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-3y=7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x-y=-7, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3x+2y=9, \\ 4x-y=12; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 7x-y=38, \\ 2x+5y=-5; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3x-2y=-29, \\ x+4y=9; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 10x-y=3, \\ 6x+4y=11; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 2x-y=-6, \\ x+2y=7; \end{cases}$
8) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2x+y=1; \end{cases}$
9) $\begin{cases} 3x-y=6, \\ x+3y=6; \end{cases}$
10) $\begin{cases} x+2y=-6, \\ 3x+y=2; \end{cases}$
11) $\begin{cases} 2m+3n=13, \\ 5m-n=7; \end{cases}$
12) $\begin{cases} p-4q=-10, \\ 2p+3q=13. \end{cases}$

1130°. Розв'яжіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки:

1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x-y=7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 5x-y=22, \\ 2x+y=6; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ x+2y=5; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ 5x+y=-2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ 3x+y=-9; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 8x-y=17, \\ 6x+y=18. \end{cases}$

1131°. Розв'яжіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання:

1) $\begin{cases} 4x-3y=-10, \\ 5x+3y=1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ x+2y=7; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 5x-y=11, \\ 5x+y=-1; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 4x-y=5, \\ x+3y=-2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3x+2y=-2, \\ 5x-y=14; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 3x-2y=21, \\ 3x+4y=3; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 2x+5y=6, \\ 4x-7y=-56; \end{cases}$
8) $\begin{cases} 7x-11y=23, \\ 21x+2y=-1; \end{cases}$
9) $\begin{cases} 16x+5y=9, \\ 6x-25y=-2; \end{cases}$
10) $\begin{cases} 8x-7y=11, \\ 6x-5y=8; \end{cases}$
11) $\begin{cases} 17m+13n=2, \\ 7m-11n=0; \end{cases}$
12) $\begin{cases} 3p-8q=5, \\ 5p-4q=2. \end{cases}$

1132°. Розв'яжіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання:

1) $\begin{cases} 5x-4y=18, \\ 3x+4y=-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+y=12, \\ 6x+y=18; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 10x+9y=11, \\ 5x+12y=13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=4, \\ x+y=-10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-2y=37, \\ 3x+4y=-9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x+9y=-5, \\ 7x+12y=-10. \end{cases}$

1133°. Яким способом легше, на вашу думку, розв'язувати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ x-3y=2? \end{cases}$

Відповідь обґрунтуйте. Розв'яжіть систему рівнянь обраним способом.

1134°. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел (2; –1), і яку легше розв'язувати способом: 1) підстановки; 2) додавання.

1135°. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел (0; 3), і яку легше розв'язувати способом: 1) підстановки; 2) додавання.

1136°. Сума двох чисел дорівнює 77, а їх різниця — 15. Знайдіть ці числа.

1137°. Сума двох чисел дорівнює 80, а їх різниця — 26. Знайдіть ці числа.

1138°. Сума двох чисел дорівнює 36. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 10 більше за інше.

1139°. Різниця двох чисел дорівнює 12. Знайдіть ці числа, якщо одне з них у 2 рази більше за інше.

1140°. Сума двох чисел дорівнює 27. Якщо від подвоєного першого числа відняти друге число, то отримаємо 24. Знайдіть ці числа.

1141°. Різниця двох чисел дорівнює 8. Якщо до першого числа додати подвоєне друге число, то отримаємо 44. Знайдіть ці числа.

1142. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4(x-1)-2(y-1)=2, \\ 3(2-x)-5(1+y)=-15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(x-1)-2(y+2)=x^2, \\ 5(x+2)+y(y-2)=y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=8, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)^2-(x+1)^2=8y, \\ (y+2)^2-(y+4)^2=2x; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{3}{4}=0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{5x-4y}{4}-2x=3, \\ \dfrac{3x-2y}{3}+4=3x; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3}-\dfrac{x-y}{4}=0{,}5, \\ \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y-1}{3}=4{,}5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x+y+4}{5}-9=\dfrac{4-x-y}{7}, \\ \dfrac{x+y+4}{5}=\dfrac{x-y-4}{7}-1. \end{cases}$

1143. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4, \\ 7(x-y)-5(x+y)=-2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-3)^2-(x+1)^2=2y+3, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2, \\ \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{y+1}{3}=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{5}{3-2x}=\dfrac{2{,}5}{1-y}, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{2y}{3}, \\ \dfrac{3x}{2}=-2y. \end{cases}$

1144. У двох кошиках — 75 яблук, причому в першому кошику на 7 яблук більше, ніж у другому. Скільки яблук у кожному кошику?

1145. На двох полицях — 40 книжок. Знайдіть кількість книжок на кожній полиці, якщо на другій полиці книжок у 3 рази менше, ніж на першій.

1146. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його довжина у 4 рази більша за ширину.

1147. Одна зі сторін прямокутника на 2 см більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

1148. За 2 кг печива і 1,5 кг цукерок заплатили 57 грн. Скільки коштує 1 кг печива, якщо він дешевший від 1 кг цукерок на 10 грн?

1149. За 5 кг яблук і 3 кг груш заплатили 72 грн. Скільки коштує 1 кг груш, якщо він дорожчий за 1 кг яблук на 8 грн?

1150. За 2 год на автобусі й 6 год на поїзді туристи проїхали 600 км. Знайдіть швидкість поїзда, якщо на поїзді туристи проїжджали за годину на 20 км більше, ніж на автобусі.

1151. За 3 год на автомобілі і 2,5 год пішки туристи подолали 250 км. Відомо, що швидкість руху на автомобілі була у 20 разів більшою за швидкість руху пішки. Знайдіть швидкість, із якою туристи їхали на автомобілі.

1152. Два велосипедисти виїхали одночасно з двох міст, відстань між якими дорівнює 39 км, і зустрілися через 1,5 год. З якою швидкістю їхав кожний велосипедист, якщо перший проїхав до зустрічі на 3 км більше, ніж другий?

1153. Два автобуси виїхали одночасно з двох міст, відстань між якими дорівнює 325 км, і зустрілися через 2,5 год. З якою швидкістю їхав кожний автобус, якщо перший проїхав до зустрічі на 25 км більше, ніж другий?

1154. За 3 год за течією річки і 2 год проти течії теплохід проходить 280 км, а за 1 год за течією і півгодини проти течії — 85 км. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії річки.

1155. За 2 год за течією річки і 1 год проти течії човен пропливає 50 км, а за 1 год за течією і півгодини проти течії — 25 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

1156. Один робітник працював за станком 3 год, а інший — 4 год. За цей час вони виготовили 88 деталей. Скільки деталей виготовив кожний робітник, якщо за 1 год роботи вони разом виготовляли 26 деталей?

1157. Один майстер витратив на пошиття костюмів 6 год, а інший — 5 год. За цей час вони пошили 17 костюмів. Скільки костюмів пошив кожен майстер, якщо за 1 год вони разом шили 3 костюми?

1158. У двох ящиках було 150 яблук. Після того, як половину яблук із першого ящика переклали до другого, у ньому залишилося яблук у 4 рази менше, ніж стало в другому ящику. Скільки яблук було в кожному ящику спочатку?

1159. На двох полицях — 96 книжок. Якщо п'яту частину книжок із другої полиці перекласти на першу, то на другій книжок стане в 5 разів менше, ніж на першій. Скільки книжок на кожній полиці?

1160. Якщо до $\frac{1}{2}$ першого числа додати $\frac{1}{2}$ другого, то отримаємо 27, а якщо до $\frac{1}{4}$ першого числа додати $\frac{1}{5}$ другого, то отримаємо 12. Знайдіть ці числа.

1161. Якщо до $\frac{1}{4}$ першого числа додати $\frac{1}{3}$ другого, то отримаємо 8, а якщо до $\frac{1}{2}$ першого числа додати $\frac{1}{4}$ другого, то отримаємо 11. Знайдіть ці числа.

1162. У двох кімнатах — 76 осіб. Коли з першої кімнати вийшло 30 осіб, а з другої — 40 осіб, то людей у кімнатах залишилося порівну. По скільки осіб було в кожній кімнаті спочатку?

1163. Кількість книжок на першій полиці вдвічі менша, ніж на другій. Якщо з першої полиці взяти 9 книжок, а на другу — поставити 12, то на першій полиці книжок стане в 7 разів менше, ніж на другій. Скільки книжок було на кожній полиці?

1164. На двох полицях разом — 30 книжок. Якщо переставити 2 книжки з першої полиці на другу, то книжок на полицях стане порівну. Скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

1165*. *З оповідання А. П. Чехова «Репетитор».* Купець купив 138 аршин чорної та синьої тканини на 540 грн. Скільки аршинів кожної тканини він купив, якщо синя тканина коштує по 5 грн за аршин, а чорна — по 3 грн за аршин?

1166*. Коли Сергійко першого разу підрахував у класі носи дівчаток і вуха хлопчиків, то їх виявилося 41. Коли він вдруге підрахував вуха дівчаток і носи хлопчиків, то їх виявилося 43. Скільки в класі хлопчиків? Скільки дівчаток?

1167*. Подайте число 200 у вигляді: 1) суми двох чисел так, щоб 25% одного із них дорівнювали 37,5% іншого; 2) різниці двох чисел так, щоб 30% зменшуваного дорівнювали 70% від'ємника.

1168*. Знайдіть, на скільки потрібно зменшити число 100, щоб при діленні отриманого числа як на 5, так і на 7, отримували остачу 1. Відомо, що перша частка на 2 більша за другу.

1169*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(x+3y+2)(2x+y-1)=0,\\ x+y=5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2-4=0,\\ 2x-y=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+2y-3=0,\\ x^2+4y-5=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ x^2-y^2=5.\end{cases}$

1170*. Знайдіть $x+y+z$ із системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-y-3z=3, \\ 3x+4y-5z=-8, \\ 2y+7z=17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y-z=-2, \\ 2x+4y+3z=3, \\ 3x-2y+z=13. \end{cases}$

1171*. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

1) $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 4)$; 2) $A(3;\ 0)$, $B(3;\ 1)$.

1172*. За яких значень x і y виконується рівність:

$2-\frac{1}{5}(x+2y)=7x-5y+4=-\frac{1}{3}(3x-y-4)$?

1173*. За якого значення a система $\begin{cases} 4x-ay=-10, \\ x-3y=2: \end{cases}$

1) має один розв'язок; 2) не має розв'язків?

1174*. За якого значення c система $\begin{cases} 3x+cy=3, \\ 2cx+6y=6 \end{cases}$ не має розв'язків?

1175*. За яких значень a і b розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax+y=4, \\ x-by=-2 \end{cases}$

буде пара чисел:

1) $(-1;\ 2)$; 2) $(0;\ 4)$?

1176*. Розв'яжіть систему рівнянь із двома змінними x і y:

1) $\begin{cases} ax+y=a^2, \\ x+ay=a^2+a-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+3y-3b=1, \\ bx+y-2b=0. \end{cases}$

1177*. Для системи рівнянь $\begin{cases} 2x-3y=2a^2-6a+2, \\ 3x+2y=3a^2+4a+3 \end{cases}$ визначте, за якого значення a сума $x+y$ набуває найменшого значення.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1178. На турбазі є намети і будиночки. Всього їх 25. У кожному будиночку можна розмістити 4 людини, в кожному наметі — 2 людини. Скільки наметів і скільки будиночків на турбазі, якщо на ній відпочиває всього 70 осіб?

1179. Син молодший від батька на 24 роки. Через 5 років батько буде старшим за сина в 4 рази. Скільки років батькові? Скільки років синові?

1180. Учитель приготував аркуші із зошитів для проведення контрольної роботи. Якщо вчитель дасть кожному учню 2 аркуші, то 12 аркушів будуть зайвими. Якщо вчитель вирішіть дати кожному учню 3 аркуші, то 16 аркушів не вистачить. Скільки учнів у класі? Скільки аркушів підготував учитель?

1181. Загальновідомою є така старовинна задача: «Дехто підійшов до клітки, у якій сидять фазани та кролики. Він порахував їх голови, їх виявилося 15. Потім він підрахував їх ноги, їх було 42. Скільки кроликів і скільки фазанів було в клітці?». Розв'яжіть цю задачу. Складіть задачу, подібну до даної, та розв'яжіть її.

ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

1182. Заробітна платня токаря становила 4000 грн. Спочатку її було збільшено на 10 %, а через рік — ще на 20 %. На скільки відсотків збільшилася заробітна платня токаря порівняно з початковою?

1183. На полиці стояли книжки. Спочатку взяли третину всіх книжок без двох, а потім $\frac{1}{2}$ решти. Після цього на полиці залишилось 9 книжок. Скільки книжок було на полиці спочатку?

1184. Розв'яжіть рівняння:
$6-(x+3)^2+5(x+2)=9(3-x)-(x+4)(x-5)$.

1185. Знайдіть значення виразу:

1) $6\frac{13}{22}-5\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}+\frac{25}{36}\cdot\frac{18}{25}$;

2) $\left(10\frac{9}{35}-8\frac{7}{30}\right):1\frac{3}{14}+4\cdot\left(1{,}35:0{,}9-1{,}5\cdot\frac{7}{9}\right)+0{,}204\cdot25-7{,}1$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке рівняння?
2. Що називають коренем рівняння? Що означає — розв'язати рівняння?
3. Які рівняння називають рівносильними?
4. Сформулюйте властивості рівносильності рівнянь.
5. Яке рівняння називається лінійним?
6. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?
7. Коли лінійне рівняння не є рівнянням першого степеня?
8. Що таке лінійне рівняння з двома змінними?
9. Що є розв'язком лінійного рівняння з двома змінними?
10. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з двома змінними?
11. Що є графіком лінійного рівняння з двома змінними?
12. У якому випадку графіком рівняння з двома змінними є пряма; площина?
13. У якому випадку графік рівняння з двома змінними проходить через початок координат?
14. Що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
15. Що називають розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
16. Що означає «розв'язати систему рівнянь»?
17. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом?
18. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
19. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?
20. Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Розв'яжіть рівняння $2(x+5)-3(4-x)=3$.

А. $\frac{3}{5}$. **Б.** –1. **В.** 1. **Г.** –5.

2°. Яка пара чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+y-4=0, \\ 2x-y+1=0? \end{cases}$

А. (2; 2). **Б.** (1; 3). **В.** (–1; 5). **Г.** (4; 0).

3°. На прямій, що є графіком рівняння $6x+2y-5=0$, позначено точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть ординату цієї точки.

А. –4,5. **В.** –3,5.
Б. 3,5. **Г.** 4,5.

4. За 1 год на автобусі та 4 год на поїзді туристи проїхали 380 км. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість автобуса.

А. 60 км/год. **В.** 120 км/год.
Б. 40 км/год. **Г.** 80 км/год.

5*. Побудуйте графік рівняння $5|x-1|+2y=x-5$.

ПОВТОРЕННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

Вирази	
Числові	***Буквені***
Запис, в якому використовують тільки числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається ***числовим виразом.***	Запис, в якому використовують змінні, позначені буквами, числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається ***виразом зі змінними***.
$24:4+5$ або $(12-2)\cdot 0{,}5$	$(2+a):30$ або $\frac{3}{7}x+4$,

Означення	Приклад
Цілий вираз — це вираз, який не містить ділення на вираз зі змінними	$4a-3b$, $12x+17$, $\frac{3c-d}{11}$

Усі значення змінної, допустимі для певного виразу, утворюють ***область допустимих значень*** (ОДЗ) ***змінної*** цього виразу.

Вираз	ОДЗ виразу
$\frac{2}{x+12}$	$x \neq -12$
$\frac{x+15}{7}$	x — будь-яке число
$\frac{x}{(x+7)(x-3)}$	$x \neq -7$ і $x \neq 3$

Два вирази називаються ***тотожно рівними***, якщо вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їх змінних.

Означення	Приклад
Тотожність — це рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами	$10x-(6y-3x)=7x-6y$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Довести тотожність означає довести рівність її лівої і правої частин.

