Михайло Бурда, Ніна Тарасенкова

Геометрія

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Оріон
2021

УДК 514(075.3)
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Експерти, які здійснювали експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників (2016), для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Шокун І. О., учитель ЗОШ № 12 м. Суми, учитель вищої категорії;

Макара С. Ю., методист методичного кабінету управління освіти, молоді та спорту Виноградівської райдержадміністрації Закарпатської області, учитель-методист;

Салтановська Н. І., завідувач лабораторії математики Вищого навчального закладу «Вінницька академія неперервної освіти», кандидат педагогічних наук.

Адреса інтернет-ресурсу до підручника:
https://cutt.ly/SjPSzQ7

Бурда М. І.

Б91 Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. 2-ге вид., переробл. і доповн. — Київ : УОВЦ «Оріон», 2021. — 196 с. : іл.

ISBN 978-617-0000-00-0.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-0000-00-0

ЗМІСТ


Чотирикутники


Подібність трикутників


Розв'язування прямокутних трикутників


Многокутники. Площі многокутників

Дорогі учні!

У 7 класі ви ознайомилися з властивостями суміжних і вертикальних кутів, паралельних та перпендикулярних прямих, трикутників, із властивостями елементів кола; навчилися застосовувати ознаки рівності трикутників до розв'язування задач.

Тепер ви розширите й поглибите свої знання з геометрії. Дізнаєтеся про властивості й ознаки чотирикутників та подібних трикутників, навчитеся знаходити площі трикутників і чотирикутників, спираючись на властивості площі. Ознайомитеся з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробите вміння застосовувати ці способи на практиці.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на чотири розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений жирним шрифтом. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур, поради, як діяти під час розв'язування задач. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати та вміти застосовувати. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Поміркуйте — Як записати

Як діяти — Типова задача

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового й задоволення від навчання!

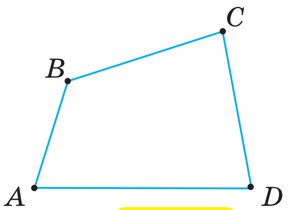
Розділ 1

Чотирикутники

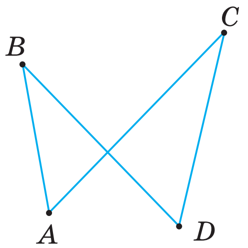
У розділі дізнаєтеся:

- про чотирикутник, його елементи та класифікацію чотирикутників;
- які властивості сторін і кутів окремих видів чотирикутників: паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції;
- як розпізнавати ці фігури;
- що таке центральні та вписані кути в колі, яка їх градусна міра;
- які властивості й ознаки чотирикутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- як застосовувати властивості та ознаки чотирикутників на практиці та під час розв’язування задач

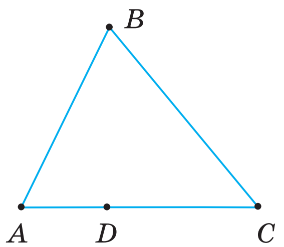
§ 1. ЧОТИРИКУТНИК



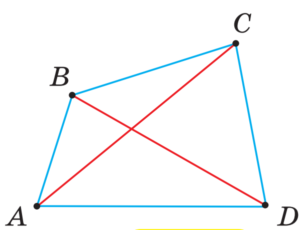
Мал. 1



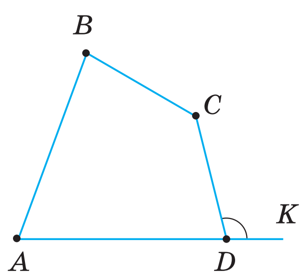
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

1. ЧОТИРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Позначимо чотири точки, наприклад, A, B, C, D, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Послідовно сполучимо їх відрізками AB, BC, CD, DA, що не перетинаються. Одержали *чотирикутник* $ABCD$ (мал. 1).

Точки A, B, C, D — *вершини* чотирикутника, відрізки AB, BC, CD, DA — його *сторони*. Кути DAB, ABC, BCD, CDA — це *кути* чотирикутника. Їх позначають й однією буквою: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

? Чому фігури, зображені на малюнках 2 і 3, не є чотирикутниками?

У фігурі на малюнку 2 відрізки AC і BD перетинаються, а у фігурі на малюнку 3 точки A, D і C лежать на одній прямій.

Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини, починаючи з будь-якої. Наприклад, чотирикутник на малюнку 4 можна позначити так: $ABCD$, або $BCDA$, або $CDAB$ і т. д.

Дві вершини, два кути або дві сторони чотирикутника можуть бути або *сусідніми*, або *протилежними*. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 4) вершини A і D, $\angle A$ і $\angle D$, сторони AD і AB — сусідні, а вершини A і C, $\angle A$ і $\angle C$, сторони AD і BC — протилежні.

Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналями*. На малюнку 4 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.

Кут, суміжний із кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом* чотирикутника.

На малюнку 5 $\angle CDK$ — зовнішній кут чотирикутника при вершині D.

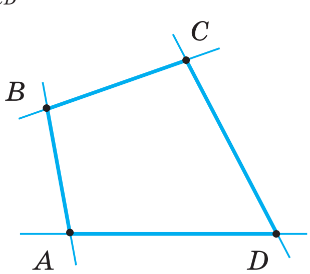
Чотирикутники бувають *опуклі* й *неопуклі*.

Якщо чотирикутник лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини, то він опуклий. На малюнку 6 чотирикутник опуклий, а на малюнку 7 — неопуклий, бо він не лежить з одного боку від прямої, що проходить через вершини M і N.

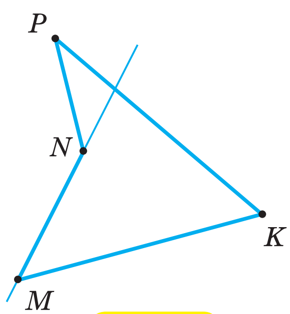
Ми вивчатимемо лише опуклі чотирикутники.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його *периметром*.

Периметр позначають буквою P і коротко записують, наприклад, $P_{ABCD} = 40$ см.



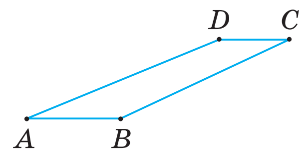
Мал. 6



Мал. 7

Задача. Периметр чотирикутника дорівнює 24 см. Найменша його сторона дорівнює 3 см, а найбільша — 9 см. Одна з двох інших його сторін удвічі менша від другої. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, у якому $CD = 3$ см, $AD = 9$ см, $P = 24$ см (мал. 8). Нехай $AB = x$. Тоді, за умовою, $BC = 2x$. Оскільки $P = 24$ см, то $x + 2x + 3 + 9 = 24$. Звідси $x = 4$. Отже, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см.



Мал. 8

Чи може чотирикутник мати такі сторони: 1 см, 2 см, 3 см, 6 см? Не може, бо найбільша сторона дорівнює сумі трьох інших.

Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший із чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.

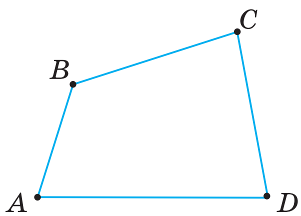
2. ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

Накресліть довільний чотирикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їхня сума?

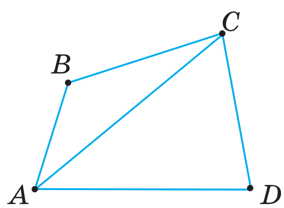
ТЕОРЕМА (про суму кутів чотирикутника).

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Дано: чотирикутник $ABCD$ (мал. 9).
Довести: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.
Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ AC (мал. 10).
Одержали два трикутники — ΔABC і ΔACD.
Тоді $\angle A = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle C = \angle BCA + \angle ACD$.
Звідси:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle BAC + \angle CAD + \angle B +$
$+ \angle BCA + \angle ACD + \angle D = (\angle BAC + \angle B + \angle BCA) +$
$+ (\angle ACD + \angle D + \angle CAD) = 180° + 180° = 360°$.



Мал. 9

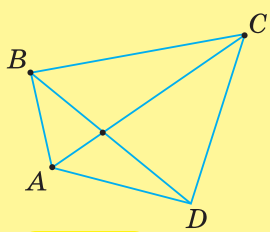


Мал. 10

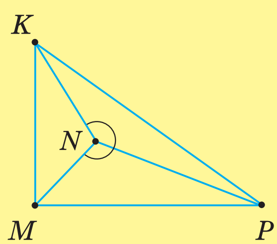
Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими? Ні, бо тоді сума цих кутів була б меншою від 360°.

Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: *Які відмінні властивості мають опуклі й неопуклі чотирикутники?* Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* (мал. 11) перетинаються, і кожна з них розбиває його на два трикутники. А діагоналі неопуклого чотирикутника *MNKP* (мал. 12) не перетинаються, і лише одна з них розбиває його на два трикутники. Кожний кут опуклого чотирикутника менший від 180°. Якщо чотирикутник неопуклий, то один з його кутів більший за 180°.

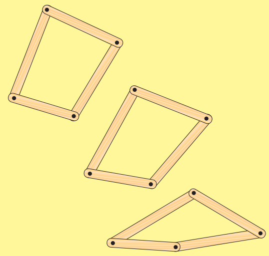


Мал. 11

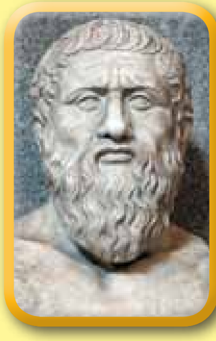


Мал. 12

2. На відміну від трикутника, чотирикутник — фігура нежорстка. Якщо взяти чотири планки та з'єднати їх за допомогою шарнірів, то форму одержаного чотирикутника можна змінювати (мал. 13).
3. Термін «діагональ» походить від грецького слова *diagonios*, що означає «той, що йде від кута до кута». Цей термін став загальноприйнятим лише у XVIII ст.
4. Для стародавніх греків математика була насамперед геометрією. А тому над дверима Академії, де давньогрецький вчений **Платон** (428 р. до н. е. — 348 р. до н. е.) навчав своїх учнів, було зроблено напис: **«Нехай сюди не входить ніхто, хто не знає геометрії»**.



Мал. 13



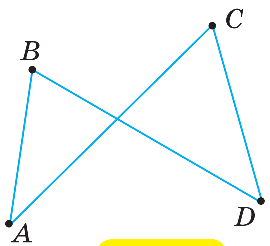
Пригадайте головне

1. Що таке чотирикутник?
2. Як позначають чотирикутник?
3. Що таке діагональ чотирикутника?
4. Що таке зовнішній кут чотирикутника?
5. Що таке периметр чотирикутника?
6. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

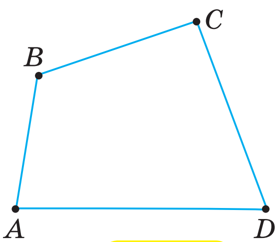
Розв'яжіть задачі

1'. Чи правильно, що в чотирикутнику:
1) три вершини лежать на одній прямій;
2) жодні три вершини не лежать на одній прямій?

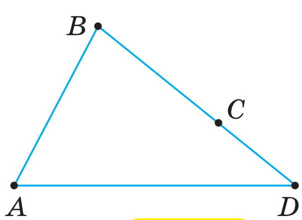
2'. Яка з фігур, зображених на малюнках 14–16, є чотирикутником *ABCD*?



Мал. 14



Мал. 15

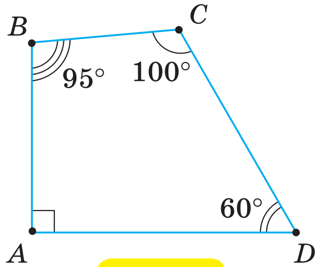


Мал. 16

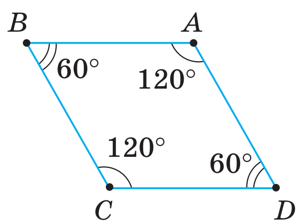
3'. Чи правильно, що зовнішній кут чотирикутника:
1) не суміжний із кутом чотирикутника; 2) суміжний із кутом чотирикутника; 3) вертикальний із кутом чотирикутника?

4'. Яке з наведених тверджень правильне?
Периметр чотирикутника — це сума довжин:
1) трьох його сторін; 2) чотирьох сторін; 3) усіх сторін і діагоналей.

5'. Чи правильно вказано градусну міру кутів чотирикутника *ABCD* на малюнках 17, 18? Відповідь поясніть.



Мал. 17



Мал. 18

6'. Назвіть зображені на малюнку 19 зовнішні кути чотирикутника $MNPK$ при вершині:
1) N; 2) M; 3) K.

7°. a, b, c, d — сторони чотирикутника, P — його периметр. Знайдіть невідомі величини за таблицею 1.

Таблиця 1

a	8 см	10 см	5 см	23 см	
b	12 см	25 см	13 см		16 см
c	16 см	30 см		30 см	20 см
d	18 см		17 см	35 см	24 см
P		90 см	60 см	115 см	74 см

8°. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 140 см, а одна з його сторін у 9 разів менша від кожної з інших.

9°. Периметр чотирикутника дорівнює 210 см, а одна з його сторін у 2 рази менша від кожної з інших. Знайдіть сторони чотирикутника.

10°. Чи може чотирикутник мати такі сторони:
1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см; 2) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см?

11°. Чи може чотирикутник мати такі сторони: 2 см, 3 см, 5 см, 10 см?

12°. За даними на малюнках 20 і 21 визначте невідомі кути чотирикутника $ABCD$.

13°. За даними на малюнку 22 визначте невідомий кут чотирикутника $ABCD$.

14°. Знайдіть невідомий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) 120°, 80°, 100°; 2) 70°, 130°, 90°.

15°. Три кути чотирикутника дорівнюють 60°, 100° і 50°. Знайдіть його четвертий кут.

16°. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
1) 55°, 75°, 100°, 80°; 2) 145°, 85°, 70°, 65°?

17°. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
160°, 95°, 45°, 60°?

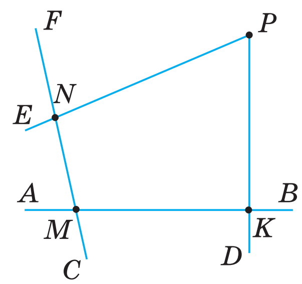
18°. За даними таблиці 2 знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.

Таблиця 2

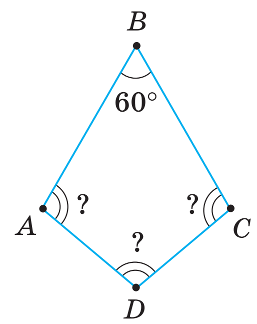
$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° + 10°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 20°$	$n° + 20°$	$2n°$
$\angle C$	$3n°$	$n° - 10°$	$n° + 30°$	$n°$
$\angle D$	$4n°$	$n°$	$n°$	$5n°$

19°. Чи можуть усі кути чотирикутника бути тупими? Відповідь поясніть.

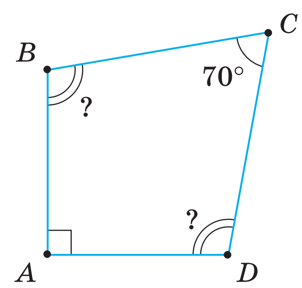
20°. Усі кути чотирикутника рівні. Знайдіть їх.



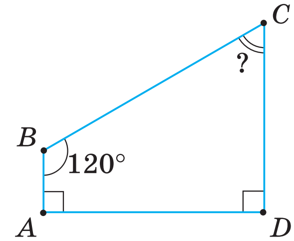
Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

21°. Якщо чотирикутник має два прямі кути, то чому дорівнює сума решти його кутів?

22°. **Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що й четвертий його кут — прямий.**

23°. Знайдіть зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$, якщо: 1) $\angle C = 75°$; 2) $\angle A = \angle B = \angle D = 90°$.

24°. Знайдіть зовнішній кут при вершині A чотирикутника $ABCD$, якщо: 1) $\angle A = 80°$; 2) $\angle A = 120°$.

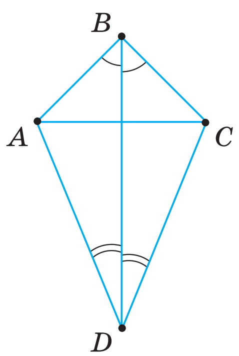
25. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша за третю, а четверта сторона — у три рази більша за другу.

26. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 9 см, друга — у три рази більша за першу, а третя — на 8 см менша від другої й на 10 см більша за четверту. Знайдіть периметр чотирикутника.

27. Три сторони чотирикутника дорівнюють 10 см, 15 см і 20 см. Чи може периметр чотирикутника дорівнювати:
1) 90 см; 2) 72 см; 3) 115 см?

28. Доведіть, що кожна діагональ чотирикутника менша від його півпериметра.

29. Доведіть, що сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра.



Мал. 23

30. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD ділить кути B і D навпіл (мал. 23).
Доведіть, що $AB = BC$ і $DA = CD$.

31. Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ (мал. 23) діагоналі AC і BD — перпендикулярні, якщо $AB = BC$ і $DA = CD$.

32. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3, 4; 2) 4, 6, 12, 14.

33. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 2, 4 і 5.

34. Якою в чотирикутнику може бути найбільша кількість кутів:
1) тупих; 2) прямих; 3) гострих?

35. Чи можна накреслити чотирикутник, у якому: 1) три кути прямі, а четвертий — тупий; 2) один із кутів дорівнює сумі трьох інших?

36. Сума двох кутів чотирикутника, прилеглих до однієї з його сторін, дорівнює 180°. Знайдіть кут між бісектрисами цих кутів.

37. Знайдіть зовнішні кути чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
1) 38°, 158°, 44°; 2) 49°, 145°, 91°.

38. Три кути чотирикутника дорівнюють 50°, 150° і 65°. Знайдіть його зовнішні кути.

39. **Доведіть, що сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.**

40. Чи існує чотирикутник, зовнішні кути якого дорівнюють:
1) 120°, 80°, 59°, 101°; 2) 49°, 98°, 68°, 125°?

41. Чи існує чотирикутник, зовнішні кути якого дорівнюють: 100°, 55°, 160°, 45°?

42. **Знайдіть залежність між сумою кутів чотирикутника та сумою його зовнішніх кутів.**

43. За даними на малюнках 24 і 25 знайдіть кут α.

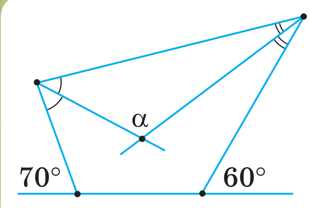
44. За даними на малюнку 26 знайдіть кут α.

45*. Чотирикутник розбито діагоналлю на два трикутники, периметри яких 30 см і 40 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо периметр чотирикутника дорівнює 50 см.

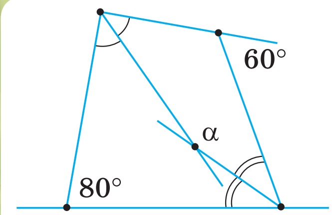
46*. Доведіть, що сума двох протилежних сторін чотирикутника менша від суми його діагоналей.

47*. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці M, а бісектриси кутів C і D — у точці N. Доведіть, що сума кутів AMB і CND дорівнює 180°.

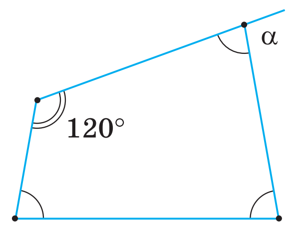
48*. Бісектриси зовнішніх кутів чотирикутника $ABCD$, перетинаючись, утворюють чотирикутник $MNKP$ (мал. 27). Доведіть, що сума протилежних кутів чотирикутника $MNKP$ дорівнює 180°.



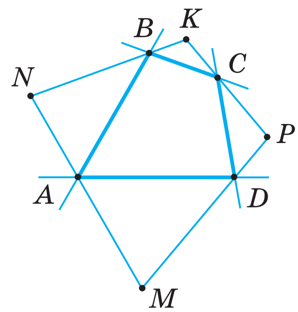
Мал. 24



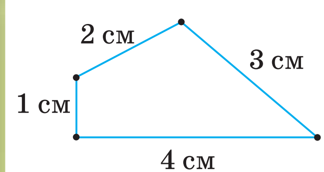
Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27



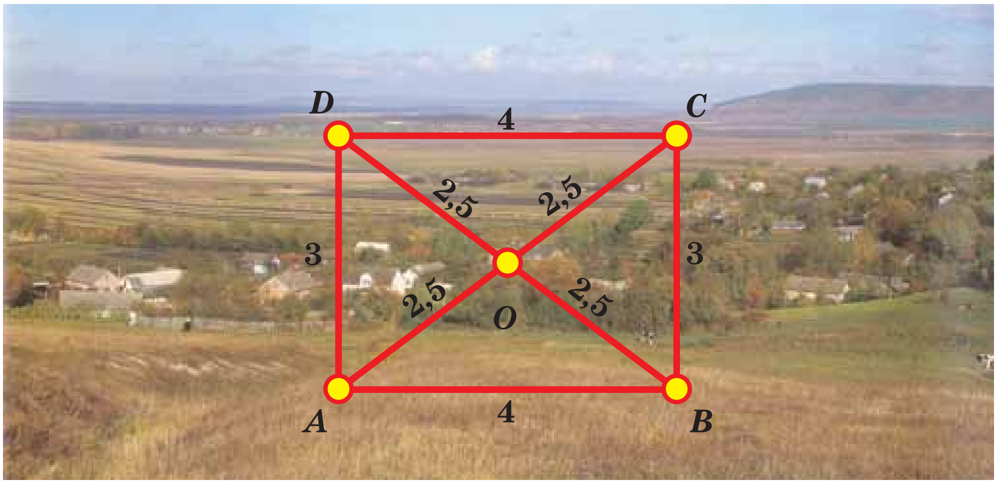
Мал. 28

Проявіть компетентність

49. На малюнку 28 зображено земельну ділянку в масштабі 1 : 2000. Межі ділянки потрібно обгородити парканом. Скільки стовпців необхідно для огорожі, якщо відстань між ними має бути 4 м?

50. Потрібно виготовити чотирикутну рамку для повітряного змія. Взяли чотири планки й закріпили їхні кінці. З'ясувалося, що виготовлена рамка нежорстка — змінюється її форма. Як можна укріпити рамку?

51. Чотири населені пункти розташовані у вершинах чотирикутника (мал. 29) і попарно з'єднані дорогами (відповідні відстані вказано на малюнку). На цій місцевості планують побудувати завод, де зможуть працювати мешканці кожного з цих населених пунктів. На роботу та з роботи працівників возитиме заводський автобус.

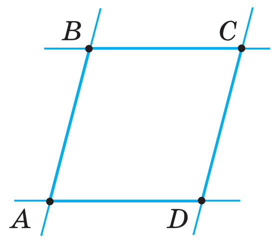


Мал. 29

1) Чому дорівнює сума відстаней від заводу до даних пунктів, якщо завод побудують в одному із цих населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?
2) Чому дорівнює сума відстаней від заводу до даних пунктів, якщо завод побудують посередині між двома із цих чотирьох населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?
3) У якому місці потрібно побудувати завод, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох даних пунктів була найменшою?
4) Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса перед початком робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті забирає робітників на одній зупинці та привозить усіх разом на завод.
5) Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса після робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті висаджує робітників на одній зупинці й не повертається на завод.

§ 2. ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1. ЩО ТАКЕ ПАРАЛЕЛОГРАМ

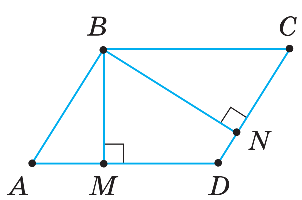


Мал. 30

Якщо пару паралельних прямих перетнемо другою парою паралельних прямих, то одержимо чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно паралельні. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 30) $AD \parallel BC$ і $AB \parallel DC$.

Чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно паралельні, називається *паралелограмом*.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї сторони до паралельної їй сторони (або до її продовження).



Мал. 31

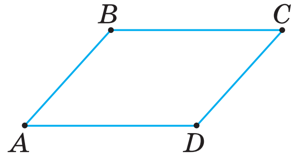
На малюнку 31 відрізки BM і BN — висоти паралелограма $ABCD$.

2. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛОГРАМА

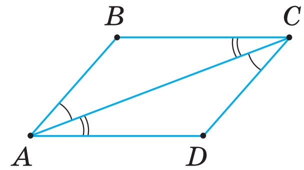
ТЕОРЕМА **(властивість сторін і кутів паралелограма).**

У паралелограмі: 1) протилежні сторони попарно рівні;
2) протилежні кути попарно рівні.

Дано: $ABCD$ — паралелограм (мал. 32).
Довести: 1) $AB = DC$, $BC = AD$;
2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Доведення. Проведемо діагональ AC (мал. 33). Розглянемо ΔABC і ΔCDA. У них



Мал. 32



Мал. 33

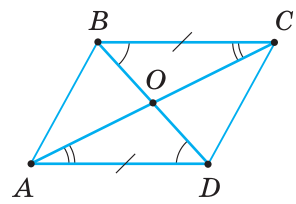
AC — спільна сторона, $\angle BCA = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AC, $\angle BAC = \angle DCA$ також як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC. Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за стороною та прилеглими до неї кутами. Із рівності трикутників ABC і CDA випливає: 1) $AB = CD$, $BC = DA$; 2) $\angle B = \angle D$.

Кути A і C паралелограма рівні як суми рівних кутів.

Чи може паралелограм мати лише один гострий кут? Ні, бо за доведеною теоремою протилежний йому кут також гострий.

Задача (властивість діагоналей паралелограма). **Діагоналі паралелограма точкою їх перетину діляться навпіл.** Доведіть.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм (мал. 34), O — точка перетину його діагоналей AC і BD. Доведемо, що $AO = CO$, $BO = DO$. Розглянемо ΔAOD і ΔCOB. У них $BC = AD$ як протилежні сторони паралелограма, $\angle CBO = \angle ADO$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній BD, $\angle BCO = \angle DAO$ ($BC \parallel AD$, AC — січна). Отже, $\Delta AOD = \Delta COB$ за стороною та прилеглими до неї кутами. З рівності трикутників AOD і COB випливає: $AO = CO$, $BO = DO$.

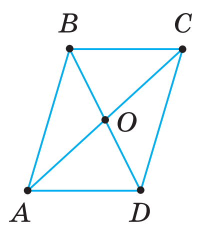


Мал. 34

Щоб довести рівність відрізків (кутів) у паралелограмі, доведіть рівність трикутників, відповідними елементами яких є ці відрізки (кути).

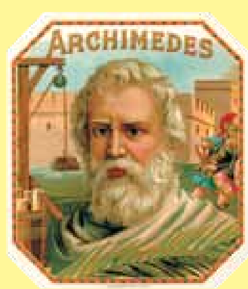
Властивості паралелограма подано в таблиці 3.

Таблиця 3

$ABCD$ — паралелограм	Властивість
	**1.** $AB = DC$, $AD = BC$ **2.** $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ **3.** $AO = OC$, $BO = OD$

Дізнайтеся більше

1. Назва «паралелограм» (*parallelogrammon*) походить від поєднання грецьких слів: «паралелос» — той, що йде поряд, і «грамма» — лінія.
   Цей термін уперше трапляється в «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.). Хоча замість терміна «паралелограм» давньогрецький учений спочатку вживав словосполучення «утворена паралельними лініями площа» (мається на увазі частина площини, обмежена двома парами паралельних прямих).
2. Давньогрецький математик, фізик, інженер, винахідник й астроном **Архімед** (бл. 287 до н. е. — 212 до н. е.) у своїй книзі «Про рівновагу плоских фігур» (*περὶ ἰσορροπιῶν*) показує, що центр мас паралелограма міститься в точці перетину його діагоналей. Ця властивість паралелограма має широке застосування не лише в теорії, а й на практиці, зокрема в механіці, інженерії.



Пригадайте головне

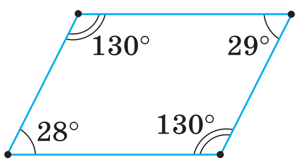
1. Який чотирикутник називається паралелограмом?
2. Що таке висота паралелограма?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість сторін і кутів паралелограма.
4. Сформулюйте та доведіть властивість діагоналей паралелограма.

Розв'яжіть задачі

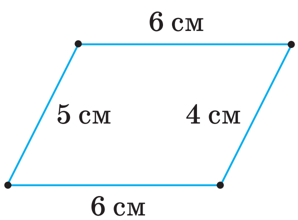
52'. Чи правильно, що паралелограмом є чотирикутник, у якому:
1) сусідні сторони паралельні;
2) дві протилежні сторони паралельні;
3) протилежні сторони попарно паралельні?

53'. Чи правильно, що висотою паралелограма є:
1) пряма;
2) промінь;
3) відрізок?

54'. Чи правильно, що в паралелограмі:
1) сусідні сторони рівні;
2) протилежні сторони попарно рівні;
3) сусідні кути рівні;
4) протилежні кути попарно рівні?



Мал. 35



Мал. 36

55'. Чи правильно вказано градусні міри кутів паралелограма на малюнку 35 і довжини сторін на малюнку 36? Відповідь поясніть.

56°. У паралелограмі $MNPK$ $MN = 1{,}2$ дм, $NP = 0{,}4$ дм. Чому дорівнюють сторони PK і MK? Відповідь поясніть.

57°. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 10$ см. Чому дорівнюють сторони AD і DC? Відповідь поясніть.

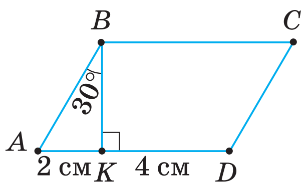
58°. За даними таблиці 4 знайдіть довжину сторони паралелограма $ABCD$, яка паралельна заданій його стороні.

Таблиця 4

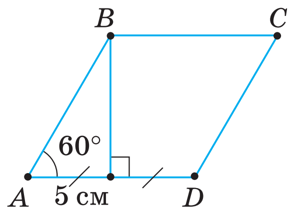
AB	15 см			
BC		2,1 дм		
CD			1,8 мм	
AD				0,33 м

59°. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо:
1) одна з його сторін у 7 разів менша від іншої;
2) різниця двох його сторін дорівнює 7 см.

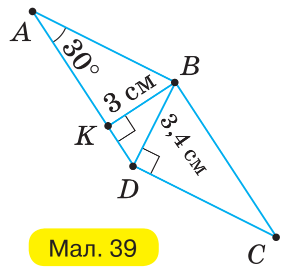
60°. Периметр паралелограма дорівнює 32 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з його сторін на 3 см більша за іншу.



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

61°. За даними на малюнках 37–38 знайдіть сторони паралелограма *ABCD*.

62°. За даними на малюнку 39 знайдіть сторони паралелограма *ABCD*.

63°. **Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180°.** Доведіть.

64°. У паралелограмі *ABCD* $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Чому дорівнюють кути *ADC* і *BAD*, якщо:
1) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$; 2) $\alpha = \beta = 90°$? Відповідь поясніть.

65°. Знайдіть кути *ABC* і *BCD* паралелограма *ABCD*, якщо $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = 45°$. Відповідь поясніть.

66°. *A*, *B*, *C*, *D* — кути паралелограма *ABCD*. Накресліть у зошиті таблицю 5 і заповніть її.

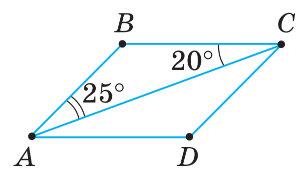
Таблиця 5

$\angle A$	35°			
$\angle B$		140°		
$\angle C$			75°	
$\angle D$				64°

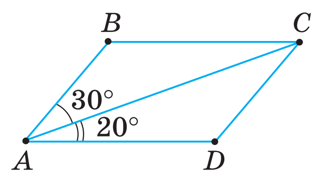
67°. Чи може паралелограм мати:
1) лише три рівні кути;
2) лише один тупий кут?
Відповідь поясніть.

68°. Чи можуть усі кути паралелограма бути гострими?

69°. За даними на малюнках 40, 41 знайдіть кути паралелограма *ABCD*.

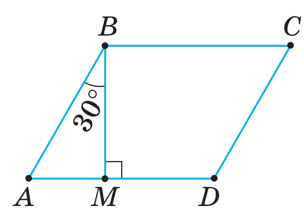


Мал. 40



Мал. 41

70°. За даними на малюнку 42 знайдіть кути паралелограма *ABCD*.



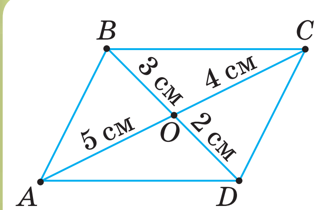
Мал. 42

71°. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) один з його кутів на 50° менший від іншого;
2) сума двох його кутів дорівнює 120°.

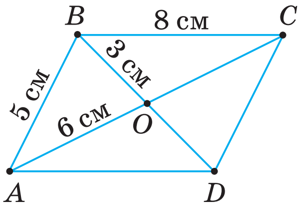
72°. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з його кутів у 3 рази більший за інший.

73°. **Доведіть, що діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.**

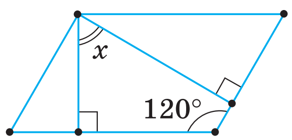
74°. Чи правильно вказано довжини відрізків діагоналей паралелограма на малюнку 43? Відповідь поясніть.



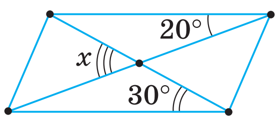
Мал. 43



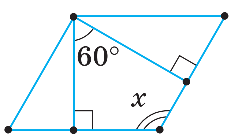
Мал. 44



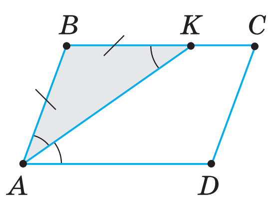
Мал. 45



Мал. 46



Мал. 47



Мал. 48

75°. *ABCD* — паралелограм (мал. 44). За даними на малюнку знайдіть: 1) відрізки *OC* і *OD*; 2) діагоналі *AC* і *BD*; 3) сторони *AD* і *DC*.

76. Знайдіть кути паралелограма, якщо два його кути відносяться, як: 1) 4 : 5; 2) 3 : 7.

77. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) один із них у 4 рази більший за суму двох інших;
2) половина одного кута дорівнює третині іншого.

78. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) два його кути відносяться, як 2 : 3;
2) один з його кутів дорівнює сумі двох інших.

79. На малюнках 45, 46 зображено паралелограми. Знайдіть кут x.

80. На малюнку 47 зображено паралелограм. Знайдіть кут x.

81. **Доведіть, що кут між висотами паралелограма дорівнює його гострому куту.**

82. Із вершини тупого кута паралелограма проведено дві висоти. Кут між ними дорівнює α. Знайдіть кути паралелограма, якщо: 1) $\alpha = 35°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 89°$.

83. У паралелограмі *ABCD* діагональ *BD* утворює зі стороною *CD* кут 68°, $\angle ABC = 84°$. Знайдіть кути *ADB* і *BCD*.

84. Знайдіть кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма й перпендикулярна до неї.

85. **Доведіть, що бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні.**

86. **Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.**

Якщо в задачі дано бісектрису кута паралелограма, то утворений трикутник (ΔABK на малюнку 48) — рівнобедрений. Скористайтеся його властивостями.

87. Бісектриса кута *A* паралелограма *ABCD* перетинає сторону *BC* в точці *K* (мал. 48). $BK = a$, $KC = b$.
Знайдіть периметр паралелограма, якщо:
1) $a = 14$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см.

88. У паралелограмі *ABCD* бісектриса кута *A* перетинає сторону *BC* в точці *K*. Знайдіть:
1) *BK* і *KC*, якщо $AB = 6$ см, $AD = 9$ см;
2) *AD*, якщо $AB = 4$ см, $KC = 11$ см.

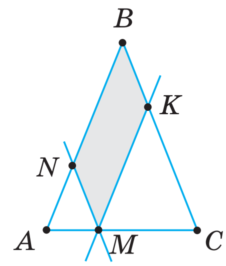
89. У паралелограмі *ABCD* бісектриса кута *A* перетинає сторону *BC* в точці *K*. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AD = 14$ см, $BK : KC = 3 : 4$.

90. У паралелограмі *ABCD* через точку *O* перетину діагоналей проведено пряму, яка перетинає сторони *BC* та *AD* в точках *E* і *F*. Доведіть, що: а) $OE = OF$; б) $BE = DF$; в) $CE = AF$.

91. У паралелограмі *ABCD* через точку *O* перетину діагоналей проведено пряму, яка перетинає сторони *BC* і *AD* в точках *E* і *F*. Знайдіть сторони *BC* та *AD* паралелограма, якщо $BE = 5$ см, $AF = 4$ см.

92. Із точки M, взятої на основі AC рівнобедреного трикутника ABC, проведено прямі, паралельні бічним сторонам (мал. 49). Доведіть, що периметр утвореного паралелограма $MNBK$ не залежить від положення точки M.

93. Із точки, взятої на основі AC рівнобедреного трикутника ABC, проведено прямі, паралельні бічним сторонам (мал. 49). Знайдіть периметр паралелограма $MNBK$, якщо $AB = 15$ см.



Мал. 49

94*. Два кути паралелограма відносяться, як 1 : 3. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.

95*. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

96*. Один із кутів паралелограма в три рази більший за інший. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на два відрізки, які дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть висоту паралелограма.

97*. Паралелограм, периметр якого дорівнює 50 см, розбивається діагоналями на чотири трикутники. Знайдіть сторони паралелограма, якщо різниця периметрів двох із цих трикутників дорівнює 5 см.

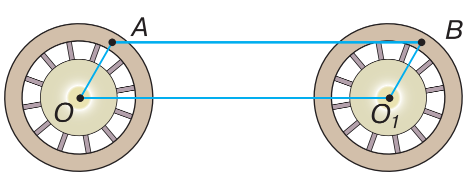
98*. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 48 см. Бісектриси кутів A і D ділять сторону BC на три рівні частини. Знайдіть сторони паралелограма.

99*. За якої умови точка перетину бісектрис двох кутів паралелограма, що прилягають до однієї сторони, лежить на протилежній стороні?

100*. Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони, перетинаються на іншій стороні. Знайдіть сторони паралелограма.

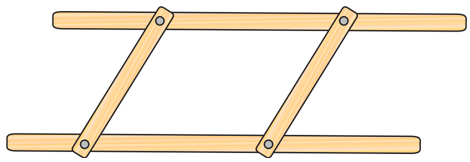
Проявіть компетентність

101. На малюнку зображено два однакові колеса (мал. 50). Стрижень AB, довжина якого дорівнює відстані OO_1 між центрами коліс, передає рух від одного колеса до другого.
1) Яким може бути взаємне розміщення стрижня AB та лінії центрів OO_1?
А. $AB \perp OO_1$.
Б. $AB \parallel OO_1$.
В. AB і OO_1 лежать на прямих, що не перетинаються.
Г. Не можна визначити.
2) Уявіть, що стрижень AB зламався. Як його відновити? Запропонуйте власний план дій.



Мал. 50

102. Для проведення паралельних прямих використовують паралельні лінійки (мал. 51).
1) Поясніть, як виготовити такий прилад.
2) Поясніть, як користуватися цим приладом.
3) На якій властивості ґрунтується будова приладу?



Мал. 51

§ 3. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Під час розв'язування задач буває необхідно встановити, що даний чотирикутник — паралелограм. Допоможуть це зробити ознаки паралелограма.

1. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛОГРАМА ЗА ПОПАРНОЮ РІВНІСТЮ ПРОТИЛЕЖНИХ СТОРІН

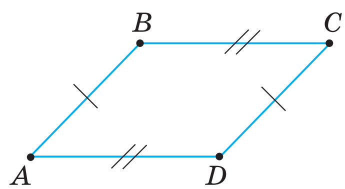
ТЕОРЕМА (ознака паралелограма).

Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то такий чотирикутник — паралелограм.

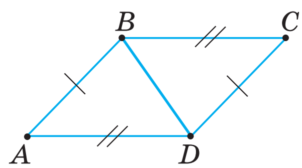
Дано: $ABCD$ — чотирикутник (мал. 52), $AB = DC$, $BC = AD$.

Довести: $ABCD$ — паралелограм.

Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ BD (мал. 53). Розглянемо ΔBCD і ΔDAB. У них BD — спільна сторона, $AB = DC$ і $BC = AD$ за умовою. Отже, $\Delta BCD = \Delta DAB$ за трьома сторонами. Із рівності трикутників випливає: $\angle CBD = \angle ADB$ і $\angle ABD = \angle CDB$. Кути CBD і ADB — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD. Тому $BC \parallel AD$. Так само кути ABD і CDB — внутрішні різносторонні при прямих AB і DC та січній BD. Тому $AB \parallel DC$. Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ і $AB \parallel DC$, то, за означенням, цей чотирикутник — паралелограм.

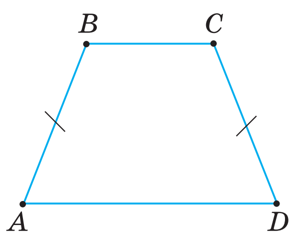


Мал. 52



Мал. 53

Чи можна вважати чотирикутник паралелограмом, якщо в ньому дві протилежні сторони рівні, а дві інші — паралельні? Не можна. На малюнку 54 $AB = CD$, $BC \parallel AD$, але чотирикутник $ABCD$ — не паралелограм.



Мал. 54

2. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛОГРАМА ЗА РІВНІСТЮ Й ПАРАЛЕЛЬНІСТЮ ДВОХ ПРОТИЛЕЖНИХ СТОРІН

ТЕОРЕМА **(ознака паралелограма).**

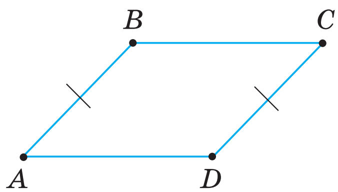
Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то такий чотирикутник — паралелограм.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник (мал. 55), $AB = DC$, $AB \parallel DC$.

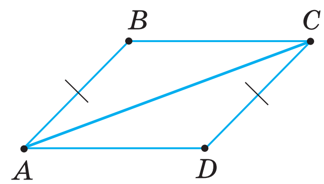
Довести: $ABCD$ — паралелограм.

Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ AC (мал. 56). Розглянемо ΔABC і ΔCDA. У них AC — спільна сторона, $AB = DC$ за умовою, $\angle BAC = \angle DCA$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC. Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за двома сторонами та кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $\angle DAC = \angle BCA$. Але кути DAC і BCA — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній AC. Тому $BC \parallel AD$.

Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ (за доведеним) і $AB \parallel DC$ (за умовою), то, за означенням, цей чотирикутник — паралелограм.



Мал. 55



Мал. 56

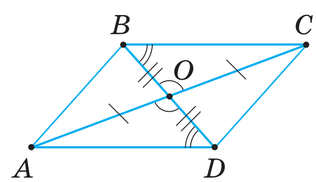
3. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛОГРАМА ЗА ДІАГОНАЛЯМИ

Задача (ознака паралелограма). **Якщо діагоналі чотирикутника точкою їх перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.** Доведіть.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, O — точка перетину його діагоналей і $BO = OD$, $AO = OC$ (мал. 57).

Доведемо, що $ABCD$ — паралелограм. Розглянемо ΔBOC і ΔDOA. У них $BO = OD$, $AO = OC$ за умовою, $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні. Отже, $\Delta BOC = \Delta DOA$ за двома сторонами та кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $BC = AD$ і $\angle OBC = \angle ODA$. Але кути OBC і ODA — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD. Тому $BC \parallel AD$.

Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC = AD$ і $BC \parallel AD$, то, за доведеною вище ознакою, цей чотирикутник — паралелограм.