Способи доведення тотожностей

Назва способу	Сутність способу	Приклад
Перетворення лівої частини рівності	Перетворити вираз у лівій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині	$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=a^4-16y^2$ $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)=$ $=a^4-16y^2$
Перетворення правої частини рівності	Перетворити вираз у правій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її лівій частині	$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=a^4-16y^2$ $a^4-16y^2=$ $=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)=$ $=(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$
Перетворення обох частин рівності	Перетворити вирази в обох частинах даної рівності так, щоб вони набули одного й того самого вигляду	$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=a^4-16y^2$ $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)$ $a^4-16y^2=$ $=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)$
Різницеве порівняння	Перевірити, чи дорівнює нулю різниця виразів у лівій і правій частинах даної рівності	$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)=$ $=a^4-16y^2$ $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)-$ $-(a^4-16y^2)=$ $=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)-$ $-(a^4-16y^2)=$ $=(a^4-16y^2)-(a^4-16y^2)=0$

СТЕПЕНІ

Степенем числа a **з натуральним показником** n, більшим за 1, називається добуток n множників, кожен із яких дорівнює a	$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множників}}$, де $n>1$	$5^3=5\cdot5\cdot5$
Степенем числа a **з показником 1** називається саме число a	$a^1=a$	$253^1=253$

Будь-який натуральний степінь числа 1 дорівнює 1	$\mathbf{1^n = 1}$	$1^{2016} = 1$
Будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0	$\mathbf{0^n = 0}$	$0^{2016} = 0$
Будь-який натуральний степінь додатного числа — число додатне	$a^n > 0$, якщо $a > 0$, n — натуральне число	$4^8 > 0$
Парний натуральний степінь від'ємного числа — число додатне	$a^n > 0$, якщо $a < 0$, $n = 2k$, k — натуральне число	$(-4)^8 > 0$
Непарний натуральний степінь від'ємного числа — число від'ємне	$a^n < 0$, якщо $a < 0$, $n = 2k - 1$, k — натуральне число	$(-4)^9 < 0$

Дії першого ступеня зі степенями

Переставна властивість	
$a^n + a^m = a^m + a^n$	$5^2 + 5^3 = 5^3 + 5^2$ $150 = 150$
$a^n + b^n = b^n + a^n$	$5^2 + 4^2 = 4^2 + 5^2$ $41 = 41$
Для віднімання переставна властивість виконується не завжди	$5^2 - 5^3 \neq 5^3 - 5^2$ $-100 \neq 100$
	$5^2 - 4^2 \neq 4^2 - 5^2$ $9 \neq -9$
Сполучна властивість	
$(a^n + a^m) + a^k = a^n + (a^m + a^k)$	$(5^2 + 5^3) + 5^4 = 5^2 + (5^3 + 5^4)$ $150 + 625 = 25 + 750$ $775 = 775$
$(a^n + b^n) + c^n = a^n + (b^n + c^n)$	$(3^2 + 4^2) + 5^2 = 3^2 + (4^2 + 5^2)$ $25 + 25 = 9 + 41$ $50 = 50$
$(a^n - a^m) - a^k = a^n - (a^m + a^k)$	$(5^2 - 5^3) - 5^4 = 5^2 - (5^3 + 5^4)$ $-100 - 625 = 25 - 750$ $-725 = -725$
$(a^n - b^n) - c^n = a^n - (b^n + c^n)$	$(3^2 - 4^2) - 5^2 = 3^2 - (4^2 + 5^2)$ $-7 - 25 = 9 - 41$ $-32 = -32$

Дії другого ступеня зі степенями

Переставна властивість	
$a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot 2^2$ $32 = 32$
$a^n \cdot b^n = b^n \cdot a^n$	$2^2 \cdot 4^2 = 4^2 \cdot 2^2$ $64 = 64$
Для ділення переставна властивість виконується не завжди	$2^2 : 2^3 \neq 2^3 : 2^2$ $\frac{1}{2} \neq 2$
	$2^2 : 4^2 \neq 4^2 : 2^2$ $\frac{1}{4} \neq 4$
Сполучна властивість	
$(a^n \cdot a^m) \cdot a^k = a^n \cdot (a^m \cdot a^k)$	$(2^2 \cdot 2^3) \cdot 2^4 = 2^2 \cdot (2^3 \cdot 2^4)$ $32 \cdot 16 = 4 \cdot 128$ $512 = 512$
$(a^n \cdot b^n) \cdot c^n = a^n \cdot (b^n \cdot c^n)$	$(3^2 \cdot 4^2) \cdot 2^2 = 3^2 \cdot (4^2 \cdot 2^2)$ $144 \cdot 4 = 9 \cdot 64$ $576 = 576$
Для ділення сполучна властивість виконується не завжди	$(2^2 : 2^3) : 2^4 \neq 2^2 : (2^3 : 2^4)$ $\frac{1}{2} : 16 \neq 4 : \frac{1}{2}$ $\frac{1}{32} \neq 8$
	$(3^2 : 4^2) : 2^2 \neq 3^2 : (4^2 : 2^2)$ $\frac{9}{16} : 4 \neq 9 : 4$ $\frac{9}{64} \neq 2\frac{1}{4}$
Розподільна властивість	
$(a^n + a^m) \cdot a^k = a^n a^k + a^m a^k$	$(2^2 + 2^3) \cdot 2^4 = 2^2 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 2^4$ $12 \cdot 16 = 64 + 128$ $192 = 192$
$(a^n + b^n) \cdot c^n = a^n c^n + b^n c^n$	$(3^2 + 4^2) \cdot 2^2 = 3^2 \cdot 2^2 + 4^2 \cdot 2^2$ $25 \cdot 4 = 36 + 64$ $100 = 100$

$(a^n+a^m):a^k=a^n:a^k+a^m:a^k$, $(a\neq 0)$	$(2^2+2^3):2^4=2^2:2^4+2^3:2^4$ $12:16=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$
$(a^n+b^n):c^n=a^n:c^n+b^n:c^n$, $(c\neq 0)$	$(3^2+4^2):2^2=3^2:2^2+4^2:2^2$ $25:4=\frac{9}{4}+4$ $6\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}$

Властивість степенів із рівними основами	
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	$2^3\cdot 2^2=2^{3+2}=$ $=2^5=$ $=32$
$a^n:a^m=a^{n-n}$, $(n>m, a\neq 0)$	$2^3:2^2=$ $=2^{3-2}=$ $=2^1=$ $=2$
Властивість степенів із різними основами і рівними показниками	
$a^n\cdot b^n=(ab)^n$	$3^2\cdot 4^2=(3\cdot 4)^2=$ $=12^2=$ $=144$
$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$, $(b\neq 0)$	$6^2:3^2=(6:3)^2=$ $=2^2=$ $=4$

Дія третього ступеня зі степенями

$(a^m)^n=a^{mn}$	$(3^2)^3=3^{2\cdot 3}=$ $=3^6=729$

ОДНОЧЛЕНИ

Цілий вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називається ***одночленом.***

Одночлен	Стандартний вигляд одночлена	Коефіцієнт одночлена	Степінь одночлена
x	x	1	1
$3{,}5x^3y$	$3{,}5x^3y$	3,5	$3+1=4$
$-x^5y^8ax$	$-ax^6y^8$	–1	$1+8+6=15$
$6x^5y^8\cdot 0{,}5y^2$	$3x^5y^{10}$	3	$5+10=15$
5	5	5	0

Дії першого ступеня з одночленами

Переставна властивість	
$12x^5+y^2=y^2+12x^5$	$12x^5-y^2\neq y^2-12x^5$
Сполучна властивість	
$(12x^5+y^2)+6x=12x^5+(y^2+6x)$	$(12x^5-y^2)-6x\neq 12x^5-(y^2-6x)$ $(12x^5-y^2)-6x=12x^5-(y^2+6x)$

Дії другого ступеня з одночленами

Переставна властивість	
$12x^5\cdot y^2=y^2\cdot 12x^5$	$12x^5:y^2\neq y^2:12x^5$
Сполучна властивість	
$(12x^5\cdot y^2)\cdot 6x=12x^5\cdot(y^2\cdot 6x)$	$(12x^5:y^2):6x\neq 12x^5:(y^2:6x)$ $(12x^5:y^2):6x=12x^5:(y^2\cdot 6x)$

Дія третього ступеня з одночленами

Правило	Приклад
Щоб піднести одночлен до n-го степеня, треба піднести до цього степеня кожний множник даного одночлена та обчислити коефіцієнт отриманого одночлена	$(0{,}5a^7c^2)^2=$ $=0{,}5^2a^{7\cdot 2}c^{2\cdot 2}=$ $=0{,}25a^{14}c^4$

МНОГОЧЛЕНИ

Вираз, що є сумою кількох одночленів, називається ***многочленом.***

Якщо многочлен подано в стандартному вигляді, то ***степенем*** цього ***многочлена*** називається степінь його старшого члена.

Многочлен	**Стандартний вигляд многочлена**	**Вільний член многочлена**	**Старший член многочлена**	**Степінь многочлена**
x^2-7x-2	x^2-7x-2	-2	x^2	2
$-x+3+2x$	$x+3$	3	x	1
$5x^2-1+5y-3$	$5x^2+5y-4$	-4	$5x^2$	2

Дії першого ступеня з многочленами

<table>
<tr><th colspan="2">Переставна властивість</th></tr>
<tr><td>$0{,}3x+(y^2+2)=(y^2+2)+0{,}3x$</td><td>$(12-x)+(y^2+2)=(y^2+2)+(12-x)$</td></tr>
<tr><td>$0{,}3x-(y^2+2)\neq(y^2+2)-0{,}3x$</td><td>$(12-x)+(y^2+2)=(y^2+2)+(12-x)$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сполучна властивість</th></tr>
<tr><td>$(0{,}3x+(y^2+2))+y^2=$
$=0{,}3x+((y^2+2)+y^2)$</td><td>$((x+3)+(y^2+2))+(1-x)=$
$(x+3)+((y^2+2)+(1-x))$</td></tr>
<tr><td>$(0{,}3x-(y^2+2))-y^2=$
$=0{,}3x-((y^2+2)+y^2)$</td><td>$((x+3)-(y^2+2))-(1-x)=$
$=(x+3)-((1-x)+(y^2+2))$</td></tr>
</table>

Множення многочленів

<table>
<tr><td rowspan="2">Помножити многочлен на</td><td>одночлен</td><td rowspan="2">означає скласти вираз, що є сумою добутків кожного члена многочлена</td><td>і даного одночлена</td><td rowspan="2">та спростити його, якщо це можливо</td></tr>
<tr><td>многочлен</td><td>на кожен член іншого многочлена</td></tr>
</table>

Формула множення одночлена на двочлен	**Формула множення двочленів**
$c(a+b)=ca+cb$	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
$12x^5\cdot(y^2+2)=$ $=12x^5\cdot y^2+12x^5\cdot 2=$ $=12x^5y^2+24x^5$	$(12x^5-x)\cdot(y^2+2)=$ $=12x^5\cdot y^2+12x^5\cdot 2-x\cdot y^2-x\cdot 2=$ $=12x^5y^2+24x^5-xy^2-2x$

Властивості множення многочленів

Переставна властивість	
$12x^5 \cdot (y^2+2) = (y^2+2) \cdot 12x^5$	$(12x^5 - x) \cdot (y^2+2) = (y^2+2) \cdot (12x^5 - x)$
Сполучна властивість	
$((y^2+2) \cdot 12x^5) \cdot 6x =$ $= (y^2+2) \cdot (12x^5 \cdot 6x)$	$((x+3) \cdot (y^2+2)) \cdot (1-x) =$ $= (x+3) \cdot ((y^2+2) \cdot (1-x))$

Дія третього ступеня з многочленами

Правило	Приклад
Щоб піднести многочлен до n-го степеня, треба помножити цей многочлен на себе n разів	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

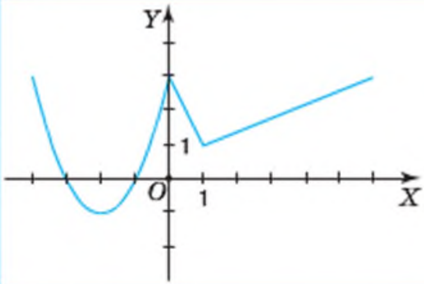
Формули скороченого множення

Формула	Приклад
Квадрат двочлена: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2a+3b)^2 =$ $= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 =$ $= 4a^2 + 12ab + 9b^2$ $(5-6bc)^2 =$ $= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6bc + (6bc)^2 =$ $= 25 - 60bc + 36b^2c^2$
Різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$4x^2 - 9y^2 = (2x+3y)(2x-3y)$
Сума і різниця кубів: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$125a^3b^3 + c^3 =$ $= (5ab + c) \cdot (25a^2b^2 - 5abc + c^2)$ $8x^3 - 27y^3 =$ $= (2x - 3y) \cdot (4x^2 + 6xy + 9y^2)$

Розкладання многочленів на множники

Спосіб	Приклад
Винесення спільного множника за дужки	$6x^2y^3 - 24x^4y^3 + 18x^3y^2 =$ $= 6x^2y^2(y - 4x^2y + 3x)$
Застосування формул скороченого множення	$64x^6y^6 - x^3y^3 =$ $= x^3y^3(4xy - 1)(16x^2y^2 + 4xy + 1)$
Спосіб групування	$2x^2y^2 - 3xy + 4x^3y^3 - 6x^2y^2 =$ $= xy((2xy - 3) + 2xy(2xy - 3)) =$ $= xy(2xy - 3)(1 + 2xy)$

ФУНКЦІЇ

Означення	Приклад
Правило, згідно з яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної, називають ***функцією***	$y=f(x)$, наприклад, $y=x^2+5$ $y=F(x)$, наприклад, $y=2-5x$ $z=g(t)$, наприклад, $z=3t^3+1$ $x=\varphi(t)$, наприклад, $x=4,1t-2,7$
Незалежну змінну називають ***аргументом функції***, а залежну змінну — ***функцією***	$y=f(x)$: x — аргумент, y — функція $y=F(x)$: x — аргумент, y — функція $z=g(t)$: t — аргумент, z — функція $x=\varphi(t)$: t — аргумент, x — функція
Усі можливі значення аргументу утворюють ***область визначення функції***, а відповідні значення залежної змінної — ***область значень функції***	$y=x^2-2x+3$: область визначення — будь-які числа, область значень — будь-які числа $y=\|x\|$: область визначення — будь-які числа, область значень — будь-які невід'ємні числа
Графіком функції $y=f(x)$ називається зображення на координатній площині всіх точок, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати — відповідними значеннями даної функції	

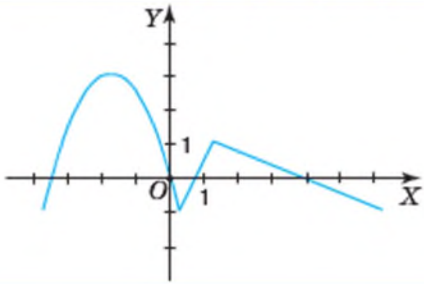
Функція вважається заданою, якщо:

1) задано область її визначення;

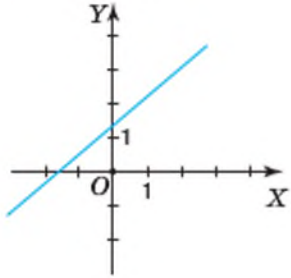
2) указано правило, згідно з яким для кожного значення аргументу можна знайти відповідне значення залежної змінної (функції).

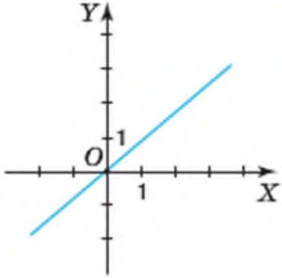
Способи задання функції:

1) аналітичний;
2) описовий;
3) табличний;
4) графічний.

<table>
<tr><th>Спосіб задання функції</th><th>Приклад функції</th></tr>
<tr><td>Аналітичний</td><td>
1) $y = x + 7$
2) $z = \dfrac{4}{5-t}$
3) $\omega = \dfrac{2}{3}\varphi^2 + 1$
4) $y = \begin{cases} -5, \text{ якщо } r \le -1, \\ 2r-1, \text{ якщо } -1 \le r < 1, \\ 3r+1, \text{ якщо } r \ge 1 \end{cases}$
5) $s = \dfrac{2}{7}|t| - 3$
</td></tr>
<tr><td>Описовий</td><td>
1) Площа прямокутника дорівнює добутку довжини сторони a та різниці його півпериметра 10 і довжини цієї ж сторони a
2) Аргумент функції може набувати будь-яких значень, а значення функції дорівнює потроєному значенню аргументу, зменшеному на 2
</td></tr>
<tr><td>Табличний</td><td>
1)
<table>
<tr><td>x</td><td>–3</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td>13</td><td>10</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td><td>–2</td><td>–5</td></tr>
</table>
2)
<table>
<tr><td>Ціна 1 кг яблук (у грн)</td><td>15</td><td>12</td><td>11</td><td>9</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Попит на закупівлю яблук (у тис. тон)</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>11</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Графічний</td><td>


</td></tr>
</table>

Функція	Властивості
Лінійна функція, задається рівнянням $y = kx + b$	1. Область визначення — усі числа. 2. Область значень — усі числа. 3. Графіком лінійної функції є пряма, не перпендикулярна до осі OX.  4. Графік лінійної функції утворює з додатним променем осі OX: — гострий кут, якщо $k > 0$; — тупий кут, якщо $k < 0$. 5. Графік лінійної функції перетинає вісь OY в точці: — з додатною ординатою, якщо $b > 0$; — з від'ємною ординатою, якщо $b < 0$; — з ординатою, що дорівнює 0, якщо $b = 0$. 6. Лінійна функція: — зростає, якщо $k > 0$; — спадає, якщо $k < 0$; — є сталою, якщо $k = 0$
Пряма пропорційність, задається рівнянням $y = kx$ $(k \neq 0)$	1. Область визначення — усі числа. 2. Область значень — усі числа. 3. Графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат і не збігається з осями координат.