Мал. 57

Щоб установити, що чотирикутник — паралелограм, доведіть, що в ньому:

або протилежні сторони попарно паралельні (означення паралелограма);

або протилежні сторони попарно рівні (ознака паралелограма);

або дві протилежні сторони рівні й паралельні (ознака паралелограма);

або діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл (ознака паралелограма).

Дізнайтеся більше

Вам доводилося стикатись із поняттями «необхідно», «достатньо», «необхідно й достатньо». За таблицею 6 розгляньте пари тверджень *A* і *B* та з'ясуйте зміст цих понять.

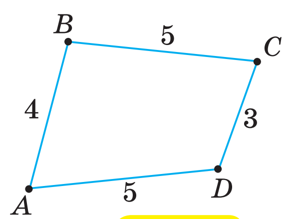
Таблиця 6

Твердження *A*	Твердження *B*	Зв'язок між твердженнями	Вид умови
Чотирикутник є паралелограмом	Дві протилежні сторони чотирикутника рівні	З *A* випливає *B* ($A \Rightarrow B$)	*A* — достатня умова для *B*
			B — необхідна умова для *A*
Чотирикутник є паралелограмом	Протилежні сторони чотирикутника попарно рівні	З *A* випливає *B* і з *B* випливає *A* ($A \Leftrightarrow B$)	*A* — необхідна й достатня умова для *B* і навпаки

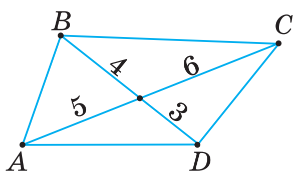
Зверніть увагу, що твердження: «*A* достатнє для *B*» і «*A* необхідне для *B*» — є взаємооберненими. Їх можна об'єднати і сформулювати так:

Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно й достатньо, щоб його протилежні сторони були попарно рівними.

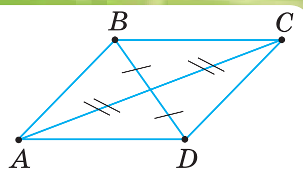
Замість того, щоб говорити «необхідна й достатня умова», іноді кажуть «необхідна й достатня ознака», або, частіше, просто «ознака». Тому теореми цього параграфа називаємо «ознаками паралелограма».



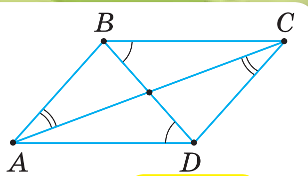
Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60



Мал. 61

Пригадайте головне

1. Доведіть, що коли протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то він є паралелограмом.
2. Доведіть, що коли в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то він є паралелограмом.
3. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника точкою їх перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.
4. Поясніть, як переконатися, що даний чотирикутник є паралелограмом.

Розв'яжіть задачі

103'. Чи є паралелограмом чотирикутник, у якому дві протилежні сторони: 1) рівні; 2) паралельні; 3) паралельні й рівні? Відповідь поясніть.

104'. Чому чотирикутник на малюнку 58 не є паралелограмом?

105'. Накресліть два рівні й паралельні відрізки завдовжки 4 см. Їх кінці сполучіть відрізками так, щоб вони не перетиналися. Чому утворений чотирикутник — паралелограм?

106'. Який із чотирикутників, зображених на малюнках 59, 60, є паралелограмом? Відповідь поясніть.

107°. За даними на малюнку 61 доведіть, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм. Чим ви скористалися?

108°. За даними на малюнку 62 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чим ви скористалися?

109°. Побудуйте довільний трикутник ABC й на стороні AB позначте точку M. Через цю точку паралельно сторонам BC і AC трикутника проведіть прямі, що їх перетинають у точках N і K відповідно. Поясніть, чому чотирикутник $MNCK$ — паралелограм.

110°. Із довільної точки внутрішньої області кута проведено прямі, паралельні сторонам кута. Чи є утворений чотирикутник паралелограмом? Відповідь поясніть.

111°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:
1) $AB = 3$ см, $BC = 0{,}4$ дм, $CD = 30$ мм, $AD = 40$ мм;
2) $AB + BC = 7$ см, $BC - CD = 3$ см, $AD = BC = 5$ см;
3) $AB : BC : CD : AD = 2 : 1 : 2 : 1$.

112°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:
1) $AB = 0{,}5$ дм, $BC = 2{,}7$ см, $CD = 5$ см, $AD = 27$ мм;
2) $AB - AD = 3$ см, $CD = 2\,BC$, $AB = CD = 6$ см.

113°. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть:
1) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$;
2) $\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$.

Щоб довести рівність (паралельність) двох відрізків:
1) виділіть на малюнку чотирикутник, протилежними сторонами якого є ці відрізки;
2) доведіть, що чотирикутник — паралелограм;
3) зробіть висновок: відрізки рівні (паралельні) як протилежні сторони паралелограма.
Так само можна довести рівність двох кутів.

114°. У чотирикутнику $MNKP$ протилежні сторони попарно рівні. Знайдіть:
1) кут M, якщо $\angle K = 35°$;
2) MN, якщо $KP = 5$ см.

115°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:
1) $AD \parallel BC$, $AD = 0{,}5$ дм, $BC = 50$ мм;
2) $AB \parallel CD$, $AB = 2$ см, $CD = 0{,}02$ м;
3) $AB = CD$, $\angle BAD = 45°$, $\angle ADC = 135°$.

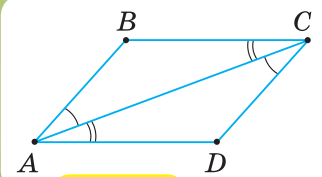
116°. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:
1) $AB \parallel CD$, $AB = 3$ см, $CD = 30$ мм;
2) $AD = BC$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BAD = 120°$.

117°. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AD, а N — середина сторони BC. Доведіть, що $BNDM$ — паралелограм.

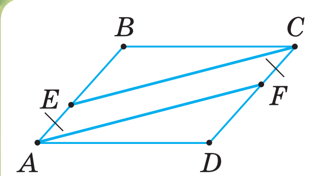
118°. $ABCD$ — паралелограм (мал. 63), $AE = CF$. Доведіть, що відрізки CE і AF рівні й паралельні.

119°. **Доведіть, що чотирикутник, у якому сума кутів, що прилягають до кожної з двох суміжних сторін, дорівнює 180°, є паралелограмом.**

120°. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$ і $\angle B + \angle C = 180°$. Доведіть, що протилежні сторони чотирикутника рівні.



Мал. 62

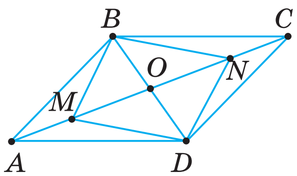


Мал. 63

121°. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Доповніть дані в таблиці 7 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 7

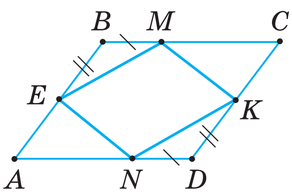
AO	3 см			0,6 дм
OC		2 дм	35 мм	
BO		4,8 дм		6 см
OD	5 см		2,1 см	
Висновок	$ABCD$ — паралелограм	$ACBD$ — паралелограм	$ABDC$ — паралелограм	$DCBA$ — паралелограм



Мал. 64

122°. $ABCD$ — паралелограм (мал. 64), $OM = ON$. Доведіть, що $MBND$ — паралелограм.

123°. $MBND$ — паралелограм (мал. 64), $OA = OC$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

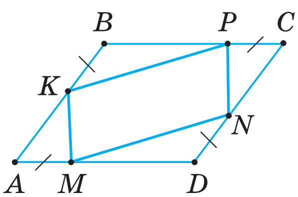


Мал. 65

124°. Медіану BD трикутника ABC продовжено на відрізок $DE = BD$. Точку E сполучено з вершинами A і C трикутника. Доведіть, що чотирикутник $ABCE$ — паралелограм.

125. **Якщо протилежні кути чотирикутника рівні, то такий чотирикутник — паралелограм.** Доведіть.

126. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють: 1) 20°, 60°, 110°; 2) 60°, 60°, 120°?

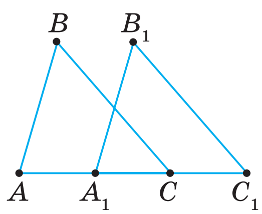


Мал. 66

127. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють 35°, 145°, 35°? Відповідь поясніть.

128. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці M, а бісектриса кута C перетинає сторону AD в точці N. Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.

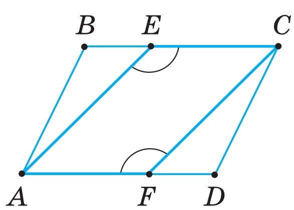
129. На сторонах AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E, M, K, N відповідно і так, що $BM = DN$, $BE = DK$ (мал. 65). Доведіть, що $EMKN$ — паралелограм.



Мал. 67

130. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM, DN, CP, BK, як показано на малюнку 66. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.

131. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (мал. 67). Знайдіть відстань між точками B і B_1, якщо:
1) $AA_1 = 3$ см; 2) $AC = 10$ см, $A_1C = 6$ см.



Мал. 68

132. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (мал. 67). Знайдіть відстань між точками B і B_1, якщо $AC_1 = 20$ см, $A_1C = 12$ см.

133. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E і F так, що $\angle AEC = \angle AFC$ (мал. 68). Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

134. Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей ділить другу навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

135. $ABCD$ — паралелограм (мал. 69), $AM = KC$, $BN = PD$. Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.

136. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що чотирикутник $MNPK$, вершинами якого є середини відрізків OA, OB, OC і OD, — паралелограм.

137. Медіану AO трикутника ABC продовжено на відрізок $OD = AO$. Точку D сполучено з вершинами B і C трикутника.
1) Доведіть, що $CD = AB$ і $CD \parallel AB$.
2) Знайдіть кут CDB, якщо $\angle CAB = 36°$.

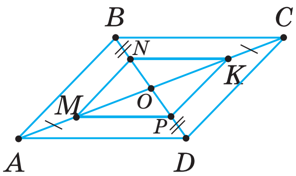
138*. На продовженнях сторін AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M і E так, що $AK = BP = CM = DE$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ — паралелограм.

139*. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено точки K і M так, що $\angle AKB = \angle CMD$. Доведіть, що $KBMD$ — паралелограм.

140*. Через точку K внутрішньої області кута ABC проведіть пряму так, щоб її відрізок між сторонами кута цією точкою ділився навпіл.

141*. До сторін паралелограма проведено серединні перпендикуляри, які перетинають протилежні сторони або їх продовження в точках K, L, M і N. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

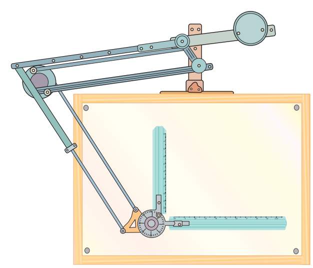
142*. Якщо вершини протилежних кутів чотирикутника однаково віддалені від відповідних діагоналей, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

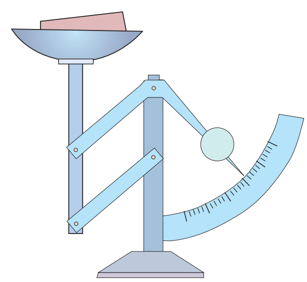


Мал. 69

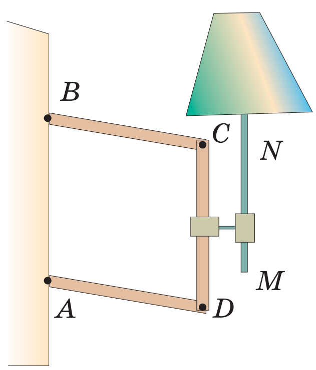
Проявіть компетентність

143. Поясніть принцип дії: механічної рейсшини (мал. 70); терезів (мал. 71).

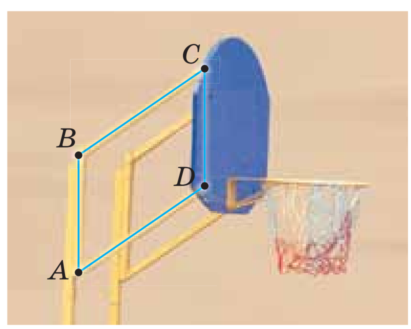

Мал. 70


Мал. 71

144. На малюнках 72 і 73 зображено шарнірні пристрої для регулювання висоти.
1) Поясніть, як користуватися цими пристроями.
2) Чому за всіх можливих положень сторони CD вісь MN лампи завжди вертикальна, а площина кільця — горизонтальна?
3) Поясніть, як виготовити такі пристрої.



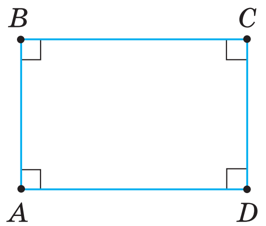
Мал. 72



Мал. 73

§ 4. ПРЯМОКУТНИК

1. ЩО ТАКЕ ПРЯМОКУТНИК



Мал. 74

Паралелограми, як і трикутники, можна поділити на види. Прямокутник — один із видів паралелограма. На малюнку 74 ви бачите паралелограм $ABCD$, що є прямокутником. Дайте означення прямокутника та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називається *прямокутником*.

2. ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИКА

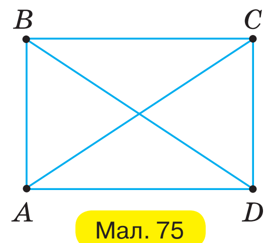
Оскільки прямокутник — окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма:

1) протилежні сторони рівні;
2) протилежні кути рівні;
3) діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл.

Крім цих властивостей, прямокутник має ще особливу властивість.

ТЕОРЕМА (властивість діагоналей прямокутника).

Діагоналі прямокутника рівні.

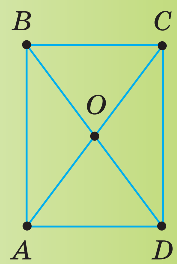


Мал. 75

Дано: $ABCD$ — прямокутник (мал. 75).
Довести: $AC = BD$.
Доведення. Розглянемо прямокутні трикутники ACD і DBA. У них AD — спільний катет, а катети AB і DC рівні як протилежні сторони паралелограма. Отже, $\Delta ACD = \Delta DBA$ за двома катетами. З рівностей трикутників випливає: $AC = BD$.

Властивості прямокутника подано в таблиці 8.

Таблиця 8

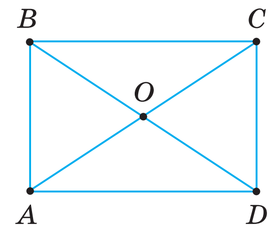
$ABCD$ — прямокутник	Властивість
	паралелограма
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	особлива
	4. $AC = BD$

? Чи можна стверджувати, що паралелограм, у якому діагоналі рівні, є прямокутником? Так. Але цей висновок потребує доведення.

3. ОЗНАКА ПРЯМОКУТНИКА

Задача (ознака прямокутника). **Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм — прямокутник.** Доведіть.

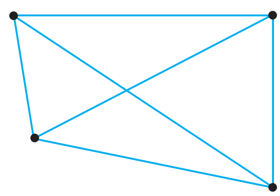
Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм, у якому $AC = BD$ (мал. 76). Доведемо, що $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$. Розглянемо ΔABD і ΔDCA. У них AD — спільна сторона, $AC = BD$ за умовою, $AB = DC$ як протилежні сторони паралелограма. Отже, $\Delta ABD = \Delta DCA$ за трьома сторонами. Звідси випливає, що $\angle A = \angle D$. Але $\angle A = \angle C$ і $\angle D = \angle B$ як протилежні кути паралелограма, тому $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B$. За властивістю кутів чотирикутника, $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360°$. Отже, $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B = 360° : 4 = 90°$, тобто паралелограм $ABCD$ — прямокутник.



Мал. 76

Щоб установити, що даний паралелограм — прямокутник, доведіть, що в ньому: або всі кути прямі (означення прямокутника), або діагоналі рівні (ознака прямокутника).

? Чи можна стверджувати, що чотирикутник, у якому діагоналі рівні, є прямокутником? Не можна (мал. 77). Потрібно ще перевірити, чи виконується одна з ознак паралелограма. Наприклад, чи діляться діагоналі точкою їх перетину навпіл.


Мал. 77

Дізнайтеся більше

Виникає запитання: *Чи можна дати інші означення прямокутника?*

Поміркуємо. У молодших класах прямокутник визначали як чотирикутник, усі кути якого прямі. Тепер ми визначили прямокутник як окремий вид паралелограма. Можна сказати, що прямокутник — це:

паралелограм, у якого всі кути рівні (справді, сума кутів паралелограма становить 360°, тоді кожний із них дорівнює 90°);

паралелограм, який має прямий кут (справді, у паралелограма сусідні кути в сумі становлять 180°, а протилежні кути — рівні. Тому, якщо один із кутів паралелограма прямий, то і три інші його кути — прямі).

Наведені означення прямокутника є *еквівалентними*.

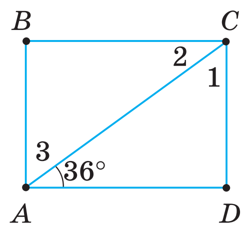
Отже, можна дати різні означення одного й того самого поняття.

Пригадайте головне

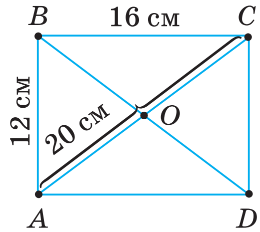
1. Що таке прямокутник?
2. Сформулюйте та доведіть властивість діагоналей прямокутника.
3. Поясніть, як установити, що даний паралелограм є прямокутником.

Розв'яжіть задачі

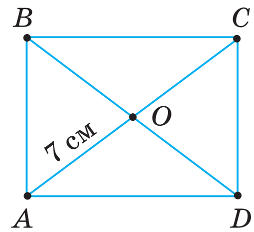
145'. Чи правильно, що прямокутником є паралелограм, у якому:
1) усі сторони рівні; 2) усі кути прямі?



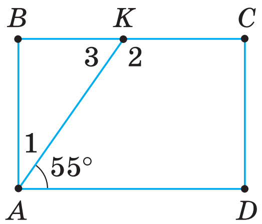
Мал. 78



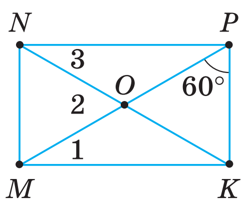
Мал. 79



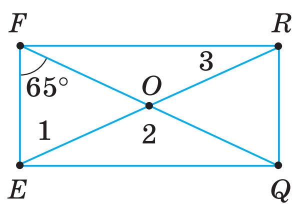
Мал. 80



Мал. 81



Мал. 82



Мал. 83

146'. Чи правильно, що прямокутник має всі властивості паралелограма? Відповідь поясніть.

147'. Назвіть властивість, яку має прямокутник, але якої не має паралелограм, що не є прямокутником.

148'. Чи правильно, що діагоналі прямокутника: 1) нерівні; 2) рівні?

149'. Чи правильно, що паралелограм є прямокутником, якщо його діагоналі: 1) нерівні; 2) рівні?

150'. $ABCD$ — прямокутник (мал. 78). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3.

151°. $ABCD$ — прямокутник (мал. 79). За даними на малюнку знайдіть: 1) AD, DC; 2) BD; 3) AO, OC, BO, OD.

152°. Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо їх сума дорівнює: 1) 12 см; 2) 6 см; 3) 18 мм.

153°. $ABCD$ — прямокутник (мал. 80). За даними на малюнку знайдіть: 1) його діагоналі; 2) суму його діагоналей.

154°. O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Доведіть:
1) трикутники AOD, BOC, AOB і DOC — рівнобедрені;
2) $\Delta AOB = \Delta DOC$, $\Delta BOC = \Delta AOD$.

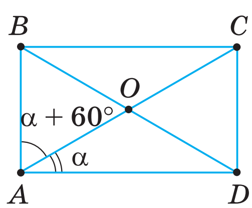
155°. На малюнках 81, 82 зображено прямокутники. Знайдіть кути 1, 2, 3.

156°. На малюнку 83 зображено прямокутник. Знайдіть кути 1, 2, 3.

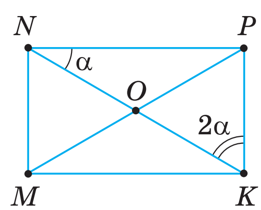
157°. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями прямокутника (мал. 84, 85).

158°. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями прямокутника (мал. 86).

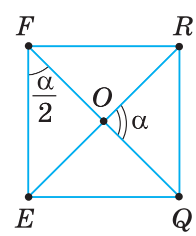
159°. Діагональ прямокутника дорівнює d й утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо:
1) $d = 4$ см; 2) $d = 14$ мм; 3) $d = 0,44$ дм.



Мал. 84



Мал. 85



Мал. 86

160°. Менша сторона прямокутника дорівнює a. Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60° і:
1) a = 10 см; 2) a = 0,25 дм; 3) a = 7 мм.

161°. a і b — сторони прямокутника, P — його периметр. Знайдіть невідомі величини за таблицею 9.

Таблиця 9

a	6 см	4 см		10 см	9 см
b	12 см		5 см		7 см
P		32 см	30 см	44 см	

162°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо:
1) одна його сторона дорівнює 4 см, а інша — утричі більша;
2) одна його сторона дорівнює 10 см, а інша — удвічі менша.

163°. Одна сторона прямокутника дорівнює 12 см, а інша — на 4 см більша. Знайдіть периметр прямокутника.

164°. У паралелограмі жодний із кутів не є гострим. Доведіть, що цей паралелограм — прямокутник.

165°. **Доведіть, що коли в паралелограмі хоча б один кут прямий, то він є прямокутником.**

166°. Якщо в паралелограмі хоча б один кут прямий, то його діагоналі рівні. Доведіть.

167. **Якщо в паралелограмі сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то він — прямокутник.** Доведіть.

168. **Якщо всі кути чотирикутника рівні, то він — прямокутник.** Доведіть.

169. Доведіть, що коли в паралелограмі кути, прилеглі до однієї сторони, рівні, то він є прямокутником.

170. Діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з його стороною. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.

171. Доведіть, що коли в прямокутнику сторона дорівнює половині діагоналі, то кут між ними дорівнює 60°.

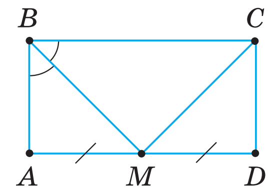
172. Перпендикуляр, проведений із вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить цей кут у відношенні 2 : 3. Знайдіть:
1) кути, утворені діагоналями зі сторонами прямокутника;
2) кут між проведеним перпендикуляром і другою діагоналлю.

173. Периметр прямокутника дорівнює 48 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо:
1) дві його сторони відносяться, як 2 : 3;
2) відстань між серединами двох його протилежних сторін дорівнює 10 см;
3) точка перетину його діагоналей віддалена від його сторони на 4 см.

174. Знайдіть суму відстаней від довільної внутрішньої точки прямокутника до сторін, якщо його периметр дорівнює: 1) 12 см; 2) 8,6 см.

175. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки завдовжки: 1) 3 см і 5 см; 2) 0,2 дм і 3 см.

176. Бісектриса BM прямокутника $ABCD$ (мал. 87) ділить сторону AD навпіл. Доведіть, що CM — бісектриса кута C.



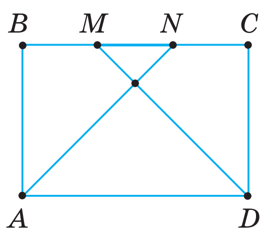
Мал. 87

177. **Доведіть, що коли бісектриса прямокутника ділить навпіл сторону, яку вона перетинає, то одна зі сторін прямокутника є вдвічі більшою за іншу.**

178. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить сторону, яку вона перетинає, на рівні відрізки. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює: 1) 15 см; 2) 3,8 дм.

179*. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Периметр трикутника ABD більший за периметр трикутника AOB на 12 см, а периметр прямокутника дорівнює 50,2 см. Знайдіть сторони прямокутника.

180*. **Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні й у точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є прямокутником.**



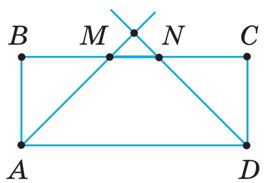
Мал. 88

Щоб довести, що чотирикутник є прямокутником, покажіть, що: або цей чотирикутник є паралелограмом, а паралелограм — прямокутником, або три кути чотирикутника — прямі.

181*. У чотирикутнику діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл, а один кут — прямий. Доведіть, що цей чотирикутник є прямокутником.

182*. Чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно рівні й діагоналі рівні, є прямокутником. Доведіть.

183*. Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні і дві протилежні сторони рівні й паралельні, то такий чотирикутник — прямокутник.

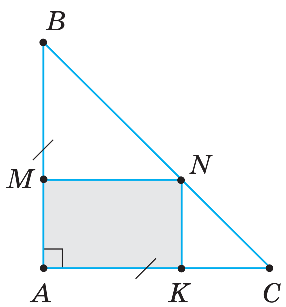


Мал. 89

184*. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами a і b проведено бісектриси кутів A і D, які перетинають сторону BC в точках M і N (мал. 88, 89). Знайдіть довжину відрізка MN.

185*. **Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.**

Щоб довести рівність двох відрізків, покажіть, що вони є:
або протилежними сторонами прямокутника (паралелограма);
або діагоналями прямокутника;
або частинами діагоналі прямокутника (паралелограма), на які вона ділиться точкою перетину з іншою діагоналлю.



Мал. 90

186*. Через середину гіпотенузи прямокутного трикутника, яка дорівнює 6 см, проведено дві прямі, паралельні його катетам. Знайдіть діагоналі утвореного прямокутника.

187*. Доведіть, що сума відстаней від точки, яка лежить на основі рівнобедреного трикутника, до його бічних сторін дорівнює висоті, проведеній з вершини основи.

188*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що вони мають спільний кут (мал. 90).
1) Доведіть, що периметр прямокутника не залежить від положення його вершини на гіпотенузі.
2) Знайдіть периметр прямокутника, якщо катет трикутника дорівнює 5 см.

Проявіть компетентність

189. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти (мал. 91), побудували прямі кути BAD і ABC.

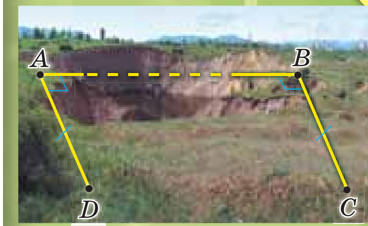
Потім на сторонах кутів відклали рівні відрізки AD і BC.
1) Поясніть, якою фігурою є чотирикутник $ABCD$.
2) Як знайти відстань AB?

190. Учень виготовив рамку прямокутної форми. Щоб перевірити правильність виготовлення рамки, він перевірив рівність її діагоналей. Чи достатньо такої перевірки? Чому?

191. Якими способами можна перевірити, що даний чотирикутний предмет має форму прямокутника? Відповідь поясніть.

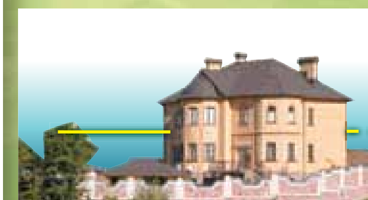
192. На малюнку 92 зображено прилад для вимірювання діаметра колод.
1) Поясніть, як користуватися цим приладом.
2) Чому відлік на горизонтальній лінійці приладу відповідає діаметру колоди?
3) Якщо відлік на горизонтальній лінійці приладу дорівнює 20 см, то який діаметр колоди?
4) Поясніть, як виготовити такий прилад.

193. Провішена на місцевості пряма упирається в будівлю (мал. 93). Поясніть, як продовжити пряму за будівлю.



Мал. 91

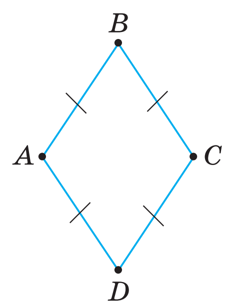

Мал. 92


Мал. 93

§ 5. РОМБ. КВАДРАТ

1. РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Чи можуть усі сторони паралелограма бути рівними? Можуть. На малюнку 94 в паралелограмі $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$. Це ще один вид паралелограма — ромб.



Мал. 94

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається *ромбом*.

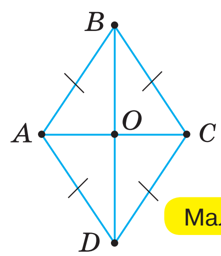
Чи можна стверджувати, що паралелограм є ромбом, якщо в нього дві сусідні сторони рівні? Так. Тому що рівність усіх сторін такого паралелограма випливає з властивості: протилежні сторони паралелограма рівні.

Оскільки ромб є окремим видом паралелограма, то він має всі його властивості (назвіть їх). Крім того, ромб має ще особливі властивості.

ТЕОРЕМА (властивості діагоналей ромба).

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.
Діагоналі ромба ділять його кути навпіл.

Дано: $ABCD$ — ромб (мал. 95),
O — точка перетину діагоналей.
Довести: $AC \perp BD$;
$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$;
$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$.



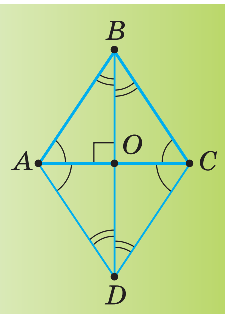
Мал. 95

Доведення. За означенням ромба, $AB = BC$, тому трикутник ABC — рівнобедрений. Оскільки

ромб $ABCD$ — паралелограм, то $AO = OC$. Звідси BO — медіана рівнобедреного трикутника ABC, а отже — висота й бісектриса цього трикутника. Тому $AC \perp BD$ і $\angle ABD = \angle CBD$.
Так само доводимо, що діагональ BD ділить навпіл кут D, а діагональ AC — кути A і C ромба $ABCD$.

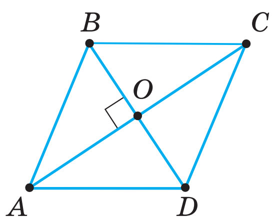
Властивості ромба наведено в таблиці 10.

Таблиця 10

$ABCD$ — ромб	Властивість
	**паралелограма**
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	особлива
	4. $AC \perp BD$
	5. $\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$, $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$

Задача (ознака ромба). **Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.** Доведіть.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, у якому $AC \perp BD$ (мал. 96). Доведемо, що $ABCD$ — ромб. Розглянемо ΔAOB і ΔAOD. У них AO — спільна сторона, $OB = OD$ за властивістю діагоналей паралелограма, $\angle AOB = \angle AOD = 90°$ за умовою. Отже, $\Delta AOB = \Delta AOD$ за двома сторонами й кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $AB = AD$. Тоді $AB = CD$ і $AD = BC$ за властивістю протилежних сторін паралелограма. Отже, всі сторони паралелограма рівні, тому, за означенням, він є ромбом.

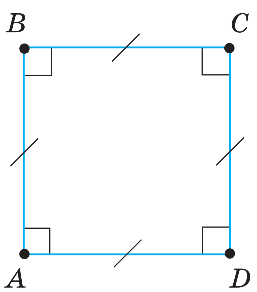


Мал. 96

Щоб установити, що даний паралелограм — ромб, доведіть, що в ньому: або всі сторони рівні (означення ромба), або діагоналі взаємно перпендикулярні (ознака ромба).

2. КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається *квадратом*.



Мал. 97

На малюнку 97 ви бачите квадрат $ABCD$.

Можна дати різні означення квадрата: ромб, у якого всі кути прямі, називається квадратом; прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається квадратом; паралелограм, у якого всі сторони рівні й усі кути прямі, називається квадратом. Отже, квадрат має всі властивості паралелограма, прямокутника та ромба. Перелічимо властивості квадрата.

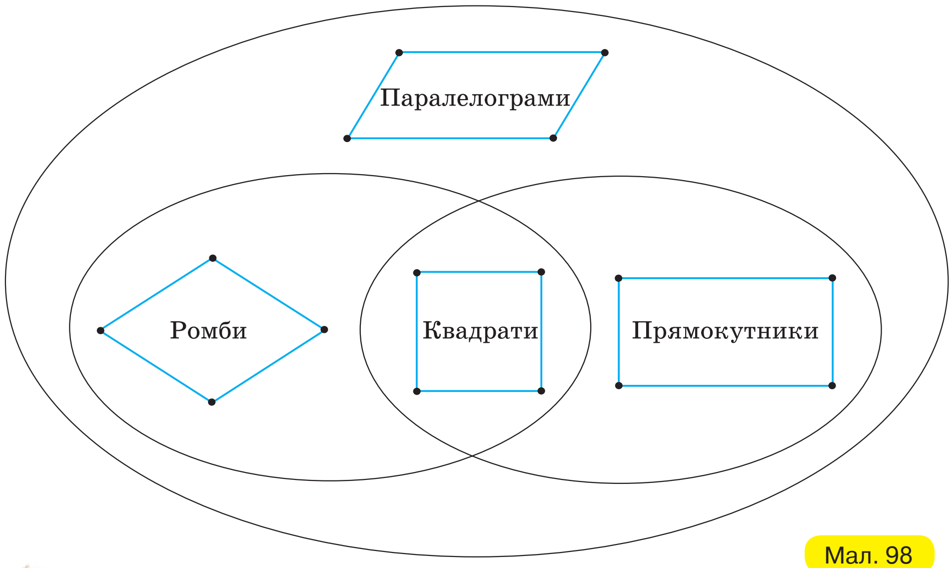
1) Протилежні сторони і протилежні кути квадрата рівні. Діагоналі квадрата в точці перетину діляться навпіл (властивості паралелограма).

2) Діагоналі квадрата рівні (властивість прямокутника).

3) Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл (властивості ромба).

Ромб і прямокутник — окремі види паралелограма. Співвідношення між видами паралелограмів зображено на малюнку 98.

Квадрат є окремим видом і ромба, і прямокутника, і паралелограма.



Мал. 98

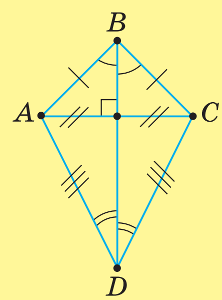
Дізнайтеся більше

1. Розгляньте таблицю класифікації паралелограмів за сусідніми сторонами та за кутами. Запропонуйте власну класифікацію вивчених видів паралелограма.

Таблиця 11

За кутами	За сторонами	
	Сусідні сторони рівні	Сусідні сторони нерівні
Кути прямі	Квадрат	Прямокутник
Кути непрямі	Ромб	Паралелограм

2. Крім паралелограмів, є ще один вид чотирикутників — *дельтоїд*. Цю фігуру одержимо, якщо два рівнобедрені трикутники ABC і ADC з рівними основами AC прикладемо один до одного так, як показано на малюнку 99. Властивості дельтоїда випливають із властивостей рівнобедреного трикутника. Наприклад, діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні, одна з них ділить кути навпіл і ділить другу діагональ навпіл. Сформулюйте за малюнком інші властивості дельтоїда.
3. Слово «ромб» походить від грецького *rhombos*, що означає — дзиґа, круження. Слово «квадрат» походить від латинського *quadratum* — чотирикутник. Квадрат був першим чотирикутником, який розглядали в геометрії.



Мал. 99

Пригадайте головне

1. Що таке ромб?
2. Сформулюйте та доведіть властивості діагоналей ромба.
3. Доведіть, що паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.
4. Що таке квадрат?
5. Назвіть властивості квадрата.

Розв'яжіть задачі

194'. Чи правильно, що ромбом є паралелограм, у якому:
1) протилежні сторони попарно рівні;
2) усі сторони рівні?

195'. Чи має ромб усі властивості паралелограма? Відповідь поясніть.

196'. Назвіть властивості, які має ромб, але яких не має паралелограм, що не є ромбом.

197'. Чи є ромбом паралелограм, у якого діагоналі:
1) рівні;
2) взаємно перпендикулярні;
3) ділять кути ромба навпіл?

198'. Чи правильно, що паралелограм є ромбом, якщо його діагоналі:
1) перетинаються під гострим кутом;
2) взаємно перпендикулярні?

199'. Чи правильно, що квадратом є прямокутник, у якому:
1) дві сусідні сторони нерівні;
2) усі сторони рівні?

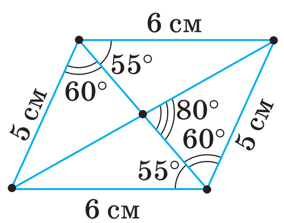
200'. Чи має квадрат усі властивості прямокутника? Відповідь поясніть.

201'. Чи має квадрат усі властивості ромба? Відповідь поясніть.

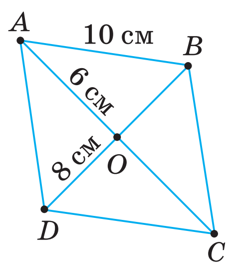
202'. Чи правильно, що у квадраті:
1) протилежні сторони рівні й паралельні; 2) сусідні сторони рівні та взаємно перпендикулярні; 3) протилежні кути рівні; 4) усі кути рівні?

203'. Чи правильно, що діагоналі квадрата:
1) рівні; 2) взаємно перпендикулярні; 3) ділять навпіл кути; 4) у точці перетину діляться навпіл?

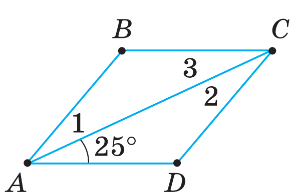
204'. Чи правильно вказано довжини сторін і градусні міри кутів ромба на малюнку 100? Відповідь поясніть.



Мал. 100



Мал. 101



Мал. 102

205°. $ABCD$ — ромб (мал. 101). За даними на малюнку знайдіть:
1) BC, AD, DC;
2) AC, BD.

206°. $ABCD$ — ромб (мал. 102). За даним на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3.

207°. Знайдіть сторону ромба, якщо його периметр дорівнює:
1) 2,4 дм; 2) 280 мм.

208°. Периметр ромба дорівнює 12 см. Знайдіть сторону ромба.

209°. **Доведіть, що діагоналі ромба ділять його на чотири рівні прямокутні трикутники.**

210°. Доведіть, що діагональ ромба ділить його на два рівні трикутники.

211°. *ABCD* — ромб (мал. 103). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3, 4, 5.

212°. Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо кут ромба дорівнює: 1) 36°; 2) 54°.

213°. Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо кут ромба дорівнює 60°.

214°. Знайдіть кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.

215°. Знайдіть кути ромба, якщо його висота утворює зі стороною кут: 1) 30°; 2) 15°; 3) 65°.

216°. За даними на малюнках 104, 105 знайдіть кути ромба.

217°. За даними на малюнку 106 знайдіть кути ромба.

218°. Кут ромба дорівнює 60°, а менша діагональ — d. Знайдіть периметр ромба, якщо: 1) $d = 3{,}2$ дм; 2) $d = 45$ мм.

219°. Кут ромба дорівнює 60°, а менша діагональ — 10 см. Знайдіть периметр ромба.

220°. За даними на малюнку 107 знайдіть:
1) інші сторони квадрата; 2) діагоналі квадрата; 3) кути 1, 2, 3, 4.

221°. Знайдіть периметр квадрата, якщо точка перетину його діагоналей віддалена від сторони на: 1) 8 см; 2) 0,3 дм.

222°. Знайдіть периметр квадрата, якщо точка перетину його діагоналей віддалена від сторони на 21 мм.

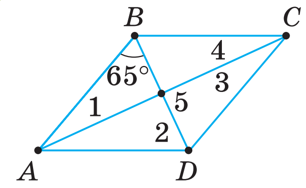
223°. Діагональ квадрата — d. Його сторона є діагоналлю другого квадрата. Знайдіть сторону другого квадрата, якщо:
1) $d = 6$ см; 2) $d = 29$ мм; 3) $d = 1{,}5$ дм.

224°. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* на малюнку 108 — квадрат.

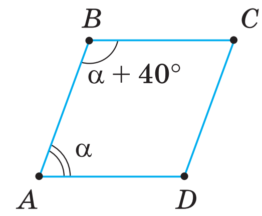
225°. Накресліть у зошиті таблицю 12. У таблиці поставте знак «+», якщо геометрична фігура має вказану властивість.

Таблиця 12

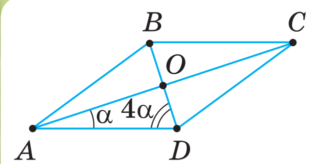
Фігури / Властивості	Паралелограм	Прямокутник	Ромб	Квадрат
1. Протилежні сторони попарно паралельні				
2. Протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні				
3. Усі сторони рівні				
4. Усі кути прямі				
5. Діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл				
6. Діагоналі рівні				
7. Діагоналі взаємно перпендикулярні				
8. Діагоналі ділять кути навпіл				



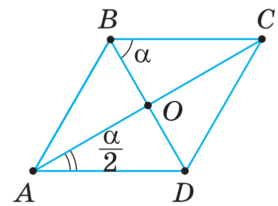
Мал. 103



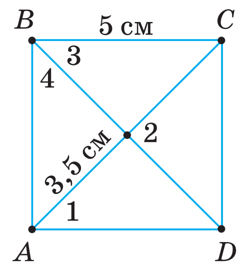
Мал. 104



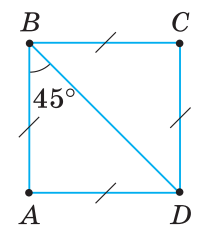
Мал. 105



Мал. 106



Мал. 107



Мал. 108

226. **Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.**

227. **Паралелограм, діагоналі якого ділять кути навпіл, — ромб.** Доведіть.

228. Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 36 см, а висота — 4,5 см.

229. Доведіть, що висоти ромба рівні.

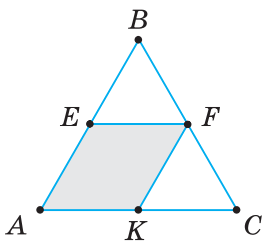
230. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його сторону навпіл. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює 20 см.

231. Знайдіть кути ромба, якщо кут між його висотою та діагоналлю, проведеними з однієї вершини, дорівнює: 1) $35°$; 2) $20°$.

232. Знайдіть кути ромба, якщо кут між його висотою та діагоналлю, проведеними з однієї вершини, дорівнює $40°$.

233. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться, як: 1) $2 : 3$; 2) $2 : 7$.

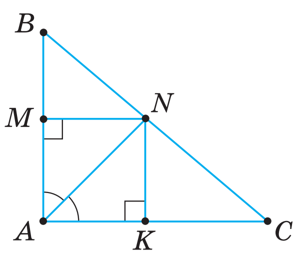
234. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться, як $1 : 2$.



Мал. 109

235. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має з ним спільний кут (мал. 109).
1) Знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 24 см.
2) Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника.
3) Знайдіть довжини відрізків, на які вершини ромба ділять сторони трикутника.

236. **Ромб, у якого один кут прямий, — квадрат.** Доведіть.

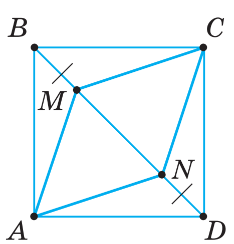


Мал. 110

237. AN — бісектриса прямого кута A трикутника ABC (мал. 110); NM і NK — перпендикуляри до катетів. Доведіть, що $AMNK$ — квадрат.

238. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, який має з ним спільний кут. Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює: 1) 8 см; 2) 29 мм; 3) 0,41 дм.

239. **Доведіть, що ромб, діагоналі якого рівні, — квадрат.**



Мал. 111

240. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ відкладено рівні відрізки $BM = DN$ (мал. 111). Доведіть, що $AMCN$ — ромб.

241. Чи правильні твердження:
1) чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні й рівні, — квадрат;
2) чотирикутник, усі сторони якого рівні й один із кутів прямий, — квадрат;
3) чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні й точкою їх перетину діляться навпіл, — квадрат?

242*. Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами, проведеними з однієї вершини.

243*. Висоти, проведені з вершини ромба, утворюють кут $30°$. Знайдіть кути ромба.

244*. Вершини протилежних кутів ромба сполучено із серединами його сторін так, як показано на малюнку 112. Доведіть, що утворений чотирикутник $MNKL$ — паралелограм.

245*. Від двох протилежних вершин ромба на його сторонах відкладено рівні відрізки (мал. 113). Доведіть, що утворений чотирикутник $PMNK$ — прямокутник.

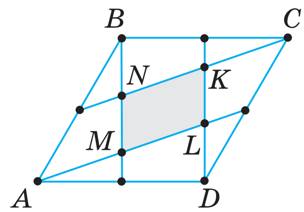
246*. Із точки перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

247*. Доведіть, що чотирикутник, вершини якого є серединами сторін прямокутника, — ромб.

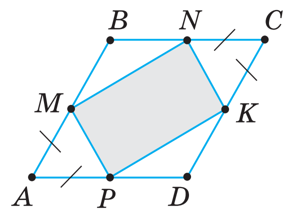
248*. **Чотирикутник, діагоналі якого рівні та є бісектрисами його кутів, — квадрат.** Доведіть.

249*. Сума периметрів чотирьох трикутників, на які квадрат розбивається діагоналями, більша за периметр квадрата на 20 см. Знайдіть діагональ квадрата.

250*. **Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють квадрат.**



Мал. 112



Мал. 113

Проявіть компетентність

251. Швачка викроїла з тканини чотирикутник, який має бути ромбом. Щоб перевірити правильність викрійки, вона перегнула тканину за однією діагоналлю й переконалася, що краї тканини суміщаються. Чи є правильною така перевірка? Якщо ні, то запропонуйте свій спосіб перевірки.

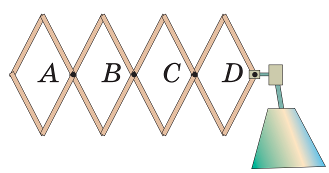
252. Яку найменшу кількість разів потрібно перегнути чотирикутний шматок тканини, щоб переконатися в тому, що він має форму квадрата?

253. Столяр, щоб перевірити, чи має стільниця форму квадрата, виміряв її сторони й переконався, що вони рівні.
1) Чи є правильною така перевірка?
2) Чи достатньо виміряти діагоналі стільниці й переконатися, що вони рівні?
3) Чи матиме стільниця форму квадрата, якщо її сторони рівні й діагоналі рівні?

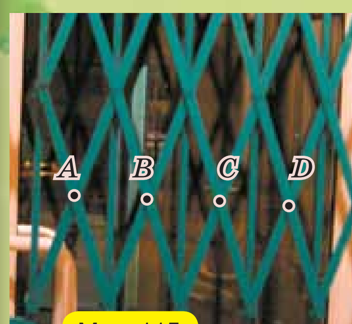
254. Земельна ділянка, яка має форму квадрата, була обнесена парканом. З часом від паркану залишилося два стовпці у протилежних вершинах квадрата. Як відновити межу ділянки?

255. Учень вирішив перевірити, чи має серветка форму квадрата. Він перегнув її за діагоналлю й переконався, що краї обох половинок серветки сумістилися. Але йому зауважили, що така перевірка є недостатньою. Потрібно перегнути серветку за кожною діагоналлю. Якщо в обох випадках краї серветки сумістяться, то вона має форму квадрата. 1) Чи правильно діяв учень? 2) Чи правильно йому порадили? Відповідь поясніть.

256. За схемами розсувного кронштейна (мал. 114) і розсувної решітки (мал. 115) поясніть:
1) чому точки A, B, C, D... завжди лежать на одній прямій;
2) як виготовити такі конструкції.

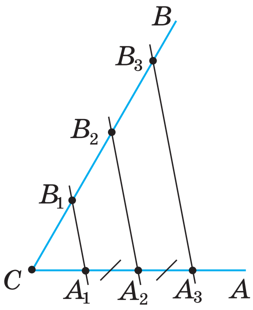


Мал. 114



Мал. 115

§ 6. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА



Мал. 116

1. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

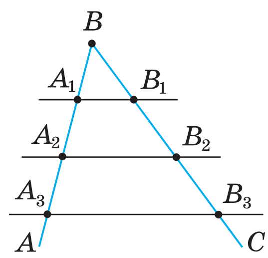
Накресліть кут ACB. Відкладіть на його стороні CA рівні відрізки A_1A_2 і A_2A_3. Через точки A_1, A_2, A_3 за допомогою косинця й лінійки проведіть паралельні прямі, що перетнуть сторону CB цього кута в точках B_1, B_2, B_3 (мал. 116). Порівняйте довжини відрізків B_1B_2 і B_2B_3. Зробіть висновок.

ТЕОРЕМА **Теорема Фалеса.**

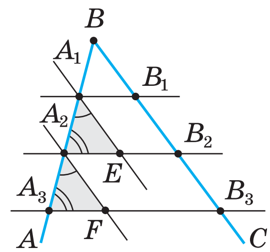
Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, на одній його стороні відтинають рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

Дано: $\angle ABC$ (мал. 117), $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $B_1B_2 = B_2B_3$.

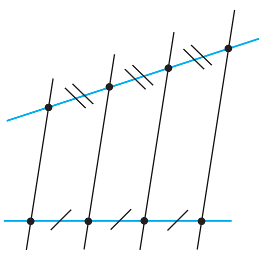


Мал. 117



Мал. 118

Доведення. Через точки A_1 і A_2 проведемо прямі A_1E і A_2F, паралельні BC (мал. 118). Розглянемо ΔA_1A_2E і ΔA_2A_3F. У них $A_1A_2 = A_2A_3$ за умовою, $\angle A_1A_2E = \angle A_2A_3F$ і $\angle A_2A_1E = \angle A_3A_2F$ як відповідні кути при паралельних прямих і січній. Отже, $\Delta A_1A_2E = \Delta A_2A_3F$ за стороною і прилеглими до неї кутами. З рівності цих трикутників випливає, що $A_1E = A_2F$. Але $A_1E = B_1B_2$ і $A_2F = B_2B_3$ як протилежні сторони паралелограмів $A_1B_1B_2E$ і $A_2B_2B_3F$. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$.


Мал. 119

? Чи є справедливою теорема Фалеса, якщо замість сторін кута взяти дві довільні прямі? Так. Паралельні прямі, що перетинають дві дані прямі й відтинають на одній прямій рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій (мал. 119).

Задача. Поділіть на п'ять рівних частин даний відрізок AB (мал. 120).

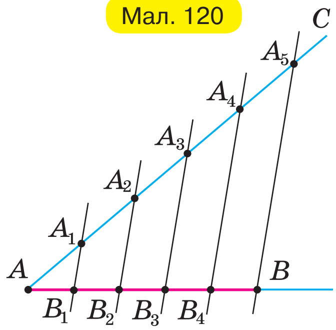
Мал. 120

Розв'язання. Проведемо з точки A промінь AC, що не лежить на прямій AB (мал. 121).

Відкладемо на промені AC п'ять рівних відрізків: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5.

Проведемо пряму A_5B.

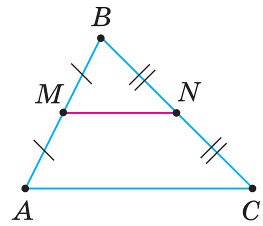
Через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проведемо прямі, паралельні прямій A_5B. За теоремою Фалеса, ці прямі ділять відрізок AB на п'ять рівних частин.



Мал. 121

2. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середньою лінією трикутника **називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**

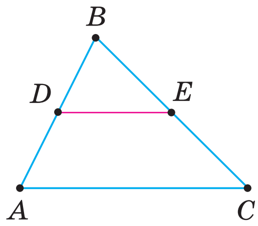


Мал. 122

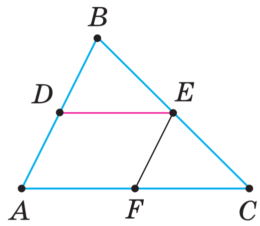
На малюнку 122 відрізок MN — середня лінія трикутника ABC, бо точки M і N — середини сторін AB і BC.

ТЕОРЕМА **(властивості середньої лінії трикутника).**

Середня лінія трикутника паралельна третій його стороні й дорівнює її половині.



Мал. 123



Мал. 124

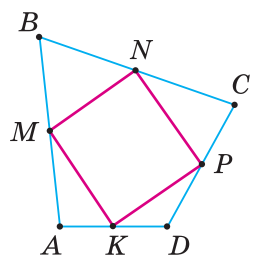
Д а н о: ΔABC (мал. 123), DE — середня лінія.

Д о в е с т и: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \dfrac{1}{2} AC$.

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки DE — середня лінія ΔABC, то точка D є серединою відрізка AB, а точка E — серединою відрізка BC. Проведемо через точку D пряму, паралельну AC. За теоремою Фалеса, вона перетинає відрізок BC в його середині, тобто в точці E. Тому побудована пряма містить середню лінію DE даного трикутника. Отже, $DE \parallel AC$.

2) Проведемо пряму $EF \parallel AB$ (мал. 124). За теоремою Фалеса, пряма EF ділить відрізок AC навпіл: $AF = FC = \dfrac{1}{2} AC$. За побудовою, чотирикутник $ADEF$ — паралелограм, тому $DE = AF$. Отже, $DE = \dfrac{1}{2} AC$.

Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

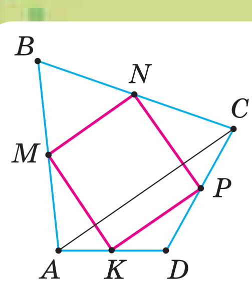


Мал. 125

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник і M, N, P, K — середини його сторін (мал. 125). Доведемо, що $MNPK$ — паралелограм.

Проведемо діагональ AC (мал. 126). MN — середня лінія трикутника ABC. Тому $MN \parallel AC$ і $MN = \dfrac{1}{2} AC$. KP — середня лінія трикутника ADC. Тому $KP \parallel AC$ і $KP = \dfrac{1}{2} AC$.



Мал. 126

Одержали: $MN \parallel AC$ і $KP \parallel AC$, звідси $MN \parallel KP$;

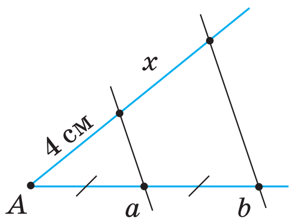
$MN = \dfrac{1}{2} AC$ і $KP = \dfrac{1}{2} AC$, звідси $MN = KP$.

Отже, протилежні сторони MN і KP чотирикутника $MNPK$ рівні й паралельні, тому він — паралелограм (за ознакою).

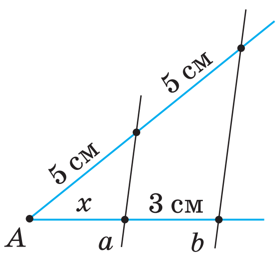
Якщо в умові задачі дано середини деяких відрізків, то спробуйте скористатися властивостями середньої лінії трикутника.

Дізнайтеся більше

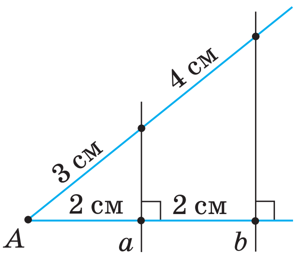
Давньогрецького вченого Фалеса з Мілета (625–548 рр. до н. е.) вважають одним із семи мудреців світу. Геній Фалеса знайшов втілення в різних галузях людської діяльності. Він займався інженерною справою, був державним діячем, математиком, астрономом. Особливою заслугою Фалеса вважають те, що він увів у математику ідею доведення. Учений довів, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини, що прямий кут можна вписати в півколо та ін. Як вважають історики, саме Фалес почав застосовувати основні геометричні інструменти — циркуль і лінійку. Учений виміряв висоту єгипетських пірамід за довжиною їх тіней, уперше передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 585 р. до н. е.



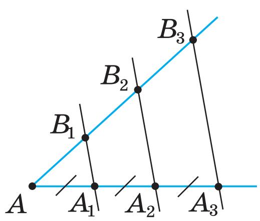
Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129



Мал. 130

Пригадайте головне

1. Сформулюйте та доведіть теорему Фалеса.
2. Як поділити даний відрізок на n рівних частин?
3. Що таке середня лінія трикутника?
4. Сформулюйте та доведіть теорему про властивості середньої лінії трикутника.

Розв'яжіть задачі

257'. Чи правильно, що в теоремі Фалеса йдеться про те, що:
1) сторони кута перетинають будь-які прямі;
2) сторони кута перетинають паралельні прямі;
3) усі утворені відрізки дорівнюють один одному;
4) дорівнюють один одному лише відрізки, утворені на одній стороні кута;
5) дорівнюють один одному відрізки, утворені на кожній стороні кута, але два відрізки на різних сторонах кута можуть мати не таку саму довжину?

258'. Чи правильно, що середня лінія трикутника сполучає середини:
1) усіх сторін трикутника; 2) двох сторін трикутника?

259'. Чи правильно, що середня лінія трикутника:
1) перетинає третю сторону трикутника;
2) паралельна третій стороні трикутника;
3) дорівнює половині будь-якої сторони трикутника;
4) дорівнює половині третьої сторони трикутника?

260'. За даними на малюнках 127, 128 знайдіть x ($a \parallel b$).

261'. Чи правильно вказано довжини відрізків на малюнку 129? Відповідь поясніть.

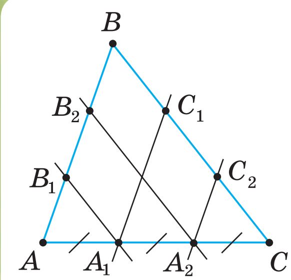
262°. На малюнку 130 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Знайдіть:
1) AB_1, якщо $B_2B_3 = 6$ см; 2) B_2B_3, якщо $AB_3 = 12$ см.

263°. На малюнку 130 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Знайдіть AB_3, якщо $B_1B_2 = 5$ см.

264°. Поділіть даний відрізок на таку кількість рівних частин: 1) 4; 2) 6.

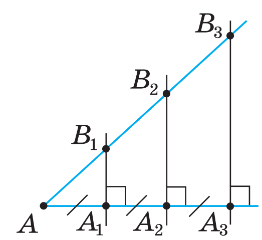
265°. Поділіть даний відрізок на три рівні частини.

266°. У трикутнику ABC (мал. 131) $AB = 12$ см, $BC = 18$ см. Сторону AC поділено на три рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні AB і BC. Знайдіть:
1) довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC;
2) довжини відрізків паралельних прямих, які містяться між сторонами трикутника.



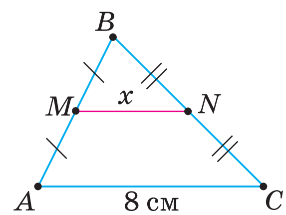
Мал. 131

267°. За даними на малюнку 132 доведіть, що $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

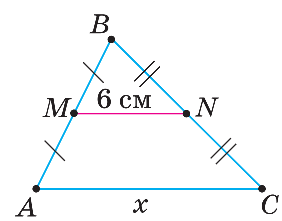


Мал. 132

268°. За даними на малюнках 133, 134 знайдіть x.

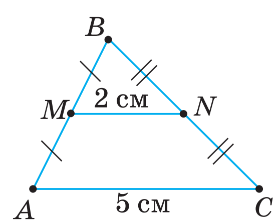


Мал. 133



Мал. 134

269°. Чи правильно вказано довжини відрізків на малюнку 135? Відповідь поясніть.



Мал. 135

270°. DE і EF — середні лінії трикутника ABC, які відповідно паралельні сторонам BC і AB. Знайдіть:
1) відрізок FC, якщо $DE = 4$ см;
2) відрізок BD, якщо $EF = 7$ см.

271°. Знайдіть середні лінії трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 8 см, 5 см, 7 см; 2) 30 мм, 40 мм, 50 мм.

272°. Сторони трикутника дорівнюють 9 см, 10 см і 14 см. Знайдіть середні лінії трикутника.

273°. **Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі середні лінії рівні.** Чи рівні середні лінії в рівнобедреному трикутнику?

274°. Знайдіть середні лінії рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює: 1) 24 дм; 2) 48 мм.

275°. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть його середні лінії.

276°. Знайдіть периметр рівностороннього трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 0,8 дм; 2) 100 мм.

277°. Середні лінії рівностороннього трикутника дорівнюють 4 см. Знайдіть його периметр.

278°. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 3 см, 5 см, 6 см; 2) 7 см, 9 см, 12 см; 3) 8 см, 10 см, 12 см.

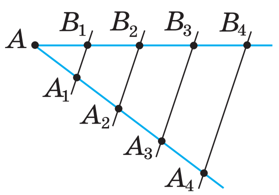
279°. Визначте вид трикутника, якщо:
1) усі його середні лінії рівні; 2) дві його середні лінії рівні.

280°. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо два відрізки, які сполучають середини його сусідніх сторін, дорівнюють:
1) 0,6 дм і 0,9 дм; 2) 100 мм і 14 см.

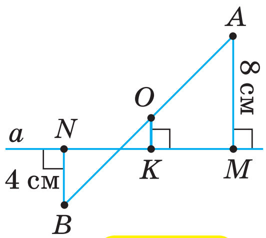
281°. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо два відрізки, які сполучають середини його сусідніх сторін, дорівнюють 5 см і 11 см.

282. Поділіть даний відрізок на дві частини так, щоб вони відносились, як: 1) 3 : 4; 2) 2 : 3.

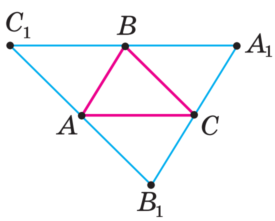
283. Поділіть даний відрізок на дві частини так, щоб вони відносились, як 2 : 5.



Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

284. На малюнку 136 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Знайдіть:
1) AB_3, якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_2B_3 дорівнює 9 см;
2) B_1B_4, якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_1B_3 дорівнює 8 см;
3) AB_4, якщо різниця довжин відрізків B_1B_4 і B_1B_2 дорівнює 10 см.

285. Сторони трикутника дорівнюють a, b і c. Знайдіть сторони іншого трикутника, вершини якого є серединами сторін даного трикутника, якщо:
1) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 0{,}5$ дм, $b = 12$ см, $c = 1{,}3$ дм.

286. Складіть формулу та обчисліть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC, дорівнює: 1) 18 см; 2) 2,4 дм; 3) 300 мм.

287. Середня лінія рівнобедреного трикутника, яка паралельна основі, дорівнює 2,5 см, а його периметр — 2,5 дм. Знайдіть сторони трикутника.

288. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 40 см, якщо його середня лінія, паралельна основі, дорівнює 5 см.

289. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a на відстані 8 см і 4 см від неї (мал. 137). Знайдіть відстань від середини O відрізка AB до прямої a.

290. Сторони трикутника відносяться, як 3 : 4 : 5. Знайдіть сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, якщо периметр даного трикутника дорівнює: 1) 60 см; 2) 4,8 дм.

291. Сторони трикутника відносяться, як 7 : 8 : 9. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника, дорівнює: 1) 48 см; 2) 2,4 дм.

292. **Доведіть, що периметр даного трикутника вдвічі більший за периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями даного трикутника.**

293. Прямі, проведені через вершини A, B і C трикутника ABC паралельно протилежним сторонам, утворюють трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 138).
1) Доведіть, що сторони трикутника $A_1B_1C_1$ точками A, B і C діляться навпіл.
2) Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $AC = 15$ см.
3) Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 48 см.

294. **Доведіть, що середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.**

295. Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AN і CM ділять діагональ BD на три рівні частини.

296. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо сума діагоналей чотирикутника дорівнює: 1) 25 см; 2) 3,5 дм.

297. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють: 1) 4 см і 6 см; 2) 24 см і 25 см.

298. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює: 1) 8 см; 2) 1,3 дм.

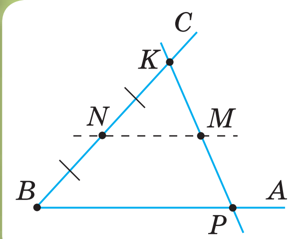
299. Доведіть: 1) середини сторін прямокутника є вершинами ромба; 2) середини сторін квадрата є вершинами квадрата.

300. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

301. Як побудувати трикутник за даними серединами його сторін?

302. Усередині кута ABC дано точку M. Через точку M проведіть пряму так, щоб її відрізок, який відтинають сторони кута, ділився в точці M навпіл.

Побудова (мал. 139). Проводимо $MN \parallel AB$; відкладаємо на стороні BC кута відрізок $NK = BN$; проводимо через точки K і M шукану пряму. Доведіть, що наведена побудова є правильною.



Мал. 139

303*. Точка K — середина медіани AM трикутника ABC. Пряма BK перетинає сторону AC в точці D. Доведіть, що $AC = 3AD$.

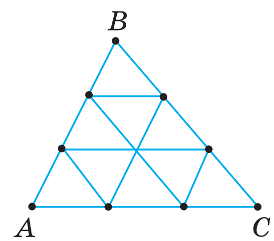
304*. **Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.**

305*. **Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.**

306*. Кожну зі сторін трикутника ABC поділено на три рівні частини й точки поділу сполучено відрізками (мал. 140).

1) Знайдіть суму довжин усіх відрізків, які сполучають точки поділу, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

2) Розв'яжіть задачу за умови, що кожну сторону трикутника поділено на чотири рівні частини.

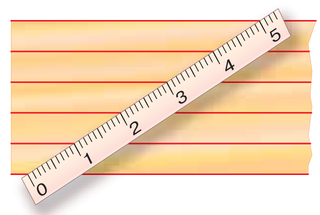


Мал. 140

307*. Через точку M усередині кута ABC проведіть пряму так, щоб її відрізок, який відтинають сторони кута, в точці M ділився у відношенні 1 : 2.

Проявіть компетентність

308. Потрібно поділити прямокутну смугу (дошку, кусок жерсті, картону) на п'ять смужок однакової ширини. За малюнком 141 поясніть, як це можна зробити. Чому смуга поділилася прямими на п'ять рівних частин?

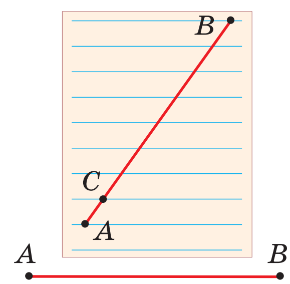


Мал. 141

309. У вас є аркуш зошита з паралельними горизонтальними лініями та циркуль. Потрібно поділити даний відрізок AB на рівні частини, наприклад, на 8 рівних частин (мал. 142).

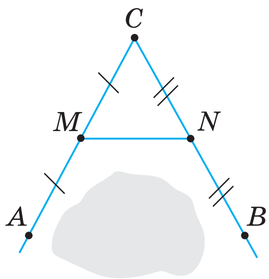
1) Поясніть за малюнком, як це можна зробити. Чому $AC = \frac{1}{8}AB$?

2) Візьміть аркуш зошита з паралельними горизонтальними лініями й поділіть олівець на 5 рівних частин за допомогою цього аркуша.

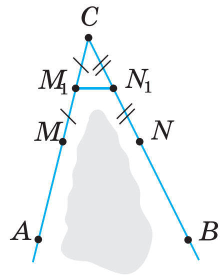


Мал. 142

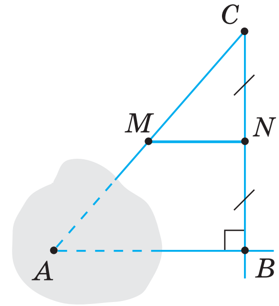
310. На малюнку 143 показано, як на місцевості виміряли відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Позначили довільну точку C і провісили прямі CA і CB. Знайшли точки M і N — середини відрізків AC і BC та виміряли відстань між точками M і N. Поясніть, чому шукана відстань $AB = 2MN$.



Мал. 143



Мал. 144



Мал. 145

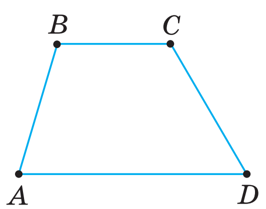
311. Може трапитися так, що провісити пряму між точками M і N, як у задачі 310, неможливо (мал. 144).
1) За малюнком поясніть, як виміряти відстань AB в цьому випадку.
2) Чому шукана відстань $AB = 4M_1N_1$?

312. На малюнку 145 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B, якщо до пункту A підійти не можна.
1) Поясніть вимірювання.
2) Чи обов'язково кут B має бути прямим?

313. Три населені пункти A, B і C розташовані на рівнині й не лежать на одній прямій. Потрібно прокласти дорогу, щоб вона пройшла на однаковій відстані від цих пунктів.
1) Як це зробити? Покажіть на малюнку.
2) Скільки таких доріг можна прокласти?

§ 7. ТРАПЕЦІЯ

1. ЩО ТАКЕ ТРАПЕЦІЯ



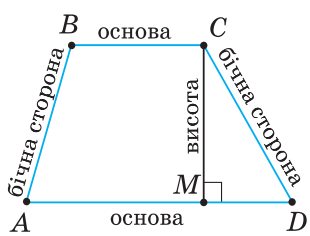
Мал. 146

Ви знаєте, що чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно паралельні, є паралелограмом.

На малюнку 146 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому дві сторони AD і BC паралельні, а дві інші — AB і CD — непаралельні. Такий чотирикутник — трапеція. Дайте означення трапеції та порівняйте його з наведеним у підручнику.

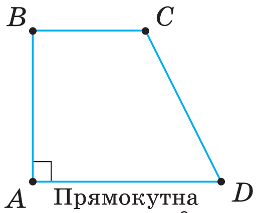
Трапецією **називається чотирикутник, у якому дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні.**

Паралельні сторони трапеції називають її *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами*. На малюнку 147 AD і BC — основи трапеції, AB і CD — бічні сторони.



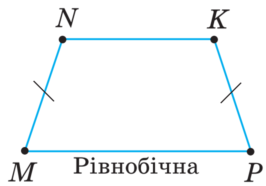
Мал. 147

? Чи можуть основи трапеції бути рівними? Не можуть, бо тоді одержимо паралелограм.



Прямокутна
$\angle A = 90^\circ$

Мал. 148



Рівнобічна
$MN = KP$

Мал. 149

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої основи або до її продовження (див. мал. 147).

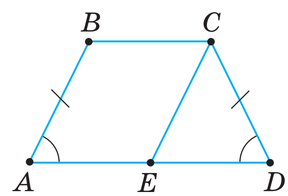
Трапецію, один із кутів якої прямий, називають *прямокутною*. Трапеція $ABCD$ (мал. 148) — прямокутна, оскільки $\angle A = 90^\circ$.

Трапецію, у якої бічні сторони рівні, називають *рівнобічною*. На малюнку 149 трапеція $MNKP$ — рівнобічна, оскільки $MN = KP$.

Задача (властивість рівнобічної трапеції). **У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.** Доведіть.

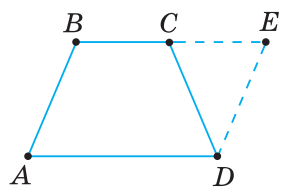
Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ (мал. 150) $AB = CD$. Доведемо, що кути при основі AD рівні.

Проведемо $CE \parallel AB$. Утворений чотирикутник $ABCE$ — паралелограм, бо його протилежні сторони попарно паралельні. За властивістю паралелограма, $AB = CE$, а за умовою, $AB = CD$. Отже, $CE = CD$ і ΔCDE — рівнобедрений. Тому $\angle CDE = \angle CED$. Але $\angle CED = \angle BAD$ як відповідні кути при паралельних прямих CE і AB та січній AE. Звідси $\angle CDE = \angle BAE$.



Мал. 150

Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисною буде така допоміжна побудова: проведіть через вершину трапеції пряму, паралельну бічній стороні (мал. 150 або мал. 151), і використайте властивості утворених паралелограма і трикутника.

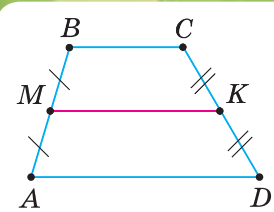


Мал. 151

2. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середньою лінією трапеції **називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.**

На малюнку 152 відрізок MK — середня лінія трапеції $ABCD$, бо точки M і K — середини бічних сторін AB і CD відповідно.



Мал. 152

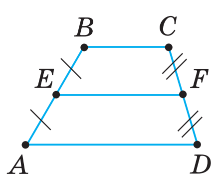
ТЕОРЕМА (властивості середньої лінії трапеції).

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

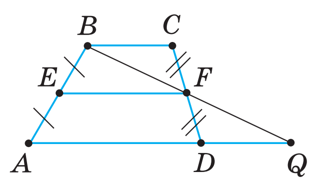
Дано: $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC (мал. 153), EF — середня лінія.

Довести: 1) $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$, 2) $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Доведення. Оскільки EF — середня лінія трапеції $ABCD$, то $AE = BE$, $DF = CF$. Через точки B і F проведемо пряму, яка перетинає продовження основи AD в точці Q (мал. 154). Розглянемо ΔBCF і ΔQDF. У них $CF = FD$ за умовою,



Мал. 153



Мал. 154

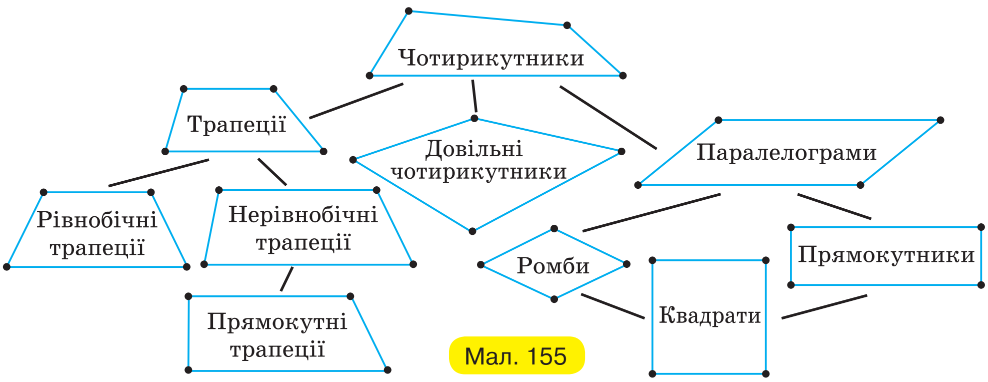
$\angle BFC = \angle QFD$ як вертикальні, $\angle BCF = \angle QDF$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AQ та січній CD. Отже, $\Delta BCF = \Delta QDF$ за стороною та прилеглими до неї кутами. З рівності трикутників випливає: $BF = FQ$, тобто середня лінія EF трапеції є середньою лінією трикутника ABQ.

1) За властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AQ$, тому $EF \parallel AD$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

2) $EF = \frac{1}{2}AQ = \frac{AD + DQ}{2}$, але $DQ = BC$ (з рівності трикутників BCF і QDF).

Тоді одержимо: $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

Подивіться на малюнок 155, на якому зображено вивчені вами чотирикутники. Ви бачите, що серед чотирикутників можна виділити паралелограми (протилежні сторони попарно паралельні) і трапеції (тільки дві протилежні сторони паралельні). Серед трапецій, у свою чергу, — рівнобічні й прямокутні. Якщо в паралелограмі всі сторони рівні або всі кути прямі, то одержимо ромби або прямокутники. Нарешті, квадрат є окремим видом і ромба (усі сторони рівні), і прямокутника (усі кути прямі), і паралелограма (усі кути прямі й усі сторони рівні).

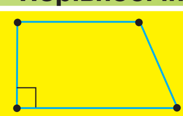
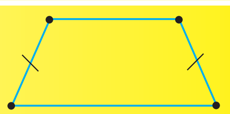
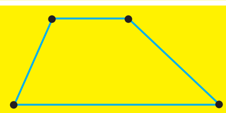


Мал. 155

Дізнайтеся більше

1. Розгляньте таблицю 13 класифікації трапецій за бічними сторонами та кутами.

Таблиця 13

За кутами	За бічними сторонами	
	Рівнобічні	**Нерівнобічні**
Прямокутні	—	
Непрямокутні		

За бічними сторонами трапеції поділяють на рівнобічні та нерівнобічні, а за кутами — на прямокутні та непрямокутні. Рівнобічні трапеції бувають одного виду — непрямокутні; нерівнобічні — як прямокутні, так і непрямокутні.

2. Слово «трапеція» походить від грецького слова *trapezion*, що означає — столик. Цей термін як назва виду чотирикутника почав застосовуватися у XVIII ст. Про те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще стародавнім єгиптянам і вавилонським землемірам.

Пригадайте головне

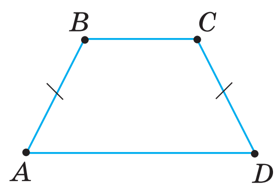
1. Що таке трапеція?
2. Які сторони трапеції називають основами? Бічними сторонами?
3. Яку трапецію називають рівнобічною? Прямокутною?
4. Що таке середня лінія трапеції?
5. Сформулюйте та доведіть властивості середньої лінії трапеції.

Розв'яжіть задачі

314'. Чи правильно, що трапецією є чотирикутник, у якому:
1) протилежні сторони попарно паралельні;
2) дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні?

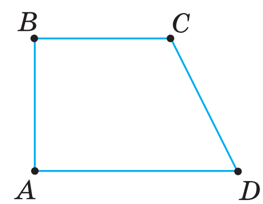
315'. Чи правильно, що висота трапеції — це перпендикуляр, який проведено:
1) з будь-якої точки основи до бічної сторони;
2) з будь-якої точки однієї основи до іншої основи або до її продовження?

316'. Чи правильно, що в рівнобічній трапеції (мал. 156):
1) основи рівні;
2) усі сторони рівні;
3) бічні сторони рівні?



Мал. 156

317'. Які з наведених тверджень правильні?
У прямокутній трапеції (мал. 157):
1) основи перпендикулярні;
2) один із кутів — прямий;
3) бічна сторона перпендикулярна до основи?

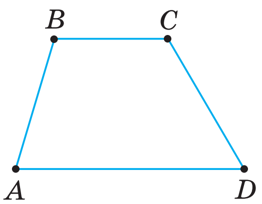


Мал. 157

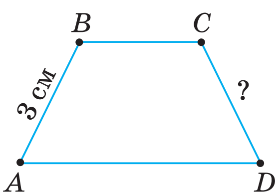
318'. Чи правильно, що середньою лінією трапеції є:
1) пряма;
2) промінь;
3) відрізок?

319'. Чи правильно, що середня лінія трапеції:
1) сполучає її вершини;
2) сполучає середини її сусідніх сторін;
3) сполучає середини її бічних сторін;
4) паралельна бічним сторонам;
5) паралельна основам?

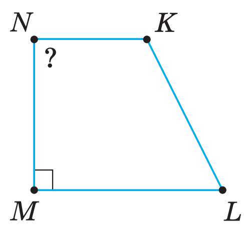
320'. Які з наведених тверджень правильні?
Щоб знайти середню лінію трапеції, потрібно:
1) суму бічних сторін поділити на 2;
2) суму основ поділити на 2;
3) різницю основ поділити на 2.



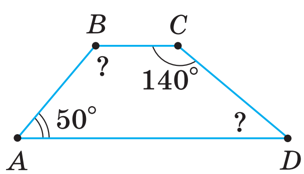
Мал. 158



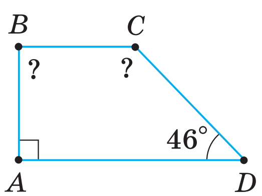
Мал. 159



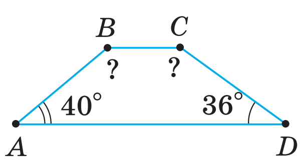
Мал. 160



Мал. 161



Мал. 162



Мал. 163

321'. На малюнку 158 зображено трапецію $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$. Назвіть:
1) основи трапеції;
2) бічні сторони трапеції;
3) кути, прилеглі до основи;
4) кути, прилеглі до бічної сторони.

322'. За малюнками 159, 160 знайдіть:
1) сторону CD рівнобічної трапеції (мал. 159);
2) кут N трапеції (мал. 160).

323°. **Доведіть, що сума двох кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.**

324°. За даними на малюнках 161–163 знайдіть невідомі кути трапеції $ABCD$.

325°. $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC. Знайдіть:
1) $\angle A$ і $\angle C$, якщо $\angle B = 110°$, $\angle D = 30°$;
2) $\angle A$ і $\angle D$, якщо $\angle B = 125°$, $\angle C = 145°$.

326°. AD і BC — основи трапеції $ABCD$. За даними таблиці 14 знайдіть невідомі кути трапеції.

Таблиця 14

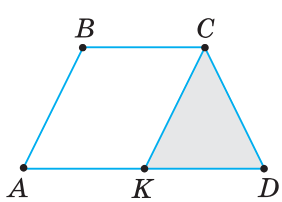
$\angle A$	70°	65°		
$\angle B$			120°	135°
$\angle C$	154°			142°
$\angle D$		36°	28°	

327°. Накресліть гострокутний трикутник KLM. Проведіть пряму, паралельну стороні KM трикутника. Позначте точки перетину прямої та сторін KL і LM трикутника буквами C і D відповідно. Якого виду чотирикутник $KCDM$?

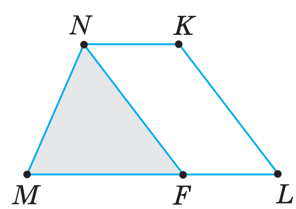
328°. Накресліть гострий кут із вершиною O. Проведіть дві паралельні прямі, що перетинають сторони кута. Позначте точки перетину прямих і сторін кута буквами A, B, C і D. Якого виду чотирикутник $ABCD$?

329°. На малюнку 164 $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC, $CK \parallel AB$. Доведіть, що:
1) чотирикутник $ABCK$ — паралелограм;
2) трикутник KCD — рівнобедрений.

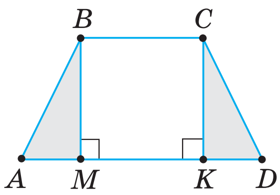
330°. $MNKL$ — трапеція з основами ML і NK, $NF \parallel KL$ (мал. 165). Знайдіть:
1) основу ML, якщо $MF = 5$ см, $NK = 2$ см;
2) основу NK, якщо $ML = 10$ см, $MF = 7$ см.



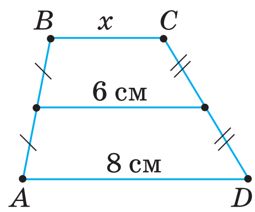
Мал. 164



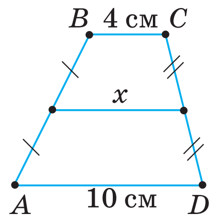
Мал. 165



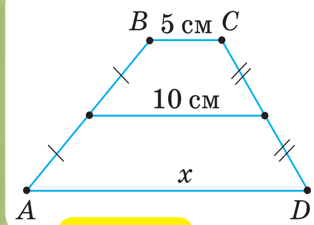
Мал. 166



Мал. 167



Мал. 168

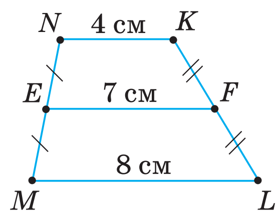


Мал. 169

331°. BM і CK — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 166). Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta DCK$.

332°. За даними на малюнках 167–169 у трапеції $ABCD$ знайдіть відрізок x.

333°. Чи правильно вказано довжину середньої лінії трапеції на малюнку 170? Відповідь поясніть.



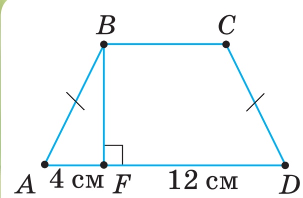
Мал. 170

334°. AD і BC — основи трапеції, MN — її середня лінія. Заповніть таблицю 15.

Таблиця 15

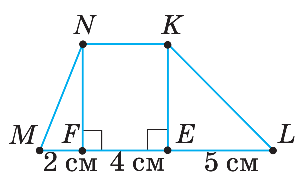
AD	10 см	7 см		11 см	9 см
BC	6 см		5 см		15 см
MN		8 см	9 см	10 см	

335°. За даними на малюнку 171 знайдіть основи й середню лінію трапеції.



Мал. 171

336°. Яка довжина основ і середньої лінії трапеції (мал. 172)?



Мал. 172

337°. Знайдіть периметр трапеції з бічними сторонами c і d та середньою лінією m, якщо:
1) $c = 8$ см, $d = 12$ см, $m = 10$ см; 2) $c = d = 17$ см, $m = 14$ см.

338°. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 17 см, а середня лінія — 14 см. Знайдіть периметр трапеції.

339. Два кути трапеції дорівнюють:
1) $46°$ і $144°$; 2) $35°$ і $155°$.
Знайдіть два інші її кути.

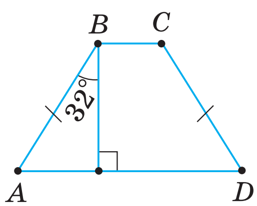
340. Знайдіть кути трапеції, якщо два інші її кути дорівнюють $52°$ і $124°$.

341. Гострий кут прямокутної трапеції дорівнює $45°$. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 62 мм і 10 см.

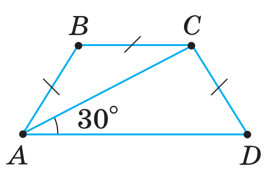
342. **Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна.** Доведіть.

343. За даними на малюнках 173–175 знайдіть кути трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$).

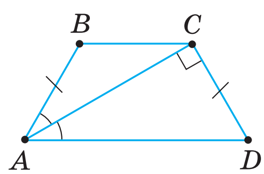
344. **Доведіть, що в рівнобічній трапеції сума протилежних кутів дорівнює $180°$.**



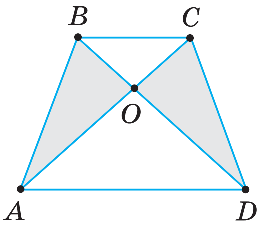
Мал. 173



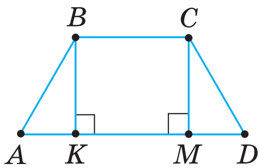
Мал. 174



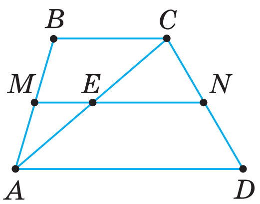
Мал. 175



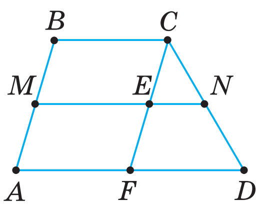
Мал. 176



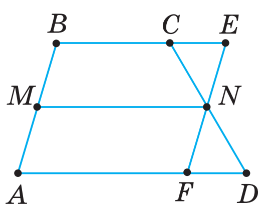
Мал. 177



Мал. 178



Мал. 179



Мал. 180

345. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює $40°$.

346. Протилежні кути рівнобічної трапеції відносяться, як $1 : 4$. Знайдіть кути трапеції.

347. **Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції — рівні.**

348. $ABCD$ — рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, AC і BD — діагоналі, O — точка їх перетину (мал. 176). Доведіть:
1) ΔBOC і ΔAOD — рівнобедрені; 2) $\Delta AOB = \Delta DOC$.

349. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 10 см, бічна сторона — 4 см, а кут між ними — $60°$. Знайдіть меншу основу трапеції.

350. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює $60°$, а основи — 15 см і 49 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

351. $ABCD$ — рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, BK і CM — висоти (мал. 177). Доведіть: 1) $AK = MD = (AD - BC) : 2$;
2) $KD = AM = (AD + BC) : 2$.

352. Знайдіть основи рівнобічної трапеції, якщо її висота, проведена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки:
1) 4 см і 8 см; 2) 2 см і 7 см.