	 4. Графік функції прямої пропорційності утворює з додатним променем осі OX: — гострий кут, якщо $k>0$; — тупий кут, якщо $k<0$. 5. Пряма пропорційність є функцією, що: — зростає, якщо $k>0$; — спадає, якщо $k<0$

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Означення	Приклад
Лінійним рівнянням з однією змінною називається рівняння виду $ax+b=0$, де x — змінна, a і b — деякі числа	$4x-2=0$, $-12x+48=0$, $7x=0$

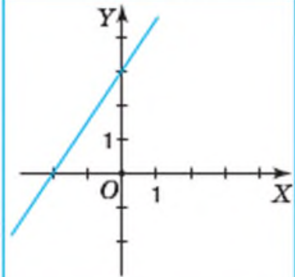
Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною

Значення a і b	Вигляд рівняння	Розв'язання	Кількість коренів	Приклад
$a\neq 0$, $b\neq 0$	$ax+b=0$	$ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$	1 корінь	$4x-8=0$, $4x=8$, $x=2$
$a\neq 0$, $b=0$	$ax=0$	$x=0:a$, $x=0$	1 корінь	$5x=0$, $x=0$
$a=0$, $b\neq 0$	$0\cdot x+b=0$	$0\cdot x=-b$	немає коренів	$0x+7=0$, $0x=-7$, коренів немає
$a=0$, $b=0$	$0\cdot x=0$	$0\cdot x=0$	безліч коренів	$0x=0$, безліч коренів

Означення	Приклад
Лінійним рівнянням із двома змінними називається рівняння виду $ax+by+c=0$, де x і y — змінні, a, b і c — деякі числа	$2x-y+6=0$, $x+3y-7=0$, $5x-2y=0$

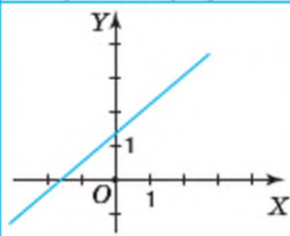
Графіком рівняння із двома змінними називається зображення на координатній площині всіх точок, координати яких задовольняють дане рівняння.

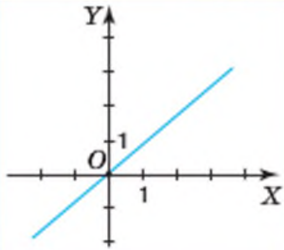
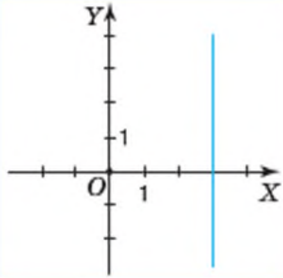
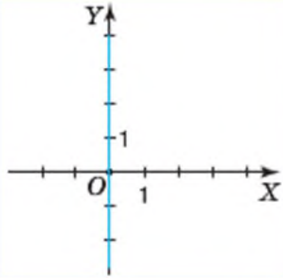
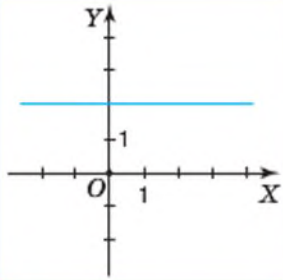
Побудова графіка рівняння із двома змінними

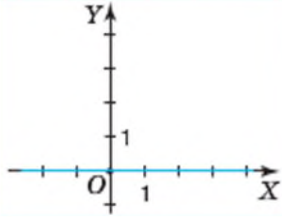
Приклад	Координати точок	Графік
$3x-2y-6=0$	*1 спосіб* $-2y=-3x+6$, $y=1{,}5x+3$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>5</td></tr></table> *2 спосіб* 1) $x=0$, $-2y-6=0$, $y=3$; 2) $y=0$, $3x-6=0$, $x=-2$; (0; 3) і (–2; 0)	

Графік лінійного рівняння із двома змінними $ax+by+c=0$:
- є прямою, якщо або $a\neq 0$, або $b\neq 0$;
- є всією площиною, якщо $a=0$, $b=0$ і $c=0$;
- не містить жодної точки координатної площини, якщо $a=0$, $b=0$ і $c\neq 0$.

Розміщення на координатній площині прямої, що є графіком лінійного рівняння з двома змінними
$$ax+by+c=0$$

Коефіцієнти	Вигляд рівняння	Приклад графіка
$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$	$ax+by+c=0$, звідки $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$	

$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$	$ax + by + 0 = 0$, звідки $y = -\frac{a}{b}x$	
$a \neq 0, b = 0, c \neq 0$	$ax + 0 \cdot y + c = 0$, звідки $x = -\frac{c}{a}$	
$a \neq 0, b = 0, c = 0$	$ax + 0 \cdot y + 0 = 0$, звідки $x = 0$	
$a = 0, b \neq 0, c \neq 0$	$0 \cdot x + by + c = 0$, звідки $y = -\frac{c}{b}$	

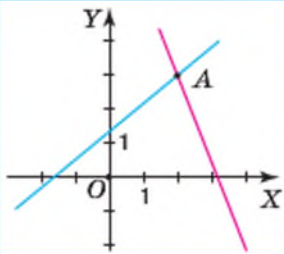
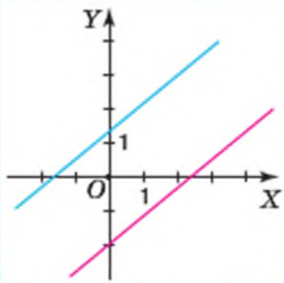
$a=0$, $b\neq 0$ і $c=0$	$0\cdot x+by+0=0$, звідки $y=0$	

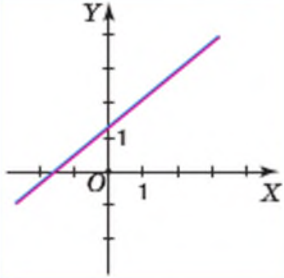
Розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними називають таку пару чисел (x; y), яка одночасно є розв'язком кожного рівняння системи.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або встановити, що розв'язків немає.

Види розв'язків системи двох лінійних рівнянь

із двома змінними $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

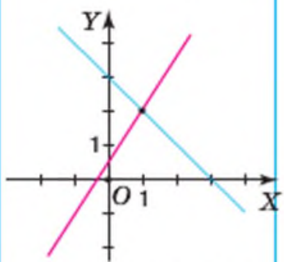
Коефіцієнти	**Кількість розв'язків**	**Взаємне розміщення графіків рівнянь**	**Приклад**
$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	система має єдиний розв'язок	прямі перетинаються в точці	
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	система не має розв'язків	прямі паралельні	

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	система має безліч розв'язків	прямі збігаються	

Способи розв'язування ***системи двох лінійних рівнянь із двома змінними:***

1) графічний;
2) підстановки;
3) додавання.

Способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Спосіб	План розв'язування	Приклад
Графічний	1) Побудувати в одній системі координат графік кожного з рівнянь системи; 2) визначити координати точки перетину цих графіків, якщо це можливо	$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 1) побудували в одній системі координат графіки рівнянь $x+y=3$ і $3x-2y=-1$;  2) прямі перетинаються в точці $A(1; 2)$. *Відповідь*: (1; 2)

Підстановки	1) З'ясувати, в якому рівнянні системи та яку змінну зручніше виразити через іншу; 2) в обраному рівнянні виразити обрану «зручну» змінну через іншу; 3) підставити знайдений вираз в інше рівняння системи; 4) розв'язати отримане рівняння відносно «зручної» змінної; 5) підставити знайдений корінь у те рівняння системи, з якого виразили «зручну» змінну через іншу; 6) розв'язати отримане рівняння відносно іншої змінної; 7) записати пару чисел, яка є розв'язком системи	$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 1) $x+y=3$; 2) $y=-x+3$; 3) $3x-2(-x+3)=-1$; 4) $3x+2x-6=-1$, $5x=5$, $x=1$; 5) $y=-1+3$; 6) $y=2$. 7) *Відповідь*: (1; 2)
Додавання	1) З'ясувати, для якої змінної її коефіцієнти в обох рівняннях зручно перетворити на протилежні числа; 2) для коефіцієнтів «зручної» змінної знайти додаткові множники, які дозволять перетворити ці коефіцієнти на протилежні числа; 3) відповідно помножити рівняння системи на ці додаткові множники; 4) додати отримані рівняння та розв'язати рівняння-суму як рівняння відносно другої змінної; 5) підставити знайдений корінь в одне з рівнянь системи; 6) розв'язати отримане рівняння як рівняння відносно «зручної» змінної; 7) записати пару чисел, яка є розв'язком системи	$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1. \end{cases}$ 1) для y; 2) $\left.\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-2y=-1; \end{cases}\right\vert \cdot 2$ 3) $\begin{cases} 2x+2y=6, \\ 3x-2y=-1; \end{cases}$ 4) $\overline{\quad 5x=5, \quad}$ $x=1$; 5) $1+y=3$, 6) $y=2$. 7) *Відповідь*: (1; 2)

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розділ 1. ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

1. Дано числа 4 і 2. Складіть вираз, який є: 1) сумою чисел; 2) різницею чисел; 3) добутком чисел; 4) часткою чисел; 5) степенем, у якого перше число є основою; 6) степенем, у якого перше число є показником. Знайдіть значення цих виразів.

2. Знайдіть значення виразу:

1) $18-10\frac{5}{6}\cdot1\frac{13}{35}+6\frac{5}{14}$;

2) $5\frac{4}{7}\cdot2\frac{9}{13}-1\frac{2}{3}:\left(4\frac{2}{9}-2\frac{5}{6}\right)$.

3) $\left(3\frac{2}{3}-1\frac{2}{7}\cdot5\frac{4}{9}\right):(-2{,}5)$;

4) $0{,}6\cdot\frac{5}{6}-\left(3\frac{5}{9}-2\frac{2}{15}\right):9{,}6$.

3. 3. Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) $1{,}64\cdot4{,}8+4{,}8\cdot3{,}36$;

2) $5{,}32\cdot3{,}1-3{,}32\cdot3{,}1$;

3) $3\frac{2}{5}\cdot2\frac{3}{7}\cdot5\cdot7$;

4) $\frac{3}{5}+4\frac{3}{4}+1\frac{2}{5}+4\frac{1}{4}$;

5) $\left(3+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot6$;

6) $6\frac{2}{13}\cdot5\frac{1}{6}+5\frac{11}{13}\cdot5\frac{1}{6}$.

4. У 7-А класі навчаються 20 учнів, у 7-Б класі — на 3 учні менше, ніж у 7-А класі, а в 7-В класі — на 5 учнів більше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчаються у цих класах разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

5. На першій полиці стоять 15 книг, на другій полиці — на 7 книг менше, ніж на першій полиці, а на третій полиці — стільки книг, як на першій і другій полицях разом. Скільки книг стоять на трьох полицях разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

6. Яке число треба поставити замість зірочки, щоб вираз не мав змісту:

1) $\frac{5^2-2\cdot0{,}5}{2\cdot*+4}$; 2) $\frac{2{,}4:6-3}{(12-*):5}$?

7. Знайдіть значення виразу:

1) $12a-4b+5$, якщо $a=-1\frac{2}{3}$, $b=0{,}25$;

2) $0{,}15c-14d^2+4{,}5$, якщо $c=-20$, $d=\frac{1}{2}$.

8. Обчисліть значення виразу та заповніть таблицю 30.

Таблиця 30

x	5	-10	1,2	$\frac{2}{3}$
y	0,2	10	$-0,4$	$-\frac{1}{6}$
$x+y$				
$2x+5y$				
$y-x$				
$\frac{y-2}{x}$				

9. Чи всі значення змінних є допустимими для виразу:

1) $2a-b+3c$; 2) $\frac{2}{x-5}$; 3) $\frac{n-5}{n+2}$; 4) $\frac{2m+4}{5}$?

10. У числовому виразі $\frac{3\cdot 5+0,5:5}{4\cdot 5-12}$ замініть число 5 на букву a. Чи всі значення змінної a є допустимими для отриманого виразу?

11. Чи є цілим вираз: 1) $\frac{2x-4}{3}$; 2) $\frac{a+6}{a}$; 3) $\frac{10m-2n}{m-3}$; 4) $\frac{7c-d}{(c+4)(d-6)}$?

12. Одна сторона прямокутника дорівнює a см, а інша — на 4 см більша. Складіть вирази для знаходження периметра і площі прямокутника. Знайдіть значення виразів, якщо:
1) $a=5$ см; 2) $a=2,5$ см.

13. Складіть вираз для обчислення кількості учнів у 7 класі, в якому навчаються x хлопців та y дівчат. Обчисліть значення цього виразу за даними вашого класу.

14. Спростить вираз і знайдіть його значення:

1) $2,2(a+5)-0,4(a-2,5)$, якщо $a=-5$;

2) $\frac{1}{3}(6-b)+2\left(2,5b-3\frac{2}{6}\right)-\frac{1}{6}(3,6-1,2b)$, якщо $b=4$.

15. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $5(3x-7)-\frac{1}{5}(10x-5)$;

2) $4,5x-\frac{2}{3}(8x-12)-4+2x-\frac{2}{3}(x-6)$.

16. За даними значеннями *a* заповніть таблицю 31.

Таблиця 31

a	4	–3,6	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{15}$
$a+1$				
$\frac{1}{a}$				
$4a$				
$-3a+8$				
$\frac{a-8}{2}$				

17. Дано вирази $(3x-4)$ і $(2x+1)$. Складіть вираз, який є:
1) сумою виразів; 2) різницею виразів; 3) добутком виразів; 4) часткою виразів. Спростіть отримані вирази та знайдіть їх значення для $x=-4$.

18. Знайдіть значення виразу $\frac{-0{,}6x^2-1}{1-2y}$, якщо $x=-2$, $y=-0{,}4$.

19. Трицифрове число містить a сотень, b десятків і c одиниць. Складіть і спростіть вираз: 1) сума даного числа і числа, записаного тими самими цифрами в зворотному порядку; 2) різниця даного числа і числа, записаного тими самими цифрами в зворотному порядку.

20. Доведіть, що значення виразу не залежить від x:
1) $5x+(3x-8(5+x))$;
2) $5(x-12)+4(6-x)-(x-2)$.

21. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення лівої частини рівності:
1) $10a-(3a-9b)=7a+9b$;
2) $(0{,}5c+d)-2(0{,}5d-0{,}3c)=1{,}1c$.

22. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення правої частини рівності:
1) $2y=-1\frac{2}{9}(x-9y)+1\frac{2}{9}x-9y$;
2) $9m+1=4(m+n)-5(n-m)+(n+1)$.

23. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення обох частин рівності:

1) $10a-2(3a-2b)=(2a+b)-(-2a-3b)$;

2) $(5c+2)-0{,}4(2d+5)-0{,}7d=7\left(c-\frac{1}{7}d\right)-2\left(c+\frac{1}{4}d\right)$.

24. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння:

1) $20x-4(x-0{,}5y)=13x+3(x-y)+5y$;

2) $5+\left(1\frac{2}{3}n-2m\right)-\frac{2}{3}n=\left(m+\frac{1}{3}n+2\right)-\left(3m-\frac{2}{3}n-3\right)$.

25. Доведіть тотожність:

1) $(a+1)(a+2)-2=(a-3)(a+4)+4$;

2) $2(3b+1)(5-b)+3=50-2(b-1{,}5)(3b-1)$.

Розділ 2. ОДНОЧЛЕНИ

1. Запишіть у вигляді степеня з основою 6:

1) $36\cdot36$; 2) $6\cdot36\cdot216$; 3) $36\cdot6\cdot36\cdot36$.

2. Запишіть вираз $2\cdot4\cdot64\cdot8$ у вигляді степеня з основою:

1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 16; 5) 64.

3. Запишіть вираз $25{,}6:0{,}25\cdot40$ у вигляді степеня з основою:

1) 2; 2) 4; 3) 8.

4. Знайдіть:

1) суму квадратів чисел 0,4, –0,3 і –0,5;

2) квадрат суми чисел 0,4, –0,3 і –0,5;

3) різницю квадрата числа 4 і куба числа –2;

4) квадрат різниці кубів чисел 4 і 3.

5. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 32?

Таблиця 32

a	1	–1,1	$\frac{1}{5}$	–0,6
a^2				
a^3				

6. Знайдіть значення виразу $a^2\cdot b^3$, якщо:

1) $a=15$, $b=-\frac{1}{5}$; 2) $a=-\frac{1}{6}$, $b=-3$; 3) $a=-0{,}9$, $b=\frac{1}{3}$.

7. Порівняйте значення виразів:

1) $(-13)^{13}$ і 12^{12}; 3) $(-1)^{21}$ і 1^{12}; 5) $(-1)^{22}$ і 0^{22};

2) $(-7)^3$ і 7^3; 4) 1^{90} і 1^{99}; 6) $(-9)^7$ і $(-9)^9$.

8. Запишіть у вигляді степеня:

1) $x^4 \cdot x^7 \cdot x^{12}$;
2) $x^4 \cdot x^6 \cdot x^{12} \cdot x^4 \cdot x$;
3) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^{21} : x^{12} : x^4 \cdot x$;
4) $a \cdot a^4 \cdot a^6 \cdot a \cdot a^5$;
5) $\dfrac{a^6 \cdot b^{24} \cdot a^2}{b^{11} \cdot a^7 \cdot b}$;
6) $a^6 \cdot a^{54} : a^{36} \cdot a : a^8$.

9. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:
1) $16^8 : 2^8$; 2) $2^3 \cdot 4^3$; 3) $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$; 4) $56^5 : 7^5$.