353. **Доведіть, що коли бічна сторона трапеції дорівнює меншій основі, то діагональ, яка сполучає їх кінці, є бісектрисою кута, прилеглого до більшої основи.**

354. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють:
1) 6 см і 8 см; 2) 62 мм і 10 см.

355. Доведіть теорему про властивості середньої лінії трапеції, скориставшись малюнками 178–180 (MN — середня лінія).

356. Основи трапеції відносяться, як $7 : 3$, а різниця їх довжин дорівнює 4,8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

357. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Одна з діагоналей ділить її на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

358. **Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює їх піврізниці.**

359. Менша основа трапеції дорівнює a, відстань між серединами її діагоналей — c. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 50$ мм, $c = 2$ см.

360*. Якщо бісектриси кутів при одній основі трапеції перетинаються на другій її основі, то друга основа дорівнює сумі бічних сторін трапеції. Доведіть.

361*. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 24 см, а середня лінія ділиться діагоналлю на відрізки 8 см і 20 см.

362*. **Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна.** Доведіть.

363*. **Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює $180°$, то трапеція — рівнобічна.** Доведіть.

364*. **Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.**

365*. Якщо середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює її висоті, то діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть.

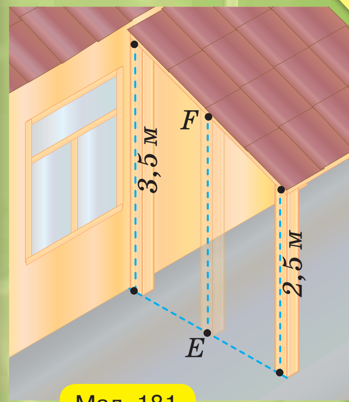
366*. Пряма ділить трапецію на ромб і рівносторонній трикутник. Знайдіть:
1) кут між діагоналями трапеції;
2) основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 18 см.

367*. Прямокутна трапеція ділиться діагоналлю на два трикутники — рівносторонній зі стороною a та прямокутний. Знайдіть середню лінію трапеції.

Проявіть компетентність

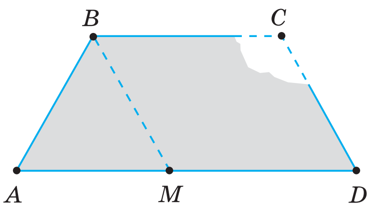
368. З однакових плиток, що мають форму рівнобічної трапеції, потрібно виготовити паркет. Як це зробити?

369. Над входом у дачний будинок є навіс. Згодом виникла потреба поставити підпори до середини краю навісу (точка F на мал. 181). Як, не вимірюючи, знайти довжину підпори (відрізка EF), якщо відповідні краї навісу віддалені від поверхні землі на 2,5 м і 3,5 м?

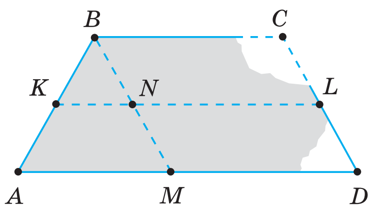


Мал. 181

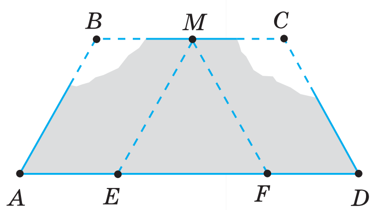
370. Плитка для даху має форму трапеції (трапеція не рівнобічна). Треба визначити розміри сторін, якщо:
1) обламано один ріжок плитки (мал. 182);
2) обламано два ріжки плитки (мал. 183, 184).
Поясніть, як це зробити.



Мал. 182



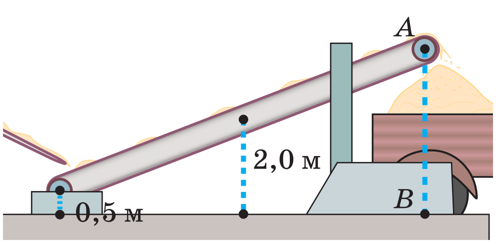
Мал. 183



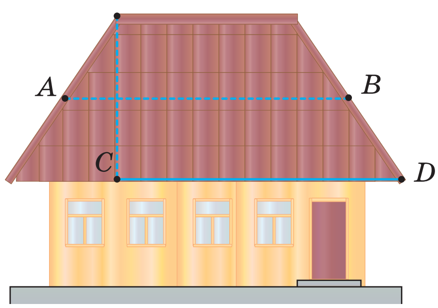
Мал. 184

371. Знайдіть відстань від кінця транспортера до поверхні землі (яку безпосередньо виміряти не можна), якщо другий його кінець і середина віддалені від поверхні землі відповідно на 0,5 м і 2 м (мал. 185).

372. Подивіться на малюнок 186. Будівельникам потрібно виміряти відстань між серединами бічних сторін покрівлі (точки A і B). Їм запропонували такий спосіб: із верхньої вершини покрівлі умовно провісити пряму, перпендикулярну до нижньої основи покрівлі, орієнтуючись, наприклад, на відповідні краї покриття; позначити точку C перетину цих прямих і виміряти відстань CD. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме CD. Чи є правильним цей спосіб? Чому?



Мал. 185

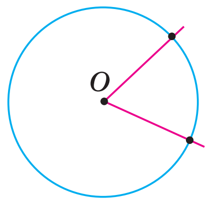


Мал. 186

§ 8. ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ

1. ЩО ТАКЕ ЦЕНТРАЛЬНИЙ КУТ

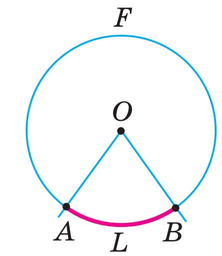
Проведемо коло з центром O й побудуємо кут з вершиною в центрі кола (мал. 187). Одержали центральний кут у колі.



Мал. 187

Кут із вершиною в центрі кола називається *центральним кутом*.

Нехай сторони центрального кута перетинають коло із центром O в точках A і B. Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A і B — дуга, менша від півкола (мал. 188), і дуга, більша за півколо (мал. 189). Якщо кут AOB — розгорнутий, то йому відповідають також дві дуги — два півкола (мал. 190). Щоб розрізняти ці дуги, на кожній із них позначають проміжну точку, наприклад, L і F (мал. 188).

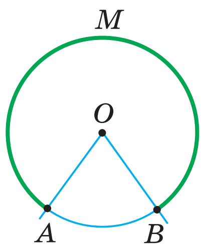


$\smile ALB = \angle AOB$

Мал. 188

Записують: $\smile ALB$ і $\smile AFB$ (мал. 188). Дугу можна позначити й без проміжної точки, наприклад, $\smile AB$, якщо зрозуміло, про яку із двох дуг ідеться.

Дугу кола вимірюють у градусах. Якщо дуга AB кола із центром O менша від півкола (мал. 188) або є півколом (мал. 190), то її градусна міра дорівнює градусній мірі центрального кута AOB. Якщо ж дуга AB більша за півколо (мал. 189), то її градусна міра дорівнює $360° - \angle AOB$.



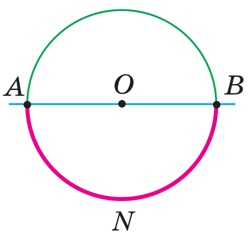
$\smile AMB =$
$= 360° - \angle AOB$

Мал. 189

Градусна міра всього кола дорівнює 360°.

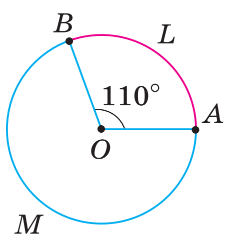
На малюнку 191 градусна міра дуги ALB дорівнює 110°.

Коротко говоримо: «Дуга ALB дорівнює 110°» — і записуємо: $\smile ALB = 110°$. На цьому ж малюнку $\smile AMB = 360° - 110° = 250°$.



$\smile ANB = 180°$

Мал. 190



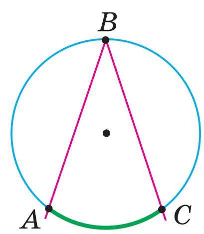
Мал. 191

? Чи залежить градусна міра дуги кола від довжини його радіуса? Не залежить, бо від довжини радіуса кола не залежить градусна міра відповідного центрального кута.

2. ЩО ТАКЕ ВПИСАНИЙ КУТ

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається *вписаним кутом*.

На малюнку 192 $\angle ABC$ — вписаний, оскільки його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC, то кажуть, що даний вписаний кут спирається на дугу AC.

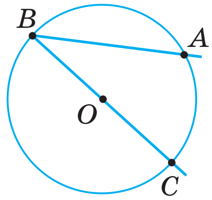


Мал. 192

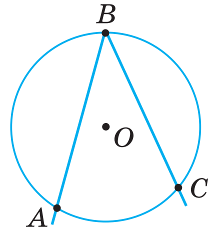
ТЕОРЕМА (про вписаний кут).

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

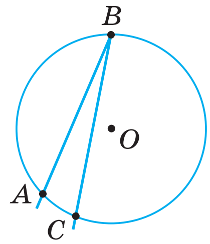
Дано: $\angle ABC$ — вписаний у коло із центром O (мал. 193–195).



Мал. 193



Мал. 194



Мал. 195

Довести: $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

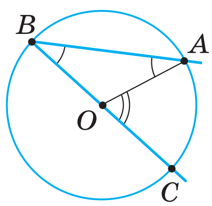
Доведення. Розглянемо три випадки розміщення центра кола відносно сторін даного вписаного кута.

1. Центр кола лежить на стороні вписаного кута. Проведемо відрізок OA (мал. 196). Тоді центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB. За властивістю зовнішнього кута трикутника, $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Але $\angle OBA = \angle OAB$, оскільки ΔAOB — рівнобедрений ($OB = OA = R$). Тому $\angle AOC = 2\angle ABC$, або $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Але $\angle AOC$ вимірюється дугою AC. Отже, вписаний кут ABC вимірюється половиною дуги AC.

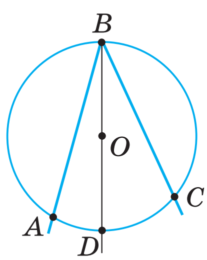
2. Центр кола лежить у внутрішній області вписаного кута. Провівши промінь BO (мал. 197), подамо даний кут у вигляді суми двох кутів:
$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.
За доведеним у першому випадку, $\angle ABD$ вимірюється половиною дуги AD, а $\angle DBC$ — половиною дуги DC. Тому $\angle ABC$ вимірюється сумою півдуг AD і DC, тобто половиною дуги AC.

3. Центр кола лежить у зовнішній області вписаного кута. Провівши промінь BO (мал. 198), одержимо:

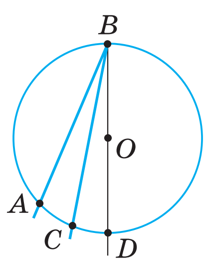
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \smile AD - \frac{1}{2} \smile CD = \frac{1}{2} \smile AC.$$



Мал. 196



Мал. 197

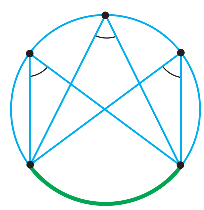


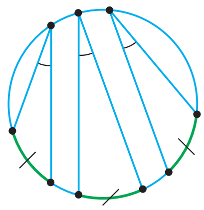
Мал. 198

НАСЛІДОК 1.

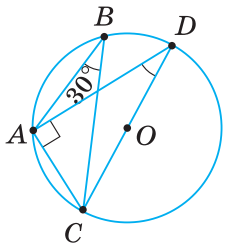
Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні (мал. 199).

Справді, кожний із них вимірюється половиною однієї й тієї самої дуги.


Мал. 199



Мал. 201

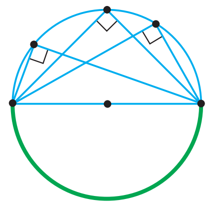


Мал. 202

НАСЛІДОК 2.

Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий (мал. 200).

Справді, такий кут вимірюється половиною півкола, тобто його градусна міра дорівнює $180° : 2 = 90°$.



Мал. 200

? Чи рівні вписані кути, що спираються на рівні дуги (мал. 201)? Так, бо кожний із цих кутів вимірюється половиною дуг, градусні міри яких рівні.

Задача. Хорди кола AB і BC утворюють кут 30°. Знайдіть хорду AC, якщо діаметр кола дорівнює 10 см.

Розв'язання. Проведемо діаметр CD і сполучимо точки A і D (мал. 202). $\angle ABC = \angle ADC$ як вписані кути, що спираються на дугу AC (наслідок 1).

Отже, $\angle ADC = \angle ABC = 30°$. $\angle CAD = 90°$, бо спирається на діаметр кола (наслідок 2). Тоді в прямокутному трикутнику ADC катет AC лежить проти кута 30° і дорівнює половині гіпотенузи CD. Отже, $AC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см).

Щоб довести рівність двох кутів, покажіть, що вони є вписаними в одне коло і спираються на одну й ту саму дугу або на рівні дуги цього кола.

Дізнайтеся більше

1. Розглянемо геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом. Нехай AB — деякий відрізок прямої a, M — довільна точка, яка не лежить на прямій a, $\angle AMB = \alpha$ (мал. 203). Тоді кажуть: *з точки M відрізок AB видно під кутом α.*

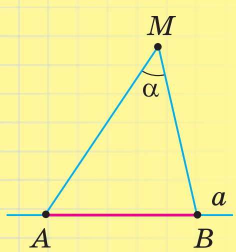
Якщо описати коло навколо ΔAMB (мал. 204), то з будь-якої точки дуги AMB (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α (наслідок 1 з теореми про вписаний кут). Оскільки точку можна взяти і з іншого боку від прямої a, то існує ще одна дуга, наприклад, ANB (мал. 205), з кожної точки якої (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α. Тому геометричним місцем точок, з яких відрізок AB видно під кутом α, є фігура, що складається з двох дуг AMB і ANB без точок A і B.

Щоб побудувати одну з двох дуг цього геометричного місця точок для гострого кута α, треба:

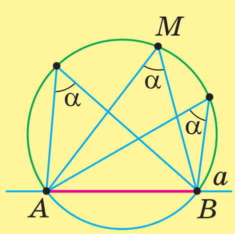
1) провести серединний перпендикуляр до відрізка AB (мал. 206);

2) із точки B провести промінь під кутом $90° - \alpha$ до відрізка AB. O — точка перетину променя із серединним перпендикуляром;

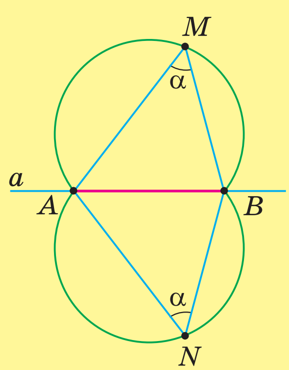
3) описати коло радіусом OB. Дуга AMB — шукане геометричне місце точок.



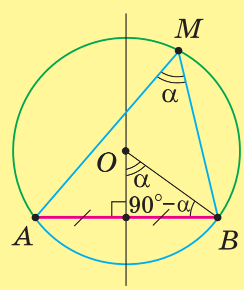
Мал. 203



Мал. 204

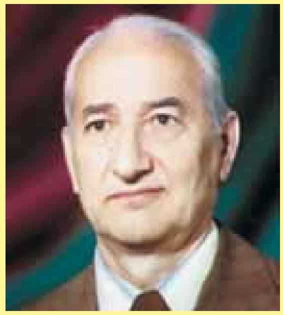


Мал. 205



Мал. 206

2. Значний внесок у шкільну геометрію й методику її вивчення зробив Лев Михайлович Лоповок (29.07.1916–29.11.1992) — відомий педагог-математик, кандидат педагогічних наук, професор, який народився в м. Полтаві. Один із творців проблемного навчання й розвивальної системи вправ, автор шкільних підручників, збірників задач, методичних рекомендацій для вчителів та учнів, книг для позакласного читання. Такі його праці, як «Геометрія для 9–11 класів», «Збірник задач з геометрії для 6–8 класів», «Збірник геометричних задач на побудову», «Факультативні завдання з геометрії для 7–11 класів» та інші, — яскраве тому підтвердження.



Лев Михайлович Лоповок

Пригадайте головне

1. Який кут називається центральним?
2. Що вважають градусною мірою дуги кола?
3. Що таке кут, вписаний у коло?
4. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
5. Сформулюйте наслідки з теореми про вписаний кут.

Розв'яжіть задачі

373'. Чи правильно, що центральний кут має вершину, що лежить:
1) на колі; 2) поза колом; 3) у центрі кола?

374'. Чи правильно, що сторони центрального кута:
1) не перетинають кола;
2) перетинають коло?

375'. Чи правильно, що центральному куту AOB:
1) не відповідає жодна дуга даного кола із центром O;
2) відповідає лише одна дуга кола з кінцями в точках A і B;
3) відповідають дві дуги кола з кінцями в точках A і B?

376'. Чи правильно, що вписаний кут має вершину, що лежить:
1) на колі; 2) поза колом; 3) у центрі кола?

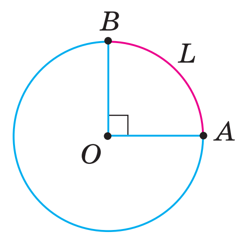
377'. Чи правильно, що сторони вписаного кута:
1) не перетинають кола;
2) перетинають коло?

378'. Чи правильно, що вписаний кут вимірюється:
1) дугою, на яку він спирається;
2) половиною дуги, на яку він спирається?

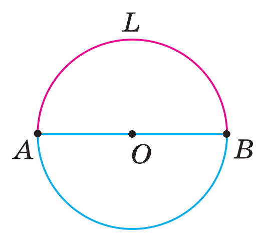
379'. Проведіть коло із центром O та позначте на ньому дві точки A і B. Сполучіть ці точки із центром кола. Назвіть центральний кут. Назвіть дві дуги, які відповідають цьому куту.

380'. За даними на малюнках 207, 208 назвіть градусну міру дуги ALB.

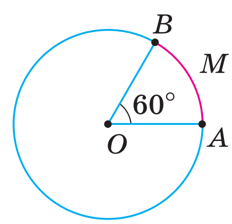
381'. Яка градусна міра дуги AMB на малюнку 209?



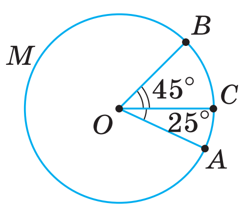
Мал. 207



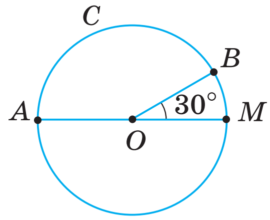
Мал. 208



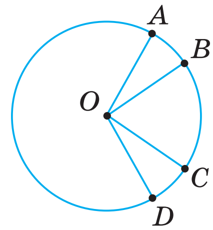
Мал. 209



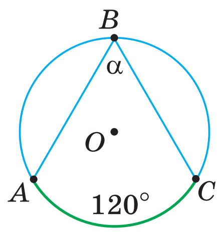
Мал. 210



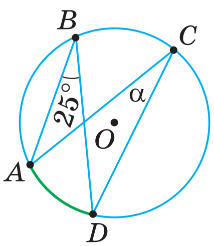
Мал. 211



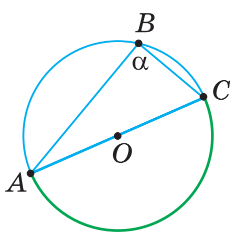
Мал. 212



Мал. 213



Мал. 214



Мал. 215

382°. Скільки градусів має дуга, що дорівнює:

1) $\frac{1}{2}$ кола; 2) $\frac{1}{3}$ кола; 3) $\frac{2}{3}$ кола?

Яка градусна міра відповідного центрального кута?

383°. Центральний кут AOB дорівнює α. Скільки градусів мають дві дуги, що відповідають куту AOB, якщо:
1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 62°$; 3) $\alpha = 100°$?

384°. За даними на малюнках 210, 211 знайдіть градусну міру дуги:
1) ACB; 2) AMB.

385°. На півколі з діаметром AB позначено точки C і D так, що $\smile AC = 59°$, $\smile BD = 61°$. Знайдіть хорду CD, якщо радіус кола дорівнює:
1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм.

386°. У колі з центром O дуги AB і CD рівні (мал. 212). Доведіть, що $\angle AOC = \angle BOD$.

387°. Дуги ABC і BCD кола з центром O рівні (мал. 212). Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.

388°. За даними на малюнках 213–215 знайдіть градусну міру кута α.

389°. За даними на малюнках 216, 217 знайдіть кути, позначені знаком «?».

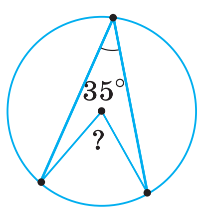
390°. Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює: 1) 52°; 2) 126°; 3) 200°.

391°. Знайдіть дугу, на яку спирається вписаний кут, якщо він дорівнює:
1) 16°; 2) 32°; 3) 110°.

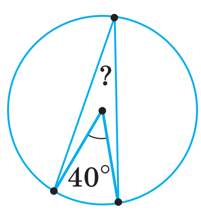
392°. За даними на малюнках 218–220 знайдіть $x°$.

393°. Точки A, B і C ділять коло на три дуги. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо градусні міри дуг відносяться, як:
1) 1 : 1 : 1; 2) 1 : 2 : 2.

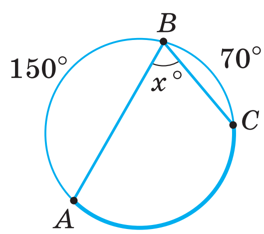
394°. Точки A, B і C ділять коло на три дуги. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо градусні міри дуг відносяться, як 1 : 2 : 3.



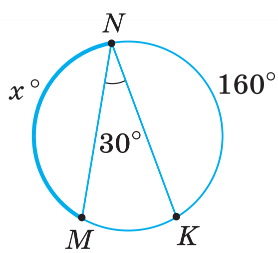
Мал. 216



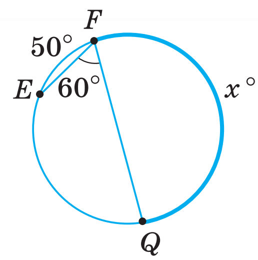
Мал. 217



Мал. 218



Мал. 219



Мал. 220

395°. Навколо трикутника ABC описано коло. Знайдіть градусні міри дуг AB, BC і AC, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$; 2) $\angle B = 110°$, $\angle C = 28°$.

396°. Навколо трикутника ABC описано коло. Знайдіть градусні міри дуг AB, BC і AC, якщо $\angle A = 65°$, $\angle C = 35°$.

397°. Знайдіть кути вписаного в коло рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого стягує дугу: 1) 64°; 2) 144°.

398°. Знайдіть кути вписаного в коло рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого стягує дугу 120°.

399. **У колі рівні дуги стягуються рівними хордами.** Доведіть.

400. **У колі рівні хорди стягують рівні дуги.** Доведіть.

401. **Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить дуги, які вона стягує, навпіл.**

402. **Доведіть, що діаметр, проведений через середину хорди, яка не проходить через центр кола, ділить навпіл дуги, що їх стягує хорда.**

403. Дуги, що лежать між паралельними хордами, — рівні. Доведіть.

404. Дуги, що лежать між дотичною та паралельною їй хордою, — рівні. Доведіть.

405. Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги ACB і ADB. Знайдіть вписані в це коло кути ACB і ADB, якщо:
1) $\smile ACB : \smile ADB = 2 : 3$; 2) $\smile ACB : \smile ADB = 4 : 5$.

406. Точки P і T ділять коло на дуги, градусні міри яких відносяться, як: 1) 3 : 5; 2) 2 : 7.
Знайдіть вписаний кут, що спирається на дугу PT.

407. Доведіть, що коли хорди AB і BC утворюють кут 30°, то хорда AC дорівнює радіусу кола.

408. Знайдіть кут, який утворюють хорди AB і BC, якщо хорда AC дорівнює радіусу кола. (Розгляньте два випадки.)

409. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких в n разів більша за другу. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$.

410. Доведіть, що сума вписаних кутів, які спираються на хорду кола й вершини яких лежать по різні боки від неї, дорівнює 180°.

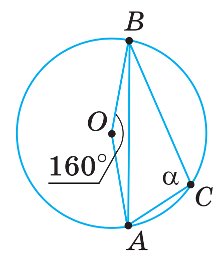
411. За даними на малюнках 221–223 знайдіть кут α.

412. Центральний кут на $n°$ більший за вписаний кут, що спирається на ту саму дугу. Знайдіть градусну міру кожного із цих кутів, якщо:
1) $n = 35°$; 2) $n = 45°$.

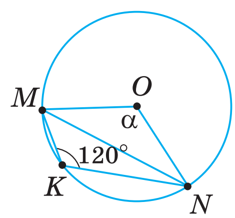
413. **Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.**

414. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває його на два рівнобедрені трикутники.

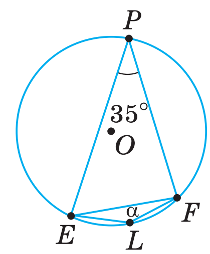
415. **Кут між дотичною та хордою, що проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, яка лежить між його сторонами** (мал. 224). Доведіть.



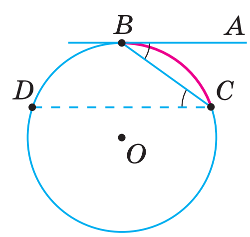
Мал. 221



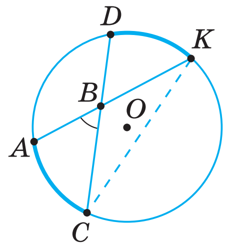
Мал. 222



Мал. 223

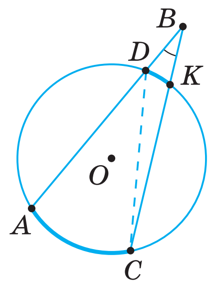


Мал. 224



$$\angle ABC = \frac{\smile AC + \smile DK}{2}$$

Мал. 225



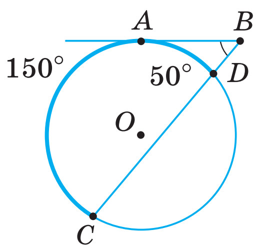
$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DK}{2}$$

Мал. 226

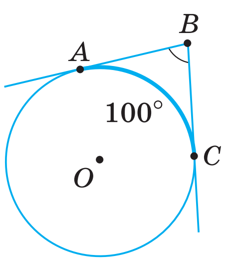
416. Через кінець хорди проведено дотичну. Знайдіть гострий кут між хордою та дотичною, якщо хорда ділить коло у відношенні: 1) 1 : 3; 2) 2 : 7.

417*. **Доведіть, що кут із вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний із ним.** (Скористайтеся малюнком 225.)

418*. **Доведіть, що кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої та меншої дуг, які містяться між його сторонами.** (Скористайтеся малюнком 226.)



Мал. 227



Мал. 228

419*. За даними на малюнках 227, 228 знайдіть кут ABC.

420*. Коло поділено точками A, B і C на дуги, що відносяться, як 11 : 3 : 4. Через точки A, B і C проведено дотичні до їх взаємного перетину. Знайдіть кути утвореного трикутника.

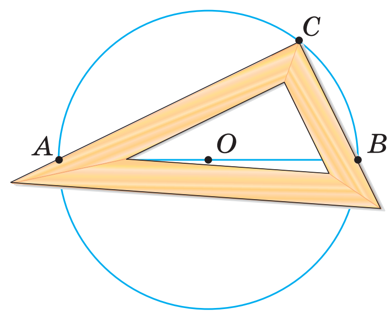
421*. До двох кіл із центрами O і O_1, які дотикаються зовні в точці A, проведено спільну дотичну BC (B і C — точки дотику). Доведіть, що кут BAC — прямий.

422*. Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яка хорда більшого кола, яка проходить через точку дотику, ділиться меншим колом навпіл.

423*. Знайдіть геометричне місце вершин:
1) прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки;
2) трикутників зі спільною основою AB, у яких кут, що лежить проти основи, дорівнює даному куту α.

Проявіть компетентність

424. Правильність виготовлення косинця перевірили так. Накреслили коло та його діаметр AB (мал. 229). Приклали косинець так, щоб його катети проходили через точки A і B. Якщо при цьому вершина прямого кута косинця лежить на колі, то косинець — правильний. Поясніть, чому це так.



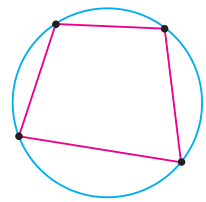
Мал. 229

425. У центрі диска, який має форму круга, потрібно просвердлити отвір. Як знайти центр диска за допомогою одного косинця?

§ 9. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

1. ЩО ТАКЕ ВПИСАНИЙ ТА ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК

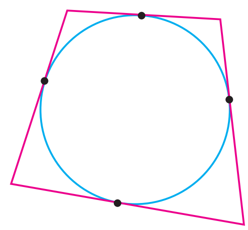
Позначимо на колі чотири точки і сполучимо їх хордами так, як показано на малюнку 230. Одержали чотирикутник, вписаний у коло.



Мал. 230

***Чотирикутник*, усі вершини якого лежать на колі, називається *вписаним у* це коло, а коло — *описаним навколо* цього *чотирикутника*.**

Позначимо на колі чотири точки та проведемо через них відрізки дотичних так, як показано на малюнку 231. Одержали чотирикутник, описаний навколо кола.



Мал. 231

***Чотирикутник*, усі сторони якого дотикаються до кола, називається *описаним навколо* цього *кола*, а *коло* — *вписаним у* цей *чотирикутник*.**

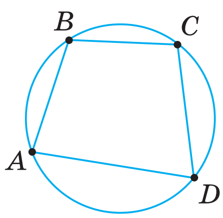
2. ВЛАСТИВІСТЬ І ОЗНАКА ВПИСАНОГО ЧОТИРИКУТНИКА

Властивість вписаного чотирикутника та його ознака пов'язані з кутами цього чотирикутника.

ТЕОРЕМА (властивість кутів вписаного чотирикутника).

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

Дано: чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло (мал. 232).
Довести: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.
Доведення. Кути A, B, C і D — вписані в коло.



Мал. 232

За теоремою про вписаний кут маємо: $\angle A = \frac{1}{2} \smile DCB$,

$\angle C = \frac{1}{2} \smile DAB$.

Тоді $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\smile DCB + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

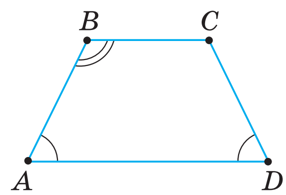
Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360°, а сума кутів A і C — 180°. Тоді $\angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C) = 360° - 180° = 180°$.

Чи навколо кожного чотирикутника можна описати коло? Ні. На відміну від трикутника, не кожний чотирикутник — вписаний. Наведемо ознаку вписаного чотирикутника без доведення.

ТЕОРЕМА (ознака вписаного чотирикутника).

Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо такого чотирикутника можна описати коло.

Задача. Доведіть, що навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.



Мал. 233

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC (мал. 233).
Доведемо, що $\angle B + \angle D = 180°$.
У будь-якій трапеції сума кутів, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180° (випливає з властивості паралельних прямих).
Отже, $\angle A + \angle B = 180°$.
За властивістю рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$.
Тоді $\angle B + \angle D = 180°$ і, за ознакою вписаного чотирикутника, навколо трапеції $ABCD$ можна описати коло.

3. ВЛАСТИВІСТЬ І ОЗНАКА ОПИСАНОГО ЧОТИРИКУТНИКА

Властивість описаного чотирикутника та його ознака пов'язані зі сторонами цього чотирикутника.

ТЕОРЕМА (властивість сторін описаного чотирикутника).

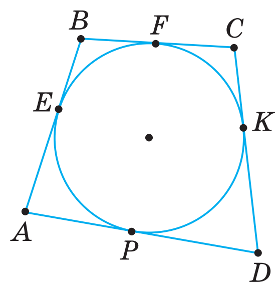
Суми протилежних сторін описаного чотирикутника рівні.

Дано: чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола (мал. 234), E, F, K і P — точки дотику.
Довести: $AB + CD = BC + AD$.
Доведення. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо (мал. 235):

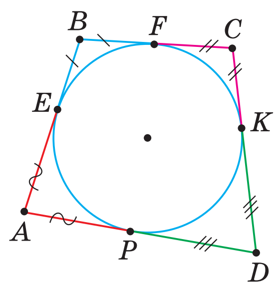
$$AE = AP,\ BE = BF,\ CK = CF,\ DK = DP.$$

Додавши почленно ці рівності, одержимо:

$$AE + BE + CK + DK = AP + BF + CF + DP, \text{ тобто } AB + CD = BC + AD.$$



Мал. 234

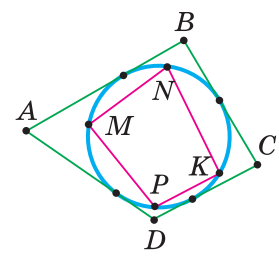


Мал. 235

Чи в кожний чотирикутник можна вписати коло? Ні. На відміну від трикутника, не в будь-який чотирикутник можна вписати коло. Наведемо ознаку описаного чотирикутника без доведення.

ТЕОРЕМА (ознака описаного чотирикутника).

Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.



Мал. 236

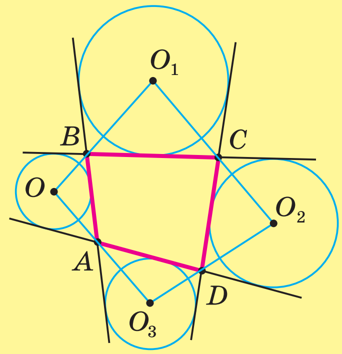
Щоб довести, що чотирикутник $MNKP$ (мал. 236) — вписаний у коло, покажіть, що: або $\angle M + \angle K = 180°$, або $\angle N + \angle P = 180°$.

Щоб довести, що чотирикутник $ABCD$ (мал. 236) — описаний навколо кола, покажіть, що: $AB + CD = AD + BC$.

Дізнайтеся більше

1. Крім кіл, вписаного в чотирикутник й описаного навколо нього, є ще *зовнівписані* кола.

Проведемо в довільному чотирикутнику $ABCD$ бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A, B, C і D (мал. 237). Точки їх перетину O, O_1, O_2 і O_3 є центрами чотирьох зовнівписаних кіл. Кожне з них дотикається до однієї сторони чотирикутника та до продовжень двох інших його сторін.



Мал. 237

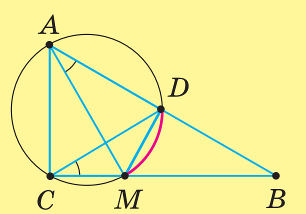
2. Давньогрецькі вчені відкрили, крім уже відомих вам, інші цікаві властивості вписаних й описаних чотирикутників. Наприклад, добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

3. Значний внесок у розвиток шкільної математичної освіти, виховання талановитої молоді в галузі математики, популяризації математичної науки зробив відомий український математик — професор, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України Михайло Йосипович Ядренко (16.04.1932–28.09.2004), який народився в с. Дрімайлівка Куликівського району Чернігівської області. Понад 40 років він був організатором шкільних математичних олімпіад різного рівня, очолював журі Всеукраїнських олімпіад для школярів. Михайло Йосипович заснував унікальний журнал для учнів «У світі математики», був незмінним його редактором. Він також був керівником Всеукраїнської заочної фізико-математичної олімпіади, яка проводиться журналом «У світі математики».

Михайло Йосипович Ядренко

4. У процесі розв'язування задач інколи корисно розглядати кола, не задані в умові. На малюнку до задачі спочатку знаходимо чотирикутник, навколо якого можна описати коло або в який можна вписати коло, а потім використовуємо властивості хорд, діаметрів, вписаних кутів, кутів з вершиною всередині кола та ін.

Задача. З довільної точки M катета BC прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр MD до гіпотенузи AB (мал. 238).
Доведіть, що $\angle MAD = \angle MCD$.



Мал. 238

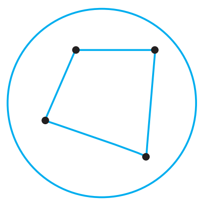
Розв'язання. Навколо чотирикутника $ADMC$ можна описати коло, оскільки $\angle ACM + \angle ADM = 180°$. Тоді $\angle MAD = \angle MCD$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу MD.

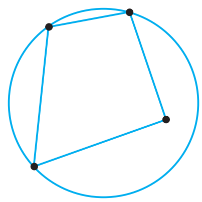
Пригадайте головне

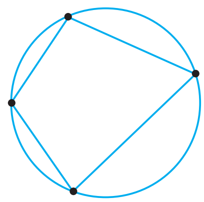
1. Який чотирикутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
2. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів вписаного чотирикутника.
3. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість сторін описаного чотирикутника.
4. Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника; ознаку описаного чотирикутника.

Розв'яжіть задачі

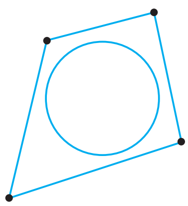
426'. На якому з малюнків 239–241 зображено чотирикутник, вписаний у коло?

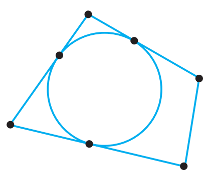

Мал. 239

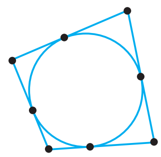

Мал. 240

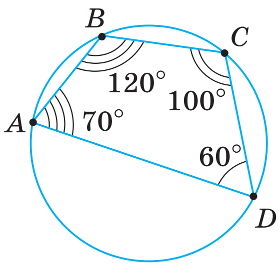

Мал. 241

427'. На якому з малюнків 242–244 зображено чотирикутник, описаний навколо кола?


Мал. 242


Мал. 243


Мал. 244

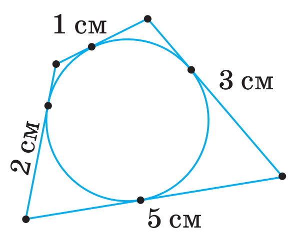


Мал. 245

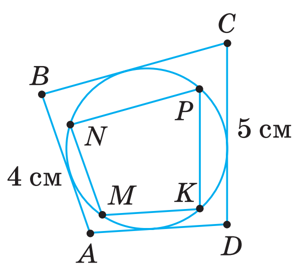
428'. Чи правильно вказано градусні міри кутів чотирикутника на малюнку 245? Відповідь поясніть.

429'. Чи правильно вказано довжини сторін чотирикутника на малюнку 246? Відповідь поясніть.

430'. За даними на малюнку 247 знайдіть:
1) суму сторін AD і BC описаного чотирикутника $ABCD$;
2) суму кутів M і P вписаного чотирикутника $MNPK$.

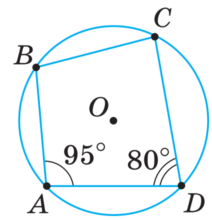


Мал. 246

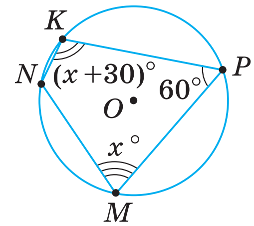


Мал. 247

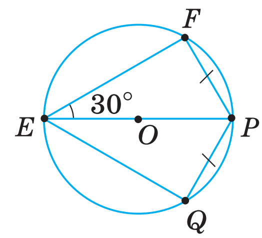
431°. За даними на малюнках 248–250 знайдіть кути вписаних чотирикутників.



Мал. 248



Мал. 249

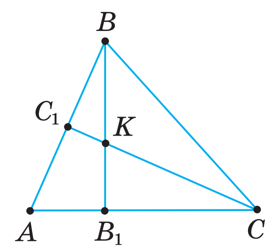


Мал. 250

432°. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A, B, C і D відповідно дорівнюють:
а) 90°, 90°, 110°, 120°;
б) 70°, 130°, 110°, 50°?

433°. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A, B і C відповідно дорівнюють:
а) 85°, 130°, 95°;
б) 60°, 100°, 119°?

434°. У трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1, які перетинаються в точці K (мал. 251). Доведіть, що навколо чотирикутника AB_1KC_1 можна описати коло. Знайдіть кут B_1KC_1, якщо кут A дорівнює:
1) 55°; 2) 72°; 3) 60°.



Мал. 251

435°. Чи можна описати коло навколо довільного:
1) прямокутника;
2) квадрата;
3) ромба?
Відповідь поясніть.

436°. Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутника, є точкою перетину його діагоналей.

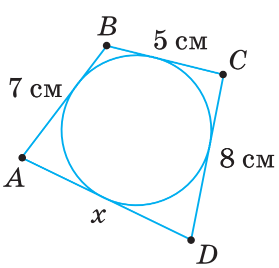
437°. AD і BC — діаметри кола.
1) Доведіть, що чотирикутник $ABDC$ — прямокутник.
2) За якої умови прямокутник $ABDC$ є квадратом?

438°. За даними на малюнках 252–254 знайдіть невідомі сторони описаних чотирикутників.

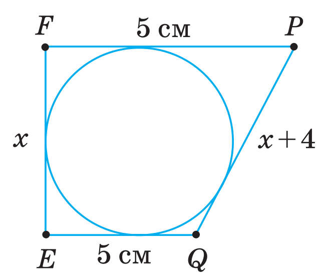
439°. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, дорівнюють:
1) 2 см, 3 см, 5 см, 4 см;
2) 7 см, 4 см, 3 см, 5 см?

440°. Знайдіть периметр чотирикутника, описаного навколо кола, якщо сума двох протилежних його сторін дорівнює:
1) 20 см;
2) 3,2 дм.

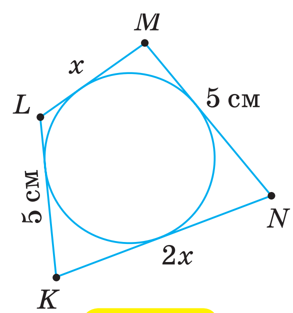
441°. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, три сторони якого, взяті послідовно, дорівнюють:
1) 12 см, 16 см, 28 см; 2) 10 см, 14 см, 16 см.



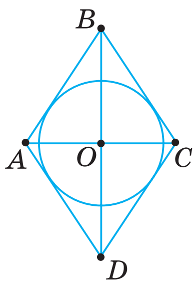
Мал. 252



Мал. 253



Мал. 254



Мал. 255

442°. **Доведіть, що центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину його діагоналей** (мал. 255).

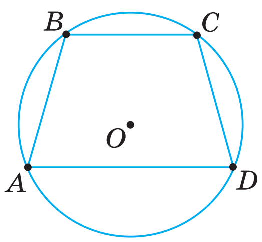
443°. Чи можна вписати коло в довільний:
1) прямокутник;
2) квадрат;
3) ромб?
Відповідь поясніть.

444. Знайдіть кут D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо його кути A, B і C відносяться, як:
1) 2 : 3 : 4;
2) 1 : 2 : 2.

445. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює:
1) 10 см;
2) 2,3 дм.

446. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, відносяться, як:
1) 2 : 4 : 5 : 3;
2) 5 : 7 : 8 : 9?
Відповідь поясніть.

447. **Доведіть:**
1) будь-яка трапеція, вписана в коло, — рівнобічна (мал. 256);
2) будь-який паралелограм, вписаний у коло, — прямокутник.



Мал. 256

448. Доведіть, що будь-який ромб, вписаний у коло, — квадрат.

449. Доведіть, що кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює зовнішньому куту при вершині C.

450. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, пропорційні числам:
1) 2, 2, 3, 3;
2) 2, 5, 3, 4?

451. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, а вершини лежать по різні боки від неї. Чи можна в утворений чотирикутник вписати коло?

452. Як потрібно розмістити два рівні різносторонні трикутники, щоб в утворений ними чотирикутник можна було вписати коло?