10. Запишіть у вигляді степеня:
1) $7 \cdot 0{,}1^4 \cdot 7^2 \cdot 0{,}1^6 \cdot 7^7$;
2) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(1\dfrac{1}{4}\right)^8$;
3) $11^3 \cdot 11^8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 0{,}5^{15} \cdot 11^9$;
4) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^{12} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \cdot 1{,}2^6$.

11. Запишіть у вигляді степеня з показником 3:
1) $81 : 3^3 \cdot 27 : 3^2$;
2) $9^9 : 243 \cdot 3^8$;
3) $54 \cdot 54^2 : 18^3$;
4) $0{,}27 \cdot 100 \cdot 9^3$.

12. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^6 = 0$;
2) $(x+8)^8 = 0$;
3) $(-x)^7 = 0$;
4) $(2-5x)^3 = 0$;
5) $(6-x)^6 + (x+4)^4 = 0$;
6) $(-3-x)^4 + (x+3)^4 = 0$.

13. Якою цифрою закінчується число:
1) $(-555)^4 + 6516^{23} + 1201^{26}$;
2) $12340^{54} + 12346^{63} + 5^{21}$?

14. Обчисліть:
1) $\left(27 \cdot (-9)^7 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right) \cdot \left(0{,}2 - \dfrac{1}{5}\right)^3$;
2) $(-9^3)^5 : ((-3^5)^3)^2$;
3) $-10^3 \cdot (-5)^2 : ((-25)^3 \cdot (-2^2)) \cdot 40$;
4) $(-30^4 : ((-6)^2)^2) : 5^2$.

15. Запишіть у вигляді степеня:
1) $(x^4)^2 \cdot (x^5)^6 \cdot x^3 x^6 : (x^3)^{10}$;
2) $(aa^5)^4 : (a^6 a^4)^2$;
3) $(a^7)^4 \cdot (a^6 : a^4)^2 \cdot (a^5 : a^4)^3$;
4) $(a^{44} : a)^3 : (a^5 : a^3)^{50}$;
5) $(a^{12} a^4)^3 - (aa^5)^8$;
6) $x^4 \cdot ((x^6)^3)^2 - (2x^{30})^3 : (x^2)^{25}$;
7) $((-y^2)^2 \cdot x^3)^6 \cdot x : (-x^4 \cdot y^9)$;
8) $(a^2)^4 \cdot (a^2)^6 \cdot (a^8)^4 : (a^{11})^4$;
9) $\dfrac{(a^5 \cdot b^2)^3 \cdot a^{23}}{b \cdot (a^{18} : a^8)^3}$;
10) $\left(\dfrac{a^9 \cdot (b^{13} \cdot a^{21})^4}{b^9 \cdot a^{10} : a^8}\right)^2$.

16. За якого натурального значення змінної n виконується нерівність:

1) $\left(\dfrac{1}{0,25}\right)^3 < 4^n \le -(-2)^5 \cdot (-3)^4$;   2) $\dfrac{1}{2} \le 0,5^n \le 30^3 : 6^3 : 500$?

17. Обчисліть $\dfrac{4 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 15^2 \cdot 6^3}{3^4 \cdot 20^3}$.

18. Зведіть одночлен до стандартного вигляду:

1) $-0,4 \cdot x^{15} \cdot 5 \cdot y^2 \cdot z \cdot 0,3 \cdot y$;

2) $\dfrac{2}{3} \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot x \cdot y^{10} \cdot (-0,12) \cdot x^7 \cdot y^7 \cdot 10 \cdot x \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$.

19. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 33?

Таблиця 33

Одночлен	$1,2yx^2$	$4a$	$2m$	$m^2 n^2$	$2,8$	$9a$
Одночлен	$0,5x^2$	$-3ab$	$-60\,m$	$3n^2$	$5a$	$9b$
Сума одночленів						
Різниця одночленів						
Добуток одночленів						

20. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 34?

Таблиця 34

Одночлен	y^2	$5,6a$	mnp	$-3m^2n^3$	x^3	$-16x^2$	$0,02ya$
Одночлен	$-yx^2$	$4,4a$	pnm	m^3n^2	$5x^6$	$-4x^2$	$0,8yx$
Сума одночленів							
Різниця одночленів							
Добуток одночленів							

21. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 35?

Таблиця 35

a	$-0,3x^{15}y^{52}$	$-2a^4c^9b^{10}$	$\dfrac{4}{5}xy$	$-12\,p^4m^{12}$
a^2				
a^3				

22. Піднесіть одночлен $-a^5b^4c$ до степеня, що дорівнює:

1) 2;   2) 5;   3) 100.

23. Зведіть одночлени до стандартного вигляду та знайдіть їх добуток:

1) $0{,}2x^6y^{15}\cdot(x^2)^3$, $-1{,}5z^3\cdot 6xy^5$ і $-zx^{15}y^2$;

2) $(-y^2)^5\cdot(-x^4)^2$, $-0{,}15xy^9$, $-\dfrac{1}{5}x^{12}y$ і $-0{,}03(-x)^5\cdot(-y)^2$.

24. Зведіть одночлени до стандартного вигляду та знайдіть їх добуток:

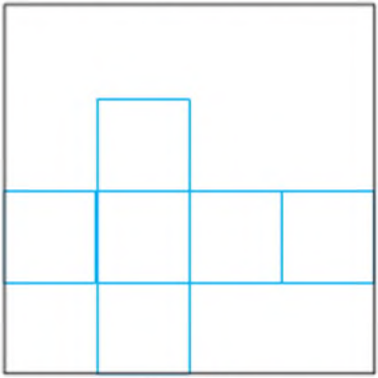
1) $-x^{4n}y^4\cdot 5xy^{2n}$, $2(x^n)^2x$; 2) $(y^{n+1})^8\cdot(-x^n)^2$, $(-xy^2)^n$.

25. Знайдіть натуральні значення n, за яких рівність є правильною:

1) $a^{2n}\cdot a^{5n}\cdot(a^n)^2=(aa^5)^3$;

2) $x^2\cdot x^{4n}\cdot(x^{2n})^3=x^{30}:(x\cdot x\cdot(x^8)^2)$.

26. З аркуша паперу розмірами $2{,}4\cdot 10^2 \times 2{,}4\cdot 10^2$ мм вирізали розгортку куба (мал. 83). Знайдіть об'єм куба.



Мал. 83

Розділ 3. МНОГОЧЛЕНИ

1. Спростіть вираз: 1) $2(a^6)^3+(a^2)^9-(5a^5)^2\cdot(-a^2)^4$;

2) $b\cdot\dfrac{2}{81}a^3\cdot 9^3+ab^2\cdot ac-18ba^3$.

2. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $5{,}85xy-8{,}1x^2-5\dfrac{1}{2}xy-0{,}9x^2-0{,}35xy$;

2) $51xy^2+13xy-4yx+13x^2y-9xy$;

3) $7a^2-26b+24a-b\cdot 13-3a+(-67a)-5{,}5a^2-46a$;

4) $14mn-28mn^3-3{,}5nm+(-n)^3m$.

3. Упорядкуйте за степенями членів многочлен:

1) $7x^2+3+x$; 2) $-4{,}5-2x^2+67x$;

3) $4x+6x^3+1{,}8x^5+3x^2-2{,}9$;
5) $6ab+9{,}7b^2a^2+2b^3a+3{,}75a$;
4) $-9{,}8x^4+\frac{1}{3}x^5+5x^3-0{,}7x^2-6$;
6) $-a^{22}b^8+6{,}05b^{23}a^{25}+2b^{15}a^3+3$.

Який степінь многочлена?

4. Знайдіть суму одночлена і многочлена:

1) $-m$ і $m+5m^2$;
2) $6k^2$ і k^2-3;
3) $-\frac{1}{5}mn+4m$ і $0{,}2nm$;
4) $6x^2$ і $5x+0{,}01$;
5) $0{,}2x$ і $-5x^2+15x+1$;
6) cd і $3-d+c-2cd$.

5. Знайдіть добуток двочленів:

1) $(12+x)\cdot(0{,}2x-4)$;
2) $(x+4{,}5)\cdot(-x-2)$;
3) $(x^2+x)\cdot(2x+x)$;
4) $(x^3+x^2)\cdot(x-1)$;
5) $(10+x)\cdot(4x-1)\cdot(x-10)$;
6) $(x^2+36)\cdot(-x-6)\cdot(-x+6)$;
7) $(2-x)\cdot(2x+1)\cdot(-0{,}5+x)$;
8) $(x+4)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x+2)$.

6. Обчисліть значення виразів:

1) $(a+5)5-a(a+5)$, якщо $a=5$;
2) $\left(\frac{1}{9}b+2\right)\cdot(3b)^2-(b^2+10)(-1+b)-19(b^2+1)$, якщо $b=0{,}01$;
3) $(x-y)(2x+y)+(y+x)(-x+2y)$, якщо $x^2+y^2=16{,}4$.

7. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $6a(a+0{,}5)-2(3a^2+a)$, якщо $a=-2{,}234$;
2) $(5b^2+b)5+10b(b-0{,}1)-4(3b^2+b)$, якщо $b=\frac{2}{3}$;
3) $(x-y)(3x+y)-(y+x)(-x+3y)+4(y+x)(-x+y)$, якщо $xy=0{,}25$.

8. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 36?

Таблиця 36

Многочлен	$x-6$	$a+1$	$0{,}3+m^2$	$a^2bc^2-abc^2$
Мночлен	$x+4$	a^2-a+1	$m-0{,}3$	$-c^2ba-a^2bc^2$
Сума				
Різниця				
Добуток				

9. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 37?

Таблиця 37

Многочлен	$-x^3-y^2$		y^3-8y^2+5	a^2-2
Многочлен		x^3-x		
Сума	$5x^3+3y^2-4$	x^3-x^2+x-1		
Різниця			$-y^2+y^3$	
Добуток				a^4-4

10. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(1{,}8a^2+5{,}6b^2)+(2{,}09a^2-3b^2)-(3{,}5a^2+1)-(1+0{,}1b^2)-$
$-(5a^2-3{,}1b^2-2)$;

2) $(-24a^2+0{,}5b^2+6)-2\left(4a^2-2\frac{1}{2}b^2\right)+3\left(-6a^2+4-\frac{1}{2}b^2\right)$;

3) $a\cdot a^4-2\,a^{12}\cdot a^5:a^{12}+a^8\cdot a^2:a^5$;

4) $(x^4)^n+(x^{2n})^5-(x^2)^{3n}\cdot x^{4n}+(x^n)^7-(-x^2)^{2n}$.

Знайдіть степінь отриманого многочлена.

11. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $3\left(-3b+\frac{1}{2}a\right)\left(-b+\frac{1}{6}a\right)-0{,}25a(a-12b)$; високі дужки

2) $\left(\frac{1}{3}x-0{,}4y\right)\left(1\frac{1}{2}x+9y\right)-6y\left(\frac{1}{2}x-0{,}6y\right)$;

3) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)-(a^2+b^2)^2+(ab-1)(ab+1)$;

4) $a^{5n-2}(a^{2+n})^3-(a^2a^n)^3:a^{n+3}-(-a^4)^{2n+1}+a^{2n}a^3$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $(-x+8)+(-x-5)=21$;

2) $(9x+11)-(4x-8)-(x-1)=27$;

3) $12-3(x-2)=4(3+2x)$;

4) $4(4x+0{,}5x^2)-(2x^2-5)=17$;

5) $(3x+(-x)^2+2{,}8)-(x^2+x^3)-12{,}2=2-x^3$;

6) $(5+x^4+6{,}6\,x^3)-(x^4-x^2-3x+8x^3-2)=7+3x+x^2$;

7) $(x^2+5x+0{,}25)+(5x^2+0{,}75)-(6x^2-3x)=-1$;

8) $(4y^2-5)-(3y^2-1{,}25y+10)-y^2=2{,}5$.

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{5}x(0{,}3x-2)=4+0{,}12x^2$;

2) $-0{,}125x(8x^2-2)+x(x^2-6{,}75)=0$;

3) $\frac{x+3}{4}+\frac{x-5}{2}+0{,}25(-x+2)=\frac{2x+2}{3}$;

4) $2x^2+x-4-\frac{(x-2)(x-3)}{3}=-6$;

5) $\left(0{,}1x-\frac{1}{2}\right)\left(0{,}6x+\frac{2}{5}\right)-(5+3x)\left(\frac{1}{50}x-0{,}4\right)=0$;

6) $\left(1\frac{1}{6}x-0{,}7\right)\left(\frac{2}{7}x-1\right)-\frac{1}{3}(x^2-x+2{,}1)=0$.

14. Доведіть, що сума многочленів $-0{,}125mn^2-1\frac{1}{12}mn-1{,}27$, $\frac{1}{8}mn^2+1\frac{5}{6}mn-1{,}23$ і $-\frac{3}{4}mn+4{,}5$ дорівнює 2 не залежно від значень змінних, що входять до нього.

15. Сума двох двоцифрових чисел, у яких однакове число десятків, дорівнює 90. Знайдіть ці числа, якщо число одиниць першого на 6 більше за число одиниць другого.

16. Двоцифрове число на 18 більше за суму його цифр. Знайдіть це число, якщо число одиниць на 2 менше від числа його десятків.

17. Обчисліть, не користуючись калькулятором:

1) $111^2 - 111 \cdot 42 + 21^2$; 2) $8{,}67^2 + 3{,}67^2 - 3{,}67 \cdot 17{,}34$;
3) $246^2 + 554^2 + 246 \cdot 1108$; 4) $3{,}37^2 + 2{,}63^2 + 5{,}26 \cdot 3{,}37$.

18. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $5x(-3x + 4y)^2$; 2) $10ab(a - 0{,}1b)^2$;
3) $4x^2y^2(3y^2 - 2x^2)^2$; 4) $5c^2(2 + 0{,}4c)^2$.

19. Спростіть вираз:

1) $(3 + 2b)^2 - 24b$; 3) $(5 - a)^2 - 5(5 - 2a)$;
2) $(5 + 2c)^2 - 4c^2$; 4) $(4 + 3y)^2 - (3y - 4)^2$.

20. Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x - 3)^2 = 16x^2$; 3) $(1 + 5x)^2 - 5x(2 + 5x) = 0$;
2) $(3 + 2x)^2 = (2x - 1)(2x - 5)$; 4) $(7 + 4x)^2 = 2x(8x + 3{,}5)$.

21. Доведіть тотожність: $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$.

22. *Задача Діофанта.* Доведіть, що для будь-яких чисел a, b, c, d виконуються тотожності:

1) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$;
2) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$.

23*. Спростіть вираз: $(x^2 + y - 4)^2 - (x^2 + y - 1)(x^2 + y - 8)$.

24*. Знайдіть значення виразу: $a^2 + \frac{1}{a^2}$, якщо:

1) $a + \frac{1}{a} = 4{,}5$; 2) $a - \frac{1}{a} = 4{,}5$.

25. Обчисліть, не користуючись калькулятором:

1) $98^2 - 48^2$; 2) $2{,}32^2 - 0{,}68^2$; 3) $67 \cdot 73$.

26. Вставте замість * одночлен так, щоб утворилась тотожність:

1) $9a^2b^2 - 81 = (* - 9)(* + 9)$;
2) $(\frac{5}{7}m + 7n)^2 = * + 10mn + 49n^2$;
3) $(1\frac{1}{3}c - 6d)^2 = * - 12cd + 36d^2$;
4) $(0{,}6ab - 0{,}5x)^2 = 0{,}36a^2b^2 - * + 0{,}25x^2$.

27. Розв'яжіть рівняння:

1) $(11 + 5x)^2 - (5x - 1)^2 = 0$; 3) $(4x + 5)^2 - (4x + 3)^2 = 0$;
2) $(3 + x)^3 - x^3 = 9x^2$; 4) $(2 - 3x)^3 = 9x^2 \cdot (6 - 3x)$.

28. Доведіть, що за будь-якого натурального n значення виразу:
1) $(3+2n)^2-(2+3n)^2$ ділиться на 5;
2) $(4+2n)^3-8n^3$ ділиться на 4.

29. Спростіть вираз двома способами:
1) $(x+3)^2-(x-3)^2$; 2) $(x+2)^3-(x-2)^3$.

30. Доведіть, що:
1) різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел є непарним числом;
2) різниця квадратів двох послідовних парних натуральних чисел ділиться на 4;
3) різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.

31. Площа квадрата дорівнює площі прямокутника, у якого одна сторона на 3 см менша від сторони квадрата, а інша — на 4 см більша за сторону квадрата. Знайдіть сторони квадрата і прямокутника.

32. Сторону квадрата зменшили на 3 см, при цьому його площа зменшилась на 39 см^2. Знайдіть початкову сторону квадрата.

33. Сторону куба зменшили на 2 см, при цьому його об'єм зменшився на 218 см^3. Знайдіть початкову сторону куба.

34. Розкладіть на множники многочлен:
1) $2b^5+6a+3b^4+9$; 3) $x^5y^2-5x^3+35-7x^2y^2$;
2) $(5x+1)^3-64x^3$; 4) $(-4a+3xy)^3+8x^3y^3$.

35. Дано три послідовні натуральні числа. Доведіть, що добуток першого і третього числа дорівнює квадрату другого числа, зменшеного на 1.

Розділ 4. ФУНКЦІЇ

1. Дано функції: $f(x)=-3x^2+5x+1$ і $g(x)=2+2x^2+3x$.
Порівняйте: 1) $f(1)$ і $g(1)$; 2) $f(2)$ і $g(-2)$; 3) $f(-1)$ і $g(0)$.

2. Розв'яжіть рівняння $f(x)=0$, якщо:
1) $f(x)=5x+1$; 2) $f(x)=5|x|-1$; 3) $f(x)=5|x|+1$.

3. Розв'яжіть рівняння $f(x)=g(2)$, якщо:
1) $f(x)=2x-3$, $g(x)=3x-1$;
2) $f(x)=2|x|+1$, $g(x)=5x-7$.

4. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:
1) $y=-\dfrac{4}{2x-5}$; 2) $y=x^2+\dfrac{4}{x}+2$; 3) $y=\dfrac{5x+2}{3}+\dfrac{3}{5x-2}$.

5. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $y = -5x^2$; 2) $y = -x^2 + 3$; 3) $y = 4x^2 - 2$;

6. Чи проходить через початок координат графік функції:

1) $y = x^2$; 2) $y = -6x + 1{,}4$; 3) $y = -8$; 4) $y = -\frac{4}{11}x$?

7. Чи належить графіку функції $y = -2x^2 + 3x + 1$ точка:
1) $A(-1; -4)$; 2) $B(1; 0)$; 3) $C(0; 1)$; 4) $D(2; -1)$?

8. Побудуйте графік функції:

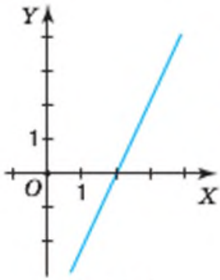
1) $y = 3x - 4$; 3) $y = -2x + 3$;

2) $y = 0{,}5x - 1{,}5$; 4) $y = \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$.

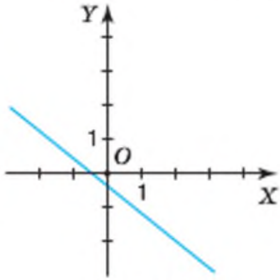
9. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 3x - 11$; 2) $y = -3{,}5x + 14$; 3) $y = -2{,}4x + 3{,}6$.

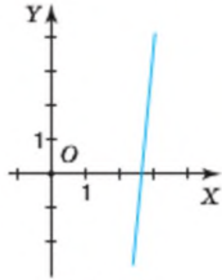
10. На малюнках 84—89 зображено графіки лінійних функцій, заданих формулою $y = ax + b$. Визначте знаки коефіцієнтів a і b.



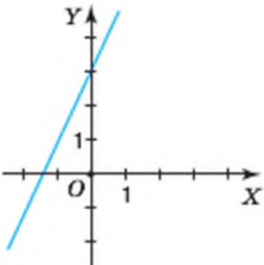
Мал. 84



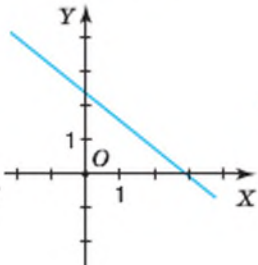
Мал. 85



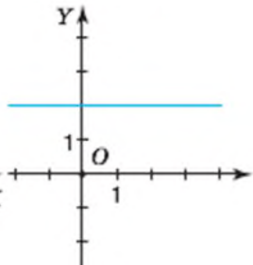
Мал. 86



Мал. 87



Мал. 88



Мал. 89

11. Знайдіть координати точки графіка функції $y = 4x + 12$, якщо:
1) абсциса і ордината точки рівні між собою;
2) абсциса і ордината точки є протилежними числами;
3) сума абсциси і ординати точки дорівнює 10.

12. Графік функції $y = ax + b$ проходить через точки A (1; –3) і B (2; 2). Знайдіть значення a і b.

13. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точку A (1; 21), а його кутовий коефіцієнт дорівнює НСД чисел 168 і 360. Знайдіть значення k і b.

14. Задайте формулою функцію, графік якої є прямою, що паралельна осі OX і проходить через точку M $(a; b)$. Накресліть у зошиті таблицю 38 та заповніть її.

Таблиця 38

$M\ (a;\ b)$		(3; –3)	(–1; ___)	$\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{7}\right)$
a	2			
b	2		2,5	
Функція				

15. Чи належить графіку функції $y = |2x - 1| - 2$ точка:
1) A (1; –1); 2) B (1; 1); 3) C (–1; –5); 4) D (–1; 1)?

16. Знайдіть область значень функції:
1) $y = |x| - 4$; 2) $y = |x| + 2$; 3) $y = 3|x|$; 4) $y = -5|x| + 1$.

17*. Побудуйте графік функції:
1) $y = |x| - 2$; 2) $y = |x - 1| - 2$; 3) $y = -|x| + 2$; 4) $y = |x + 1| + 2$.

18*. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -2, \text{ якщо } x \le -1, \\ x - 1, \text{ якщо } -1 \le x < 1, \\ 4x - 4, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \frac{x}{3}, \text{ якщо } x \le -3, \\ -1, \text{ якщо } -3 < x < 1, \\ -2x + 1, \text{ якщо } x \ge 1. \end{cases}$

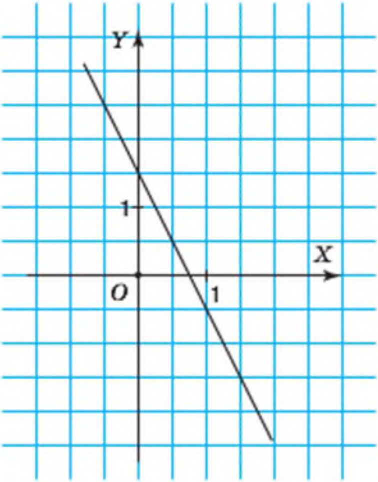
19*. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| - 1$; 3) $y = \frac{1}{2}|x| - 1$;

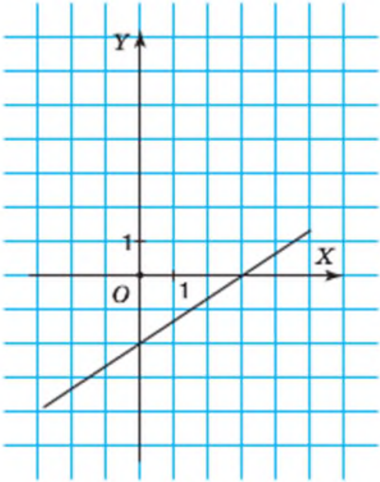
2) $y = -2|x - 1| - 1$; 4) $y = \left|\frac{x}{2}\right| + 1$.

20*. Побудуйте графік функції:
1) $y = |x + 1| + |x - 2|$; 2) $y = |x - 3| - |x + 1|$.

21*. На малюнках 90—91 зображено графіки лінійних функцій. Задайте формулами ці функції.



Мал. 90



Мал. 91

22. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, а її графік проходить через точку $N\,(a;\,b)$. Накресліть у зошиті таблицю 39 та заповніть її.

Таблиця 39

$N\,(a;\,b)$		(___; –8)	(–1; ___)	$\left(-\frac{3}{14};\,\frac{3}{7}\right)$
a	–2	4		
b	1		–3,5	
Функція				

23. Побудуйте графік функції:

1) $y=x$; 2) $y=-3x$; 3) $y=0{,}25x$.

24. Знайдіть область визначення і область значень функції:

1) $y=\frac{5}{9}x$;

2) $y=2|x|$;

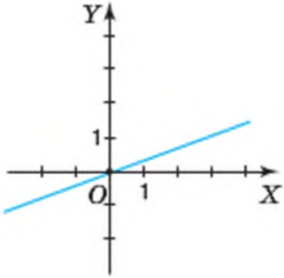
3) $y=-\frac{7}{11}x$;

4) $y=-\frac{2}{3}|x|$.

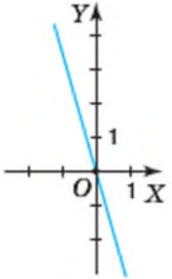
25*. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\frac{x}{3}\right|$; 2) $y=-3|x|$; 3) $y=-|2x|+x$.

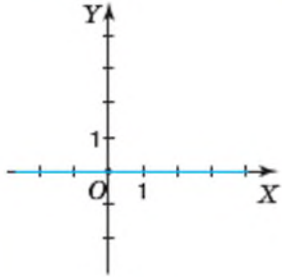
26. На малюнках 92—94 зображено графіки лінійних функцій, заданих формулою $y = ax$. Визначте знак коефіцієнта a.



Мал. 92



Мал. 93



Мал. 94

27. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, ордината якої в 5 раз менша від відповідної абсциси. Побудуйте графік отриманої функції.

28. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, абсциса якої в 2,5 рази більша за відповідну ординату. Побудуйте графік отриманої функції.

29. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт дорівнює середньому арифметичному всіх непарних додатних одноцифрових чисел. Побудуйте графік отриманої функції.

30. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним до $\frac{2}{21}$ від суми всіх двоцифрових чисел, кратних 7 і менших від 31. Побудуйте графік отриманої функції.

Розділ 5. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

1. Чи є рівносильними рівняння:

1) $5x - 7 = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9 + 7$;
2) $7 - 2y = 6y - 18$ і $2y - 6y = -18 - 7$?

2. Знайдіть корінь рівняння:

1) $7 - 3x - 3 = 10 - 4x$;
2) $5 + 2y - 6 = 5y + 8$;
3) $-1{,}2x + 5 = 3 - 0{,}4x$;
4) $1{,}5y - 4 = 5 + 0{,}9y$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x-5{,}5)+3=7{,}5-3{,}5(2x-1)$;

2) $8-1{,}5(3x+2)=\frac{2}{3}(4-6x)$;

3) $0{,}8(3-10y)=12-2{,}5(3y-5)$;

4) $\frac{y+3}{2}-2y=-y-\left(1-\frac{6-2y}{3}\right)$.

4. Доведіть, що:

1) рівняння $(x+3)(x-2)-(3+x)^2=9$ має один корінь;

2) рівняння $5y(y+2)=(2y+1)^2+y^2+6y$ немає коренів.

5. У двох 7-х класах навчаються 55 учнів, причому в 7-А класі на 3 учні більше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчається в кожному класі?

6. У трьох кошиках 120 яблук. У другому кошику на 20 яблук менше, ніж у першому, і на 15 яблук більше, ніж у третьому. Скільки яблук у кожному кошику?

7. Одна сторона прямокутника утричі більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

8. Відстань між пунктами *A* і *B* дорівнює 390 км. Два автобуси одночасно виїхали із цих пунктів назустріч один одному і зустрілись через 3 години. Знайдіть швидкість кожного автобуса, якщо швидкість одного з них на 5 км/год менша від швидкості другого.

9. Знайдіть три послідовні натуральні числа, якщо їх сума дорівнює 906.

10. Для даного рівняння заповніть таблицю 40.

Таблиця 40

Лінійне рівняння із двома змінними	$x-y+7=0$	$2x+y-6=0$	$x-2y+10=0$
виразити y через x			
виразити x через y			

11. У рівнянні $4x-2y+5=0$ виразіть змінну:

1) y через змінну x; 2) x через змінну y.

Знайдіть два будь-яких розв'язки цього рівняння.

12. Побудуйте графік рівняння:

1) $2x-y+3=0$;
2) $5x-2y=0$;
3) $-3x-y+4=0$;
4) $-x+2y-8=0$.

13. До рівняння $2x-y+3=0$ доберіть друге рівняння так, щоб отримана система двох лінійних рівнянь із двома змінними: 1) мала один розв'язок; 2) не мала розв'язків; 3) мала безліч розв'язків.

14. Розв'яжіть графічно систему двох лінійних рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x-y-6=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ 4x+y-2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y-1=0, \\ x-3y+1=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ -2x-4y+8=0. \end{cases}$

15. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+y=-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2y=14, \\ 2x+y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+y=-4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+y=-1, \\ x-y=5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 2x+y=3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x-3y=11, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

16. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=0, \\ 2x-y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=0, \\ 2x+y=26; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4}-\dfrac{y+2}{2}=0, \\ 3x+y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3}-\dfrac{y+6}{6}=0, \\ x+2y=-1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{3x+10}{8}=\dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{2x+3y}{4}=-0{,}25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y}{6}, \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x-12}{4}=0. \end{cases}$

17. Сума двох чисел дорівнює 55, а їх різниця дорівнює 5. Знайдіть ці числа.

18. Сума двох чисел дорівнює 100. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 10 більше за інше.

19. Різниця двох чисел дорівнює 15. Знайдіть ці числа, якщо одне з них у 4 рази більше за друге.

20. Сума двох чисел дорівнює 33. Якщо від подвоєного першого числа відняти друге число, то отримаємо 12. Знайдіть ці числа.

21. Різниця двох чисел дорівнює 7. Якщо до першого числа додати подвоєне друге число, то отримаємо 31. Знайдіть ці числа.

22. Дано два числа. Сума подвоєного першого числа і другого числа дорівнює 17. Сума подвоєного другого числа і першого числа дорівнює 19. Знайдіть ці числа.

23. Дано два числа. Сума цих чисел дорівнює 80. Якщо одне із цих чисел зменшити у 2 рази, а друге число збільшити у 2 рази, то в сумі отримаємо число 115. Знайдіть ці числа.

24. Знайдіть дріб, який набуває значення $\frac{3}{4}$, якщо чисельник збільшити на 6, і набуває значення $\frac{1}{2}$, якщо знаменник зменшити на 2.

25. Якщо чисельник дробу помножити на 2, а від знаменника відняти 2, то отримаємо 2. Якщо ж від чисельника відняти 4, а знаменник помножити на 4, то отримаємо $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

26. За 5 кг печива і 3 кг цукерок заплатили 135 грн. Скільки коштує 1 кг печива, якщо він дешевший за 1 кг цукерок на 13 грн?

27. Легковий автомобіль за 3,5 години проїхав ту ж відстань, що і вантажний за 5 годин. Знайдіть їх швидкості, якщо швидкість легкового автомобіля на 30 км/год більша за швидкість вантажного автомобіля.

28. Два автомобілі виїхали одночасно з двох міст, відстань між якими 225 км, і зустрілися через 1,5 год. З якою швидкістю їхав кожний автомобіль, якщо перший проїхав до зустрічі на 15 км більше, ніж другий?

29. Із пункту A до пункту B виїхав легковий автомобіль зі швидкістю 90 км/год. У цей самий час вантажний автомобіль, що рухається в тому ж напрямку зі швидкістю 70 км/год, вже проїхав 100 км шляху. До пункту B автомобілі прибули одночасно. Знайдіть відстань між пунктами A і B.

30. Катер пропливає відстань між двома містами за 4 години за течією і за 6 годин проти течії. Знайдіть швидкість катера і течія річки, якщо відстань між селами дорівнює 60 км.

31. За 2 год за течією річки і 1 год проти течії моторний човен проходить 63 км, а за 1 год за течією і 2 год проти течії — 57 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

32. Батько старший за доньку на 26 років, а через 4 роки він буде старший за неї утричі. Скільки років батьку і скільки років доньці?

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

§ 1

14. 1) 43,4; 2) 25,075; 3) 22,1; 4) 72,11; 5) 71,34; 6) 0,035; 7) 30,35; 8) 0,12; 9) 7,5. **15.** 1) 55,02; 2) 19,06; 3) 0,42; 4) 40,2. **16.** 1) $20\frac{1}{2}$ 2) $18\frac{23}{24}$; 3) $4\frac{10}{13}$; 4) $2\frac{13}{30}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 18; 7) 2; 8) $\frac{1}{8}$. **17.** 1) $30\frac{1}{3}$; 2) $12\frac{1}{6}$; 3) 65; 4) $\frac{2}{3}$. **18.** 1) 4; 2) 125; 3) 243; 4) 7; 5) 64; 6) 1; 7) $\frac{4}{169}$ 8) $28\frac{4}{9}$. **19.** 1) 16; 2) 27; 3) 1024; 4) $9\frac{7}{9}$. **20.** 1) –33,05; 2) $-13\frac{1}{3}$; 3) –6; 4) –3; 5) 0,7; 6) $\frac{1}{3}$. **21.** 1) –4,55; 2) $-16\frac{1}{6}$; 3) –3,06; 4) 21. **24.** 1) –42; 2) 3,58; 3) $14\frac{2}{7}$; 4) 64,1; 5) $1\frac{1}{3}$; 6) $9\frac{1}{15}$. **25.** 1) –80; 2) –62,56; 3) 6; 4) $4\frac{1}{6}$. **30.** 1) 146,2; 2) –2,74; 3) –21,1; 4) 8,5. **31.** 1) 39,48; 2) $2\frac{2}{3}$. **32.** 1) 6; 2) –30; 3) 1; 4) 10. **33.** 1) $4\frac{1}{3}$; 2) –11. **34.** 74. **35.** 64. **36.** 1) 14; 2) –15. **37.** 20. **39.** 1) 111105; 2) –500; 3) 1; 4) $4\frac{1}{5}$; 5) –1; 6) $\frac{101}{104}$. **40.** 1) 5; 2) $1\frac{1}{3}$. **42.** 20. **43.** 19,5. **46.** 1) 150; 2) 13,5; 3) 9; 4) 0,12. **47.** 1) 80; 2) 1; 3) 600; 4) 1,1. **48.** 32, 24 і 2.