453. Три сторони описаної трапеції, взяті послідовно, відносяться, як 2 : 7 : 12. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює:
1) 42 мм;
2) 56 см.

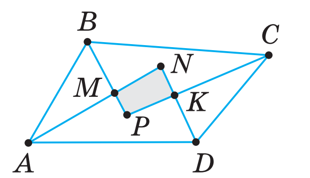
454. Складіть формулу та знайдіть середню лінію описаної трапеції, якщо її периметр дорівнює:
1) 16 см;
2) 200 мм.

455. Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 150°, її середня лінія — 40 см. Знайдіть висоту трапеції.

456. Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 30°, її середня лінія — 20 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

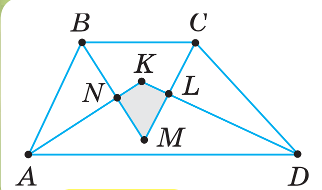
457. Як побудувати квадрат:
1) вписаний у коло;
2) описаний навколо кола?

458*. **Доведіть, що бісектриси кутів чотирикутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло** (мал. 257).



Мал. 257

459*. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції $ABCD$, перетинаючись, утворюють чотирикутник $MNKL$, навколо якого можна описати коло (мал. 258).



Мал. 258

460*. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинається з бісектрисою зовнішнього кута при вершині C в точці, яка лежить на колі, описаному навколо чотирикутника.

461*. Із точки P перетину взаємно перпендикулярних діагоналей чотирикутника $ABCD$ провели перпендикуляри PK, PL, PM і PN до сторін, причому точки K, L, M і N лежать на сторонах AB, BC, CD, DA відповідно. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — вписаний у коло.

462*. Пряма, паралельна бічній стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього трапецію, бічна сторона якої є частиною основи даного трикутника й удвічі довша за її меншу основу. Чи можна вписати коло в таку трапецію?

463*. Якщо навколо трапеції можна описати коло й у цю саму трапецію можна вписати коло, то кожна бічна сторона трапеції дорівнює її середній лінії. Доведіть.

Проявіть компетентність

464. Потрібно висвердлити чотири отвори уздовж країв круглого диска на однаковій відстані один від одного, а також один отвір — у центрі. Накресліть малюнок і поясніть, як це зробити.

465. Поясніть, як із листа жерсті прямокутної форми вирізати круг найбільшого радіуса.

466. З аркуша картону круглої форми потрібно вирізати квадрат, діагональ якого дорівнює діаметру круга. Поясніть, як це зробити.

467. Мешканці чотирьох дачних будинків вирішили знайти таке місце для криниці, щоб відстані від неї до будинків були однаковими. Зробіть малюнок і знайдіть місце для криниці, якщо будинки розташовані:
1) у вершинах прямокутника;
2) у вершинах рівнобічної трапеції.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.
2. Який чотирикутник називається паралелограмом?
3. Сформулюйте та доведіть теореми про властивості сторін і кутів паралелограма; діагоналей паралелограма.
4. Які ознаки паралелограма?
5. Що таке прямокутник; ромб; квадрат; трапеція; рівнобічна трапеція?
6. Сформулюйте та доведіть теореми про властивості діагоналей прямокутника; ромба.
7. Які властивості квадрата?
8. Доведіть теореми про властивості середньої лінії трикутника; трапеції.
9. Який кут називається центральним; вписаним у коло?
10. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
11. Який чотирикутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?
12. Сформулюйте та доведіть теореми про властивість сторін описаного чотирикутника; про властивість кутів вписаного чотирикутника.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30°.

А. 60°.
Б. 120°.
В. 150°.
Г. 180°.

2° За якої з наведених умов чотирикутник є паралелограмом?

А. Дві протилежні сторони рівні.
Б. Одна з діагоналей ділить другу навпіл.
В. Дві протилежні сторони паралельні.
Г. Діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл.

3° Діагональ прямокутника дорівнює 10 см й утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

А. 15 см.
Б. 5 см.
В. 20 см.
Г. 6 см.

4 Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

А. 60°.
Б. 90°.
В. 30°.
Г. 45°.

5* Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BK = 12$ см, $KC = 8$ см.

А. 20 см.
Б. 40 см.
В. 44 см.
Г. 64 см.

№ 2

1° У трикутнику ABC $BC = 18$ см. Сторону AB поділено на три рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки, які відтинають паралельні прямі на стороні BC трикутника.

А. 5 см, 5 см, 5 см. **В.** 5 см, 6 см, 6 см.
Б. 6 см, 6 см, 6 см. **Г.** 4 см, 4 см, 4 см.

2° Точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть сторону AC трикутника, якщо $MN = 4$ см.

А. 8 см. **В.** 2 см.
Б. 12 см. **Г.** 6 см.

3° $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC. Знайдіть кути A і C трапеції, якщо $\angle B = 100°$, $\angle D = 60°$.

А. 30° і 100°. **В.** 80° і 120°.
Б. 70° і 120°. **Г.** 45° і 150°.

4 Одна з основ трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть другу її основу, якщо середня лінія дорівнює 8 см.

А. 6 см. **В.** 18 см.
Б. 16 см. **Г.** 2 см.

5* Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 17 см. **В.** 25 см.
Б. 22 см. **Г.** 27 см.

№ 3

1° Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює 150°.

А. 150°.
Б. 75°.
В. 90°.
Г. 85°.

2° Хорда кола завдовжки 10 см стягує дугу в 60°. Знайдіть діаметр кола.

А. 5 см.
Б. 15 см.
В. 20 см.
Г. 16 см.

3° Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

А. 10 см.
Б. 20 см.
В. 30 см.
Г. 40 см.

4 Кути A, B і C вписаного чотирикутника $ABCD$ відносяться, як $1 : 2 : 3$. Знайдіть кут D.

А. 30°.
Б. 60°.
В. 120°.
Г. 90°.

5* Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 150°, а її середня лінія — 6 см. Знайдіть висоту трапеції.

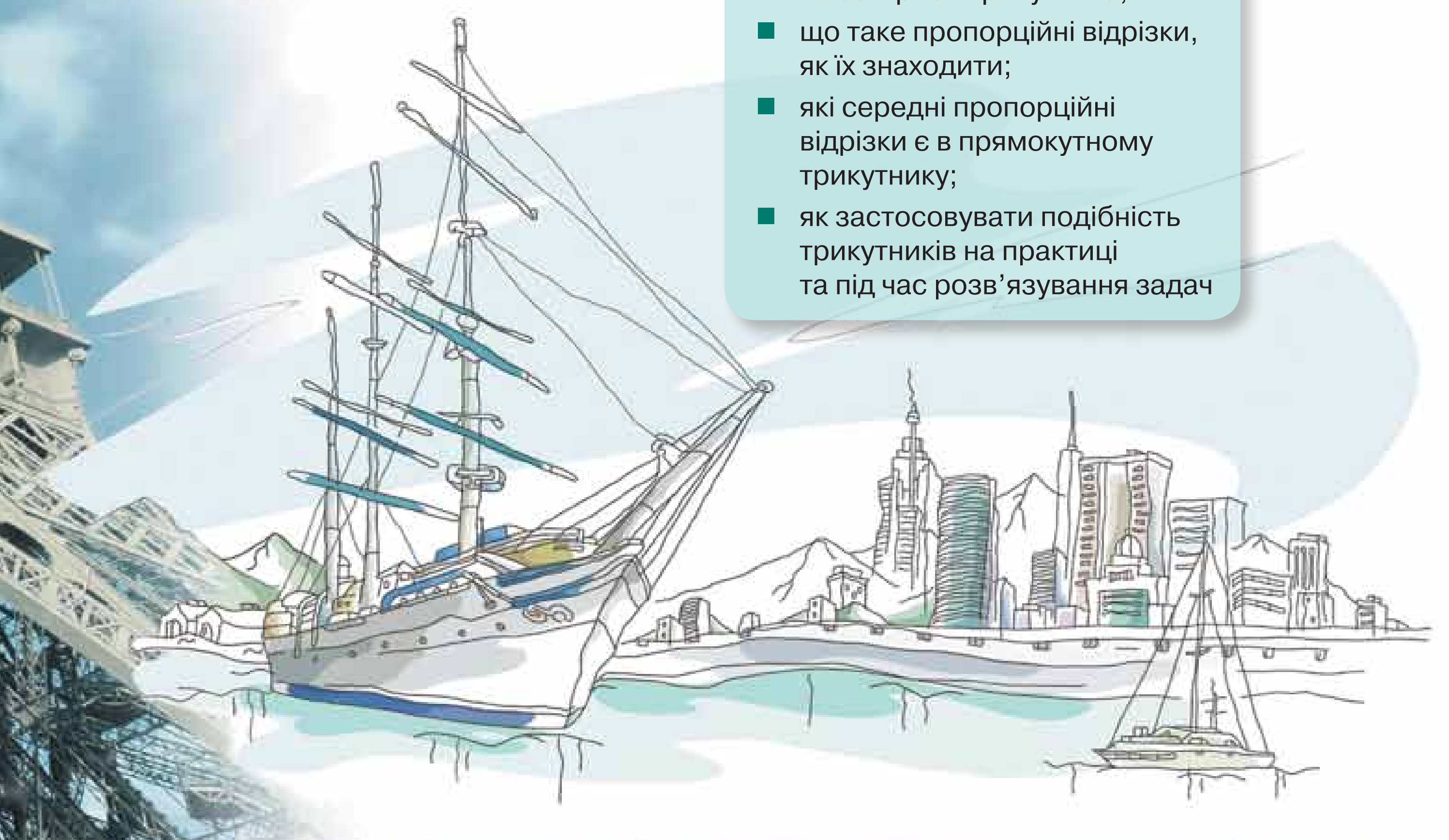
А. 12 см.
Б. 18 см.
В. 3 см.
Г. 4 см.

Розділ 2

Подібність трикутників

У розділі дізнаєтеся:

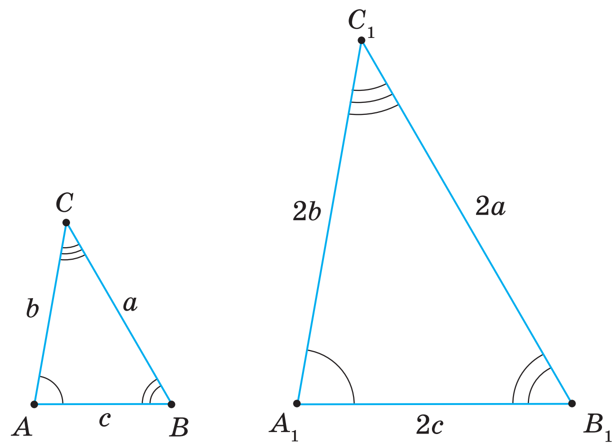
- про подібні трикутники, їх властивості й ознаки;
- про властивості медіан і бісектриси трикутника;
- що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити;
- які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику;
- як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв’язування задач



§ 10. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

1. ЩО ТАКЕ ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Ви знаєте, що в рівних трикутниках рівні відповідні сторони й відповідні кути. Подивіться на малюнок 259. Кути трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнюють відповідним кутам трикутника ABC: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$. Але сторони трикутника $A_1B_1C_1$ удвічі більші за відповідні сторони трикутника ABC: $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $A_1C_1 = 2AC$. Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ не дорівнює трикутнику ABC. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC — *подібні*.



Мал. 259

Оскільки $A_1B_1 = 2AB$, то можна скласти *відношення* цих *сторін*: $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$. Аналогічно одержимо: $\frac{B_1C_1}{BC} = 2$ і $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$. Кожне з відношень дорівнює числу 2. Отже, їх можна прирівняти: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Із цієї подвійної рівності можна утворити три пропорції:

1) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; 3) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Саме тому кажуть, що відповідні *сторони* подібних трикутників *пропорційні*.

Два трикутники називаються подібними, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони — пропорційні.

Записуємо: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ — і говоримо: «Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC». Знак $\backsim$ замінює слово «подібний».

Для подібних трикутників, як і для рівних трикутників, має значення порядок запису вершин. Для трикутників на малюнку 259 запис «$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta BAC$» — неправильний.

Задача. Два трикутники на малюнку 260 подібні. Знайдіть довжини їх невідомих сторін.

Розв'язання. У даних трикутниках:

$\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle P$.

Тому порядок запису їхніх вершин такий:

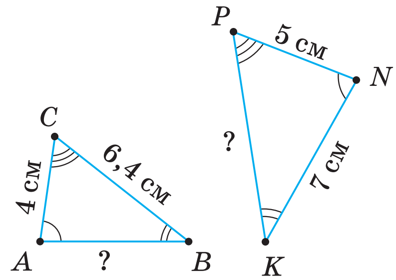
$$\Delta ABC \backsim \Delta NKP.$$

Складемо відношення відповідних сторін:

$$\frac{AB}{NK} = \frac{BC}{KP} = \frac{AC}{NP}.$$

Підставимо відомі довжини сторін:

$$\frac{AB}{7} = \frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}.$$



Мал. 260

Прирівняємо перше і третє відношення, а потім — друге і третє.

Відповідно одержимо: $\frac{AB}{7} = \frac{4}{5}$, звідси $AB = 5{,}6$ см;

$\frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}$, звідси $KP = 8$ см.

Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників:
1) визначте відповідно рівні кути трикутників та запишіть назви цих трикутників;
2) з'ясуйте, які їх сторони є відповідними;
3) запишіть рівність трьох дробів, у чисельниках яких — сторони одного з трикутників, а в знаменниках — відповідні сторони іншого.

2. КОЕФІЦІЄНТ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Число, якому дорівнює відношення відповідних сторін подібних трикутників, називають *коефіцієнтом подібності*. Його позначають буквою k.

Подивіться на малюнок 259. Сторони трикутника $A_1B_1C_1$ удвічі довші за відповідні сторони подібного йому трикутника ABC. Тобто:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = 2.$$

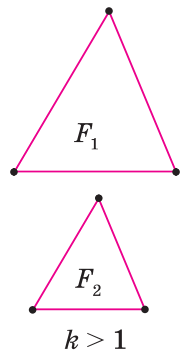
Отже, коефіцієнт подібності трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC дорівнює 2.

Коротко записуємо: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ $(k = 2)$.

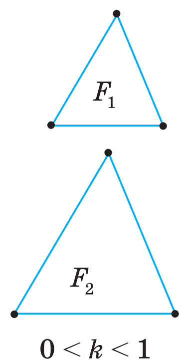
Якщо розглядати дані трикутники в іншому порядку — спочатку ΔABC, а потім $\Delta A_1B_1C_1$, — то й коефіцієнт подібності буде іншим, а саме: $k = \frac{1}{2}$.

Коротко записуємо: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ $\left(k = \frac{1}{2}\right)$.

За означенням, коефіцієнт подібності k не може бути від'ємним числом чи дорівнювати нулю. Якщо $k > 1$, то перший із двох подібних трикутників більший за другий (мал. 261). Якщо $0 < k < 1$, то навпаки — більшим буде другий трикутник (мал. 262).

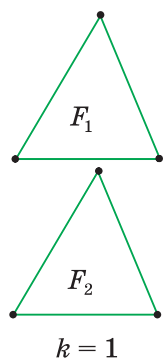


Мал. 261



Мал. 262

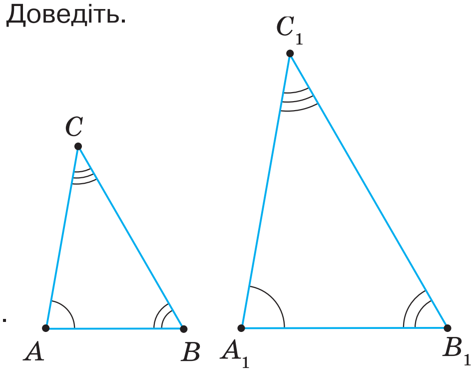
Чи може коефіцієнт подібності трикутників дорівнювати 1? Так. У цьому разі подібні трикутники мають відповідно рівні сторони, а значить, є рівними (мал. 263).



Мал. 263

Рівність трикутників є окремим випадком подібності трикутників з коефіцієнтом $k = 1$.

Задача. Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню їх відповідних сторін. Доведіть.



Мал. 264

Розв'язання. Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 264) подібні з коефіцієнтом k.

Доведемо, що $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

Оскільки $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$,

то $AB = k\,A_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = k\,A_1C_1$.

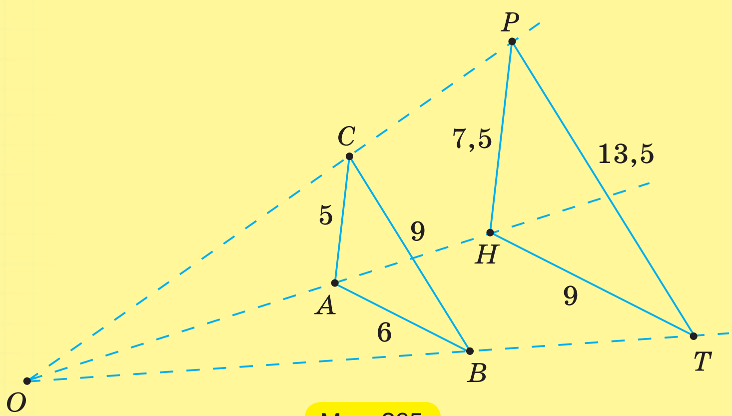
Запишемо периметр трикутника ABC:

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = kA_1B_1 +$
$+ kB_1C_1 + kA_1C_1 = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) = kP_{\Delta A_1B_1C_1}$.

Тоді $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \dfrac{k\,P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$, або $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Дізнайтеся більше

1. Слово «подібний» означає «який має спільні риси з ким-небудь, чим-небудь; схожий на когось, щось». Цей термін часто використовують у побуті, в науці, на виробництві. Наприклад, ескіз трикутної косинки, виконаний у масштабі 1 : 10, та її викрійка, що виготовляється в натуральну величину, — це подібні трикутники. А ось викрійка й сама косинка — це рівні трикутники.
2. Давньогрецькі математики замість терміна «подібний» уживали слово «схожий». У вітчизняній математичній літературі російський термін «подобие» вживається з 1739 р. Знак $\backsim$ увів у 1679 р. німецький математик Готфрід Лейбніц (1646–1716).
3. На малюнку 265 ви бачите подібні трикутники ABC і HTP. Вони розміщені так, що їх сторони паралельні, а прямі AH, BT і CP, які проходять через відповідні вершини, перетинаються в одній точці O. Кажуть, що такі подібні трикутники ABC і HTP мають *перспективне розміщення*.



Мал. 265

Поняття перспективи відоме з давніх-давен, але відповідна наукова теорія почала інтенсивно розвиватися лише в епоху Відродження. За допомогою перспективи художники досягали ефекту об'ємності своїх полотен. Першим, кому це вдалося зробити, був видатний флорентійський художник Джотто ді Бондоне (1266–337). У той самий період починається пошук наукових основ перспективи. Тут першість належить теж флорентійцю Філіппо Брунеллескі (1377–1446). Вчення про перспективу розвивали й активно використовували у своїй творчості видатні митці Леонардо да Вінчі (Італія, 1471–1528), Альбрехт Дюрер (Німеччина, 1471–1528) та ін. Згодом з геометричних паростків учення про перспективу виросла нова наука — *проективна геометрія*. Її започаткував французький геометр, архітектор та інженер Жерар Дезарг (1591–1661), а розвинув до рівня стрункої математичної теорії — французький математик Жан Віктор Понселе (1788–1867).

Жерар Дезарг

Пригадайте головне

1. Які трикутники називаються подібними?
2. Як записати, що два трикутники подібні з коефіцієнтом k?
3. Поясніть, як скласти відношення відповідних сторін двох подібних трикутників.
4. Чому дорівнює коефіцієнт подібності рівних трикутників?
5. Що можна сказати про відношення периметрів подібних трикутників?

Розв'яжіть задачі

468'. Чи правильно, що в подібних трикутниках:
1) усі кути рівні;
2) відповідні кути рівні;
3) усі сторони рівні;
4) відповідні сторони рівні;
5) відповідні сторони пропорційні?

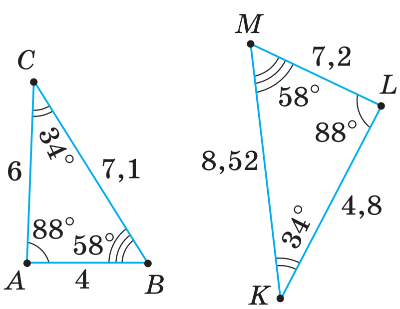
469'. Чи правильно зроблено висновок із запису $\Delta ABC \sim \Delta KLM$:
1) $\angle A = \angle M$; 2) $\angle A = \angle K$; 3) $\angle B = \angle L$; 4) $\angle C = \angle K$; 5) $\angle C = \angle M$?

470'. Відомо, що в подібних трикутниках $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle L$ і $\angle C = \angle K$. Чи є правильним запис:
1) $\Delta ABC \sim \Delta KLM$; 2) $\Delta ABC \sim \Delta LKM$; 3) $\Delta ABC \sim \Delta MLK$?

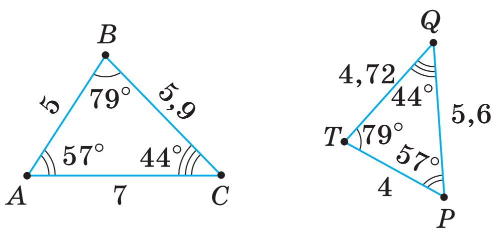
471'. Чи правильно зроблено висновок із запису $\Delta ABC \sim \Delta KLM$:
1) $\dfrac{AB}{KM} = \dfrac{BC}{KL} = \dfrac{AC}{LM}$; 2) $\dfrac{AB}{KL} = \dfrac{BC}{LM} = \dfrac{AC}{KM}$?

472'. Чи може коефіцієнт подібності двох трикутників дорівнювати:
1) -2; 2) 0; 3) 3; 4) 1; 5) $\dfrac{1}{5}$; 6) $\dfrac{6}{5}$?

473°. На малюнках 266, 267 зображено подібні трикутники. Назвіть їх. Запишіть: 1) їх відповідні кути; 2) їх відповідні сторони.

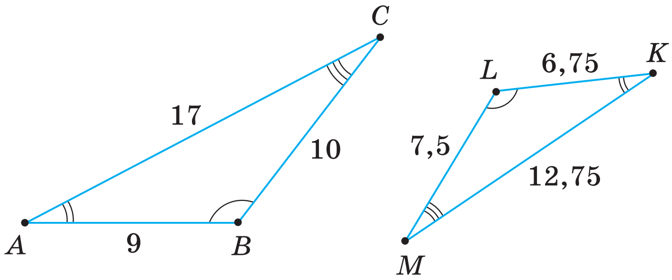


Мал. 266

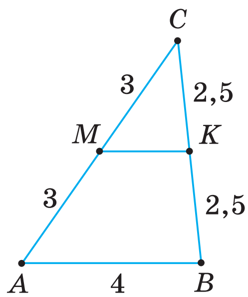


Мал. 267

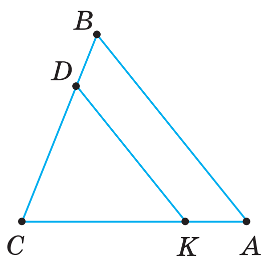
474°. Дано подібні трикутники:
1) ABC і KLM (мал. 268); 2) ABC і MKC (мал. 269).
Складіть відношення їхніх відповідних сторін.



Мал. 268



Мал. 269



Мал. 270

475°. На малюнку 270 $\Delta ABC \backsim \Delta KDC$. Доберіть пари відрізків так, щоб із них можна було утворити праву частину пропорції:
1) $\dfrac{KD}{AB} = \ldots$; 2) $\dfrac{AC}{KC} = \ldots$; 3) $\dfrac{BC}{DC} = \ldots$.
Скільки таких пар відрізків можна дібрати?

476°. Чи можуть бути подібними трикутники:
1) гострокутний і тупокутний;
2) прямокутний і тупокутний;
3) рівнобедрений і рівносторонній?

477°. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі кути трикутників, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B_1 = 60°$;
2) $\angle B = 110°$, $\angle C_1 = 25°$.

478°. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі кути трикутників, якщо $\angle C = \angle B_1 = 50°$.

479°. Чи можуть сторони двох подібних трикутників мати довжину:
1) 1,2 см, 1,3 см, 2,5 см і 24 мм, 26 мм, 50 мм;
2) 5 мм, 50 см, 50 см і 5 см, 50 мм, 50 мм?

480°. Чи можуть сторони двох подібних трикутників мати довжину: 3 дм, 4 дм, 5 дм і 9 м, 12 м, 15 м?

481°. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони AC і B_1C_1, якщо:
1) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 56$ мм, $A_1C_1 = 42$ мм;
2) $AB = 40$ мм, $BC = 37$ мм, $A_1B_1 = 20$ см, $A_1C_1 = 6{,}5$ см.

482°. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони AB і A_1C_1, якщо: $BC = 13$ см, $AC = 14$ см, $B_1C_1 = 4{,}5$ дм, $A_1B_1 = 3{,}9$ дм.

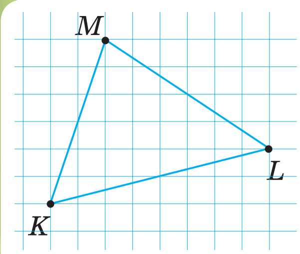
483°. **Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника й відтинає від нього подібний трикутник, паралельна третій стороні трикутника.** Доведіть.

484°. Пряма перетинає дві сторони трикутника ABC в точках M і N і відтинає від нього подібний трикутник. Назвіть паралельні прямі, які утворилися при цьому, якщо: 1) $M \in AB$ і $N \in BC$; 2) $M \in AC$ і $N \in BC$.

485°. Пряма перетинає дві сторони трикутника ABC в точках M і N і відтинає від нього подібний трикутник. Назвіть паралельні прямі, які утворилися при цьому, якщо $M \in AC$ і $N \in AB$.

486°. Побудуйте за клітинками спочатку трикутник KLM (мал. 271), а потім $\Delta KBC \sim \Delta KLM$, якщо: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{2}{3}$.

487°. Побудуйте за клітинками спочатку трикутник KLM (мал. 271), а потім $\Delta KBC \sim \Delta KLM$, якщо $k = \frac{1}{2}$.



Мал. 271

488°. Обчисліть периметри подібних трикутників, зображених на малюнках: 1) 266; 2) 267; 3) 269.
Знайдіть відношення периметрів подібних трикутників.

489°. Обчисліть периметри подібних трикутників, зображених на малюнку 268. Чому дорівнює відношення периметрів цих трикутників?

490°. a, b, c — сторони трикутника з периметром P. Він подібний із коефіцієнтом k другому трикутнику, периметр якого дорівнює P_1. Знайдіть невідомі величини за таблицею 16.

Таблиця 16

a	12 см	20 см	8 см	
b	16 см	21 см		8 см
c	18 см		17 см	14 см
P				
P_1		140 см	100 см	12,4 см
k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$

491°. Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо периметр подібного йому трикутника з коефіцієнтом 4 дорівнює:
1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.

492. Сторони трикутника відносяться, як 3 : 5 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого менша сторона дорівнює 5 см.

493. Сторони трикутника відносяться, як 1 : 3 : 4. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого більша сторона дорівнює 12 см.

494. **Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC і трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику ABC, то трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ подібні.** Доведіть.

495. Кожну сторону трикутника збільшено на: 1) 2 см; 2) 5 см. З утворених відрізків побудовано новий трикутник. Чи може він бути подібним даному?

496. Кожну сторону трикутника збільшено на:
1) третину її довжини; 2) 25 % її довжини.
Чи можна з утворених відрізків побудувати трикутник?
Чи може він бути подібним даному?

497. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ $(k_1 = 3)$ і $\Delta ABC \sim \Delta TEH$ $(k_2 = 2)$. Чи подібні трикутники MOP і TEH? З яким коефіцієнтом подібності?

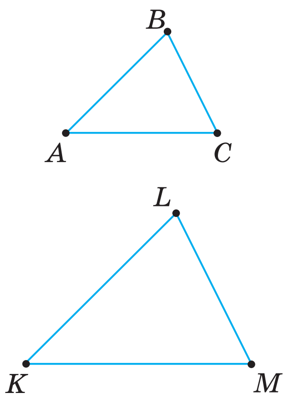
498. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ $(k_1 = 4)$ і $\Delta MOP \sim \Delta TEH$ $\left(k_2 = \frac{1}{2}\right)$. Чи подібні трикутники ABC і TEH? З яким коефіцієнтом подібності?

499. Два рівнобедрені трикутники подібні з коефіцієнтом $k = 0{,}5$. В одного з них дві сторони дорівнюють 12 см і 5 см. Знайдіть третю сторону другого трикутника.

500. Два рівнобедрені трикутники подібні з коефіцієнтом $k = 2{,}5$. В одного з них дві сторони дорівнюють 6 см і 15 см. Знайдіть третю сторону другого трикутника.

501. Визначте периметри двох подібних трикутників, якщо їх відповідні сторони відносяться, як 7 : 4, а різниця їх периметрів дорівнює 48 см.

502. Різниця периметрів двох подібних трикутників дорівнює 15 см, а їх відповідні сторони відносяться, як 2 : 3 (мал. 272). Чому дорівнюють периметри трикутників?



Мал. 272

503. У трапеції з основами a і b одну з бічних сторін, що дорівнює c, продовжено до перетину з продовженням другої бічної сторони. Утворилися два подібні трикутники зі спільною вершиною O. На яку відстань продовжено першу бічну сторону, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см?

504*. Відповідні сторони двох подібних трикутників попарно додано і з трьох утворених відрізків побудовано новий трикутник. Чи подібний цей трикутник даним трикутникам?

505*. Чи існують подібні трикутники, у яких відношення двох сторін одного трикутника дорівнює відношенню квадратів відповідних сторін другого?

506*. Сторони рівностороннього трикутника спочатку збільшено в n разів, а потім зменшено в n разів. Чи одержано трикутник, подібний даному? Який коефіцієнт подібності першого і третього трикутників?

507*. Два подібні прямокутні трикутники мають гострий кут 30°. Гіпотенуза одного з них дорівнює меншому катету другого. Визначте коефіцієнт подібності цих трикутників.

508*. У рівнобедреному трикутнику основа в n разів менша від бічної сторони, а периметр дорівнює P. Знайдіть сторони подібного йому трикутника з коефіцієнтом k, якщо:
1) $n = 2$, $P = 50$ см, $k = 1{,}5$;
2) $n = 3$, $P = 35$ см, $k = 0{,}75$.

509*. Найбільші сторони двох подібних трикутників дорівнюють відповідно a_1 і a_2, а різниця їх периметрів $P_2 - P_1 = m$. Доведіть, що $P_1 = \dfrac{ma_1}{a_2 - a_1}$ і $P_2 = \dfrac{ma_2}{a_2 - a_1}$.

510*. Доведіть, що радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника, дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

Проявіть компетентність

511. Рівносторонній трикутник зі стороною 0,1 мм розглядають під мікроскопом, який дає збільшення в 40 разів. Чи збільшаться кути трикутника?

512. Зробіть необхідні вимірювання та з'ясуйте, чи подібні внутрішній і зовнішній трикутники в косинці́.

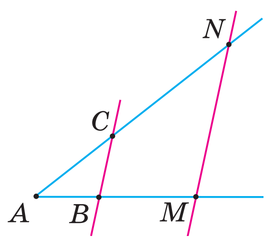
513. На географічній карті три населені пункти віддалені один від одного на 6 см, 5 см і 4 см. На місцевості найбільша відстань між ними дорівнює 15 км.
1) Який масштаб цієї карти?
2) Яка найменша відстань між населеними пунктами?
3) Яка відстань між іншими населеними пунктами?

514. Якщо до листа сталі, який має форму трапеції з основами 15 см і 25 см та бічними сторонами 18 см і 20 см, прикладемо сталевий лист у формі трикутника з основою 15 см, то одержимо сталевий лист трикутної форми. Які розміри утвореного листа?

515. Триярусну ялинку з тасьми утворюють три подібні рівносторонні трикутники. У них відповідні сторони паралельні, а висоти до горизонтальних сторін лежать на одній прямій.
1) Чи вистачить 2,5 м тасьми для такої ялинки, якщо її основа дорівнює 40 см, а трикутники подібні з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$?
2) Проведіть необхідні вимірювання та з'ясуйте, скільки тасьми знадобиться, щоб прикрасити такими ялинками штори на вікнах вашої класної кімнати.

§ 11. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

У теоремі Фалеса стверджується, що паралельні прямі відтинають на сторонах кута відповідно рівні відрізки. Загальнішим є випадок, коли паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки (мал. 273). Відповідна теорема носить назву узагальненої теореми Фалеса. Наведемо її без доведення.



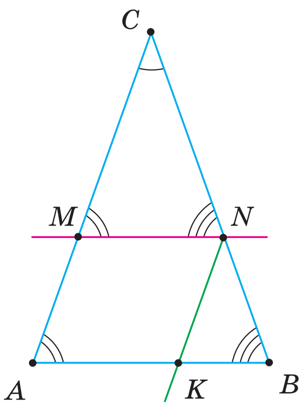
Мал. 273

ТЕОРЕМА (узагальнена теорема Фалеса).

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

Узагальнену теорему Фалеса інакше називають *теоремою про пропорційні відрізки*.

НАСЛІДОК. **Пряма, що перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник.**



Мал. 274

Справді, у трикутниках ABC і MNC (мал. 274) є спільний кут C. Його перетинають паралельні прямі AB і MN. Із січною AC вони утворюють рівні відповідні кути CAB і CMN. Треті кути трикутників також рівні. Доведемо пропорційність сторін трикутників. За узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC}$, тому $\frac{AM + MC}{MC} = \frac{BN + NC}{NC}$, звідси $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$.

Провівши пряму $NK \parallel AC$, аналогічно одержимо: $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{KA}$. Але $KA = MN$, тому $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}$.

Отже, у трикутниках ABC і MNC відповідні кути — рівні, а відповідні сторони — пропорційні: $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}$.

Дані трикутники подібні за означенням.

Щоб довести подібність трикутників:
1) доведіть рівність відповідних кутів даних трикутників;
2) доведіть пропорційність відповідних сторін даних трикутників;
3) зробіть висновок: трикутники подібні за означенням.

Дізнайтеся більше

1. Може виникнути запитання: *Як довести узагальнену теорему Фалеса*?

Розділимо відрізок AB на n рівних відрізків (мал. 275). Нехай довжина кожного з них дорівнює d. Тоді $AB = dn$. Відкладемо від точки B на промені BM відрізки завдовжки d. Через усі точки поділу проведемо прямі, паралельні BC. За теоремою Фалеса, ці прямі відтинають рівні відрізки й на стороні AC даного кута.

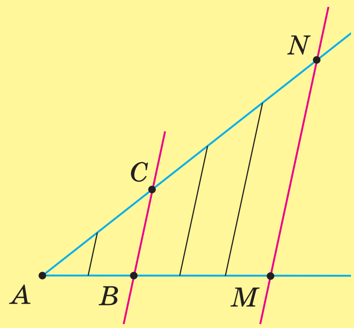
Позначимо їх довжини d_1. На відрізку AC їх буде та сама кількість n, тому $AC = d_1 n$.

Нехай на відрізку BM уміщається ціла кількість m таких відрізків (мал. 275). На відрізку CN їх теж буде m. Тоді $BM = dm$, а $CN = d_1m$.

Знайдемо відношення відрізків на двох сторонах кута:

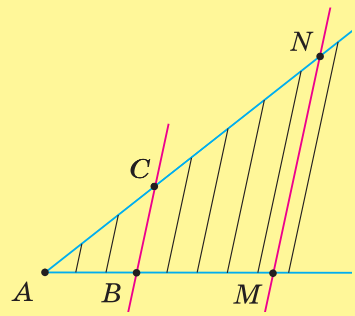
$$\frac{AB}{BM} = \frac{n}{m},\ \frac{AC}{CN} = \frac{n}{m}.$$

Бачимо, що два відношення дорівнюють тому самому числу $\frac{n}{m}$, отже, можемо їх прирівняти: $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.



Мал. 275

Нехай на відрізку BM уміщається m відрізків завдовжки d і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж d (мал. 276). Це означає, що відрізок з m частин завдовжки d менший від відрізка BM, а відрізок з $m + 1$ частин завдовжки d — більший за цей відрізок.



Мал. 276

Одержали нерівність: $dm < BM < d(m + 1)$.

Оскільки $d = \frac{AB}{n}$, то $\left(\frac{AB}{n}\right)m < BM < \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1)$.

Поділимо всі члени нерівності на AB: $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m+1}{n}$, або $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Якщо збільшувати кількість точок поділу, то число n стане нескінченно великим, а число $\frac{1}{n}$ — близьким до нуля.

Тому відношення $\frac{BM}{AB}$ відрізняється від числа $\frac{m}{n}$ на дуже мале число $\frac{1}{n}$.

Міркуючи аналогічно, одержимо: $d_1m < CN < d_1(m + 1)$.

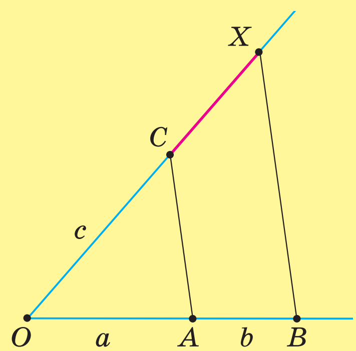
Якщо $d_1 = \frac{AC}{n}$, то: $\left(\frac{AC}{n}\right)m < CN < \left(\frac{AC}{n}\right)(m+1)$

і $\frac{m}{n} < \frac{CN}{AC} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Отже, відношення $\frac{CN}{AC}$ відрізняється від числа $\frac{m}{n}$ на те саме дуже мале число $\frac{1}{n}$. А це може бути лише тоді, коли $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

Звідси випливає, що $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

2. Відрізок x називають *четвертим пропорційним* трьох даних відрізків a, b і c, якщо виконується рівність $a : b = c : x$. Для побудови четвертого пропорційного відрізка на стороні довільного кута від його вершини O відкладаємо відрізки $OA = a$, $AB = b$, а на другій стороні кута — відрізок $OC = c$ (мал. 277). З'єднавши точки A і C, проводимо $BX \parallel AC$. Відрізок CX — шуканий, оскільки, за узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CX}$.



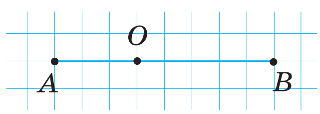
Мал. 277

Пригадайте головне

1. Як формулюється узагальнена теорема Фалеса?
2. Сформулюйте наслідок з узагальненої теореми Фалеса.
3. Поясніть, як довести подібність трикутників за означенням.

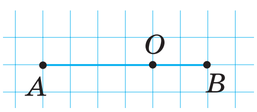
Розв'яжіть задачі

516'. Чи правильно, що в узагальненій теоремі Фалеса йдеться про те, що:
1) сторони кута перетинають будь-які прямі;
2) сторони кута перетинають паралельні прямі;
3) відрізки, утворені на одній стороні кута, дорівнюють один одному;
4) відрізки, утворені на одній стороні кута, пропорційні будь-яким відрізкам на іншій стороні кута;
5) відрізки, утворені на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам на іншій стороні кута?



Мал. 278

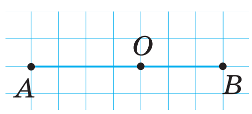
517'. Чи правильно, що від даного трикутника подібний трикутник відтинає:
1) будь-яка пряма;
2) пряма, що проходить через вершину трикутника;
3) пряма, що перетинає дві сторони трикутника;
4) пряма, що перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні?



Мал. 279

518°. У якому відношенні точка O ділить відрізок AB (мал. 278, 279)?

519°. Запишіть відношення, у якому точка O ділить відрізок AB (мал. 280).

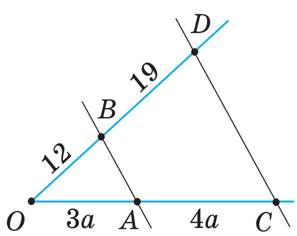


Мал. 280

520°. Точка M ділить відрізок PH у певному відношенні. Який із відрізків довший — PM чи MH, якщо:
1) $PM : MH = 5 : 2$; 2) $PM : MH = 3 : 7$?

521°. Точка H ділить відрізок PM у відношенні 4 : 3. Який із відрізків довший — PH чи HM?

522°. На малюнках 281, 282 $AB \parallel CD$. Чи правильно вказано довжини відрізків? Відповідь поясніть.

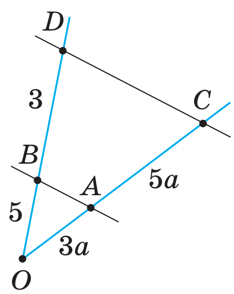


Мал. 281

523°. На стороні BA кута ABC відкладіть відрізки BM і MA завдовжки: 1) 2 см і 3 см; 2) 5 см і 1 см. Через точки A і M проведіть паралельні прямі AC і MH. Як відносяться відрізки BH і HC?

524°. На стороні BC кута ABC відкладіть відрізки BD і DC завдовжки 4 см і 2 см. Через точки C і D проведіть паралельні прямі CA і DM. Як відносяться відрізки BM і MA?

525°. Яку кількість відрізків потрібно знати, щоб з'ясувати, чи пропорційні вони?

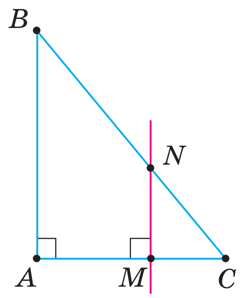


Мал. 282

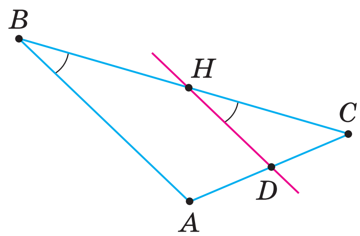
526°. Чи подібні трикутники ABC і MNC на малюнку 283? Відповідь поясніть.

527°. Чи подібні трикутники ABC і DHC на малюнку 284? Відповідь поясніть.

528°. Відрізок AB завдовжки d точка M ділить у відношенні $m : n$. Знайдіть довжини відрізків AM і BM, якщо:
1) $d = 10$ см, $m = 2$, $n = 3$; 2) $d = 16$ см, $m = 3$, $n = 1$.



Мал. 283



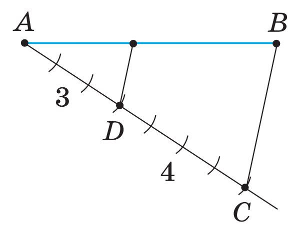
Мал. 284

529°. Відрізок CD завдовжки 14 см точка H ділить у відношенні 3 : 4. Знайдіть довжини відрізків CH і HD.

530°. Накресліть відрізок AB завдовжки 12 клітинок зошита. Поділіть його за клітинками у відношенні: 1) 1 : 2; 2) 5 : 7.

531°. Накресліть відрізок MN завдовжки 10 клітинок зошита. Поділіть його за клітинками у відношенні 2 : 3.

532°. **Поділіть даний відрізок AB у відношенні 3 : 4.** За малюнком 285 складіть план побудови.



Мал. 285

533°. Накресліть відрізок BC довільної довжини й поділіть його у відношенні: 1) 2 : 3; 2) 1 : 4.

534°. Накресліть відрізок AC довільної довжини й поділіть його у відношенні 1 : 2.

535°. Визначте, чи пропорційні відрізки a, b, c і d, довжини яких відповідно дорівнюють:
1) 5 см, 6 см, 10 см і 18,5 см;
2) 7 см, 4 см, 2,1 см і 1,1 см.

536°. Чи є пропорційними чотири відрізки, довжини яких дорівнюють 8 см, 3 см, 24 см і 9 см?