§ 2

58. 1) 17,5 і 5; 2) 12,2 і –0,3; 3) $1\frac{5}{6}$ і $-\frac{7}{48}$; 4) 4 і $-5\frac{1}{8}$. **59.** 1) 23; 2) 0; 3) 3,95; 4) 0,22. **60.** 1) 50; 2) 65. **61.** 115. **71.** 1) 3; 2) –4,5; 3) 0,4; 4) $4\frac{4}{9}$; 5) 0; 6) $4\frac{4}{9}$. **72.** 1) –15,3; 2) 76; 3) $\frac{5}{12}$; 4) –12,5. **73.** 1) 240; 2) 270; 3) 150; 4) 320. **74.** 1) 18 і 14; 2) 30 і 50; 3) 22 і 24; 4) 35,6 і 72,96. **75.** 1) 12 і 9; 2) 18 і 20,25. **76.** 1) 24,8; 2) –6,2; 3) –3,1; 4) –93. **77.** 1) –2; 2) $-1\frac{2}{3}$. **78.** 1) 18; 2) –28; 3) $2\frac{3}{4}$. **80.** 1) 6 і 4; 2) 5. **81.** 1) $x \neq 0$, $x \neq 1$; 2) $x \neq 4$, $x \neq 5$. **84.** 1) 2,75; 2) 18; 3) 5,4; 4) 2,43. **85.** 1) 300; 2) 90; 3) 4; 4) 20.

§ 3

94. 1) $35a$; 2) $45c$; 3) $20n + 12$; 4) $17m$; 5) $-12p$; 6) $11k - 4,5$. **95.** 1) $7a$; 2) $20c - 12$; 3) $-b$; 4) $35x$. **96.** 1) $1,2a$; 2) $3,5cd$; 3) $-12mn$; 4) $-11xyz$; 5) $3,2abc$; 6) $-240tpk$. **97.** 1) $14ab$; 2) $1,6cd$; 3) $-7mn$; 4) $3,5xyz$. **100.** 1) b; 2) $9c - 4d$; 3) $2n - 2m$; 4) $5p - k$; 5) $-9x + 9y - 9z$; 6) $2a - 2b$. **101.** 1) $c - 3d$;

2) $4x - 3y$; 3) $6a - 6b$; 4) $3m - 3n$. **107.** 1) –0,5; 2) 1,44; 3) $16\frac{5}{6}$; 4) –52. **108.** 1) 48,6; 2) $2\frac{2}{3}$. **111.** 1) $8,4n - 4,2m$; 2) $1,5n$; 3) $21,5n + 2,6m$; 4) $-24n - 10,4m$. **112.** 1) $6,4c$; 2) $3,8c+3\frac{1}{13}d$. **115.** 1) –16,6; 2) –0,16; 3) 94,5; 4) –19,44. **116.** 1) –59; 2) 2,86. **117.** 1) 112; 2) 47,6; 3) –1,2; 4) –0,75. **118.** 1) –9; 2) 24. **119.** 1) –0,2; 2) $5\frac{1}{3}$. **120.** 6. **123.** 1) 6; 2) 36; 3) 16. **124.** 1) –1; 2) 4. **129.** 1000. **130.** 24, 18 і 12. **131.** 1) 18; 2) 3.

§ 4

162. 60,5. **163.** 80. **166.** 1) 581; 2) 10625. **168.** 32. **169.** 36.

Розділ 2

§ 5

174. 1) 2; 2) 5; 3) n. **180.** 1) Не завжди. Правильно, якщо n — непарне натуральне число; 2) ні. **182.** 1) $(-n)^9$; 2) $\left(-\frac{a}{b}\right)^3$; 3) $(2a)^9$. **183.** 1) 64; 2) 1,21; 3) 16; 4) 0,001; 9) 0,000064; 11) $1\frac{9}{16}$. **184.** 1) 0,064; 3) –25; 4) –0,00001. **185.** 1) 100; 3) 16. **186.** 1) 1000; 2) –0,001; 3) –64. **187.** 1) 45; 2) –1125. **188.** 1) 46; 2) 4. **189.** 1) 4^1, 2^2, $(-2)^2$; 3) 16^1, 2^4, $(-2)^4$, 4^2, $(-4)^2$. **190.** 1) 100^1, 10^2, $(-10)^2$; 3) 64^1, 8^4, $(-8)^4$, 4^3, 2^6, $(-2)^6$; 4) 2^1. **193.** 1) 0; 2) –15; 4) –80. **194.** 1) Додатним; 4) від'ємним; 5) від'ємним. **197.** 1) –11; 2) 0; 3) 1000. **198.** 1) 0; 2) 3; 3) 10; 4) 0. **199.** 1) –324; 2) –540; 3) 48. **200.** 1) –999; 2) –10; 3) –26. **201.** 1) –7; 2) 16. **202.** 1) 5^3; 2) 5^6. **203.** 1) 2^5; 2) 2^7. **205.** 1) 2^8; 2) 4^4; 3) 16^2. **206.** 1) 16; 2) 0,0081. **207.** 1) 0,00032; 2) –243. **208.** 1) 0,01; 2) 4. **209.** 1) 8,41; 2) $2\frac{8}{9}$. **210.** 1972. **211.** 1) –0,4, 0,4; 2) –0,05, 0,05; 4) $-1\frac{3}{10}$, $1\frac{3}{10}$. **212.** 1) –2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{5}$. **213.** 1) 423; 2) –24; 3) 0. **214.** 1) 2,41; 2) 56,16; 3) 9,07; 4) 2. **216.** 1) 12345; 2) 506605. **217.** 1) 770777. **220.** Так, наприклад $a = 0,1$. **221.** 1) $n = 4$. **222.** 1) $x = 0,4$; 3) $x = 0$; 4) $x = 1$, $x = -9$; 7) $x = 5$, $x = 6$. **223.** 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^5$; 3) $(-0,3)^9$; 4) 12^6. **224.** 1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$. **225.** 1) $a \leq 0$; 2) 0,5. **227.** 1) 0; 2) 0. **228.** 1) 0; 2) 0. **229.** 1) 20; 2) 0. **230.** 1) –4; 2) 3. **231.** 1) Будь-яке число; 2) 24; 3) 1. **232.** 1) Коренів немає; 2) –100. **233.** 25, 16. **237.** $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$. **240.** 1) 0,33; 2) 0,786.

§ 6

252. 1) 2^{11}; 2) 2^{21}. **253.** 1) 8^6; 2) 8^{45}. **254.** 1) 10^{12}; 3) $(-4,5)^{132}$; 5) a^{100}; 7) $2,1^8$; 10) $\left(\frac{2}{3b}\right)^{306}$. **255.** 1) 5^{13}; 3) c^{10}; 4) $(-p)^{30}$; 8) $\left(\frac{a}{c}\right)^{11}$. **256.** 1) $5^n \cdot 5^m$;

3) $0{,}8^n \cdot 0{,}8^m \cdot 0{,}8$. **257.** 1) $a^{32} \cdot a^{32}$; 4) $a^{30} \cdot a^{34}$. **258.** 1) $m^2 \cdot m^{23}$; 2) $m^5 \cdot m^{20}$. **259.** 1) 11^{10}; 3) 11. **261.** 1) 25; 2) 0,0016; 4) –343. **262.** 1) 7^{16}; 3) a^{14}. **263.** 1) $\frac{2^n}{2^m}$; 2) $\frac{9^n}{9^3}$. **264.** 1) $0{,}1^{18}$; 3) $0{,}1^{50}$. **265.** 1) 5^{12}; 3) 5^{30}. **273.** 1) 625; 3) 1. **274.** 1) a^6; 2) a^{50}. **276.** 1) 32; 2) 1000000; 3) –1. **278.** 1) 4; 2) 6. **280.** 1) 3^5; 2) 3^{17}. **281.** 1) 8^{18}. **282.** 1) $0{,}5^5$; 2) $0{,}5^4$. **283.** 1) $(-2)^5$; 2) $(-2)^7$. **284.** 1) 20^7; 3) a^{36}. **286.** 1) $a^{10}b^{26}$; 2) a^8b^{30}; 4) $a^{88}b^{64}$. **287.** 1) $a^{11}b^{35}$; 3) $a^{13}b^{37}$. **291.** 1) –1. **292.** 1) 4^9; 4) $0{,}05^{16}$; 6) $\left(\frac{4}{17}\right)^{30}$. **293.** 1) $3^n(3^{7n} + 3^5)$; 3) $3^n(3^{2n+5} + 3)$. **294.** 1) $2^n(2^{4n} + 2)$. **295.** 1) $(5^5)^2$; 3) $(5^3)^4$. **297.** 1) 1000000; 2) 0,000001. **298.** 1) 100; 2) 0,01. **299.** 1) 2^{24}; 4) $\left(1\frac{1}{6}\right)^6$. **301.** 1) a^{31}; 2) a^{83}; 3) a^{47}. **302.** 3) 1; 4) –100000. **303.** 1) a^{2n}; 2) x^{mn+np}; 4) a^n. **304.** 1) 0; 2) –4. **305.** 1) 0; 2) 0,4. **308.** 1) 5; 2) 0; 4) 1. **310.** 19. **311.** 1) 14; 3) 81, –81; 4) –3. **312.** 1) 0,2; 3) 2, –2. **313.** 1) 0; 3) –1. **315.** 1) 9; 2) 1; 4) 4. **317.** 0,5. **318.** 500 с. **320.** 2) 38,75. **322.** 90 дм. **323.** На 4,8 см.

§ 7

327. 2). **331.** 2) Ні; 3) ні. **333.** 1) $17xy^2$; 3) $7ab$. **334.** 1) $3{,}2xy$; 2) $4{,}8x^4$. **336.** 4) $0{,}8x^9y$; 5) $6{,}5a^7c^4$. **337.** 1) $16xya^3c^4b^5$; 3) $-100a^4c^4b^7$; 6) $30a^7c^4b^5x^4$. **340.** 1) $-0{,}5x^{10}$. **341.** 1) 2, 56; 2) 0, $-\frac{5}{7}$; 3) 50, 1. **342.** 1) 3, –1; 2) 0, 0,001; 3) 48, 4. **343.** 1) $x^{10}z^2y^4$; 2) $x^{40}z^8y^{16}$. **344.** 1) $16x^{20}y^8$; 2) $0{,}00000001x^{24}y^{32}$. **345.** 1) $-0{,}008x^{63}y^{96}$; 3) $64a^9c^{12}b^{15}$. **347.** 1) –4; 2) –3. **348.** 1) $4a^4b^7$, $-4a^4b^7$; 2) $-1\frac{1}{4}x^3y^4$; $1\frac{1}{4}x^3y^4$; 3) $-0{,}01a^{50}c^{20}b^{25}$; $0{,}01a^{50}c^{20}b^{25}$. **353.** 1) 170, –6; 4) 19, 1. **354.** 1) $193a^{10}$; 2) $0{,}1x^{33}y^{34}$. **355.** 1) 0. **356.** 1) $2{,}4x^{20}y^{20}$. **357.** $9a^6$. **359.** $2{,}88a$. **363.** x і y — будь-які числа. **364.** 1) 5; 2) 3. **366.** 256. **368.** $1\frac{16}{27}a^2$. **369.** 1) 2. **370.** 8 кг, 12 кг, 16 кг.

Розділ 3

§ 8

373. 1) $4x$, 3; 2) $5x^5$, x^6, x; 3) $6x$, 4, x^3, $2x^2$. **374.** 1) $x^2 + x$; 2) $2x + 6$. **375.** 1) $x^2 + x + 5$; 3) $x^3 + y^3 + z^3$. **377.** 4). **379.** 3); 4). **382.** 1) $7ac$, $-9a$, -4; 2) $6x^{12}$, $-x$, y; 4) $-a^5c$, y^2, $-5c^5a$, -55. **384.** 1) $4m^2 + mn - pmn$; 2) $-2{,}8x^5 - xy^3 + 0{,}25x^2y$; 3) $c^2a^3 + c^3a^2 - 5$. **385.** 1) $8n + 7$; 2) $-3x^2 + 5x$; 4) $-0{,}4x^4y - 6x^4$. **386.** 1) $11x$; 2) $7{,}2 - 14x^2$; 3) $-3m^2 - 3m + 10$; 4) $-c^2a^2 + 4a^3 + 4c^2$. **388.** 1) $x^3 + y^2$; 3) $33a^2b^2 + ab^2 - 3ab + 1$. **389.** 1) $-7y^2x - yx^2 + 3x^2$; 2) $6c^3 + 2{,}5bc - 6b + 3$. **392.** 1) 2; 2) 1; 3) 14. **393.** 1) $-2a^{10} + 6a^8 + 1{,}8a^5 - a^4 + 3a^2 + 4a + 2$; 2) $3xy^3 + xy^2 + 19x^2 + 3xy$; 3) $-2b^3a^3 + 2\frac{1}{6}b^2a^2 + 1{,}6ab + 3{,}7$. **395.** 1) –9, m, $3mn^5$, $-m^2$, $-8mn^6$; 2) –9; 3) 7. **396.** 1) $11xy^2 + 2x^2y + xy$; 3) $-n^3 + m^2 - 42m$. **397.** 1) $2\frac{1}{36}$; 2) –0,4. **398.** 1) $x^{11} - y^2z^2$, 11; 3) $-6y^{12} + 0{,}1y^2$, 12. **399.** 1) $10{,}1y^4 + 6{,}9xy^2$, 4;

3) $-0,84a^2b^6-24a^3-3,2b$, 8; 5) $1,9xy^2z^2+9x^2y^2$; 5. **402.** $x^{42}-5x^{12}+1000x^3$. **405.** 1) $5x^2-6x+5x+6$. **406.** 1) $x^2+x+2x-10$; 3) $x^2+3x+3-13$. **410.** $0,48k+d$. **411.** $0,4k+0,2d$. **413.** $27a$. **414.** $1,8a+1,6c$. **415.** 1) $4n+4$; 2) $3n+5$. **417.** $a^{12n+2}-b^8+a^{11n}b^{n+1}c^5+a^{10n+1}-b^{2n}$. **418.** $0,4a+0,4b$, 8,8 грн. **419.** 1) $k+k^2+k^3+k^4+k^5+k^6$. **420.** 1) 0,625; 2) 2,05; 4) 1,75. **421.** $-\frac{1}{9}$.

§ 9

422. 1) Так; 2) ні. **427.** 1) $2m+m^2$; 2) $2k^2-3$; 3) $2nm+m^2$. **428.** 1) $2x^2+3x+2$; 2) y^2+x; 3) -2; 4) $4x$; 8) $3cd-c^2+3$; 9) $-d^2-6d+1$. **429.** 1) $2y$; 2) $2n$; 6) 0; 7) 0. **430.** 1) $3ab+5b$, 2; 3) $2,3b^2-4$, 2. **431.** 1) $-a^2+5a+3b$, 2; 2) $10xy^2+x^2y-6x^2+3xy+2$, 3. **433.** 1) $-n^2$; 2) $-k^2-13$; 4) $-c^2+10$; 5) $-2,45x^2+x$; 7) $-d^2-4d-1$; 8) $9z^2$. **434.** 1) $0,8a+b$; 3) $0,2m^3$; 4) $-0,2k^2+2k+200$. **436.** 1) -150; 3) 40. **437.** 1,96. **438.** 1) $(a^2-4)+(-a^3+3a)$; 2) $(2a+a^2)+(a-4-a^3)$. **441.** $1000x+200y+1010z+58$. **442.** 1) $5,6b^2-4,34$; 4) $2x^{2n}$. **443.** 1) $a^2+3,5b^2-0,3a+0,41b+4$; 2) $b^2+1,8$; 3) y^2. **445.** 1) $yx^2-7,4yx+y+30$; 2) $yx^2-6xy^2+3yx-y$. **449.** 1) $(0,4a^2+1,6a^3)+(-4,6a^3-0,4a^2-1+3a)$; 2) $(a^2+6)+(-3a^3-a^2-7+3a)$; 3) $(-a^3+8)+(-2a^3-9+3a)$. **450.** 2) 0. **451.** 1) 42; 2) 17. **452.** 1) 1,214. **457.** 1) $90a+9b+c$; 2) $210a+111b+12c$. **458.** 1) $9b-9a$; 2) $22a+12b$. **462.** 112, 121, 211. **463.** 113, 131, 311, 122, 212, 221, 203, 302, 104, 401. **464.** 7681. **465.** 198. **467.** 6 л, 9 л, 8 л. **468.** 38 км. **469.** 105 м. **470.** $\frac{5}{12}$ кг. **471.** 20 кг.