537°. До трьох даних відрізків a, b і c доберіть четвертий відрізок d так, щоб вони були пропорційними, якщо дані відрізки мають довжини відповідно:
1) 1, 2, 3; 2) 6, 3, 4; 3) 3, 5, 7.
Скільки розв'язків має задача?

538°. На сторонах кута ABC розміщено чотири точки: P і Q — на стороні BA, E і F — на стороні BC. Чи паралельні прямі PE і QF, якщо:
1) $BP = PQ$ і $BE = EF$; 3) $BP = PQ$ і $BF = FE$;
2) $BQ = QP$ і $BF = FE$; 4) $BQ = QP$ і $BE = EF$?
Зробіть малюнки та поясніть відповідь.

539°. Чи подібні трикутники ABC і AMN, якщо MN — середня лінія трикутника ABC?

540°. Як найпростіше побудувати трикутник, подібний даному?

541°. Паралельно стороні AB рівностороннього трикутника ABC проведено дві прямі, які перетинають AC в точках M і E, а BC — в точках N і F. $MN = \frac{3}{4}AB$, $EF = \frac{1}{2}AB$. Накресліть у зошиті таблицю 17 та заповніть її.

Таблиця 17

AB	4 см					
MN		6 см				
EF			3 см			
$P_{\Delta ABC}$				12 см		
$P_{\Delta MNC}$					9 см	
$P_{\Delta EFC}$						10 см

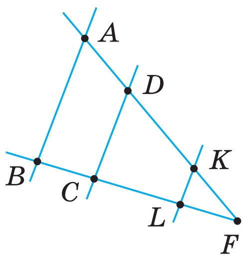
542. Відрізок AB завдовжки a точка C ділить на відрізки AC і CB, відношення яких дорівнює $m : n$. Виразіть довжини відрізків AC і CB через числа a, m і n.

543. Відрізок завдовжки d дві його внутрішні точки ділять на відрізки, що відносяться, як $a : b : c$. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо:

1) $d = 78$ см, $a = \frac{2}{5}$, $b = 0{,}8$, $c = \frac{3}{4}$;

2) $d = 50$ см, $a = 0{,}25$, $b = \frac{3}{5}$, $c = 0{,}4$.

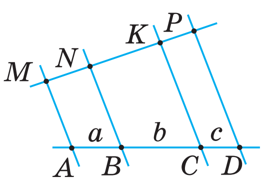
Якщо члени відношення задано дробами, то зведіть ці дроби до спільного знаменника. Тоді чисельники одержаних дробів відповідатимуть цілим значенням членів відношення.



Мал. 286

544. На продовженні відрізка AB завдовжки d взято точку N так, що $AN : BN = m : n$. Знайдіть довжини відрізків AN і BN, якщо:
1) $d = 5$ см, $m = 3$, $n = 2$;
2) $d = 16$ см, $m = 5$, $n = 1$.

545. На малюнку 286 $AB \parallel DC \parallel KL$, $AD : DK : KF = 2 : 3 : 2$. Знайдіть довжини відрізків BC, CL, LF, DC і KL, якщо:
1) $AB = 70$ мм, $FC = 40$ мм; 2) $AB = 21$ см, $FC = 15$ см.



Мал. 287

546. На малюнку 287 $AM \parallel BN \parallel CK \parallel DP$.
Знайдіть довжини відрізків MN, NK і KP, якщо:
1) $a = 2{,}5$ см, $b = 4$ см, $c = 2$ см, $MP = 12{,}5$ см;
2) $a = 10$ см, $b = 16$ см, $c = 8$ см, $MP = 50$ см.

547. Сторони кута A перетинають дві паралельні прямі BC і OH, причому точка B лежить між точками A і O. Знайдіть:
1) AH, якщо $AB = 8$ см, $AO = 12$ см, $AC = 10$ см;
2) AO, якщо $AC : AH = \frac{3}{11} : 0{,}6$, $BO = 12$ дм.

548. На стороні MO трикутника MON позначено точку A на відстані a від вершини O. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить сторону ON пряма, що проходить через точку A паралельно MN, якщо:
1) $MO = 6$ см, $ON = 9$ см, $a = 2$ см;
2) $MO = 10$ см, $ON = 14$ см, $a = 4$ см.

549. Через точку P на стороні AB трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму. Вона перетинає сторону BC в точці O. Знайдіть довжину відрізка BO, якщо:

1) $AP : PB = 5 : 6$, $BC = 22$ см;
2) $AP : PB = 4 : 3$, $BC = 2{,}8$ дм.

550. Точка ділить сторону трикутника у відношенні $x : y$. Знайдіть відношення кожного з утворених відрізків до всієї сторони, якщо:
1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 2$, $y = 3$; 3) $x = 4$, $y = 5$.

551. У трикутнику ABC три точки ділять сторону BC на чотири рівні частини. Через ці точки проведено прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, які мають кінці на сторонах трикутника, якщо:
1) $AC = 1{,}6$ дм; 2) $AC = 124$ мм.

552. Як провести пряму, паралельну одній зі сторін даного трикутника, щоб відношення периметрів утворених подібних трикутників дорівнювало:
1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$?

553. Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторони AD в точці M, а сторону CD — у точці N. Знайдіть довжину відрізка DM, якщо:
1) $AD = 5$, $BN : MN = 3 : 2$; 2) $AD = 3$, $BN : MN = 0{,}2 : 0{,}3$.

554. Побудуйте два кола, що дотикаються зовні, якщо їх радіуси відносяться, як $2 : 3$.

555. Побудуйте два кола, що дотикаються внутрішньо, якщо їх радіуси відносяться, як $3 : 4$.

556*. На відрізку AB позначено дві точки O і H ($AO < AH$). Утворені три частини відрізка AB, починаючи від точки A, мають довжини a, b і c. Знайдіть, які частини відрізка AB становлять відрізки AO, OH, HB, AH і OB.

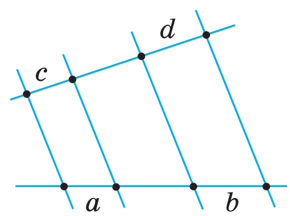
557*. Відрізок AB має довжину a. Точки M і T розміщені на прямій AB так, що точка M лежить на відрізку AB і $AM : MB = 2 : 3$, точка T не належить відрізку AB і $AT : TB = 4 : 3$. Знайдіть відстань між точками M і T, якщо: 1) $a = 6$ см; 2) $a = 10$ см.

558*. За даними на малюнку 288 доведіть:
1) $a : c = b : d$;
2) $a : c = (a + b) : (c + d)$;
3) $c : a = (b - a) : (d - c)$.

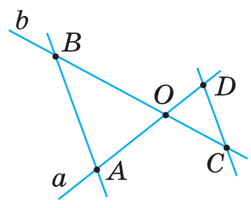
559*. На малюнку 289 $AB \parallel CD$. 1) Застосувавши теорему про пропорційні відрізки, доведіть, що $AO : OD = OB : OC$; 2) знайдіть AO і OD, якщо $AD = 10$ см, $OB = 5$ см, $OC = 3$ см.

560*. Відрізок MN має кінці на сторонах AB і AC трикутника ABC і паралельний стороні BC. Доведіть, що медіана AA_1 ділить цей відрізок навпіл.

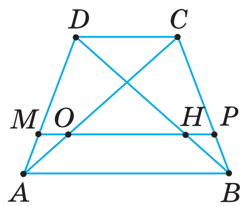
561*. Пряма, паралельна основам трапеції $ABCD$ (мал. 290), перетинає її бічні сторони в точках M і P, а діагоналі — у точках O і H.
1) Чи рівні відрізки MO і HP?
2) Чи для кожної трапеції виконується співвідношення: $\frac{MO}{DC} + \frac{OP}{AB} = 1$?



Мал. 288



Мал. 289



Мал. 290

562*. Основи трапеції дорівнюють a і b. Одну з її бічних сторін поділено на три рівні відрізки й через точки поділу проведено прямі, паралельні основам трапеції. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що мають кінці на бічних сторонах трапеції, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 14$ см.

Якщо в трапеції проведено кілька прямих, паралельних основам, то через її вершину проведіть пряму паралельно одній із бічних сторін. Тоді трапеція буде поділена на паралелограм і трикутник. Задача зведеться до відшукання довжин паралельних відрізків у трикутнику.

563*. У трапеції основи дорівнюють a і b ($a > b$). На одній із бічних сторін позначено n точок, які ділять її на рівні частини. Через ці точки проведено прямі, паралельні основам трапеції. Складіть формулу для обчислення довжин відрізків цих прямих, що мають кінці на бічних сторонах трапеції, якщо:
1) $n = 2$; 2) $n = 3$.

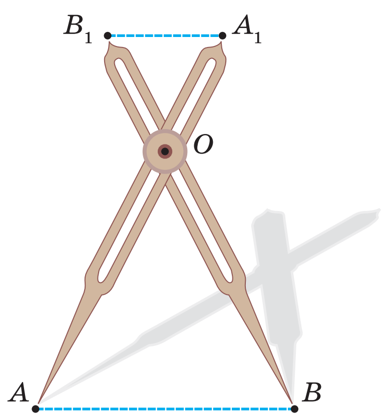
Проявіть компетентність

564. Для зменшення або збільшення відрізка за певним відношенням застосовують пропорційний циркуль (мал. 291). Поясніть, на чому ґрунтується спосіб його використання.

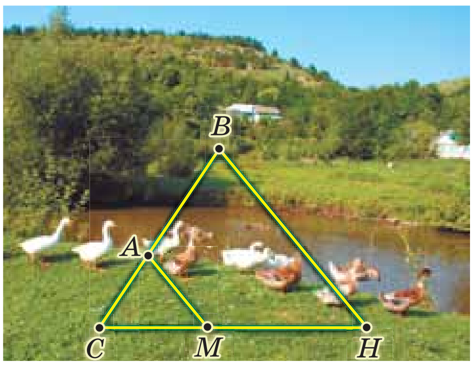
565. Вулиці Садова та Квітнева беруть свій початок біля Ботанічного саду. Їх перетинають паралельні вулиці Трояндова й Вишнева. Відстань між Садовою та Квітневою за Трояндовою вулицею дорівнює 750 м, а за Вишневою — 1 км 250 м. Трамвай рухається Садовою вулицею й долає шлях від Ботанічного саду до Трояндової вулиці за 15 хв. Скільки часу йому знадобиться, щоб дістатися Вишневої вулиці, не змінюючи швидкості?

566. Знайдіть відстань між двома садибами (позначимо їх A і B), які розташовані на протилежних берегах річки (мал. 292), якщо $AM \parallel BH$ і $CA = 4$ м, $CM = 5$ м, $MH = 35$ м.

567. Тінь від башти дорівнює 24 м, а вертикальний шест завдовжки 1,2 м в ту саму пору дня має тінь завдовжки 80 см. Яка висота башти?



Мал. 291



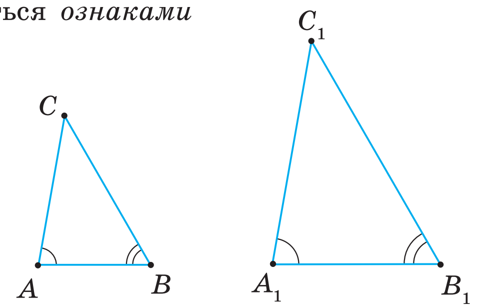
Мал. 292

§ 12. ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Щоб установити подібність двох трикутників за означенням, потрібно переконатися в тому, що в них відповідні кути рівні й відповідні сторони пропорційні. На практиці це незручно. Тому користуються *ознаками подібності трикутників*.

ТЕОРЕМА **(ознака подібності трикутників за двома кутами).**

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.



Мал. 293

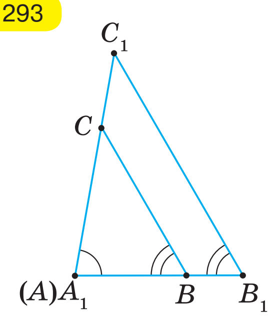
Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 293), $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Довести: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доведення. Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб кут A сумістився з кутом A_1 (мал. 294). Це можна зробити тому, що $\angle A = \angle A_1$. Тоді сторони AB і AC лежатимуть на променях A_1B_1 і A_1C_1 відповідно.

Прямі BC і B_1C_1 із січною A_1B_1 утворюють рівні відповідні кути: $\angle A_1BC = \angle A_1B_1C_1$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $BC \parallel B_1C_1$.

За наслідком із узагальненої теореми Фалеса, пряма BC, що паралельна стороні B_1C_1, відтинає від трикутника $A_1B_1C_1$ подібний йому трикутник. Тому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 294

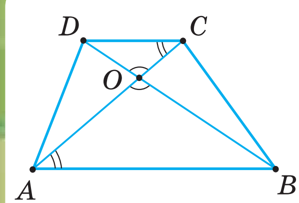
НАСЛІДОК. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Справді, у рівносторонніх трикутниках усі кути дорівнюють по 60°. Тому ці трикутники подібні за двома кутами.

Задача. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O (мал. 295). Доведіть, що $\Delta AOB \sim \Delta COD$.

Розв'язання.

Розглянемо трикутники AOB і COD. У них: $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні, $\angle OAB = \angle OCD$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, $\Delta AOB \sim \Delta COD$ за двома кутами.



Мал. 295

Щоб довести подібність двох трикутників:

1) виділіть їх на малюнку;

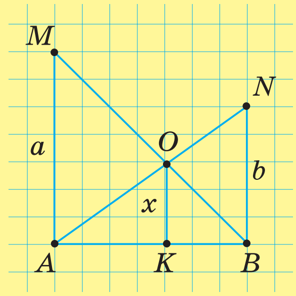
2) доведіть рівність двох пар відповідних кутів;

3) зробіть висновок: трикутники подібні за двома кутами.

Дізнайтеся більше

На властивостях подібних трикутників ґрунтується принцип побудови *номограми* — спеціального креслення, за допомогою якого можна, не виконуючи обчислень, одержувати розв'язки певного рівняння. Розглянемо задачу.

Задача. До даного відрізка AB в його кінцях і по один бік від нього проведено два перпендикуляри $AM = a$ і $BN = b$, а також відрізки MB і NA, які перетинаються в точці O. Відстань від O до AB дорівнює x. Знайдіть залежність x від a і b.



Мал. 296

Розв'язання. Нехай точка K (мал. 296) є основою перпендикуляра, проведеного з точки O до прямої AB. За умовою задачі, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$.

Тоді одержимо:

1) у прямокутному трикутнику ABN $OK \parallel BN$, звідси $\frac{x}{b} = \frac{AK}{AB}$;

2) у прямокутному трикутнику BAM $OK \parallel AM$, звідси $\frac{x}{a} = \frac{KB}{AB}$.

Додавши одержані рівності, маємо: $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = \frac{AK + KB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$, тобто $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = 1$.

Звідси $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$.

Одержали рівняння, яке виражає шукану залежність.

Для знаходження його наближеного розв'язку можна на аркуші в клітину або на міліметровому папері побудувати (як на мал. 296) відрізки a і b заданої довжини й виміряти відстань x — це і буде шуканий корінь рівняння.

Такі номограми можуть бути використані в задачах із фізики, зокрема в розділі «Оптика».

Пригадайте головне

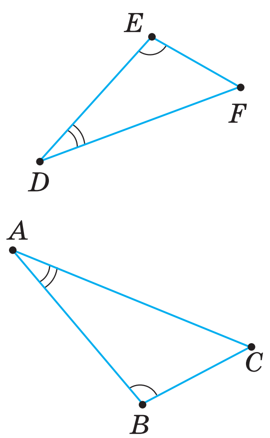
1. Сформулюйте та доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
2. Чому рівносторонні трикутники подібні?
3. Поясніть, як довести подібність двох трикутників.

Розв'яжіть задачі

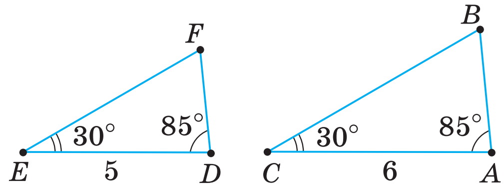
568'. Чи правильно, що в першій ознаці подібності трикутників ідеться про:
1) сторони даних трикутників;
2) кути даних трикутників;
3) рівність двох кутів трикутника;
4) рівність двох кутів даних трикутників;
5) рівність двох відповідних кутів даних трикутників?

569'. Чи правильно, що рівносторонні трикутники: 1) рівні; 2) подібні?

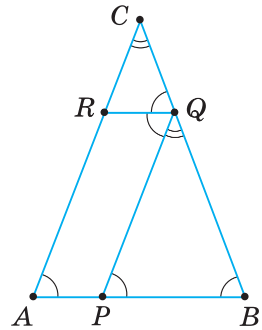
570°. За даними на малюнку 297 назвіть дві пари відповідно рівних кутів трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



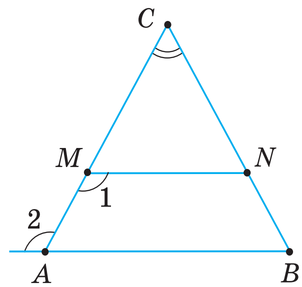
Мал. 297



Мал. 298



Мал. 299



Мал. 300

571°. На малюнку 298 задано елементи трикутників *DFE* і *ABC*. Чи подібні дані трикутники?

572°. Накресліть два рівнобедрені трикутники, що є подібними.

573°. Накресліть два прямокутні трикутники, що є подібними.

574°. На малюнку 299 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

575°. На малюнку 300 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

576°. У трикутниках *KLM* і *POH* є кути, що дорівнюють α і β. Накресліть у зошиті таблицю 18 та заповніть її за зразком, наведеним у першому стовпчику.

Таблиця 18

α	β	α	β	α	β	α	β
$\angle K$	$\angle L$	$\angle L$	$\angle K$	$\angle M$	$\angle K$	$\angle L$	$\angle M$
$\angle P$	$\angle O$	$\angle H$	$\angle O$	$\angle P$	$\angle H$	$\angle P$	$\angle O$
$\Delta KLM \sim \Delta POH$ за двома кутами							

577°. Два кути трикутника *ABC* і два кути трикутника *MHT* відповідно дорівнюють: 1) 23° і 77° та 77° і 23°; 2) 30° і 90° та 30° і 60°; 3) 52° і 28° та 28° і 100°; 4) 45° і 100° та 90° і 45°.
Чи подібні ці трикутники?

578°. Два кути трикутника *MHT* і два кути трикутника *ABC* відповідно дорівнюють 105° і 15° та 15° і 105°. Чи подібні ці трикутники?

579°. Відношення двох кутів одного трикутника дорівнює відношенню двох кутів другого трикутника. Чому не можна стверджувати, що такі трикутники подібні?

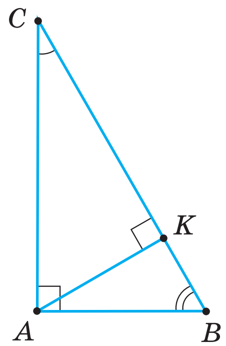
580°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі сторони й кути трикутників, якщо: 1) $\angle A = \angle B_1 = 60°$, $AB = 2$ см, $A_1C_1 = 6$ см; 2) $\angle B = \angle C = 60°$, $A_1B_1 = 2$ см, $AC = 4$ см.

581°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі сторони й кути трикутників, якщо $\angle B = \angle C = 60°$, $BC = 9$ см, $A_1B_1 = 3$ см.

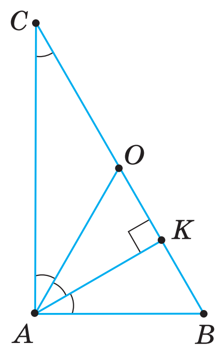
582°. **Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту: 1) при основі; 2) при вершині.** Доведіть.

583°. Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює α, а в іншому — кут при основі дорівнює β, якщо: 1) $\alpha = 43°$, $\beta = 68°30'$; 2) $\alpha = 105°$, $\beta = 38°30'$?

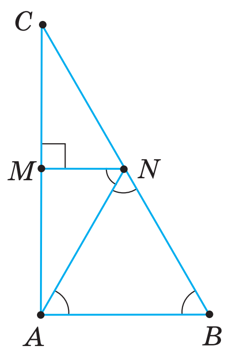
584°. Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює 52°, а в іншому — кут при основі дорівнює 64°?



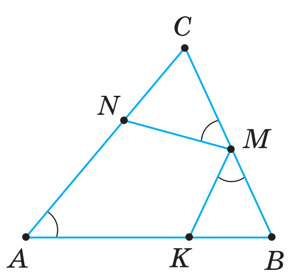
Мал. 301



Мал. 302



Мал. 303



Мал. 304

585°. **Прямокутні трикутники з рівним гострим кутом — подібні.** Доведіть.

586°. Доведіть, що вказані прямокутні трикутники подібні:
1) ΔABC і ΔKBA (мал. 301); 2) ΔOKA і ΔBAC (мал. 302).

587°. Доведіть подібність прямокутних трикутників AMN і CAB (мал. 303).

588°. Чи подібні прямокутні трикутники, в одному з яких гострий кут дорівнює α, а в іншому — β, якщо:
1) $\alpha = 42°$, $\beta = 48°$; 2) $\alpha = 35°30'$, $\beta = 54°30'$?

589°. Чи подібні прямокутні трикутники, в одному з яких гострий кут дорівнює $23°$, а в іншому — $77°$?

590°. **Рівнобедрені прямокутні трикутники — подібні.** Доведіть.

591°. **За основами a і b трапеції визначте відношення, у якому її діагоналі ділять одна одну.**

592°. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють a і b. Діагоналі AC і BD дорівнюють c й перетинаються в точці O. Знайдіть периметри трикутників BCO і ADO, якщо:
1) $a = 32$ мм, $b = 52$ мм, $c = 48$ мм; 2) $a = 0{,}5$ дм, $b = 0{,}3$ дм, $c = 0{,}8$ дм.

593°. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють 3 см і 8 см, а діагоналі — по 7 см. O — точка перетину діагоналей. Знайдіть периметри трикутників BCO і ADO.

594°. Бічні сторони AD і BC трапеції $ABCD$ продовжено до їх перетину в точці O. Доведіть, що $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{BC}{BO} = \dfrac{AB}{DC}$.

595. За даними, наведеними на малюнках 304, 305, доведіть подібність зображених трикутників.

596. Доведіть подібність трикутників, зображених на малюнку 306.

597. Доведіть, що трикутники з відповідно паралельними сторонами подібні.

598. У трикутниках ABC і KLM: $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:
1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \dfrac{3}{4}$.

599. У трикутниках KLM і ABC: $\angle K = \angle A$, $\angle B = \angle L$, $KL = m$, $LM = m + 2$, $KM = m - 2$, $AB = nm$. Знайдіть сторони трикутників, якщо $m = 8$ см, $n = 2$.

600. Висоти AE і CD трикутника ABC перетинаються в точці H. Знайдіть ці висоти, якщо їх сума дорівнює 18 см, $AH = 8$ см, $CH = 4$ см.

601. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P. Через точку перетину його медіан проведено пряму, паралельну стороні. Доведіть, що довжину відрізка d цієї прямої з кінцями на сторонах трикутника можна обчислювати за формулою: $d = \dfrac{2P}{9}$.

602. У трикутнику зі сторонами a, b і c пряма перетинає кут A й відтинає від нього трапецію з периметром P. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо: 1) $a = 30$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см, $P = 63$ см; 2) $a = b = c = 18$ см, $P = 50$ см.

603. Доведіть, що через вершину більшого кута різностороннього трикутника завжди можна провести пряму так, щоб вона відтинала від даного трикутника подібний йому трикутник.

604. Через точку M на стороні трикутника ABC проведено пряму, що відтинає від нього подібний трикутник. Скільки розв'язків має задача? Розгляньте випадки, коли ΔABC:
1) різносторонній; 2) рівнобедрений; 3) рівносторонній.

605. У рівнобедрений трикутник з основою a й бічною стороною b вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін трикутника, якщо: 1) $a = 6$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

606. Доведіть, що відстань d між точками дотику вписаного кола до бічних сторін b рівнобедреного трикутника з основою a можна обчислювати за формулою: $d = \dfrac{a(2b - a)}{2b}$.

607. У рівнобедрений трикутник з основою a й бічною стороною b вписано коло із центром O. Знайдіть відношення відрізків висоти, проведеної до основи трикутника, на які вона ділиться точкою O (починаючи від вершини), якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

608. **Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні висоти відносяться, як сторони, до яких вони проведені.**

609. Два подібні трикутники мають по висоті, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?

610. **Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні бісектриси відносяться, як сторони, до яких вони проведені.**

611. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні ($k = 1{,}5$). Знайдіть довжини бісектрис кутів C_1 і C даних трикутників, якщо їх різниця дорівнює 4 см.

612. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і $CO : AO = 1 : 3$.

613. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і $BO : DO = 3 : 5$.

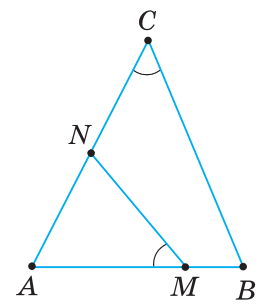
614. У чотирикутнику $ABCD$ з прямими кутами B і D проведено діагональ AC, а з її довільної точки M — прямі ML і MN, які відповідно перпендикулярні до прямих BC і AD. Доведіть, що $\dfrac{ML}{AB} + \dfrac{MN}{CD} = 1$.

615. Два кола з радіусами $R_1 = 4$ см і $R_2 = 6$ см дотикаються зовні. Їх спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці M. Знайдіть відстані від центрів цих кіл до точки M.

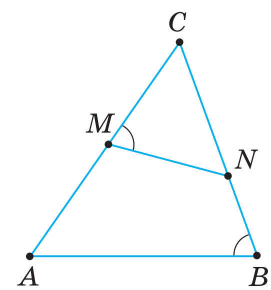
616. Два кола з радіусами $R_1 = 3$ см і $R_2 = 6$ см дотикаються зовні. Їх спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці K. Знайдіть відстані від центрів цих кіл до точки K.

617*. Доведіть, що трикутники з відповідно перпендикулярними сторонами подібні.

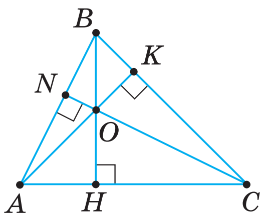
618*. Доведіть, що відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін утричі менші від довжин відповідних висот трикутника.



Мал. 305



Мал. 306



Мал. 307

619*. У рівнобедреному трикутнику з основою AB через середину висоти CD проведено прямі AK і BL ($K \in BC$, $L \in AC$). Знайдіть довжину відрізка KL, якщо: 1) $AB = 3$ см; 2) $AB = 4$ см; 3) $AB = 5$ см.

620*. **Доведіть, що висоти трикутника обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені** (мал. 307).

621*. Знайдіть відповідні висоти двох подібних трикутників з коефіцієнтом подібності k, якщо: 1) сума цих висот дорівнює 36, $k = 2$; 2) різниця цих висот дорівнює 10, $k = \frac{2}{3}$.

622*. У коло з радіусом R вписано трикутник ABC зі сторонами $BC = a$ і $AB = c$. Доведіть, що висоту h_b до третьої сторони трикутника можна обчислити за формулою: $h_b = \frac{ac}{2R}$.

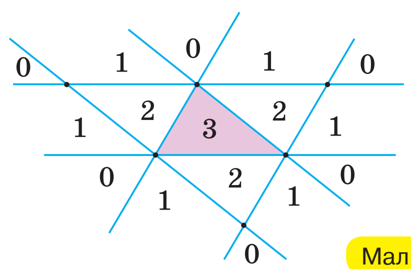
623*. На колі з центром O й радіусом R, у якому проведено два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD, узято точку K. Хорда AK перетинає діаметр CD в точці M, а пряма BK — його продовження в точці N. Доведіть, що $OM \cdot ON = R^2$.

624*. У трикутник ABC зі сторонами $AC = b$ і $BC = a$ вписано ромб $CKLM$ так, що $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Доведіть, що сторону x ромба можна обчислити за формулою: $x = \frac{ab}{a+b}$.

625*. У трикутнику ABC з тупим кутом B проведено висоти BD і CM. Доведіть, що трикутники ABC і ADM подібні.

626*. Основи трапеції $ABCD$ дорівнюють a і b ($a > b$), $\angle ADC$ — тупий. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC, яка ділить трапецію на два подібні трикутники.

627*. Проведемо три прямі через сторони трикутника й ще три прямі — через його вершини паралельно протилежним сторонам. Цими прямими площина трикутника розбивається на 16 областей (мал. 308). Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Дослідіть, якій з областей належать точки, через які: 1) не можна провести жодної такої прямої; 2) можна провести тільки одну таку пряму; 3) можна провести тільки дві такі прямі; 4) можна провести три такі прямі.



Мал. 308

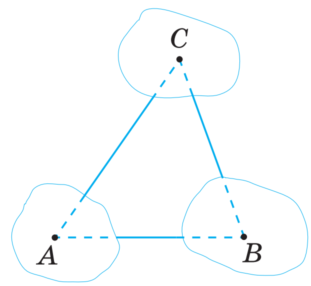
Проявіть компетентність

628. Триповерховий будинок на фотографії має висоту 8 мм. Знаючи, що його справжня висота дорівнює 13 м, а глибина камери фотоапарата — 12 см, визначте, на якій відстані від будинку був розміщений фотоапарат.

629. У трикутнику ABC всі вершини недоступні (мал. 309). Як визначити довжини всіх його сторін?

630. На ділянці шляху завдовжки 320 м підйом однаковий. На кінцях ділянки стоять позначки 186,5 м і 194,9 м.
1) Яка позначка відповідає початку ділянки?
2) Яка позначка стоїть наприкінці ділянки?
3) Якою має бути позначка, що відповідає середині ділянки?
4) Яка позначка має бути на відстані 120 м від початку підйому?

631. Із селища виходять три дороги в напрямках: 1) південно-західному; 2) південному; 3) південно-східному. Якою б дорогою не йшов пішохід із селища, відношення його відстаней до двох інших доріг залишається сталим. Поясніть, чому це так.



Мал. 309

§ 13. ДРУГА І ТРЕТЯ ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Ви знаєте, що рівність трикутників можна встановити за двома сторонами й кутом між ними або за трьома сторонами. Аналогічні ознаки існують для подібності трикутників. Але тут потрібно виявити не рівність, а пропорційність відповідних сторін двох трикутників.

1. ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

ТЕОРЕМА (ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними).

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника й кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

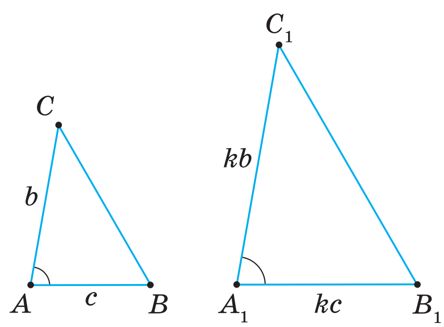
Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 310),
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$.

Довести: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

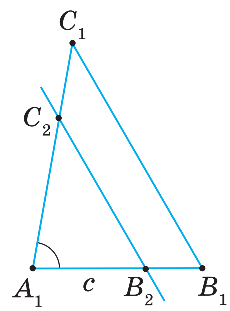
Доведення.

Нехай $A_1B_1 = kAB = kc$,
$A_1C_1 = kAC = kb$.

Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2 = AB = c$ (мал. 311). Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком з узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.



Мал. 310



Мал. 311

Отже, $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$. Звідси $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1}$.

Підставимо в цю пропорцію відомі довжини сторін і скоротимо одержані дроби.
Тоді маємо: $\frac{c}{kc}=\frac{A_1C_2}{kb}$, $1=\frac{A_1C_2}{b}$. Звідси $A_1C_2=b$.
Розглянемо $\Delta A_1B_2C_2$ і ΔABC.
У них $\angle A_1=\angle A$ за умовою, $A_1B_2=AB=c$ за побудовою, $A_1C_2=AC=b$ за доведенням.
Отже, $\Delta A_1B_2C_2=\Delta ABC$ за двома сторонами й кутом між ними.
Із рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

НАСЛІДОК. **Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами — подібні.**

Справді, у прямокутному трикутнику між катетами лежить прямий кут, а прямі кути — рівні. Тому прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами подібні за двома сторонами й кутом між ними.

2. ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

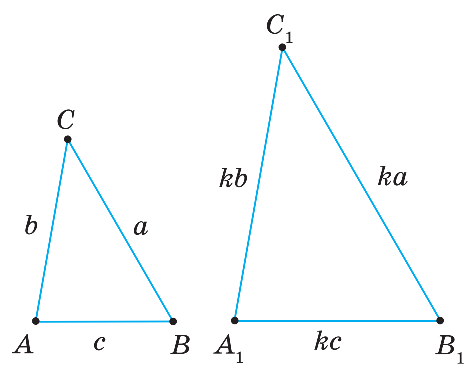
ТЕОРЕМА (ознака подібності трикутників за трьома сторонами).

Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 312),
$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$.

Довести: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доведення. Нехай: $A_1B_1=kAB=kc$, $A_1C_1=kAC=kb$, $B_1C_1=kBC=ka$.
Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2=AB=c$ (мал. 313). Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком із узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.

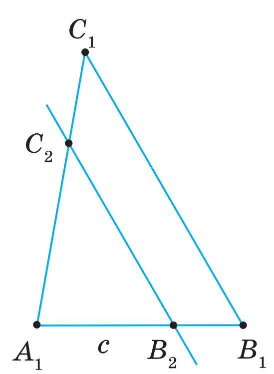


Мал. 312

Отже, $\frac{A_1B_2}{A_1B_1}=\frac{A_1C_2}{A_1C_1}=\frac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

Далі одержимо:
$\frac{c}{kc}=\frac{A_1C_2}{kb}=\frac{B_2C_2}{ka}$, або $1=\frac{A_1C_2}{b}=\frac{B_2C_2}{a}$.
Звідси $A_1C_2=b$, $B_2C_2=a$.
Отже, $A_1C_2=AC$ і $B_2C_2=BC$.

Розглянемо $\Delta A_1B_2C_2$ і ΔABC.
У них $A_1B_2=AB=c$ за побудовою,
$A_1C_2=AC=b$ і $B_2C_2=BC=a$ за доведенням.
Отже, $\Delta A_1B_2C_2=\Delta ABC$ за трьома сторонами.
Із рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



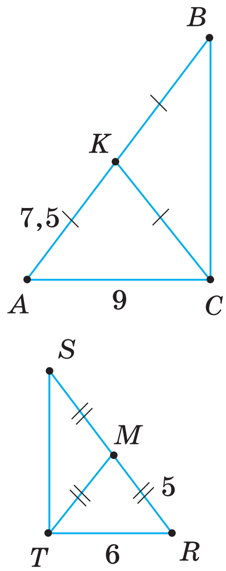
Мал. 313

Задача. У кожному з трикутників ABC і RST (мал. 314) медіана, проведена до більшої сторони, дорівнює половині цієї сторони. Чи подібні дані трикутники, якщо $AC = 9$, $AK = 7{,}5$, $TR = 6$, $MR = 5$?

Розв'язання. Медіани CK і TM відтинають від даних трикутників ABC і RST відповідно ΔACK і ΔRTM. У кожному з них відомі три сторони: $AC = 9$, $AK = KC = 7{,}5$; $RT = 6$, $RM = MT = 5$.
З'ясуємо, чи пропорційні відповідні сторони цих трикутників:
$$\frac{AC}{RT}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2},\ \frac{AK}{RM}=\frac{KC}{MT}=\frac{7{,}5}{5}=\frac{3}{2}.$$
Отже, $\Delta ACK \sim \Delta RTM$ за трьома сторонами. Із подібності цих трикутників випливає, що $\angle A = \angle R$.

Розглянемо ΔABC і ΔRST. У них: $\angle A = \angle R$, $\frac{AC}{RT}=\frac{3}{2}$, $\frac{AB}{RS}=\frac{2AK}{2RM}=\frac{AK}{RM}=\frac{3}{2}$.

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta RST$ за двома сторонами й кутом між ними.



Мал. 314

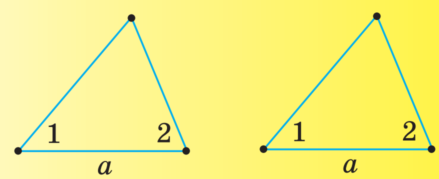
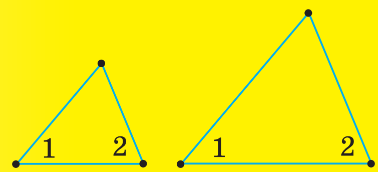
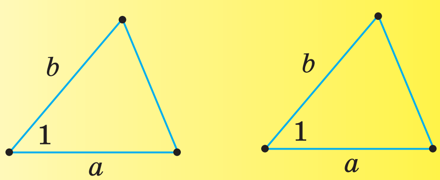
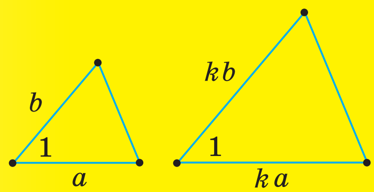
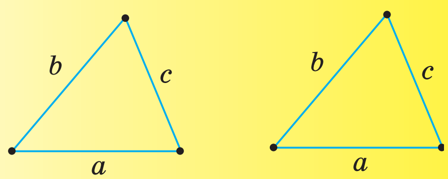
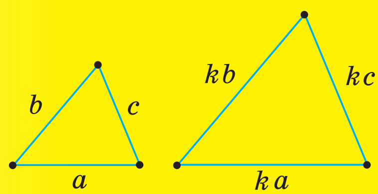
Розв'язуючи задачі, пам'ятайте:
1) якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проведіть допоміжні відрізки, щоб їх утворити;
2) інколи потрібно довести подібність кількох трикутників.

Дізнайтеся більше

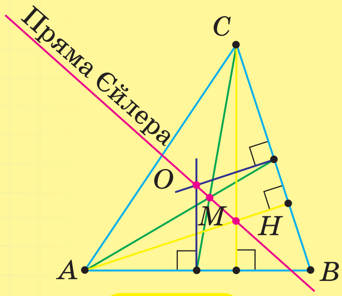
1. Ви, напевне, помітили, що ознаки подібності трикутників мають багато схожого з ознаками рівності трикутників.

За таблицею 19 сформулюйте попарно ознаку рівності й ознаку подібності трикутників. У чому відмінності відповідних ознак?

Таблиця 19

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

2. Застосовуючи подібність трикутників, можна довести, що точка перетину висот трикутника H, точка перетину його медіан M і центр описаного кола O лежать на одній прямій (мал. 315). Цю пряму називають *прямою Ейлера* на честь найвидатнішого математика XVIII ст. Леонарда Ейлера (1707–1783). Він народився в Базелі (Швейцарія), у 1727–1741 рр. працював у Петербурзі, потім — у Берліні, а з 1766 р. — знову в Петербурзі. У його творчому доробку — видатні досягнення в усіх галузях математики, у механіці, фізиці, астрономії. Теорему про пряму, названу його ім'ям, Л. Ейлер сформулював, довів й опублікував у 1765 р.



Мал. 315

Леонард Ейлер

Пригадайте головне

1. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
2. Чому прямокутні трикутники з пропорційними катетами подібні?
3. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.

Розв'яжіть задачі

632'. Чи правильно, що в другій ознаці подібності трикутників йдеться про:
1) дві сторони та два кути даних трикутників;
2) дві сторони й кут даних трикутників;
3) рівність двох відповідних сторін даних трикутників;
4) рівність відповідних кутів даних трикутників;
5) рівність двох відповідних сторін і кутів між ними даних трикутників;
6) пропорційність двох відповідних сторін і рівність кутів між ними даних трикутників?

633'. Чи правильно, що прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами: 1) рівні; 2) подібні?

634'. Чи правильно, що в третій ознаці подібності трикутників ідеться про:
1) кути даних трикутників;
2) сторони й кути даних трикутників;
3) рівність сторін даних трикутників;
4) пропорційність відповідних сторін даних трикутників?

635°. За даними на малюнку 316 назвіть відповідно рівні кути та відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

636°. На малюнку 317 задано елементи трикутників DEF і ABC. Чи подібні дані трикутники?

637°. Трикутник має сторони 5 см і 8 см. Кут між ними дорівнює 50°. Які виміри може мати подібний йому трикутник?

638°. На малюнку 318 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

639°. На малюнку 319 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

640°. У трикутниках KLM і POH один із кутів дорівнює α. Які дві сторони в них мають бути відповідно пропорційними, щоб трикутники були подібними? Накресліть у зошиті таблицю 20 та заповніть її за зразком, наведеним у першому стовпчику.

Таблиця 20

α	2 сторони		α	2 сторони		α	2 сторони	
$\angle K$	$a = KL$	$b = KM$	$\angle L$	$a =$	$b =$	$\angle M$	$a =$	$b =$
$\angle P$	$ka = PO$	$kb = PH$	$\angle H$	$ka =$	$kb =$	$\angle P$	$ka =$	$kb =$
$\Delta KLM \sim \Delta POH$ за двома сторонами та кутом між ними								

641°. У першому трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 8 см; у другому — 6 см і 12 см; у третьому — 10 см і 16 см. Кути, утворені цими сторонами, — рівні. Які з трикутників подібні? Відповідь поясніть.

642°. У трикутнику ABC на сторонах AB і AC взято точки D і E. Чи подібні трикутники ABC і ADE, якщо:
1) $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BD = 2$ см, $CE = 7$ см;
2) $AB = 15$ см, $AC = 18$ см, $BD = 3$ см, $CE = 8$ см;
3) $AB = 20$ см, $AC = 21$ см, $BD = 10$ см, $CE = 10{,}5$ см?

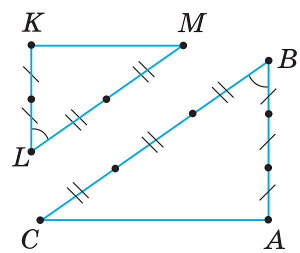
643°. У трикутнику BAC на сторонах BA і BC взято точки M і P. Чи подібні трикутники BAC і BMP, якщо:
1) $BA = 10$ см, $BC = 12$ см, $AM = 5$ см, $CP = 6$ см;
2) $BA = 22$ см, $BC = 16$ см, $AM = 11$ см, $CP = 10$ см?

644°. Чи подібні два рівнобедрені трикутники, якщо бічна сторона й основа одного з них пропорційні бічній стороні й основі другого?

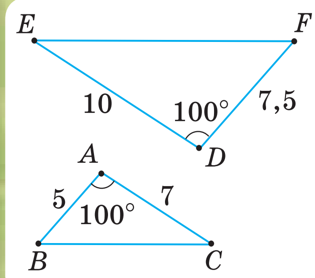
645°. Які з трьох прямокутних трикутників подібні, якщо їх катети дорівнюють:
3 см і 4 см; 5 см і 12 см; 45 мм і 6 см?

646°. Які з трьох прямокутних трикутників подібні, якщо їх катети дорівнюють:
1 см і 24 см; 5 см і 12 см; 25 мм і 0,6 дм?

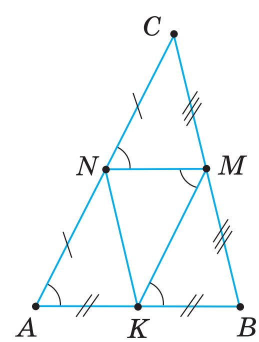
647°. У прямокутнику $ABCD$ точки P і T ділять діагональ AC на три рівні частини. Із цих точок проведено перпендикуляри до сторони AB.