§ 10

472. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **475.** 1) $-x^2-xy$; 2) x^2-xy; 5) m^2+2m; 7) $x-x^2$; 9) $-a-b$; 10) $4a^2+4b^2$; 11) $7mn-7n$; 12) $5m^2+30$. **476.** 2) $-50d-4$; 3) $k^4+k^3+3k^2$; 4) $0,05x^2+0,3x^3+0,2x^2$. **477.** 1) m^2+m^3; 2) m^2-m^3; 3) $-2x^3-18x^2$. **478.** 1) $3a^2-3a^3$; 2) $3ba^2+3b^2+3bc$; 3) $10a^3-2a^2b$; 4) $6a^2+4a+8$; 6) $-2x^3y+8x^2y$; 8) $ab-ac+acb$. **479.** 1) $42xy-6x^2$; 2) y^2x-2y^4; 3) $-6k^3-15k^2+9k$. **480.** 1) 4; 2) $-\frac{9}{14}$; 4) -1. **481.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{12}$; 3) -2. **482.** 1) $-y^2-x^2-2xy$; 2) y^2+x^2+2xy; 3) y^2-x^2; 4) y^2+x^2-2xy; 7) $2x^4+x^3-8x^2-4x$. **483.** 1) $4x^2+27x-40$; 2) $-x^2-10x-24$; 3) $2x^2+5x+2$; 4) $x^2+12x+27$; 5) $-2x^2-9x-4$; 6) $xy-5x-4y+20$. **484.** 1) $3\frac{1}{3}$; 2) 1,4. **485.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 40; 4) коренів немає. **486.** 1) $n^2+2nm+m^2$; 2) x^2+6x+9. **487.** 1) x^2+2x+1; 2) x^2-2x+1; 3) $n^2-6nm+9m^2$; 4) $y^2-8y+16$. **488.** 1) a^2-a^{32}, 32; 2) 0, 0; 3) x^5+x^2+x+1, 5; 4) $x^3z^2-2z^3$; 5. **489.** 1) 0; 2) $-0,12c^2ba$; 3) $x^{13}y^5+1$. **491.** 1) Коренів немає; 2) 0; 3) -2. **494.** 2) 14,06. **495.** 1) $-2y^3$; 2) $8b^3-a^3+4ab^2-2a^2b$; 4) x^3+6x^2+9x+2; 5) $8y^2+2x^2-10xy$. **496.** 1) $30c-390$; 2) x^2-x; 4) $-6b^4+12b^3-8a^2+4b$; 6) $-1,6xy^2$. **497.** 1) $-2b^2-3b$; 3) $-24b^2c^2$; 4) $-c^2$. **498.** 1) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$; 2) $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1$; 4) $4x^2+12xy+9y^2+20x+30y+25$. **499.** 3) $-ab^{n+1}$; 4) a^3b. **500.** 1) 0; 2) 0. **502.** 1) $24x^2y-54y^3$; 2) $2x^4+12x^2y^2+2y^4$; 4) $a^8+a^4b^4+b^8$. **503.** $a=-5$, $b=-1$, $c=6$. **504.** 11. **505.** 74. **506.** 15. **507.** 428571. **509.** 652, 265. **511.** 58 м. **512.** $16a+3ax+2x^2a$ (грн). **513.** 40 км. **514.** 10 км.

§ 11

521. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **522.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **523.** 3). **524.** 4) Так. **525.** 2). **526.** 2). **530.** 1) $9x^2 + 24x + 16$; 3) $25y^2 + 40y + 16$. **531.** 1) $4x^2 + 12xy + 9y^2$; 3) $9d^2 + 48cd + 64c^2$. **532.** 1) $4 - 12x + 9x^2$; 3) $49y^2 - 14y + 1$. **533.** 1) $16a^2 - 40ay + 25y^2$; 3) $16d^2 - 56ad + 49a^2$. **534.** 1) $0,04x^2 + 0,2xy + 0,25y^2$; 3) $0,01a^2 - 0,14ad + 0,49d^2$. **535.** 1) $0,09y^2 + 0,24ay + 0,16a^2$; 3) $0,49a^2 - 0,7ab + 0,25b^2$. **536.** 1) 2601; 3) 6889. **537.** 1) 1521; 3) 324. **538.** 1) 784; 3) 9801. **539.** 4) $(4x - 3)^2$. **542.** 1) $(2a + 1)^2$; 3) $(b + 5)^2$. **543.** 1) $(3 - a)^2$; 3) $(2b - 5)^2$. **544.** 1) $(2 + x)^2$; 3) $(6b + 2)^2$. **545.** 1) $4a^2$; 3) $25d^2$. **546.** 1) a; 3) $4c$. **547.** 1) a^2; 3) $8a$. **548.** 1) $b^2 + 25$; 3) $49y^2 + 25$; 5) $16 - 3b^2$; 7) $36 + 18y$. **549.** 1) 0,09; 3) $0,16y^2$. **550.** 1) –1,5; 3) 2,5. **551.** 1) –2; 3) коренів немає. **553.** 1) $x^2 - 4xy + 4y^2$; 3) $25a^2 + 60ab + 36b^2$. **554.** 1) $100x^4 + 40x^3 + 4x^2$; 3) $25a^6b^4 - 60a^3b^5 + 36b^6$. **555.** 1) $9c^4 + 30c^3 + 25c^2$; 3) $9c^4d^2 + 12c^2d^3 + 4d^4$. **556.** 1) $0,12x^3 - 2,4x^2y + 12xy^2$; 3) $24a^3b - 7,2a^2b^2 + 0,54ab^3$. **560.** 1) 16,5; 2) 1. **561.** 1) 10; 2) 31. **562.** 1) –0,25; 3) 0. **563.** 1) 2; 3) 0,25. **564.** 1) 5050; 2) 4672; 3) 4580; 4) 80002. **565.** 6 см. **566.** 3 см. **567.** 13 см. **568.** $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$. **571.** 1) $x^2 + 4y^2 + 9 - 4xy + 6x - 12y$; 3) $9x^2 + 16y^2 + 4 - 24xy - 12x + 16y$. **576.** 5; 6; 7. **577.** 2; 2,5; 3. **578.** 7; 9; 11. **581.** 64 кг. **583.** 1) 1024; 2) 1. **584.** 1) 30; 2) –10; 3) 4.

§ 12

592. 4). **593** 3). **594.** 2). **595.** 4). **596.** 2) і 3). **597.** 1) $4a^2$; 3) $\frac{16}{49}d^2$. **598.** 1) $9y^2 - x^2$; 3) $25d^2 - c^2$. **600.** 1) $4y^2 - \frac{1}{9}x^2$; 3) $16d^2 - 0,01c^2$. **601.** 1) $4b^2 - 25b^2$; 3) $\frac{4}{49}d^2 - 0,04b^2$. **602.** 1) Ні; 3) так. **607.** 3). **609.** 1) $(6xy^4 - 4)(6xy^4 + 4)$; 3) $(7c - 3d^4)(7c + 3d^4)$. **610.** 1) $(5 - 4xy)(5 + 4xy)$; 3) $(4 - 3c^2d^4)(4 + 3c^2d^4)$. **614.** 1) 276; 3) 3591. **615.** 1) 49; 3) 0,9991. **616.** 1) $25 + 10b$; 3) $-70y - 25$. **617.** 1) $4x^3y^3(xy + 1)$; 3) $c^2d^2(1 + 0,4cd)$. **618.** 1) $a^3c^3(ac + 6)$; 3) $d(d + 1,2c^6)$. **619.** 1) –1; 2) –2. **620.** 1) 0,25; 2) $-1\frac{5}{7}$; 3) –5; 4) 0,875. **621.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{15}$. **622.** 1) $0,36b^2c^2 - a^2$; 3) $25a^2x^6 - \frac{1}{9}$. **624.** 1) $a^2 - 16b^4$; 3) $x^4 - y^4$. **625.** 1) $-4 + 0,25x^2y^2$; 3) $81 - a^4$. **626.** 1) –255; 2) 0. **628.** 1) $a^2 + b^2 + 2ab - c^2$. **629.** 1) $x^2 + 4x + 4 - y^2$. **630.** 20 см і 4 см. **631.** 18 см і 6 см. **632.** 2 : 5. **636.** $2^{32} - 1$. **637.** 32 і 23. **638.** 11; 13 і 15. **639.** Так. **641.** 1) –4,75; 2) 18. **642.** 1) $4a^4b^6c^{12}$; 3) $16a^8b^{12}c^{24}$. **643.** 15 %. **644.** 0,2.

§ 13

650. 2). **653.** 3). **654.** 3). **656.** 2). **657.** 2) і 3). **658.** 2). **659.** 1) $8a^3$; 3) $216y^3$. **660.** 1) $b^3 + c^3$; 4) $c^3 + 8d^3$. **661.** 1) $a^3 - n^3$; 2) $b^3 + 125d^3$; 6) $8b^3 + 27d^3$; 8) $0,001a^3 - \frac{8}{343}b^3$. **664.** 1) 1; 2) –1; 3) 9. **665.** 1) 1; 2) 1. **669.** 1) 370; 3) 2,06. **670.** 1) 127; 2) 0,28. **672.** 1) $2ab$; 2) $0,36a^4b^6$. **673.** $0,1c$. **674.** 1) $(6xy^3 - 0,5)$

$(36x^2y^6 + 3xy^3 + 0{,}25)$; 3) $(7c - 0{,}5a^6)(49c^2 + 3{,}5a^6c + 0{,}25a^{12})$. **675.** 1) $(10 - 0{,}2x^2y^2)(100 + 2x^2y^2 + 0{,}04x^4y^4)$; 3) $(\frac{1}{6} - 2c^4d^7)(\frac{1}{36} + \frac{1}{3}c^4d^7 + 4c^8d^{14})$. **676.** 1) $a^6 - b^6$; 3) $m^6 - 0{,}000001n^6$. **677.** 1) $4096c^6 - b^6$. **678.** 1) –63; 2) 0,125. **681.** 1) 5005; 2) 3600; 3) 484. **684.** 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) –5. **685.** 1) 95; 2) –1. **686.** 5 см і 3 см. **687.** 5 см і 2 см. **688.** 5 : 6. **695.** 1) –117; 2) –335. **696.** На 0,657 см³; 0,343 см³. **699.** 1) –38; 2) $-1\frac{1}{18}$. **701.** Збільшилась на 12,5 %.

§ 14

715. 3). **716.** 2). **717.** 2). **718.** 2). **719.** 2) і 3). **720.** 1) $2a^2$; 3) $5a^2b^2$. **721.** 1) $5n^2$. **722.** 1) $2m(m + 2 + 3m^2)$; 3) $0{,}4a^2(a + 4a^3 + 2)$. **723.** 1) $6b^2(2b^3 + 4b + 1)$; 3) $0{,}5d^3(3 + 4d^2 + 6d^5)$. **724.** 1) $ab(a^2 + b^2 + ab)$. **725.** 1) $(y + 4)(x - y)$; 3) $(3b + 5)(b - 3)$. **726.** 1) $(5b + 6)(a - b)$; 3) $(2y + 1)(y - 2)$. **729.** 1) $(5m - 2)(5m + 2)$; 3) $(0{,}2a^2 + 0{,}9)(0{,}2a^2 - 0{,}9)$. **730.** 3) $(0{,}7a^2 + 0{,}2)(0{,}7a^2 - 0{,}2)$. **732.** 3) $(x^2y - 0{,}9)(x^2y + 0{,}9)$. **733.** 3) $(x^4y^2 - 0{,}6)(x^4y^2 + 0{,}6)$. **740.** 3) $(0{,}5x - 1)(0{,}25x^2 + 0{,}5x + 1)$. **741.** 3) $(6 - x^3)(36 + 6x^3 + x^6)$. **743.** 3) $a^3b^3(1 + ab)(1 - ab + a^2b^2)$. **744.** 3) $(5ab + 4d)(25a^2b^2 - 20abd + 16d^2)$. **745.** 3) $(7mb^3 + 2n^2)(49m^2b^6 - 14b^3mn^2 + 4n^4)$. **746.** 1). **747.** 2). **748.** 1) $(a^3 + 2)(2a + 1)$; 4) $(a^2 + b^2)(ab + 1)$. **749.** 1) $(3x^2 + 1)(x + 1)$. **750.** 1) $a^2 + 4$. **751.** 1) $x + 4$. **754.** 3) $4(4b + a)(4a - b)$. **755.** 3) $8m(2m + 3)$. **756.** 3) $7(7 + 12y^2)$. **757.** 3) $-4(2{,}4a^2 - 4)$. **760.** 1) 1. **761.** 1) $(a + b)(a + 1)^2$. **762.** 1) $(1 - ab)(2 + ab + a^2b^2)$. **763.** 1) $(m - n + p)(m - n - p - 2)$; 3) $(a - b + c + d)(a - b - c - d - 1)$. **766.** 1) $(3x - 4y + 1)(3x + 4y + 1)$; 3) $(3c - d - 8)(3c + d + 8)$. **767.** 1) $(x - 2)(x - 3)$. **768.** 1) $(x - 3)(x - 5)$. **769.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 6)$. **770.** 1) –4 і 4; 2) –2 і 3; 3) –1. **771.** 1) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. **774.** $(a - x)(a - y)(x - y)(a + x + y)$. **776.** 1) $(a - 3)(a^2 - 7a + 2)$; 2) $(3x^2 + 4x + 8)(4x + 3)$. **777.** 1) 18; 2) –2,5; 3) 90. **778.** 14 м. **779.** 37 і 12 років. **780.** 1) –1,2 і 2; 2) 1,6. **781.** 42 і 30.

Розділ 4
§ 15

787. Так. **788.** Так. **789.** Так, $n = 2k$, де k, n — натуральні числа. **791.** $S = 18t$. 1) 54 км; 2) 63 км; 3) 183,6 км. **792.** $S = 75t$. 1) 675 км; 2) 862,5 км; 3) 1530 км. **793.** 1) t; 2) t — будь-яке число; 3) $g \ge 4$. **795.** 1) –21; 3) –6; 5) 14. **797.** 1) –17; 3) –1; 5) –9. **798.** 1) –22; 3) 4; 5) –18. **801.** 1) 0; –1; –2; –0,5; 0; 3) 4; 3; 2; 0,5; 0. **802.** 1) 0; –1,5; –3; –2; 0; 3) 0; 1,5; 3; 4; 6. **803.** 1) 81; 2) 114; 3) 224. $n = 11k - 7$ (k, n — натуральні числа), де n — загальна кількість сходинок, k — кількість поверхів. **809.** 1) x — будь-яке число, крім 2; 2) x — будь-яке число; 3) x — будь-яке число; 4) x — будь-яке число, крім $1\frac{1}{3}$. **810.** 1) x — будь-яке число; 2) x — будь-яке число, крім 5; 3) x — будь-яке число, крім $\frac{1}{3}$; 4) x — будь-яке число. **811.** 1) $y \ge 0$; 2) $y \ge 2$; 3) $y \le 1$; 4) $y \le 7$; 5) y — будь-яке число; 6) y — будь-яке число. **812.** 1) $y \ge 0$; 2) $y \le 0$; 3) y — будь-яке число. **813.** 1) –6; –3; 2; 3; 6; 2) –7; –4; –1; 2; 8. **814.** 2) Ні; 4) ні. **818.** $m = 0{,}25n + 0{,}4$, де m — загальна маса цукерок (у кг),

n — кількість гостей. **819.** $p = 8n$, де p — загальний об'єм витраченого бензину (у літрах), n — кількість днів. 1) 40 л; 2) 56 л; 3) 80 л; 4) 112 л. **820.** 24. **822.** 1) $-4x(3x+5)$; 2) $5(n-1)(n+1)(n^2+1)$. **823.** Збільшиться на 40%. $P = 33{,}6$ см.

§ 16

827 1) Ні; 2) ні; 3) так. **828.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **829.** 1) A, E, F, M; 2) D, K, M. **830.** 1) (2,5; 0); 3) (5; 0). **831.** 1) (0; 3); 3) (0; 3,5). **832.** A (4; 3), C (–4; 0), E (–2; –4). **833.** B (2; 4), D (–6; 1), F (3; –4). **840.** 1) –2; 3) 2; 5) –2. **841.** 1) 7; 3) –1; 5) 7. **843.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. **844.** N, R. **846.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **847.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **848.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **849.** 1) (0; –4); 3) $(0; \frac{5}{12})$. **850.** 1) (3; 0); 2) (–3; 0) і (3; 0); 3) $(1\frac{1}{6}; 0)$. **851.** $n = 2$. **852.** $k = 4$. **853.** $m = 5$. **854.** $a = \frac{2}{3}$. **855.** $c = \frac{5}{6}$. **856.** $b = \frac{2}{3}$. **857.** 1) M(–5,5; –4,2); 3) M(5,5; –4,2). **858.** 1) C(–4,8; 1,5); 3) C(6,1; –0,2). **859.** 1) $L(-\frac{5}{21}; -3\frac{2}{21})$; 2) $L(-\frac{2}{3}; \frac{4}{7})$; 3) $L(-2\frac{41}{42}; 3\frac{3}{14})$. **863.** 1) 3; –0,75; –0,75; 3) $x < 1$ і $x > 3$; 5) $x \geq 2$. **864.** 1) 3,25; 1; 2; 3) x — будь-яке число; 5) $x > 1$. **867.** Точки перетину графіків функцій: (0; 0), (–1; 1); $x < -1$ і $x > 0$. **868.** Точка перетину графіків функцій: (0; 0); $x > 0$. **872.** (1; 1) і (–1; 1). **878.** 1) 420; 2) 13400; 3) 42436; 4) 39204. **879.** $11\frac{9}{13}$ м. **880.** 1) 25; 2) 72; 3) 30. **881.** 3967,5 грн.