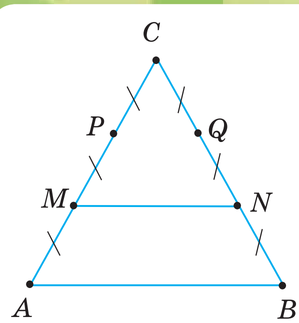
Мал. 316



Мал. 317



Мал. 318



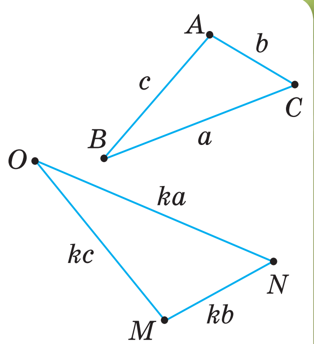
Мал. 319

Знайдіть периметри всіх прямокутних трикутників, які при цьому утворилися, якщо:
1) $AB = 16$ см, $BC = 63$ см, $AC = 65$ см;
2) $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.

648°. У прямокутнику $MOPT$ точки A і B ділять діагональ MP на три рівні частини. Із цих точок проведено перпендикуляри до сторони MO. Знайдіть периметри всіх прямокутних трикутників, які при цьому утворилися, якщо $MO = 8$ см, $OP = 15$ см, $MP = 17$ см.

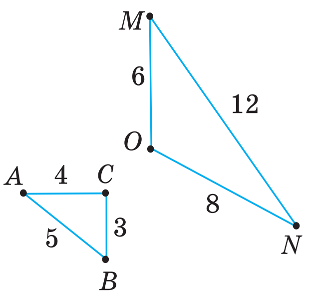
649°. У рівнобічній трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD дорівнюють c і точкою O їх перетину діляться у відношенні $m : n$. $AD - BC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції та периметри трикутників BCO і ADO, якщо:
1) $c = 42$ мм, $m = 8$, $n = 13$; 2) $c = 0{,}8$ дм, $m = 5$, $n = 3$.

650°. У рівнобічній трапеції $MOPT$ діагоналі MP і OT дорівнюють 7 см і точкою C їх перетину діляться у відношенні $2 : 5$. Сторона MT на 4 см довша за сторону OP. Знайдіть основи трапеції та периметри трикутників OPC і MTC.



Мал. 320

651°. За даними на малюнку 320 назвіть відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідний запис.



Мал. 321

652°. На малюнку 321 задано сторони трикутників MON і ABC. Чи подібні дані трикутники?

653°. Трикутник має сторони 5 см, 6 см і 9 см. Які сторони може мати подібний йому трикутник?

654°. Які з трьох трикутників подібні, якщо їх сторони дорівнюють: 8 см, 10 см, 14 см; 12 см, 15 см, 21 см; 16 см, 20 см, 30 см?

655°. Сторони одного трикутника дорівнюють a, b і c. У подібного трикутника найменша сторона дорівнює d. Знайдіть його сторони, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 21$ см;
2) $a = 17$ см, $b = 8$ см, $c = 15$ см, $d = 56$ см.

656°. Сторони одного трикутника дорівнюють 6 см, 5 см і 9 см. Знайдіть сторони подібного трикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 25 см.

657°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b, а бічна сторона — a. У подібному трикутнику основа дорівнює c. Знайдіть його периметр, якщо:
1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.

658°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть периметр подібного трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.

659°. Периметри двох тупокутних трикутників відносяться, як $m : n$. У першому трикутнику більша сторона дорівнює a. Знайдіть більшу сторону другого трикутника, якщо:
1) $a = 24$ мм, $m = 2$, $n = 3$; 2) $a = 1{,}5$ дм, $m = 5$, $n = 3$.

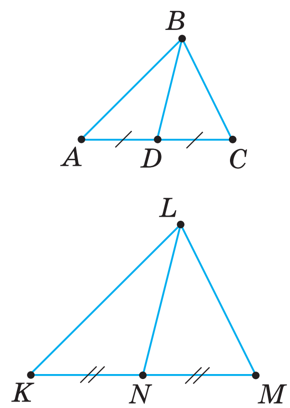
660°. Периметри двох тупокутних трикутників відносяться, як $3 : 4$. У першому трикутнику більша сторона дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону другого трикутника.

661. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$; $AB \cdot A_1B_1 = AC \cdot A_1C_1$. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

662. У трикутниках ABC і KLM: $\angle A = \angle K$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$, $KM = nc - 2n$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:
1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$.

663. У трикутниках TOM і BCE: $\angle T = \angle B$, $TO = 8$ см, $OM = a + 2$, $TM = a - 2$, $BC = pa$, $BE = pa - 2p$. Знайдіть сторони трикутників, якщо $p = 2$.

664. **Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні медіани відносяться, як сторони, до яких вони проведені** (мал. 322).



Мал. 322

665. Два подібні трикутники мають по медіані, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?

666. Сторони кута A одна пряма перетинає в точках K і L, а друга — в точках M і N відповідно, причому $KL : MN = \frac{1}{5} : 0{,}25$, $KM = 3$ см. Якої довжини повинен бути відрізок AK, щоб дані прямі були паралельними?

667. Висота трикутника ділить основу у відношенні $m : n$. У якому відношенні серединний перпендикуляр до основи ділить бічну сторону, якщо:
1) $m = 5$, $n = 9$; 2) $m = 3$, $n = 5$?

668. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BH і CM. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta AMH$.

669. Медіана AA_1 трикутника ABC утворює кут AA_1C, який дорівнює кутові BAC. Чому дорівнює відношення квадратів сторін BC і AC цього трикутника?

670. Точка E — середина сторони BC паралелограма $ABCD$. Відрізок AE перетинає діагональ BD в точці K. Знайдіть відношення відрізків:
1) AK і KE; 2) BK і KD.

671. На продовженні сторони AB (за точку B) паралелограма $ABCD$ взято точку F. Пряма DF перетинає діагональ AC в точці E. Знайдіть довжину відрізка BF, якщо $AB = 10$ см, $AE : CE = 4{,}5 : 3$.

672. Висота BM рівнобічної трапеції $ABCD$ ділить діагональ AC у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить сторону AD, якщо:
1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 1$, $n = 1$?

673. Чи будуть подібними два прямокутні трикутники, якщо в них:
1) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;
2) відношення двох катетів дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;
3) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів вписаних кіл?

674*. **Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетом і гіпотенузою — подібні.** Доведіть.

675*. За стороною a трикутника визначте відстань між точками, які ділять дві інші сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від сторони a.

676*. У трикутник вписано прямокутник так, що його діагоналі відповідно паралельні бічним сторонам трикутника. Знайдіть відношення, у якому вершини прямокутника ділять бічні сторони трикутника, починаючи від вершин основи.

677*. З вершини тупого кута ромба проведено дві висоти. Відстань між кінцями висот дорівнює половині більшої діагоналі. Знайдіть кути ромба.

678*. За основами a і b трапеції ($a > b$) визначте:
1) відстань між точками, які ділять бічні сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від меншої основи;
2) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину діагоналей;
3) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину продовжених бічних сторін і має кінці на продовженнях діагоналей.

679*. **Відрізок із кінцями на бічних сторонах трапеції проходить через точку перетину діагоналей і паралельний основам. Доведіть, що цей відрізок точкою перетину діагоналей ділиться навпіл.**

680*. Основи трапеції відносяться, як $m : n$. Середину O однієї з основ сполучено відрізками з кінцями другої основи. Проведені відрізки перетинають діагоналі трапеції в точках M і N. Знайдіть відстань між цими точками, якщо:
1) точка O належить меншій основі трапеції, $m = 1$, $n = 4$;
2) точка O належить більшій основі трапеції, $m = 2$, $n = 3$.

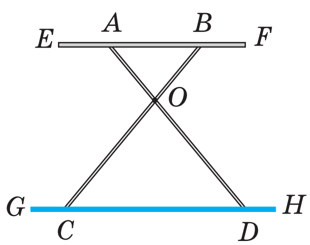
681*. Два кола перетинаються в точках A і B. Дотичні до кіл у точці A перетинають кола в точках M і N. Доведіть, що середини хорд AM і AN, а також точки A і B лежать на одному колі.

682*. Висота BH трикутника ABC ділить медіану AM у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини A. У якому відношенні точка H ділить сторону AC?

683*. Медіана BM ділить висоту AH трикутника ABC у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини. У якому відношенні ця висота ділить медіану BM?

Проявіть компетентність

684. На малюнку 323 ви бачите дачний столик у поперечному розрізі. AD і BC — дві з чотирьох його ніжок. $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см, EF — розріз горизонтальної поверхні стола, GH — лінія підлоги. Поясніть, чому за такої будови столика прямі EF і GH паралельні.



Мал. 323

685. Як знайти відстань між двома пунктами A і B, між якими не можна пройти?

686. У певний момент часу тінь від двометрової віхи мала довжину 1,4 м, а тінь від дерева (якщо міряти від стовбура) — 6,3 м. Визначте висоту дерева, знаючи, що діаметр стовбура біля землі дорівнює 1,2 м.

687. Чому вдень за тінню можна визначити висоту дерева, а вночі за тінню від ліхтаря — ні?

688. Щоб поділити відрізок AB на три рівні частини, діяли так. На промені AD, що не збігається з AB, відклали рівні відрізки AE і EK. Потім на промені KB побудували точку T так, щоб $KB = BT$. Пряма TE поділила відрізок AB у відношенні 2 : 1. Отже, одержали, що менший з утворених відрізків дорівнює третині AB. Більший з утворених відрізків поділили навпіл. Обґрунтуйте таку побудову.

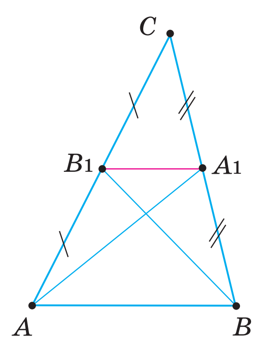
§ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1. ВЛАСТИВОСТІ МЕДІАН ТРИКУТНИКА

ТЕОРЕМА **(властивість медіан трикутника).**

Точка перетину двох будь-яких медіан трикутника ділить кожну з них у відношенні 2 : 1.

Дано: ΔABC, AA_1, BB_1 — медіани, O — точка перетину медіан.
Довести: $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$.
Доведення.
Сполучимо відрізком точки A_1 і B_1 (мал. 324). Одержали середню лінію A_1B_1 трикутника ABC.
Трикутники AOB і A_1OB_1 подібні за двома кутами:
$\angle AOB = \angle A_1OB_1$ як вертикальні, $\angle OAB = \angle OA_1B_1$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і A_1B_1 та січній AA_1. Отже, відповідні сторони цих трикутників пропорційні. Оскільки, за властивістю середньої лінії трикутника, $AB : A_1B_1 = 2 : 1$, то $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1$.
Медіани AA_1, BB_1 були обрані довільно, тому твердження справджується для будь-якої пари медіан ΔABC.



Мал. 324

НАСЛІДОК. Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

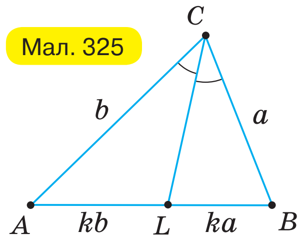
Справді, за доведеною теоремою, точка O перетину медіан AA_1 і BB_1 трикутника ABC ділить кожну з них у відношенні 2 : 1. Однак точка, що ділить відрізок у заданому відношенні, — єдина. Тому й третя медіана трикутника буде проходити через цю точку.

2. ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

ТЕОРЕМА (властивість бісектриси трикутника).

Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Мал. 325



Дано: ΔABC (мал. 325), CL — бісектриса.

Довести: $AL : BL = AC : BC$.

Доведення.

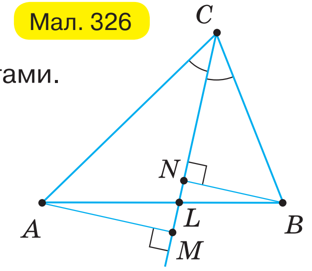
Із точок A і B проведемо перпендикуляри AM і BN до прямої CL.

Розглянемо ΔAMC і ΔBNC.

У них: $\angle AMC = \angle BNC = 90°$, $\angle ACM = \angle BCN$, оскільки CL — бісектриса $\angle C$. Отже, $\Delta AMC \sim \Delta BNC$ за двома кутами.

Звідси $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AM}{BN}$. (1)

Мал. 326



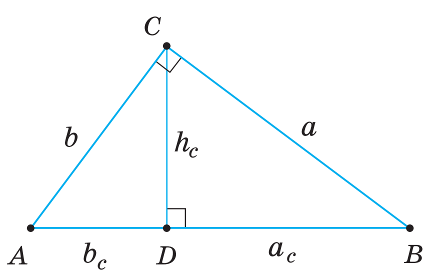
Розглянемо ΔALM і ΔBLN. У них: $\angle AML = \angle BNL = 90°$, $\angle ALM = \angle BLN$ як вертикальні. Отже, $\Delta AML \sim \Delta BNL$ за двома кутами.

Звідси $\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{AL}{BL}$. (2)

Із рівностей (1) і (2) одержимо: $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC}$.

У трикутнику пропорційні відрізки на стороні, яку перетинає бісектриса, зручно позначати з коефіцієнтом пропорційності k (див. мал. 325): $AL = kb$, $BL = ka$.

3. СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



Мал. 327

Проведемо висоту CD до гіпотенузи AB у прямокутному трикутнику ABC (мал. 327). Вона ділить гіпотенузу на відрізки AD і BD, які називаються *проекціями катетів на гіпотенузу*.

Якщо сторони трикутника позначено маленькими буквами, тоді проекції катетів a і b на гіпотенузу c позначають відповідно: a_c і b_c.

Відрізок x називається середнім пропорційним між відрізками a і b, якщо виконується рівність $a : x = x : b$.

Задача (властивості середніх пропорційних у прямокутному трикутнику). **У прямокутному трикутнику: 1) висота до гіпотенузи є середнім пропорційним між проєкціями катетів на гіпотенузу; 2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проєкцією на гіпотенузу; 3) проєкції катетів на гіпотенузу відносяться, як квадрати катетів.** Доведіть.

Розв'язання. 1) Розглянемо ΔAHC і ΔCHB (мал. 328). Вони прямокутні, оскільки CH — висота. $\angle ACH = \angle CBH$, оскільки доповнюють до $90°$ відповідно кути A і B даного трикутника ACB. Отже, $\Delta AHC \sim \Delta CHB$ за двома кутами.

Із подібності трикутників випливає: $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{BH}$.

Звідси $CH^2 = AH \cdot BH$.

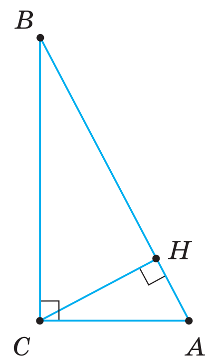
2) Кожний із трикутників AHC і CHB подібний даному трикутнику ACB. Це випливає з рівності їх відповідних кутів.

Тоді одержимо:

а) $\Delta AHC \sim \Delta ACB$, тому $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$. Звідси $AC^2 = AH \cdot AB$.

б) $\Delta CHB \sim \Delta ACB$, тому $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{CB}{AB}$. Звідси $BC^2 = BH \cdot AB$.

3)За доведеним, у прямокутному трикутнику (див. мал. 327) квадрати катетів відповідно дорівнюють $a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$. Тому $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{ca_c}{cb_c} = \dfrac{a_c}{b_c}$, звідки $\dfrac{a_c}{b_c} = \dfrac{a^2}{b^2}$.



Мал. 328

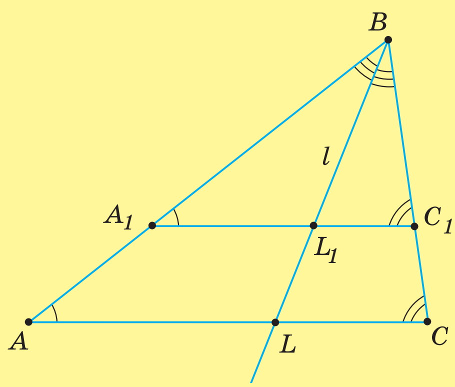
Щоб знайти проекції катетів на гіпотенузу за відомими трьома сторонами даного прямокутного трикутника:
1) прирівняйте відношення шуканих проекцій катетів на гіпотенузу до відношення квадратів відповідних катетів;
2) запишіть, що сума шуканих проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює заданій гіпотенузі;
3) з одержаних двох рівнянь утворіть систему та розв'яжіть її.

Дізнайтеся більше

1. Подібність трикутників застосовують не лише у задачах на доведення чи обчислення, але й у задачах на побудову.

Задача. Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та бісектрисою l кута B.

Розв'язання. Будуємо допоміжний ΔABC за двома кутами A і C (мал. 329). Проводимо бісектрису BL кута B. На промені BL відкладаємо відрізок $BL_1 = l$. Через точку L_1 проводимо пряму $A_1C_1 \parallel AC$. За побудовою, у трикутника A_1BC_1: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, BL_1 — бісектриса кута B і $BL_1 = l$. Отже, ΔA_1BC_1 — шуканий.



Мал. 329

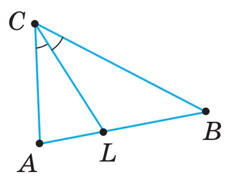
2. Значний вклад у розвиток теорії геометричних побудов вніс відомий український математик Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969), який народився у с. Лісові Берлінці на Вінниччині. У своїх працях, адресованих учням і вчителям, вчений розкриває особливості розв'язування задач на побудову різними засобами: циркулем і лінійкою; одним циркулем; однією лінійкою. І досі не втратила цінності його книга «Дослідження задач на побудову» (1961 р.).

О. С. Смогоржевський

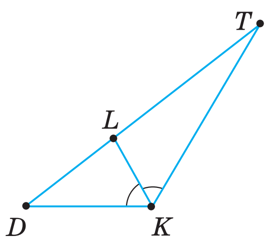
Пригадайте головне

1. Сформулюйте властивості медіан трикутника.
2. Яку властивість має бісектриса кута трикутника?
3. Які відрізки називають проекціями катетів на гіпотенузу? Як їх позначають?
4. Що таке середнє пропорційне між двома відрізками?
5. Сформулюйте властивості середніх пропорційних у прямокутному трикутнику.

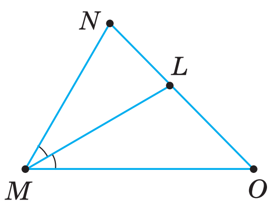
Розв'яжіть задачі



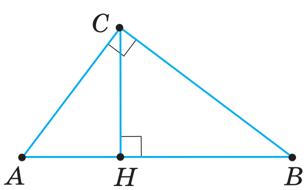
Мал. 330, *а*



Мал. 330, *б*



Мал. 330, *в*



Мал. 331

689'. У трикутнику KLM проведено медіани KK_1, LL_1, MM_1, які перетинаються в точці O. Чи правильно, що:
1) $KO : OK_1 = 2 : 1$; 2) $L_1O : LO = 2 : 1$; 3) $OM : M_1O = 2 : 1$?

690'. Запишіть, чому дорівнює відношення відрізків, на які бісектриса трикутника ділить протилежну сторону (мал. 330, *а* – *в*).

691'. Чи правильно записано співвідношення для ΔACB (мал. 331):
1) $CH = AC \cdot BC$; 4) $AC = AH \cdot BH$; 7) $BC = BA \cdot AH$;
2) $CH^2 = AB \cdot BH$; 5) $AC^2 = BC \cdot AB$; 8) $BC^2 = AC \cdot BA$;
3) $CH^2 = AH \cdot BH$; 6) $AC^2 = AH \cdot AB$; 9) $BC^2 = BH \cdot BA$?

692°. Медіани трикутника дорівнюють: 1) 9 см, 12 см і 15 см; 2) 6 см, 6 см і 3 см; 3) 45 см, 45 см і 45 см. Знайдіть довжини частин, на які вони діляться точкою їх перетину.

693°. Медіани трикутника дорівнюють 18 см, 18 см і 27 см. Знайдіть довжини частин, на які вони діляться точкою їх перетину.

694°. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють: 1) 12 см, 16 см і 24 см; 2) 4 см, 4 см і 6 см; 3) 8 см, 8 см і 8 см.

695°. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють 6 см, 10 см і 14 см.

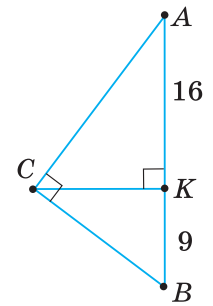
696°. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD, яка ділить сторону AC на відрізки AD і DC. Накресліть у зошиті таблицю * та заповніть її.

AB	10 см	21 см	3 см	5 см
BC	15 см	18 см		15 см
AC	20 см		4 см	
AD		14 см		3 см
DC			2,5 см	

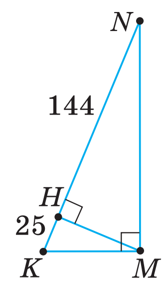
697°. З вершини B трикутника ABC ($AB > BC$) проведено бісектрису BL і медіану BM. Яка з двох точок (L чи M) розміщена ближче до вершини C? Висновок поясніть.

698°. З вершини B трикутника ABC ($BC > AB$) проведено медіану BM і висоту BH. Яка з двох точок (M чи H) розміщена ближче до вершини A? Висновок поясніть.

699°. За даними на малюнках 332, 333 знайдіть:
1) гіпотенузу; 2) катети; 3) висоту, проведену до гіпотенузи.

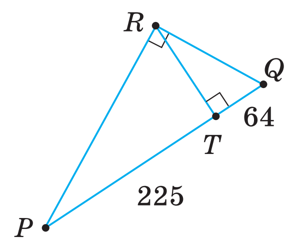


Мал. 332



Мал. 333

700°. У ΔPRQ (мал. 334) визначте:
1) гіпотенузу; 2) катети; 3) висоту, проведену до гіпотенузи.

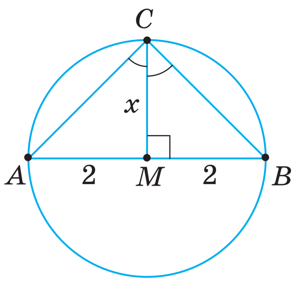


Мал. 334

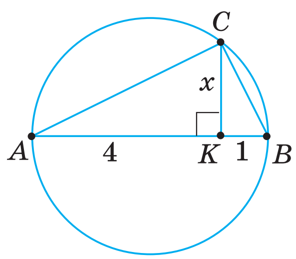
701°. За даними на малюнках 335–337 визначте довжину відрізка x (AB — діаметр кола).

702°. Із точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть відстань від цієї точки до діаметра, якщо одержані відрізки діаметра дорівнюють: 1) 16 см і 1 см; 2) 0,5 см і 8 см.

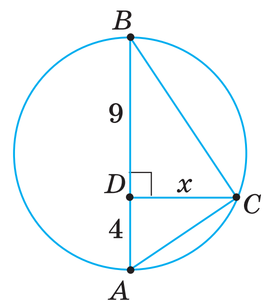
703°. Перпендикуляр, проведений з точки кола до діаметра, ділить діаметр на відрізки 9 см і 4 см. Знайдіть відстань від цієї точки до діаметра.



Мал. 335



Мал. 336



Мал. 337

704. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельно одній із сторін. У якому відношенні ця пряма ділить інші сторони трикутника?

705. У трикутнику зі сторонами 12 см, 18 см і 24 см через точку перетину медіан проведено пряму, паралельну одній із сторін. Знайдіть сторони утвореного трикутника.

706. Одна зі сторін паралелограма є середньою лінією трикутника, а інші вершини паралелограма лежать на відповідних медіанах трикутника. У якому відношенні ці вершини паралелограма ділять медіани трикутника, рахуючи від відповідних вершин трикутника?

707. Чи правильно, що AK є бісектрисою DABC, якщо: 1) AB = 12 см BC = 16 см, BK = 6 см, CK = 8 см; 2) AB = 5 см, BC =15 см, BK = 4 см, CK = 16 см?

708. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 12 см, 15 см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса трикутника ділить його найбільшу сторону.

709. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 120 см, а бісектриса прямого кута ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 3 см і 5 см.

710. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відрізки на які бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ.

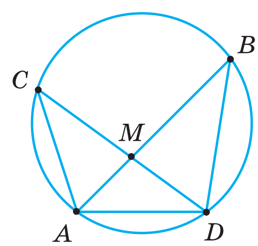
711. У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами 6 см і 8 см діагональ AC є бісектрисою гострого кута A. У якому відношення вона ділить: 1) діагональ BD трапеції; 2) висоту BK трапеції.

712. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 12 см, бічна сторона — 10 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть відстань від основи цієї висоти трикутника до його бічної сторони.

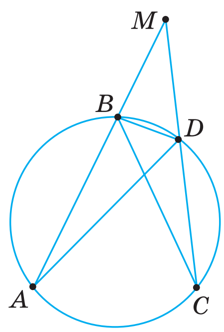
713. Чому дорівнює відстань від основи висоти рівнобедреного трикутника до його бічної сторони, якщо його основа дорівнює 14 см, бічна сторона — 25 см, а висота, проведена до основи, — 24 см?

714. Діагоналі ромба зі стороною a дорівнюють d_1 і d_2. Визначте висоту ромба, якщо: 1) $a = 25$ см, $d_1 = 30$ см, $d_2 = 40$ см; 2) $a = 169$ мм, $d_1 = 130$ мм, $d_2 = 312$ мм.

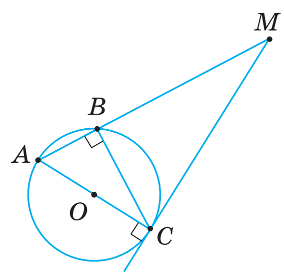
715. За даними на малюнках 338–340 доведіть, що вказані трикутники подібні: 1) ΔACM і ΔDBM (мал. 338); 2) ΔADM і ΔCBM (мал. 339); 3) ΔABC і ΔACM (мал. 340).



Мал. 338



Мал. 339

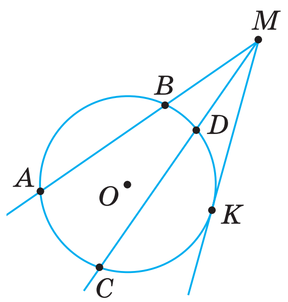


Мал. 340

716. **Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.** Доведіть.

717. **Якщо з точки M поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B, C і D, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.** Доведіть.

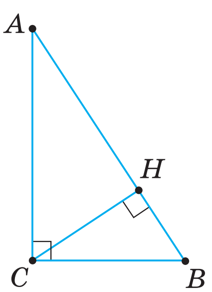
718. **Якщо з точки M поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках A і B, та дотичну, що дотикається до кола в точці K, то $AM \cdot BM = KM^2$** (мал. 341). Доведіть.



Мал. 341

719*. Доведіть, що бісектриси кутів A і C прямокутника $ABCD$ ділять діагональ BD на три рівні частини.

720*. Доведіть, що квадрат добутку катетів прямокутного трикутника дорівнює квадрату добутку його гіпотенузи на висоту, проведену до гіпотенузи (мал. 342).



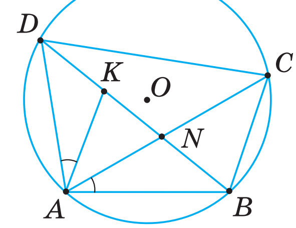
Мал. 342

721*. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.

722*. У гострий кут вписано три кола, причому середнє коло дотикається до двох інших. Доведіть, що радіус середнього кола є середнім пропорційним між радіусами крайніх кіл.

723*. Спираючись на малюнок 343, доведіть, що:

1) $\Delta ADB \sim \Delta ACB$;
2) $\Delta BAC \sim \Delta BDC$;
3) $\Delta ADK \sim \Delta ACB$;
4) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.



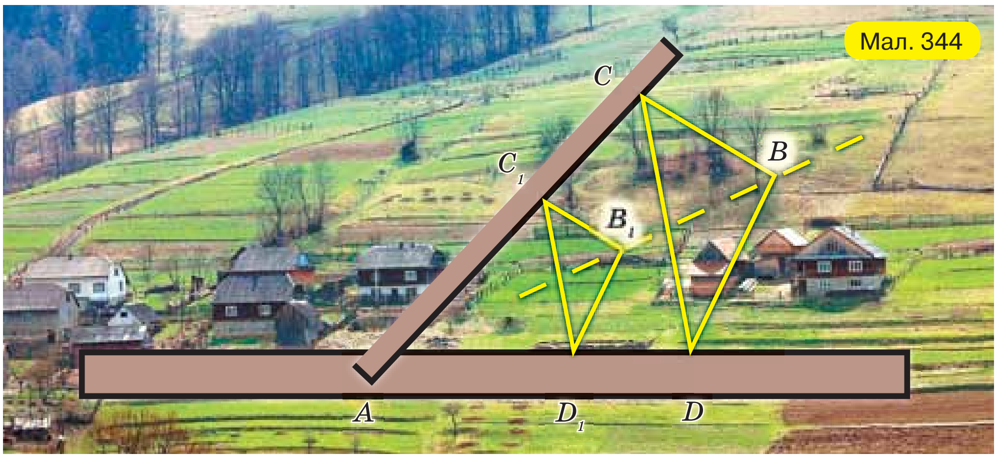
Мал. 343

Проявіть компетентність

724. Спираючись на властивість проекцій катетів на гіпотенузу, можна будувати висоту до гіпотенузи прямокутного трикутника без використання транспортира чи косинця.
Поясніть, як це можна зробити.

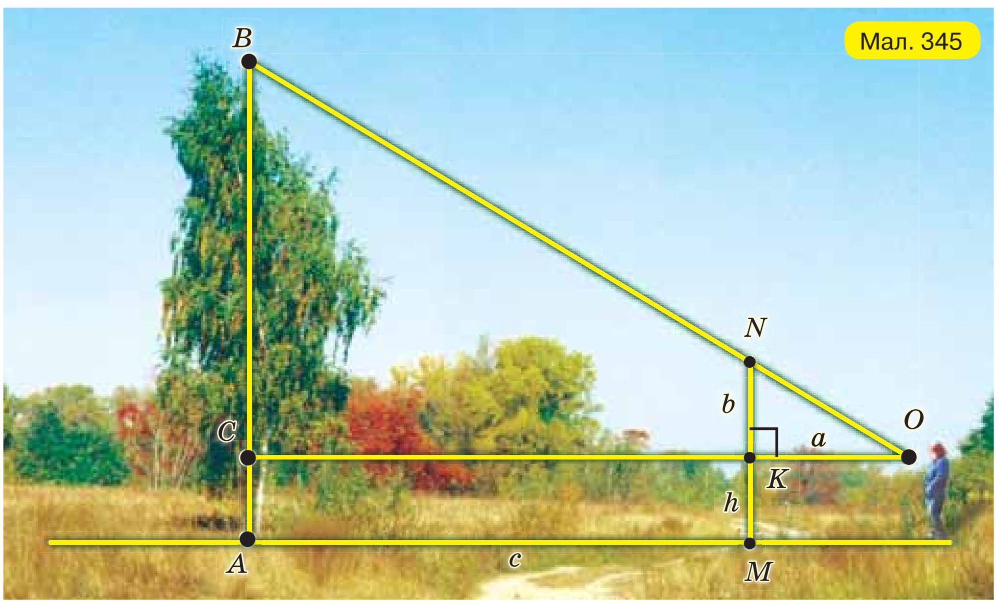
725. Поясніть, як позначити дванадцять точок у вузлах сітки на папері в клітинку, щоб ці точки лежали на колі радіуса 5 клітинок.

726. Із пункту B до перетину доріг AC і AD потрібно прокласти трасу. Поясніть за малюнком 344, як це можна зробити, якщо пункт A — недоступний.



Мал. 344

727. На малюнку 345 показано, як можна виміряти висоту дерева, користуючись однією віхою. Поясніть вимірювання.



Мал. 345

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які трикутники називаються подібними?
2. Як записати, що два трикутники подібні з коефіцієнтом k?
3. Поясніть, як скласти відношення відповідних сторін двох подібних трикутників.
4. Чому дорівнює коефіцієнт подібності рівних трикутників?
5. Що можна сказати про відношення периметрів подібних трикутників?
6. Як формулюється узагальнена теорема Фалеса?
7. Сформулюйте наслідок з узагальненої теореми Фалеса.
8. Поясніть, як довести подібність трикутників за означенням.
9. Сформулюйте та доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
10. Чому рівносторонні трикутники подібні?
11. Поясніть, як довести подібність двох трикутників.
12. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
13. Чому прямокутні трикутники з пропорційними катетами подібні?
14. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.
15. Сформулюйте теорему про властивість медіан трикутника та наслідок з неї.
16. Яку властивість має бісектриса кута трикутника?
17. Які відрізки називають проекціями катетів на гіпотенузу? Як їх позначають?
18. Що таке середнє пропорційне між двома відрізками? Яка його властивість?
19. Сформулюйте властивості середніх пропорційних відрізків у прямокутному трикутнику.
20. Чому дорівнює відношення проєкцій катетів на гіпотенузу в прямокутному трикутнику?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1° $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Кут A дорівнює $60°$, а кут B на $20°$ менший від кута A. Знайдіть кут C_1.

А. $40°$.
Б. $80°$.
В. $100°$.
Г. $120°$.

2° У трикутниках KLM і DEF: $\angle K = \angle D = 90°$, $\angle M = \angle F = 30°$, $DF = 5KM$. Чому дорівнює DE, якщо $KL = 10$ см?

А. 2 см.
Б. 15 см.
В. 25 см.
Г. 50 см.

3° У трикутнику зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см проведено бісектрису меншого кута. На які відрізки бісектриса поділила протилежну сторону?

А. 1,5 см і 2 см.
Б. 3,5 см і 3,5 см.
В. 2 см і 5 см.
Г. 3 см і 4 см.

4 Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O. $AD : BC = 3 : 2$, $AC = 30$ см. Знайдіть довжини відрізків AO і OC.

А. 10 см і 15 см.
Б. 6 см і 9,5 см.
В. 12 см і 18 см.
Г. 18 см і 12 см.

5* У трикутнику ABC висота AH завдовжки 12 см проведена до сторони BC і відтинає на ній відрізок $BH = 9$ см. Знайдіть відстань від точки H до сторони AB завдовжки 15 см.

А. 5,4 см.
Б. 7,2 см.
В. 9,6 см.
Г. 12 см.

Розділ 3

Розв'язування прямокутних трикутників

У розділі дізнаєтеся:

- про визначну теорему геометрії — теорему Піфагора та наслідки з неї;
- що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами;
- про алгоритми знаходження за однією зі сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника — гострих кутів;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту

§ 15. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

1. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

Доведемо теорему, відкриття якої пов'язане з ім'ям давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.).

ТЕОРЕМА **Піфагора**

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ (мал. 346).

Довести: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

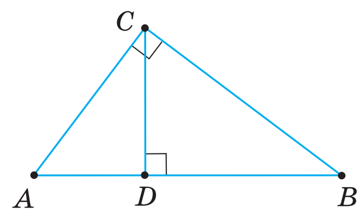
Доведення. З вершини прямого кута C проведемо висоту CD. Кожний катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу. Тому

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ і } BC^2 = AB \cdot DB.$$

Додавши рівності почленно та врахувавши, що $AD + DB = AB$, одержимо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB\,(AD + DB) = AB^2.$$

Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

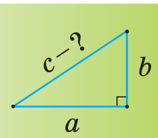


Мал. 346

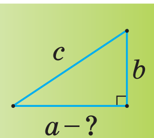
Якщо a, b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ одержимо такі формули: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = c^2 - b^2$, або $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, або $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Скориставшись цими формулами, за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника можна знайти його третю сторону (табл. 21).

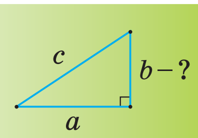
Таблиця 21



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$



$a = \sqrt{c^2 - b^2}$



$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Наприклад:

1) якщо $a = 6$ см, $b = 8$ см, то $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см);

2) якщо $c = 13$ см, $a = 5$ см, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Правильною є і теорема, обернена до теореми Піфагора: **якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.**

За теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см — прямокутний, оскільки $3^2 + 4^2 = 5^2$. Такий трикутник інколи називають *єгипетським*.

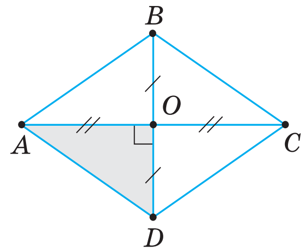
Задача. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з його діагоналей — 16 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 347), $AC = 16$ см, $AD = 10$ см. Знайдемо діагональ BD. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл. Тому ΔAOD — прямокутний ($\angle O = 90°$). У ньому: катет $AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см), гіпотенуза $AD = 10$ см.

За теоремою Піфагора, $AD^2 = AO^2 + OD^2$, звідси:

$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Тоді $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

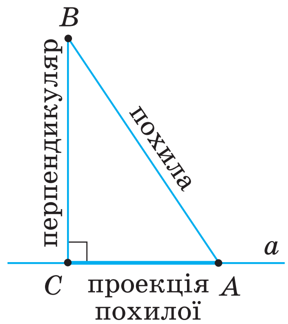


Мал. 347

Щоб знайти деякий елемент фігури (сторону, висоту, діагональ), виділіть на малюнку прямокутний трикутник, стороною якого є шуканий елемент, і застосуйте теорему Піфагора.

2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Нехай BC — перпендикуляр, проведений із точки B до прямої a (мал. 348). Візьмемо довільну точку A на прямій a, відмінну від точки C, і сполучимо точки A і B. Відрізок AB називають *похилою*, проведеною з точки B до прямої a. Точку A називають *основою похилої*, а відрізок AC — *проекцією похилої*.



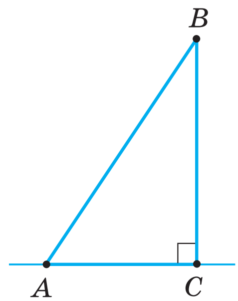
Мал. 348

Похилі мають такі властивості.

Якщо з даної точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то:
1) будь-яка похила більша за перпендикуляр;
2) рівні похилі мають рівні проекції;
3) із двох похилих більша та, у якої більша проекція.

Покажемо, що властивості похилих випливають із теореми Піфагора.

1) За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (мал. 349), тоді $AB^2 > BC^2$ або $AB > BC$.



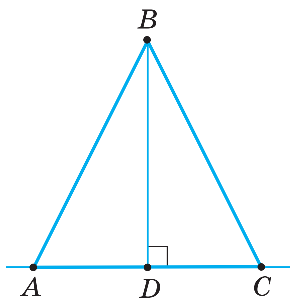
Мал. 349

2) Із прямокутних трикутників ABD і CBD (мал. 350) маємо:

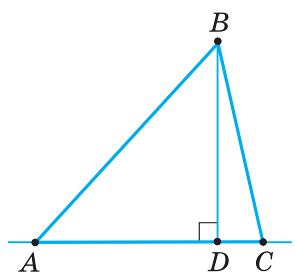
$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}, \quad DC = \sqrt{BC^2 - BD^2}.$$

Оскільки в цих рівностях $AB = BC$ (за умовою), то $AD = DC$.

3) Із прямокутних трикутників ABD і CBD (мал. 351) маємо: $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$, $BC = \sqrt{DC^2 + BD^2}$. У цих рівностях $AD > DC$. Тоді $AB > BC$.

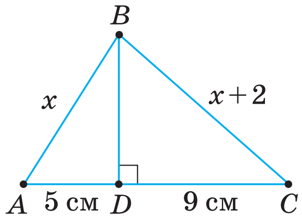


Мал. 350



Мал. 351

Задача. Із точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть похилі, якщо одна з них на 2 см більша за другу.



Мал. 352

Розв'язання. Нехай $AD = 5$ см, $DC = 9$ см (мал. 352). Оскільки $AD < DC$, то, за властивістю 3 похилих, $AB < BC$. Позначимо AB через x, тоді $BC = x + 2$. Із прямокутних трикутників ABD і CBD знаходимо BD^2.
Із ΔABD: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$.
Із ΔCBD: $BD^2 = BC^2 - DC^2 = (x + 2)^2 - 9^2 = x^2 + 4x - 77$.
Прирівнявши праві частини рівностей, одержимо: $x^2 + 4x - 77 = x^2 - 25$.
Звідси $4x = 52$, $x = 13$ см. Отже, $AB = 13$ см, $BC = 13 + 2 = 15$ (см).

Якщо в умові задачі дано дві похилі, проведені з однієї точки до прямої, то розгляньте два прямокутні трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений зі спільної точки до цієї прямої.

Дізнайтеся більше

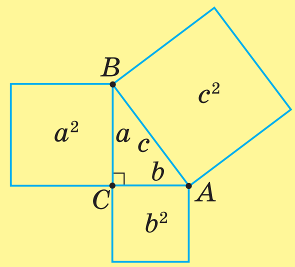

Піфагор

Теорема Піфагора — одна з визначних теорем математики. Протягом багатьох століть вона була поштовхом до важливих математичних досліджень. Тому пропонуємо вам кілька цікавих фактів, пов'язаних із цією теоремою та життям її автора.

Піфагор (570–496 рр. до н. е.) народився на острові Самосі (на півдні Егейського моря). Довгий час вивчав математику в Єгипті та Вавилоні. У м. Кротон, на півдні Італії, заснував наукову школу — так званий піфагорійський союз. Піфагор та його учні займалися математикою, філософією, астрономією й теорією музики. Через суспільні суперечки будинок школи був розгромлений, а сам Піфагор — убитий.

Серед досягнень піфагорійців найвагомішим вважають теорему, названу Піфагоровою, та її доведення. (Нині встановлено, що цю теорему застосовували за 1500 років до Піфагора в Давньому Вавилоні.)

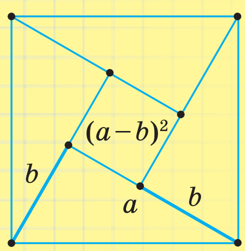
Теорема була сформульована так: **площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах** (мал. 353).



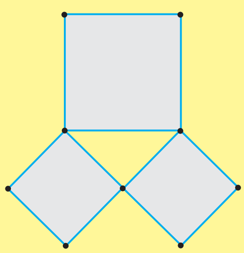
Мал. 353

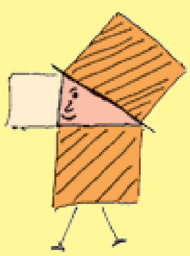
Доведенням теореми Піфагора займалось багато математиків протягом кількох століть. Нині є понад 150 різних доведень цієї теореми. Так, індійський математик Бхаскара (XII ст.) запропонував таку фігуру, як на малюнку 354, без жодних пояснень. Під малюнком стоїть лише одне слово — «дивись». Спробуйте пояснити справедливість теореми за цим малюнком.

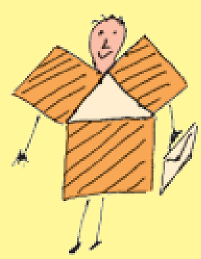
З теоремою Піфагора пов'язані учнівські жарти: малюнок до теореми для випадку рівнобедреного прямокутного трикутника називали «піфагоровими штанами» (мал. 355). Іноді цей малюнок зображали у вигляді різних смішних фігурок (мал. 356 і 357).



Мал. 354


Мал. 355


Мал. 356


Мал. 357

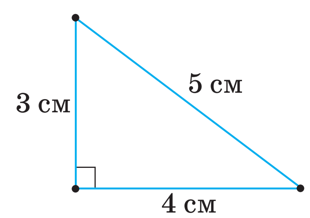
Пригадайте головне

1. Сформулюйте та доведіть теорему Піфагора.
2. Поясніть, як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону.
3. Що таке похила; основа похилої; проекція похилої?
4. Сформулюйте властивості похилих.