§ 17

888. 1) 4; 2) –6; 3) $\frac{2}{3}$. **894.** 1) Гострий; 2) гострий; 3) тупий. **896.** 1) 3; 2; 1; –0,5; 2) 2; 5) немає; 6) будь-яке число. **897.** 1) 0; 1; 2; –3,5; 2) –1; 5) будь-яке число; 6) немає. **901.** 1) –9; 2) –7; 3) –5; 4) –3; 5) –1. **902.** 1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1. **903.** 1) 1; 0; –1; 0,5; 3) –1; 0; 1; –0,5. **904.** 1) 4; 2,5; 1; 0; 3) –2; –0,5; 1; 2. **905.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **906.** *R*. **908.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **911.** 2); 5). **912.** 1); 3). **913.** 1) (0; –3); 2) (0; 9); 3) $(0; \frac{8}{15})$. **914.** 1) (4; 0); 3) $(-\frac{2}{3}; 0)$; 5) (2,5; 0). **915.** 1) (–3,5; 0); 2) (2,5; 0); 3) (–1,25; 0). **916.** $m = 16$. **917.** $k = 6$. **918.** $a = 0$. **919.** $b = -0{,}4$. **920.** $a = 1$. **921.** $c = -3$. **924.** 1) (1; 1,5); 2) (–2; 2). **925.** 1) (1; 2); 2) (2; –1). **926.** 1) –6; –3; –1; 1; 3; 3) –7; –5; 1; 3; 5. **927.** 1) y — будь-яке число; 2) $y \geq 0$; 3) $y \geq 2$; 4) $y \leq -3$. **928.** 1) y — будь-яке число; 2) $y \geq -5$. **931.** $a = 5$, $b = 2$. **933.** $k = 7$, $b = -3$. **934.** $a = 16$, $c = -2$. **942.** 1) 6; 2) 3; 3) 6; 4) 7. **943.** 96. **944.** 1350. **945.** Зменшився на 8%.

§ 18

955. *A*, *B*, *E*. **956.** *A*, *D*. **957.** 1) –0,5; 0; 0,5; 1; 2) 0. **958.** 1) 1; 0,5; 0; –0,5; 2) 0. **959.** 1) –6; 2) –3; 3) 0; 4) 3; 5) 6. **960.** $y = 1{,}5x$. **961.** $y = -2{,}1x$. **962.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **963.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. **964.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так.

965. N, R. **969.** $n=-2{,}5$. **971.** $b=-\frac{4}{7}$. **972.** 1) $y=4x$; 3) $y=1{,}5x$; 5) $y=-\frac{2}{3}x$. **973.** 1) $y=3{,}5x$; 3) $y=-\frac{4}{3}x$. **974.** $y=\frac{1}{3}x$. **975.** $y=\frac{1}{8}x$. **976.** $y=5x$. **977.** $y=-2{,}5x$. **978.** $y=-4x$. **979.** 1) $y=-\frac{1}{3}x$; 3) $y=\frac{2}{3}x$. **981.** $y=2x$, $y=-2x$, $y=4x$. **984.** 167. **985.** 18,55; 5,3; 15,75. **986.** $\frac{1}{8}$. **987.** 9765.

Розділ 5

§ 19.

1001. 1) –2; 2) –3; 3) –1; 4) –4; 5) –6; 6) –9); 7) 11; 8) 2; 9) –1; 10) 4; 11) 3; 12) 2. **1002.** 1) –7; 2) 3; 3) 1; 4) 7; 5) –2; 6) –2. **1005.** 1) 3; 2) –3; 3) 1; 4) 1; 5) 16; 6) 7. **1006.** 1) 15; 2) 2; 3) –2; 4) 4. **1007.** 1) 1,5; 2) $\frac{14}{17}$; 3) $\frac{8}{19}$; 4) –0,5; 5) 0,3; 6) 3; 7) 61; 8) 4. **1008.** 1) 15; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0,3; 4) $-\frac{1}{4}$. **1012.** 1) Якщо $a=-1$, то коренів немає; якщо $a\neq-1$, то $x=1-a$; 2) $x=\frac{(a-b)^2}{ab}$; 3) якщо $a=b$, то коренів немає; якщо $a\neq b$, то $x=-\frac{b}{a}$; 4) якщо $a=-b$, то коренів немає; якщо $a\neq-b$, то $x=-b$. **1013.** 84. **1015.** 1) 1277; 2) 6. **1016.** 1) 3 см і 5 см; 2) на 1 см.

§ 20.

1023. 1) 4; 2) –15; 3) 0; 4) 0; 5) –15; 6) немає коренів. **1024.** 1) 0,8; 2) 40; 3) 0; 4) немає коренів. **1027.** 32 і 27. **1028.** 27 і 36. **1029.** 320, 370 і 350. **1030.** 285, 265 і 250. **1031.** 10 і 30. **1032.** 15 і 20. **1033.** 1) 1; 2) 0,5; 3) коренів немає; 4) $\frac{7}{8}$; 5) 25; 6) –9; 7) 5; 8) 1,5; 9) 3,5; 10) 0,1; 11) 1,7; 12) 0,25. **1034.** 1) –1; 2) 2,4; 3) 2,4; 4) –4,4; 5) –1; 6) 4. **1035.** 1) 4; 2) 14; 3) 5; 4) 4. **1036.** 1) –24; 2) 3. **1037.** 60 і 70. **1038.** 80 і 75. **1039.** 50 і 60. **1040.** 70 і 80. **1041.** 40 і 80. **1042.** 10 і 3. **1043.** 36. **1044.** 120. **1045.** 3, 4, 5, 6. **1046.** 2, 3, 4. **1047.** 1) 0; –2; 2) –3; 5; 3) –1; 1; 4; 4) –2; 2; 0,6. **1048.** 1) 1; 2) 4; 3) 14; 4) 1. **1050.** 8; 12; 28. **1051.** 40 і 80. **1053.** 1) –6; 2) 240. **1054.** 11; 9.

§ 21.

1062. 1) $y=-3x+5$; 2) $y=2x-3{,}5$; 3) $y=\frac{8x+10}{3}$; 4) $y=9x-6$. **1063.** 1) $y=-4x-7$; 2) $y=4x+1{,}25$. **1064.** 1) $x=-2y+8$; 2) $x=y-3{,}5$; 3) $x=-2y+0{,}3$; 4) $x=\frac{2}{7}y+\frac{1}{2}$. **1065.** 1) $x=5y-12$; 2) $x=-2y+\frac{1}{6}$. **1068.** –27. **1069.** 7. **1070.** 1) (4; 4); 2) (3; 6) або (4,8; 2,4). **1071.** 1) (4; –4); 2) (–2; –6). **1073.** 1) 8; 2) 0,25; 3) –1,5; 4) 13. **1076.** 1) –0,2; 2) –0,6. **1077.** 121; 123; 125.

§ 22

1086. 1) (9; 0); 2) (0; –6). **1087.** 1) (4; 0); 2) (0; 5). **1088.** 1) 1; 2) 2,5. **1089.** 1. **1094.** 1) 3; 2) –7; 3) –9. **1095.** Квадрат. **1097.** 1) $3x + 2y = 120$; 2) $2x - 5y = 20$. **1099.** 5 год. **1100.** 120 км/год.

§ 23

1107. 1) (2; 2); 2) (2; –6); 3) (3; 2); 4) (0; 2); 5) розв'язків немає; 6) безліч розв'язків. **1108.** 1) (1; –1); 2) (1; 2); 3) розв'язків немає; 4) безліч розв'язків. **1109.** 1) (2; 3); 2) (2; –4). **1110.** (–1; 3). **1111.** 1) (–1; 3); 2) (1; –2); 3) (–2; –2); 4) (1; 2); 5) (3; 3); 6) (0; 0,5). **1112.** 1) (2; –1); 2) (0; 2); 3) (1; –3); 4) розв'язків немає. **1115.** 1) 8; 2) –2. **1116.** (1; 3). **1117.** 2 грн., 5 грн. **1119.** 30 км. **1120.** 1) –0,5; 2) $-\frac{1}{20}$.

§ 24

1129. 1) (1; –2); 2) (1; 11); 3) (3; 0); 4) (5; –3); 5) (–7; 4); 6) (0,5; 2); 7) (–1; 4); 8) (1; –1); 9) (2,4; 1,2); 10) (–10; 2); 11) $m = 2$, $n = 3$; 12) $q = 1{,}4$, $p = -4{,}4$. **1130.** 1) (2; –1); 2) (4; –2); 3) (3; 1); 4) (0; –2); 5) (–1; –6); 6) (2,5; 3). **1131.** 1) (–1; 2); 2) (3; 2); 3) (1; –6); 4) (1; 9); 5) (2; –4); 6) (5; –3); 7) (–7; 4); 8) $\left(\frac{1}{7}; -2\right)$; 9) (0,5; 0,2); 10) (0,5; –1); 11) $m = \frac{11}{139}$, $n = \frac{7}{139}$; 12) $q = -\frac{19}{28}$, $p = -\frac{1}{7}$. **1132.** 1) (2; –2); 2) (–3; –7); 3) (3; 0); 4) (5; –6); 5) (0,2; 1); 6) $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$. **1133.** 1) (1; 1); 2) (2; 0). **1136.** 46 і 31. **1137.** 53 і 27. **1138.** 23 і 13. **1139.** 24 і 12. **1140.** 17 і 10. **1141.** 20 і 12. **1142.** 1) (2; 2); 2) (–6; 0); 3) розв'язків немає; 4) (–1; 2,5); 5) (24; 12); 6) (–9; 9); 7) (6; 8); 8) (4; –6); 9) (10; 4); 10) (39; –80,5). **1143.** 1) (–19; –3); 2) (1; –1,5); 3) (5; 8); 4) (1,2; 0,7); 5) (4; –3). **1144.** 41 і 34. **1145.** 30 і 10. **1146.** 24 см і 6 см. **1147.** 5 см і 7 см. **1148.** 12 грн і 22 грн. **1149.** 6 грн і 14 грн. **1150.** 80 км/год. **1151.** 80 км/год. **1152.** 14 км/год і 12 км/год. **1153.** 70 км/год і 60 км/год. **1154.** 55 км/год і 5 км/год. **1155.** 15 км/год і 5 км/год. **1156.** 48 і 40. **1157.** 12 і 5. **1158.** 60 і 90. **1159.** 76 і 20. **1160.** 24 і 30. **1161.** 16 і 12. **1162.** 33 і 43. **1163.** 15 і 30. **1164.** 17 і 13. **1165.** 63 і 75. **1166.** 13 і 15. **1167.** 1) 120 і 80; 2) 250 і 50. **1168.** На 64. **1169.** 1) (–4; 9), (8,5; –3,5); 2) (0; –2), $\left(1\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 3) (–1; 1), (1; 1); 4) (–3; 2), (–3; –2), (3; 2), (3; –2). **1170.** 1) 6; 2) 2. **1173.** 1) $a \neq 12$; 2) $a = 12$. **1174.** ±3. **1175.** 1) –2 і 0,5. **1177.** 1. **1178.** 10 і 15. **1179.** 27 і 3. **1180.** 4 і 12. **1181.** 28 і 68. **1182.** 90 і 100. **1183.** 9 і 6. **1184.** 32 %. **1185.** 24. **1187.** 1) 6; 2) 5.

Повторення

Розділ 1. ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

2. 1) 9,5; 2) 13,8; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{19}{54}$. **4.** 59. **5.** 46. **7.** 1) –14; 2) –2. **12.** 1) 28 і 45; 2) 18 і 40,625. **12.** 1) 3; 2) 14,2. **16.** 1) $13x - 34$; 2) $0{,}5x + 8$. **18.** $-1\frac{8}{9}$.

ОДНОЧЛЕНИ

1. 1) 6^4; 2) 6^6. **2.** 1) 2^{12}; 3) 8^3; 5) 64^2. **3.** 1) 2^{12}; 2) 4^6. **4.** 1) 0,5; 2) 0,16; 3) 24; 4) 1369. **6.** 1) –1,8; 2) –0,75; 3) 0,3. **8.** 1) x^{23}; 4) a^{17}. **9.** 1) 8^8; 4) 8^5. **10.** 1) $0{,}7^{10}$; 4) $1{,}2^{13}$. **11.** 1) 3^2; 2) 3^{21}. **12.** 1) 0; 2) –8; 3) 0. **13.** 1) 2. **14.** 1) 0; 2) –1; 3) –16. **15.** 1) 4, 5; 2) 1, 2. **16.** 1) x^{17}; 2) a^4; 5) 0; 9) a^8b^5. **17.** 14,4. **22.** 1) $a^{10}b^8c^2$. **25.** 1) 2; 2) 1.

МНОГОЧЛЕНИ

1. 1) $-22a^{18}$; 2) a^2b^2c. **2.** 1) $-9x^2$; 2) $51xy^2+13x^2y$. **3.** 1) $7x^2+x+3$, 2; 3) $1{,}8x^5+6x^3+3x^2+4x-2{,}9$, 5; 4) $\frac{1}{3}x^5-9{,}8x^4+5x^3-0{,}7x^2-6$, 5. **4.** 1) $5m^2$; 2) $7k^2-3$; 3) $4m$. **5.** 1) $0{,}2x^2-1{,}6x-48$; 2) $-x^2-6{,}5x-9$; 6) x^4-1296; 7) $-2x^3+4x^2+0{,}5x-1$. **6.** 2) –9,1; 3) 16,4. **7.** 3) –1. **10.** 1) $-4{,}61a^2+5{,}6b^2$, 2; 2) $-50a^2+4b^2+18$, 2; 3) 0, 0; 4) x^7n, $7n$. **11.** 1) $9b^2$; 3) –1; 4) $2a^{8n+4}$. **12.** 1) –9; 4) 0,75; 7) –0,25. **13.** 1) –5; 2) 0; 3) –11,5; 6) 0. **15.** 42, 48. **16.** 20. **17.** 1) 8100; 2) 25; 3) 640000; 4) 36. **19.** 1) $(3-2b)^2$; 2) $25+20c$; 3) a^2; 4) $48y$. **20.** 1) 0,375; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) коренів немає; 4) –1. **23.** *Вказівка:* виконайте заміну: $x^2+y-4=m$. **24.** 1) 2,5; 2) 6,5. **25.** 1) 7300; 2) 4,92; 3) 4891. **26.** 1) $3ab$; 2) $\frac{25}{49}m^2$; 3) $1\frac{7}{9}c^2$; 4) $0{,}6abx$. **27.** 1) –1; 2) –1; 3) –1; 4) $\frac{2}{9}$. **29.** 1) $12x$; 2) $12x^2+16$. **31.** 12 см; 9 см і 16 см. **32.** 8 см. **33.** 7 см.

ФУНКЦІЇ

1. 1) <; 2) <; 3) <. **2.** 1) –0,2; 2) –0,2 або 0,2; 3) коренів немає. **3.** 1) 4; 2) –1 або 1. **4.** 1) x — будь-яке число, крім 2,5; 2) x — будь-яке число, крім 0; 3) x — будь-яке число, крім 0,4. **5.** 1) $y \le 0$; 2) $y \le 3$; 3) $y \ge -2$. **6.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **7.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **9.** 1) (0; –11) і ($3\frac{2}{3}$; 0); 3) (0; 3,6) і (1,5; 0). **10.** $a>0$, $b<0$ (мал. 84); $a<0$, $b<0$ (мал. 85); $a>0$, $b<0$ (мал. 86); $a>0$, $b>0$ (мал. 87); $a<0$, $b>0$ (мал. 88); $a=0$, $b>0$ (мал. 89). **11.** 1) (–4; –4); 2) (–2,4; 2,4); 3) (–0,4; 10,4). **12.** $a=5$, $b=-8$. **13.** $k=24$, $b=-3$. **14.** 1) $y=2$; 3) $y=2{,}5$. **15.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **16.** 1) $y \ge -4$; 2) $y \ge 2$; 3) $y \ge 0$; 4) $y \le 1$. **21.** $y=-2x+1{,}5$ (мал. 90), $y=\frac{2}{3}x-2$ (мал. 91). **22.** 1) $y=-0{,}5x$; 3) $y=3{,}5x$. 24. $a>0$ (мал. 92); 2) $a<0$ (мал. 93); $a=0$ (мал. 94). **27.** $y=0{,}2x$. **28.** $y=0{,}4x$. **29.** $y=5x$. **30.** $y=-6x$.

Розділ 5. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

2. 1) 6; 2) –3; 3) 2,5; 4) 15. **3.** 1) 2; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) –44,2; 4) 0,6. **6.** 60, 40 і 25. **7.** 3 і 9. **8.** 60 і 70. **9.** 301, 302, 303. **14.** 1) (3; 3); 2) (1; —2); 3) розв'язків немає; 4) безліч розв'язків. **15.** 1) (–1; –3); 2) (4; –1); 3) (–1; –3); 4) (1; –6); 5) (1; 1); 6) (1; –2). **16.** 1) (4; 6); 2) (8; 10); 3) ($\frac{3}{7}$; $-\frac{2}{7}$); 4) (0; –1); 5) (–2; 1). **17.** 30 і 25. **18.** 55 і 45. **19.** 20 і 5. **20.** 15 і 18. **21.** 17 і 7. **22.** 5 і 7. **24.** $\frac{9}{20}$. **25.** $\frac{7}{9}$. **26.** 12 і 25. **27.** 100 і 70. **28.** 70 і 80. **29.** 450. **30.** 12,5 і 2,5. **31.** 20 і 3. **32.** 9 і 35.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 5. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