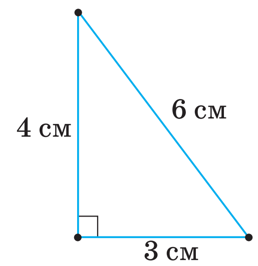
Розв'яжіть задачі

728'. Яке з наведених тверджень є правильним?
У прямокутному трикутнику:
1) квадрат гіпотенузи дорівнює різниці квадратів катетів;
2) гіпотенуза дорівнює сумі квадратів катетів;
3) квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

729'. Чи правильно вказано довжини сторін прямокутних трикутників на малюнках 358, 359? Відповідь поясніть.

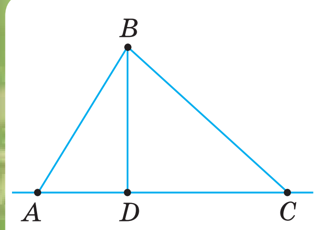


Мал. 358



Мал. 359

730'. На малюнку 360 AD і DC — проекції похилих AB і BC. Відомо, що $AD < DC$. Яке із співвідношень є правильним:
1) $AB = BC$; 2) $AB > BC$; 3) $AB < BC$?



Мал. 360

731°. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 12 см і 5 см; 2) 9 м і 12 м; 3) 8 см і $8\sqrt{3}$ см.

732°. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет дорівнюють:
1) 13 см і 12 см; 2) 17 м і 15 м; 3) $15a$ і $9a$.

733°. a, b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Знайдіть невідомі величини за таблицею 22.

Таблиця 22

a		12 см	$8a$
b	5 см		$6a$
c	13 см	20 см	

734°. a, b — сторони прямокутника, d — його діагональ. Знайдіть невідомі величини за таблицею 23.

Таблиця 23

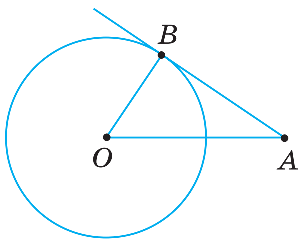
a	24 см	10 см	$12a$
b	7 см		
d		26 см	$15a$

735°. **Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів двох його суміжних сторін.**

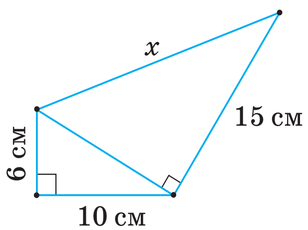
736°. Знайдіть діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

737°. Знайдіть гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює:
1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) a.

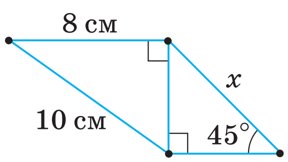
738°. Знайдіть катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:
1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) m.



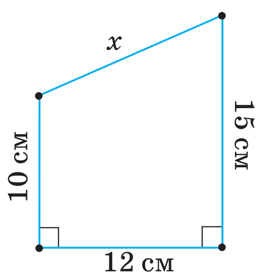
Мал. 361



Мал. 362



Мал. 363



Мал. 364

739°. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) a.

740°. Знайдіть висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють:
1) 26 см і 20 см; 2) 17 см і 16 см; 3) 13 см і 10 см.

741°. Через точку A до кола з центром O проведено дотичну AB, де B — точка дотику (мал. 361). Знайдіть:
1) радіус кола, якщо відрізок дотичної AB дорівнює 8 см, а відстань від точки A до центра кола — 17 см;
2) відстань від точки A до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 12 см, а відрізок дотичної AB — 16 см.

742°. Знайдіть сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) 6 см і 8 см; 2) 18 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.

743°. Доведіть, що коли a — сторона ромба, d_1 і d_2 — його діагоналі, то $4a^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2}$.

744°. З точки A до прямої проведено перпендикуляр AB і похилу AC. Знайдіть:
1) похилу AC, якщо її проекція BC дорівнює 24 см, а перпендикуляр AB — 10 см;
2) проекцію BC похилої, якщо перпендикуляр AB дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а похила AC — 16 см;
3) перпендикуляр AB, якщо похила AC дорівнює 17 см, а її проекція BC — 8 см.

745. За даними на малюнках 362, 363 знайдіть невідомий відрізок x.

746. За даними на малюнку 364 знайдіть невідомий відрізок x.

747. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а другий — менший від гіпотенузи на 1 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо:
1) $b = 5$ см; 2) $b = 7$ см.

748. Катети прямокутного трикутника відносяться, як 3 : 4. Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:
1) 25 см; 2) 20 см.

749. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см, а катети відносяться, як 3 : 4. Знайдіть сторони трикутника.

750. Знайдіть сторони прямокутного трикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а катети відносяться, як 15 : 8.

751. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи, як $m : n$, а висота, проведена до основи, дорівнює h. Знайдіть основу та бічну сторону трикутника, якщо:
1) $m = 5$, $n = 6$, $h = 12$ см;
2) $m = 17$, $n = 16$, $h = 15$ см.

752. Одна з діагоналей паралелограма перпендикулярна до сторони. Знайдіть довжини діагоналей, якщо сторони паралелограма дорівнюють:
1) 15 см і 9 см;
2) 7 см і 25 см.

753. Основи прямокутної трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть більшу бічну сторону, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $h = 6$ см; 2) $a = 35$ см, $b = 15$ см, $h = 21$ см.

754. **Доведіть, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.**

755. За даними на малюнках 365, 366 знайдіть невідомий елемент x рівнобічної трапеції $ABCD$.

756. За даними на малюнку 367 знайдіть невідомий елемент x рівнобічної трапеції $ABCD$.

757. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть діагональ трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $h = 16$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $h = 5$ см.

758. У рівнобічну трапецію з основами a і b вписано коло радіуса r. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см, $r = 3$ см; 2) $a = 32$ см, $b = 18$ см, $r = 12$ см.

759. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону на відрізки b і c, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $b = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.

760. У колі радіуса r проведено паралельні хорди завдовжки a і b. Знайдіть відстань між хордами, якщо:
1) $r = 25$ см, $a = 40$ см, $b = 48$ см; 2) $r = 65$ см, $a = 120$ см, $b = 32$ см.

761. Два кола радіусів 2 см і 8 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть довжину відрізка їх зовнішньої спільної дотичної, що лежить між точками дотику (мал. 368).

762. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проекція — 12 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут: 1) 30°; 2) 45°.

763. З точки, що лежить на відстані 12 см від прямої, проведено дві похилі, завдовжки 13 см і 20 см. Знайдіть відстань між основами цих похилих. Скільки розв'язків має задача?

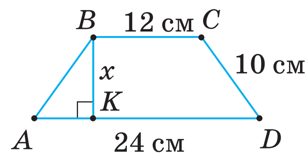
764. З точки до прямої проведено дві похилі, завдовжки 10 см і 17 см. Їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть:
1) проекції похилих; 2) відстань від точки до прямої.

765. **Якщо дві похилі, проведені до прямої з однієї точки, мають рівні проекції, то вони рівні між собою.** Доведіть.

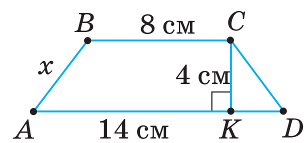
766. **Якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має й більшу проекцію на цю пряму.** Доведіть.

767*. У прямокутному трикутнику медіана й висота, проведені з вершини прямого кута, дорівнюють m і n. Знайдіть периметр трикутника, якщо:
1) $m = 25$ см, $n = 24$ см; 2) $m = 17$ см, $n = 15$ см.

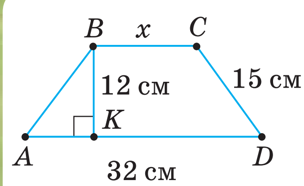
768*. У прямокутному трикутнику один катет дорівнює b см, а сума гіпотенузи і другого катета на n см більша. Знайдіть гіпотенузу і другий катет, якщо:
1) $b = 60$, $n = 12$; 2) $b = 35$, $n = 14$.



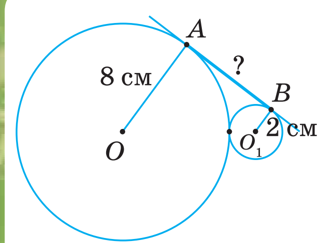
Мал. 365



Мал. 366



Мал. 367



Мал. 368

769*. Висота й медіана, проведені до сторони c трикутника, дорівнюють h і m. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо:
1) $c = 60$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см; 2) $c = 42$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см.

770*. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 7 см, 15 см, 20 см.

771*. **Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.**

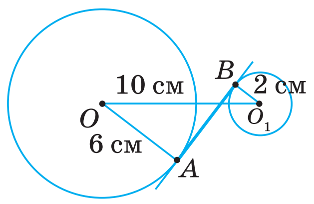
772*. **Доведіть, що коли d_1 і d_2 — діагоналі трапеції, a і b — її основи, c і d — бічні сторони, то $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.**

773*. Доведіть, що в колі:
1) рівні хорди рівновіддалені від центра;
2) із двох нерівних хорд більша хорда ближча до центра.

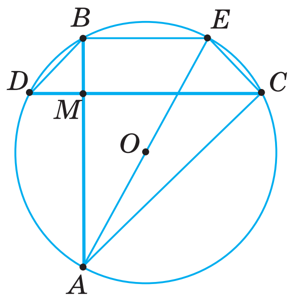
774*. Два кола дотикаються зовнішньо. Доведіть, що відрізок їх зовнішньої спільної дотичної, що лежить між точками дотику, — середнє пропорційне між діаметрами кіл.

775*. Відстань між центрами кіл радіусів 6 см і 2 см дорівнює 10 см. Знайдіть довжину відрізка AB спільної внутрішньої дотичної (мал. 369).

776*. (*Задача Архімеда*) Дві хорди, які перетинаються, — взаємно перпендикулярні. Доведіть, що сума квадратів відрізків цих хорд дорівнює квадрату діаметра (мал. 370).



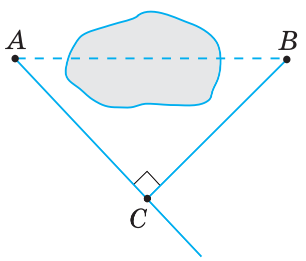
Мал. 369



Мал. 370

Проявіть компетентність

777. На малюнку 371 показано, як застосували теорему Піфагора, щоб виміряти відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Поясніть вимірювання.

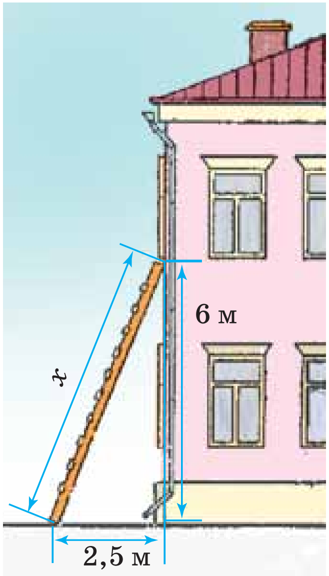


Мал. 371

778. Між двома фабричними будівлями потрібно побудувати похилий жолоб для транспортування матеріалів. Кінці жолоба мають бути розташовані на висоті 7 м і 3 м над землею. Якою має бути довжина жолоба, якщо відстань між будівлями дорівнює 15 м?

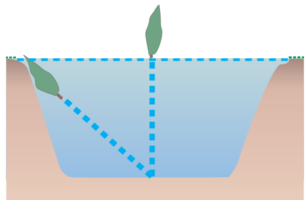
779. Діагональ прямокутної ділянки землі дорівнює 116 м, а одна зі сторін — 84 м. Який периметр цієї ділянки?

780. 1) Якої довжини має бути драбина (мал. 372), щоб її можна було приставити до вікна, розташованого на висоті 6 м, якщо відстань від нижнього кінця драбини до будинку має дорівнювати 2,5 м?
2) На яку відстань від стіни будинку потрібно відсунути нижній кінець драбини завдовжки 9 м, щоб верхній її кінець був на висоті 6 м?



Мал. 372

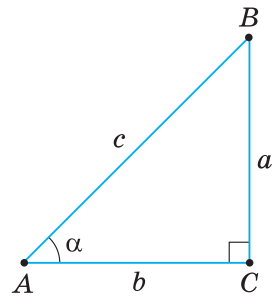
781. (*Задача давньокитайського вченого Цзінь Кіу-Чау, 1250 р. до н. е.*) У центрі копанки, що має форму квадрата зі стороною 10 футів, росте очеретина, висота якої над поверхнею води — 1 фут (1 фут ≈ 30 см). Якщо нахилити її до берега (до середини сторони копанки), то вона дістає своєю верхівкою берега (мал. 373). Яка глибина копанки?



Мал. 373

§ 16. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Нехай ABC — прямокутний трикутник із катетами $BC = a$, $AC = b$, гіпотенузою $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ (мал. 374). Ви знаєте, що катет a — протилежний куту α, катет b — прилеглий до кута α. Відношення кожного з катетів до гіпотенузи, а також катета до катета мають спеціальні позначення:



Мал. 374

— відношення $\frac{a}{c}$ позначають $\sin\alpha$ і читають «синус альфа»;

— відношення $\frac{b}{c}$ позначають $\cos\alpha$ і читають «косинус альфа»;

— відношення $\frac{a}{b}$ позначають $\operatorname{tg}\alpha$ і читають «тангенс альфа».

Сформулюємо означення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

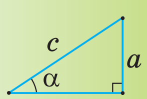
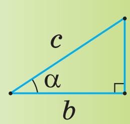
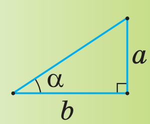
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.

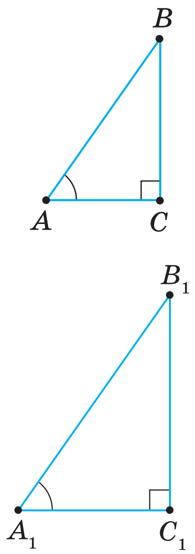
Відношення сторін прямокутного трикутника та їх позначення подано в таблиці 24.

Таблиця 24

 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	 $\cos\alpha = \frac{b}{c}$	 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

? Чи залежать синус, косинус і тангенс гострого кута від розмірів трикутника?

Не залежать. Поміркуймо. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два прямокутні трикутники, у яких $\angle A = \angle A_1$ (мал. 375). Тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ за двома кутами ($\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$). Відповідні сторони цих трикутників пропорційні: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.



Мал. 375

Із цих рівностей випливає:

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{A_1B_1}$, тобто $\sin A = \sin A_1$;

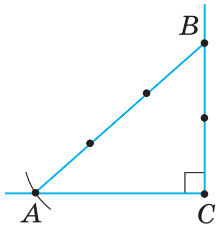
$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{A_1B_1}$, тобто $\cos A = \cos A_1$;

$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тобто $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Отже, у прямокутних трикутниках із тим самим гострим кутом синуси цього кута рівні, косинуси — рівні й тангенси — рівні. Якщо градусну міру кута змінити, то зміняться й відношення сторін прямокутного трикутника. Це означає, що **синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать тільки від градусної міри кута й не залежать від розмірів трикутника.**

За даним значенням $\sin A$, $\cos A$ або $\operatorname{tg} A$ можна побудувати кут A.

Задача. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\dfrac{2}{3}$.



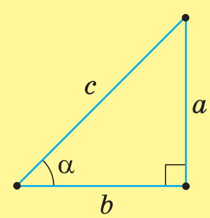
Мал. 376

Розв'язання. За допомогою косинця побудуємо прямий кут і на одній його стороні від вершини C відкладемо відрізок CB, що дорівнює двом довільним одиничним відрізкам (мал. 376). З точки B, як із центра, радіусом, що дорівнює трьом таким самим одиничним відрізкам, опишемо дугу, яка перетне другу сторону прямого кута. Точку перетину позначимо буквою A. З'єднавши точки A і B, одержимо прямокутний трикутник ABC. $\angle A$ — шуканий, оскільки $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{3}$.

У прямокутному трикутнику кожний із двох катетів менший від гіпотенузи. Тому $\sin \alpha < 1$ і $\cos \alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α. Оскільки один катет може бути і більшим, і меншим від другого катета, і дорівнювати йому, то $\operatorname{tg} \alpha$ може бути і більшим за 1, і меншим від 1, і дорівнювати 1.

Дізнайтеся більше

1. Крім синуса, косинуса й тангенса кута α є ще одне відношення сторін прямокутного трикутника, яке має особливу назву — *котангенс*. Це відношення катета b, прилеглого до кута α, до протилежного катета a (мал. 377). Позначають: $\operatorname{ctg} \alpha$. Отже, $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{b}{a}$.
2. Індійський математик Аріабхата (V ст.) відношення протилежного катета до гіпотенузи назвав *ardhajya* — ардхажія (півхорда). У XII ст. європейські вчені переклали цю назву на латинську як *sinus* — синус.



Мал. 377

Слово *cosinus* — косинус складається із двох слів: *complementi* — доповнення і *sinus* — синус, тобто доповняльний синус. Чому це так, дізнаєтеся із §18 цього розділу.

Арабські астрономи-математики ал-Баттані (858–929) і Абу-ль-Вефа (940–998) визначили поняття тангенса, вимірюючи кутову висоту Сонця за тінню від жердини. Тому відношення катета, протилежного куту α, до прилеглого катета вони називали словом «тінь». Пізніше, у XVI ст., це відношення одержало назву «тангенс».

Знаки «sin», «cos», «tg» увів Леонард Ейлер у XVIII ст.

Пригадайте головне

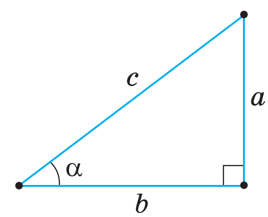
1. Дайте означення синусу, косинусу й тангенсу гострого кута прямокутного трикутника.
2. Поясніть, чому синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать від градусної міри кута й не залежать від розмірів трикутника.
3. Поясніть, чому $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α.
4. Яких значень може набувати $\operatorname{tg}\alpha$?

Розв'яжіть задачі

782'. 1) За даними на малюнку 378 назвіть: катет, прилеглий до кута α; катет, протилежний куту α.

2) Прочитайте записи $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$, вживаючи слова «відношення», «протилежний катет», «прилеглий катет», «гіпотенуза».

3) Позначте кожне з відношень $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$ знаком «$\cos\alpha$», «$\operatorname{tg}\alpha$» або «$\sin\alpha$».



Мал. 378

783'. Назвіть правильну відповідь (мал. 379).

1) $\operatorname{tg}\beta$ дорівнює:

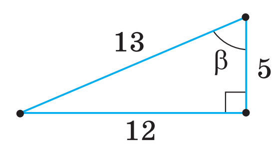
а) $\frac{5}{15}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

2) $\cos\beta$ дорівнює:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

3) $\sin\beta$ дорівнює:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{13}{5}$.



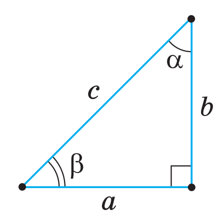
Мал. 379

784'. За малюнком 380 назвіть правильну відповідь:

1) для кута α відношення $\frac{a}{c}$ є: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$;

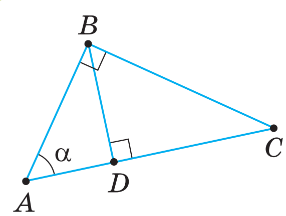
2) для кута β відношення $\frac{a}{c}$ є: а) $\sin\beta$; б) $\cos\beta$; в) $\operatorname{tg}\beta$;

3) для кута β відношення $\frac{b}{a}$ є: а) $\sin\beta$; б) $\cos\beta$; в) $\operatorname{tg}\beta$.



Мал. 380

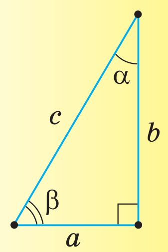
785°. На малюнку 381 $\angle ABC = \angle ADB = 90°$. Виразіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ через сторони трикутників ABC і BDA.

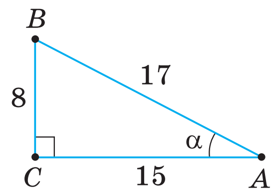


Мал. 381

786°. Накресліть у зошиті таблицю 25. Поставте «+» у тій клітинці, де відношення сторін трикутника відповідає його позначенню.

Таблиця 25

Відношення		Позначення					
		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}\,\beta$
	$\frac{a}{b}$						
	$\frac{b}{a}$						
	$\frac{b}{c}$						
	$\frac{a}{c}$						



Мал. 382

787°. За даними, наведеними на малюнку 382, знайдіть синус, косинус і тангенс кута α з точністю до 0,1.

788°. Накресліть довільний гострий кут C. На одній із його сторін позначте точки A і A_1 та проведіть перпендикуляри AB і A_1B_1 до другої сторони кута. Виміряйте в міліметрах катети AB і A_1B_1 та гіпотенузи AC і A_1C утворених прямокутних трикутників ABC і A_1B_1C. Знайдіть значення $\sin C$ з ΔABC і з ΔA_1B_1C. Порівняйте ці значення і зробіть висновок.

789°. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC, де $\angle C = 90°$. На катеті AC позначте довільну точку D та сполучіть точки D і B. Виміряйте катети прямокутних трикутників ABC і DBC та знайдіть тангенс кута ABC і тангенс кута DBC. Порівняйте:
1) кути ABC і DBC;
2) значення тангенсів цих кутів. Зробіть висновок.

790°. Накресліть за допомогою транспортира кути:
1) 35°; 2) 40°; 3) 75°.
Знайдіть синус, косинус і тангенс цих кутів.

791°. Чи можуть синус гострого кута, косинус гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати: 1) 1; 2) 0,9; 3) 2?

792°. Чи може тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати: 1) 1; 2) 4; 3) 0,8?

793. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 18$ мм, $BC = 24$ мм. Знайдіть: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\text{tg}\,A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\text{tg}\,B$.

794. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 24 см і 7 см. Знайдіть:
1) косинус гострого кута, який лежить проти меншого катета;
2) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
3) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета.

795. Із точки A до прямої проведено похилу $AB = 15$ см і перпендикуляр $AC = 9$ см. Знайдіть синус і косинус:
1) кута A; 2) кута B.

796. Побудуйте кут, синус якого дорівнює:
1) $\frac{3}{5}$; 2) 0,5.

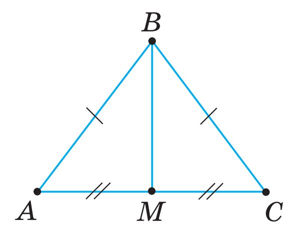
797. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює:
1) $\frac{5}{6}$; 2) 0,6.

798. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює:
1) 2; 2) $\frac{4}{7}$.

799. Побудуйте прямокутний трикутник ACB ($\angle C = 90°$), у якому:
1) $\sin A = 0{,}4$; 2) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$.

800. Побудуйте прямокутний трикутник MTO ($\angle T = 90°$), у якому $\cos M = \frac{2}{7}$.

801. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 12 см, а медіана, проведена до основи, — 8 см (мал. 383). Знайдіть синус, косинус і тангенс кута:
1) при основі трикутника; 2) між медіаною та бічною стороною.



Мал. 383

802*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть синус і косинус кута:
1) при більшій основі;
2) між діагоналлю та висотою.

803*. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при вершині трикутника.

804*. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см, 15 см. Знайдіть з точністю до 0,01:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} C$.

805*. Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, у якому:
1) $\sin A = 0{,}8$;
2) $\cos C = \frac{1}{3}$;
3) $\operatorname{tg} A = 0{,}6$.

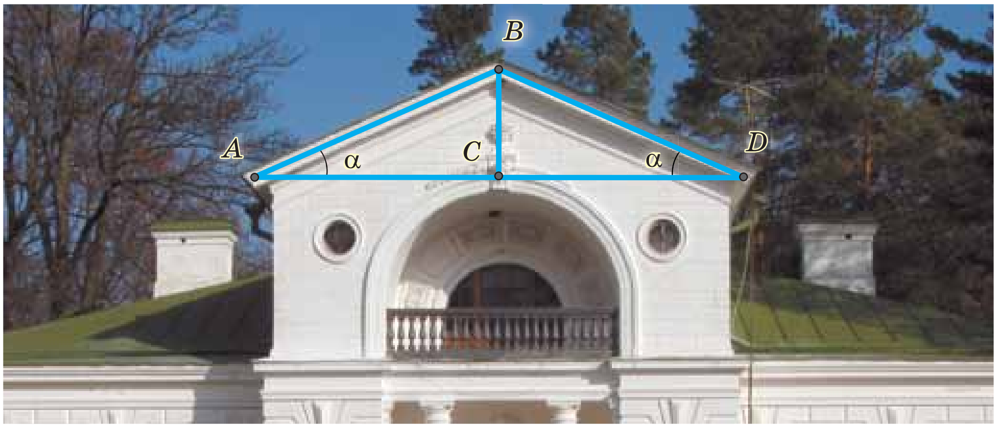
806*. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 8 см, а синус протилежного кута — 0,8. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.

807*. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AC = 6$ см, $\sin B = 0{,}6$;
2) $BC = 36$ см, $\cos A = \frac{5}{13}$;
3) $AB = 20$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$.

808*. Побудуйте прямокутний трикутник ABC, якщо:
1) гіпотенуза $c = 8$ см, $\sin A = 0{,}75$;
2) катет $b = 20$ мм, $\cos A = 0{,}4$;
3) катет $a = 5$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}25$.

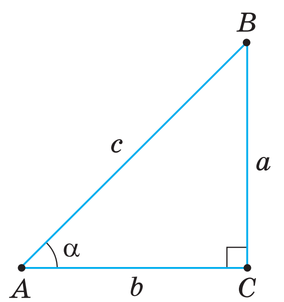
Проявіть компетентність

809. У будівництві часто замість градусної міри кута використовують його тангенс. Наприклад, під час будівництва будинку майстрові замість градусної міри кута α нахилу даху (мал. 384) дають відношення довжин сторін *BC* і *AC*, тобто tg α.
Нехай потрібно побудувати дах, довжина крокви *AD* якого дорівнює 20 м, а тангенс кута нахилу даху — 0,8. Якої довжини має бути кроква *BC*?



Мал. 384

§ 17. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



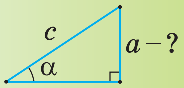
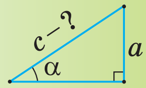
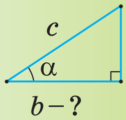
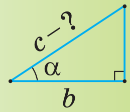
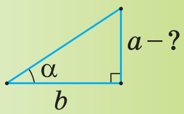
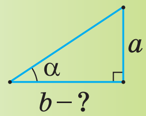
Мал. 385

Ви знаєте, що $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (мал. 385).
Звідси знаходимо: 1) $a = c\sin\alpha$, 2) $b = c\cos\alpha$, 3) $a = b\,\mathrm{tg}\alpha$.
Ці рівності формулюють так.
1. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку гіпотенузи на sin α.
2. Катет, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи на cos α.
3. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку другого катета на tg α.
З рівностей 1) і 2) можна знайти гіпотенузу *c* прямокутного трикутника за катетом *a* або *b* і гострим кутом α: 4) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; 5) $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

З рівності 3) можна знайти катет *b* за прилеглим до нього кутом α і катетом *a*: 6) $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$.

Щоб знайти за однією із сторін прямокутного трикутника та гострим кутом дві інші сторони, скористайтеся рівностями 1) — 6) (табл. 26).

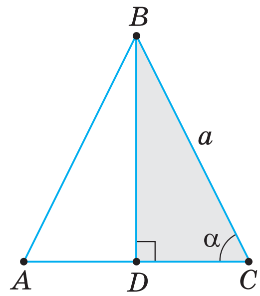
Таблиця 26

	1) $a = c \cdot \sin\alpha$		4) $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
	2) $b = c \cdot \cos\alpha$		5) $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
	3) $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$		6) $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Задача. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника з бічною стороною a і кутом α при основі.

Розв'язання. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник із бічною стороною $BC = a$ і $\angle C = \alpha$ (мал. 386). Проведемо висоту BD. У прямокутному трикутнику DBC катет DC, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи a на $\cos\alpha$: $DC = a\cos\alpha$.

Оскільки висота рівнобедреного трикутника, яку проведено до основи, є медіаною, то $DC = AD$. Тоді основа $AC = 2 \cdot DC = 2a\cos\alpha$.



Мал. 386

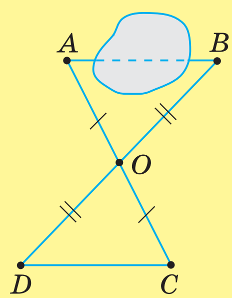
Дізнайтеся більше

У цьому розділі ви ознайомилися з новими прийомами обчислення довжин сторін і градусних мір кутів прямокутного трикутника. Може виникнути запитання: *Яка необхідність використання цих прийомів?*

У далеку давнину відстані й кути спочатку вимірювали *безпосередньо* інструментами. Так, транспортиром вавилоняни користувалися ще за 2000 років до н. е.

Проте на практиці безпосередньо виміряти відстані й кути не завжди можливо. Як виміряти відстань між двома пунктами, розділеними перешкодою (річкою, озером, лісом), відстань до Сонця, Місяця? Як виміряти висоту дерева, гори? Як знайти кут підйому дороги або кут, під яким спускаємося з гори? Були відкриті прийоми *опосередкованого* вимірювання відстаней і кутів. Стали використовувати рівні або подібні трикутники та геометричні побудови. Будували на місцевості допоміжний трикутник і вимірювали потрібні його елементи.

Так, ви знаєте, як виміряти відстань між пунктами A і B, які розділені перешкодою (мал. 387). Для цього будуємо $\Delta COD = \Delta AOB$ і замість шуканої відстані AB вимірюємо рівну їй відстань CD.



Мал. 387

Проте, використовуючи ці прийоми, одержували не досить точні результати, особливо коли вимірювали значні відстані на місцевості. Тому виникла необхідність у таких прийомах, коли безпосередніх вимірювань буде якомога менше, а більша частина результатів буде одержана обчисленням елементів прямокутного трикутника. Основою таких прийомів стало використання $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

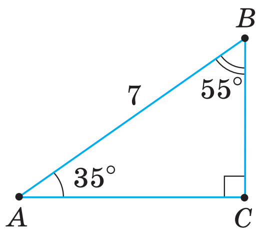
Накопичення обчислювальних прийомів розв'язування задач привело до створення нового розділу математики, який у XVI ст. назвали *тригонометрією*. Слово «тригонометрія» походить від грецьких слів *trigonon* — трикутник і *metreo* — вимірюю.

Грецьких математиків Гіппарха (II ст. до н. е.) і Птолемея (II ст.) вважають першими, хто використав тригонометричні прийоми для розв'язування різних задач. Подальше їх удосконалення було зроблено індійським математиком Брамагуптою (VI ст.), а потім узбецькими математиками аль-Каші й Улугбеком (XII ст.). У працях академіка Леонарда Ейлера (XVIII ст.) тригонометрія набула того вигляду, який в основному вона має й нині.

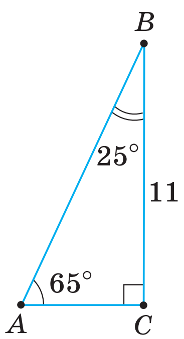
Пригадайте головне

1. Сформулюйте твердження, що відповідають рівностям: $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$, де a, b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза.
2. Поясніть, як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника за катетом і гострим кутом.
3. Як знайти катет прямокутного трикутника за прилеглим до нього кутом і другим катетом?

Розв'яжіть задачі



Мал. 388



Мал. 389

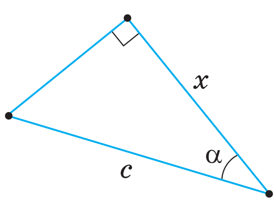
810'. Які з наведених тверджень є правильними?
Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку:
1) тангенса прилеглого до нього кута й гіпотенузи;
2) тангенса протилежного йому кута і другого катета;
3) гіпотенузи й синуса прилеглого кута;
4) гіпотенузи й косинуса прилеглого кута;
5) гіпотенузи й синуса протилежного кута.

811'. Значення якого з виразів дорівнює довжині катета BC (мал. 388):
1) $7 \cdot \sin 55°$; 2) $7 \cdot \cos 55°$; 3) $7 \cdot \mathrm{tg}\, 35°$?

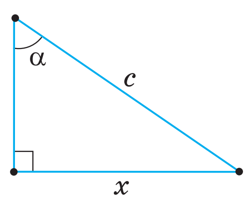
812'. Значення якого з виразів дорівнює довжині катета AC (мал. 389):
1) $11 \cdot \mathrm{tg}\, 65°$; 2) $11 \cdot \cos 25°$; 3) $11 \cdot \mathrm{tg}\, 25°$?

813'. Значення якого з виразів дорівнює довжині гіпотенузи AB (див. мал. 389):
1) $11 \cdot \cos 25°$;
2) $\dfrac{11}{\sin 65°}$;
3) $11 \cdot \mathrm{tg}\, 25°$?

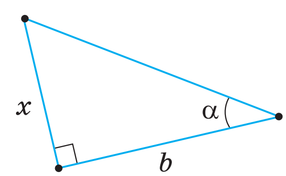
814°. За даними, наведеними на малюнках 390–392, знайдіть x.



Мал. 390

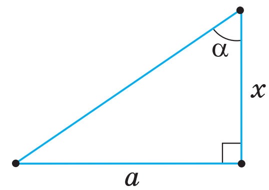


Мал. 391

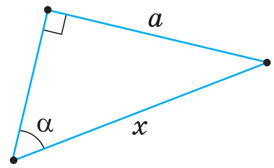


Мал. 392

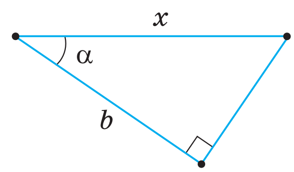
815°. За даними, наведеними на малюнках 393–395, знайдіть x.



Мал. 393



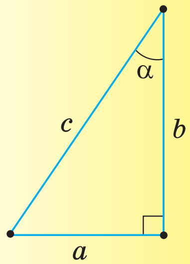
Мал. 394



Мал. 395

816°. Накресліть у зошиті таблицю 27. Поставте «+» у тій клітинці, у якій значення виразу дорівнює довжині сторони прямокутного трикутника.

Таблиця 27

Сторона		Позначення				
		$c \cdot \cos\alpha$	$c \cdot \sin\alpha$	$b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$	$\dfrac{a}{\sin\alpha}$	$\dfrac{b}{\cos\alpha}$
	a					
	b					
	c					

817°. Знайдіть катет a прямокутного трикутника, якщо синус кута A, протилежного йому, і гіпотенуза c дорівнюють:

1) $c = 12$ см, $\sin A = \dfrac{1}{4}$; 2) $c = 20$ см, $\sin A = \dfrac{2}{5}$; 3) $c = 18$ см, $\sin A = \dfrac{2}{3}$.

818°. Знайдіть катет b прямокутного трикутника, якщо косинус кута A, прилеглого до нього, і гіпотенуза c дорівнюють:

1) $c = 6$ см, $\cos A = \dfrac{1}{3}$; 2) $c = 14$ см, $\cos A = \dfrac{2}{7}$; 3) $c = 8$ см, $\cos A = \dfrac{3}{4}$.

819°. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:

1) $BC = 16$ см, $\cos B = \dfrac{1}{8}$;

2) $BC = 12$ см, $\cos B = \dfrac{3}{4}$;

3) $BC = 5$ см, $\cos B = 0{,}5$.

820°. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:

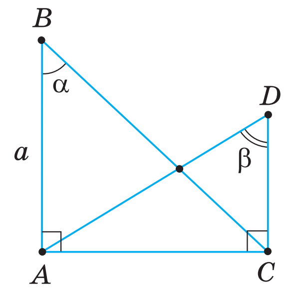
1) $BC = 24$ см, $\sin A = \dfrac{3}{8}$; 2) $BC = 10$ см, $\sin A = \dfrac{1}{5}$;

3) $BC = 7$ см, $\sin A = 0{,}7$.

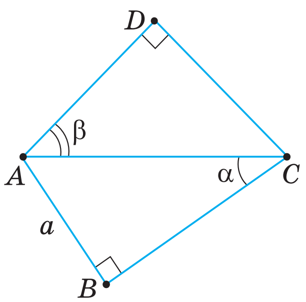
821°. Знайдіть катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AC = 8$ см, $\mathrm{tg}\,A = 0{,}6$; 2) $AC = 12$ см, $\mathrm{tg}\,A = 4$;
3) $AC = 11$ см, $\mathrm{tg}\,A = 1{,}5$.

822°. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AB = c$, $\angle B = \beta$; 2) $BC = a$, $\angle A = \alpha$; 3) $AC = b$, $\angle B = \beta$.

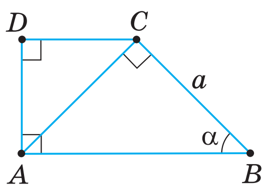
823. У прямокутному трикутнику катет дорівнює b, а прилеглий до нього кут — α. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.



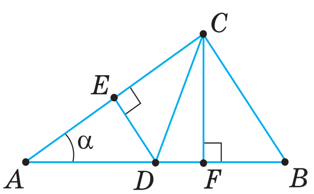
Мал. 396



Мал. 397



Мал. 398



Мал. 399

824. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α, а бісектриса цього кута — l. Знайдіть катет, прилеглий до кута α.

825. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при основі — α. Знайдіть:
1) основу трикутника; 2) висоту, проведену до основи.

826. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при основі — α. Знайдіть:
1) бічну сторону трикутника; 2) основу трикутника.

827. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут між бічними сторонами — α. Знайдіть:
1) висоту, проведену до основи; 2) бічну сторону трикутника.

828. За даними, наведеними на малюнках 396, 397, знайдіть відрізки AD і CD.

829. Знайдіть відрізки AD і CD за даними на малюнку 398?

830. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює m, а гострий кут трикутника — α.

831. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює b, а гострий кут — α.

832. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус вписаного кола — r. Знайдіть:
1) основу трикутника; 2) бічну сторону трикутника.

833. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при основі — α. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

834. Сторона AD прямокутника $ABCD$ дорівнює a й утворює з діагоналлю AC кут α. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.

835. Гострий кут між діагоналями прямокутника дорівнює α, а сторона, яка лежить проти цього кута, — a. Знайдіть:
1) другу сторону прямокутника; 2) діагональ прямокутника.

836. З точки, що лежить на відстані m від прямої, проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути α і β ($\alpha < \beta$). Знайдіть:
1) похилі; 2) відстань між основами похилих.

837. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює a, а її проекція — b. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут β.

838. Більша діагональ ромба дорівнює d, а його гострий кут — α. Знайдіть: 1) сторону ромба; 2) меншу діагональ ромба.

839*. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), CF — висота, CD — медіана, $DE \perp AC$ (мал. 399). Виразіть усі відрізки, зображені на малюнку, через катет $AC = a$ і $\angle A = \alpha$.

840*. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, якщо його катет дорівнює b, а кут, прилеглий до цього катета, — α.

841*. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює b, а бічна сторона, завдовжки c, утворює з висотою кут α. Знайдіть більшу основу трапеції.

842*. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a, а бічна сторона, завдовжки c, утворює з висотою кут α. Знайдіть меншу основу трапеції.

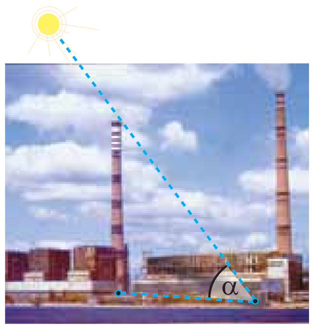
843*. У рівнобічній трапеції висота h утворює з бічною стороною кут α, а менша основа дорівнює b. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції; 2) більшу основу трапеції.

844*. У гострокутному трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Знайдіть проекції сторін AB і BC на сторону AC.

845*. **Знайдіть сторони трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює r, а кути трикутника дорівнюють α, β, γ.**

Проявіть компетентність

846. Довжина тіні від фабричної труби заввишки 40 м дорівнює 50 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом (мал. 400), дотримуючись такого плану: 1) знайдіть тангенс кута α; 2) за знайденим значенням тангенса побудуйте $\angle A = \alpha$; 3) виміряйте транспортиром $\angle A$.



Мал. 400

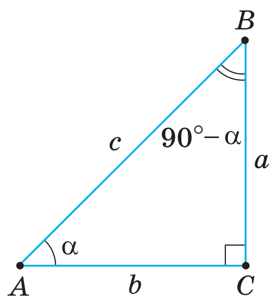
§ 18. ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ sin α, cos α та tg α

1. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ СИНУСОМ І КОСИНУСОМ КУТІВ α ТА 90° – α

Нехай у прямокутному трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, тоді $\angle B = 90° - \alpha$ (мал. 401). За означеннями синуса та косинуса запишемо:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}.$$



Мал. 401

Порівнявши ці два стовпці, одержимо:

$$\mathbf{\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),} \qquad \mathbf{\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).}$$

Як бачимо, між синусом і косинусом кутів α і $90° - \alpha$, які доповнюють один одного до 90°, існує така залежність: **синус одного із цих кутів дорівнює косинусу другого.**

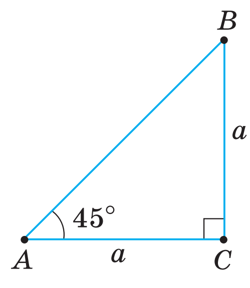
Наприклад: $\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$;
$\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30°$.

2. ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА Й ТАНГЕНСА ДЛЯ КУТІВ 45°, 30° ТА 60°

Знайдемо значення синуса, косинуса й тангенса для кутів 45°, 30°, 60°.

1) Для кута 45°.

Нехай ABC — прямокутний трикутник із гіпотенузою AB і $\angle A = 45°$ (мал. 402). Тоді $\angle B = 45°$.



Мал. 402

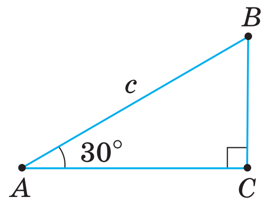
Отже, ΔABC — рівнобедрений. Нехай $AC = BC = a$.

За теоремою Піфагора, $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Тоді:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{tg}\, 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

2) Для кутів 30° і 60°.



Мал. 403

Нехай ABC — прямокутний трикутник із гіпотенузою $AB = c$ і $\angle A = 30°$ (мал. 403). Знайдемо катети AC і BC. $BC = \frac{c}{2}$ як катет, що лежить проти кута 30°. За теоремою Піфагора, $AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Тоді: $\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\text{tg}\, 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Якщо в прямокутному трикутнику ABC $\angle A = 30°$ (мал. 403), то $\angle B = 90° - 30° = 60°$. Тоді $\text{tg}\, 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$.

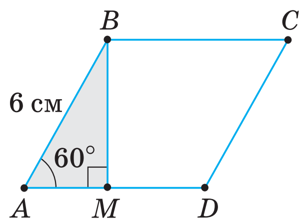
Складемо таблицю значень синуса, косинуса й тангенса для кутів 30°, 45°, 60° (таблиця 28).

Таблиця 28

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Із таблиці видно, що **при збільшенні кута синус і тангенс гострого кута збільшуються, а косинус — зменшується.** При зменшенні кута синус і тангенс гострого кута збільшується, а косинус — зменшується.

Задача. Сторона ромба дорівнює 6 см, а один з його кутів — 60°. Знайдіть висоту ромба.



Мал. 404

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 404), у якому $AB = 6$ см, $\angle A = 60°$. Проведемо висоту BM. Із прямокутного трикутника ABM:

$BM = AB \cdot \sin A = 6 \cdot \sin 60° = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

3. ЗНАХОДЖЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА Й ТАНГЕНСА ІНШИХ КУТІВ

Як обчислити значення синуса, косинуса й тангенса кутів, відмінних від 30°, 45°, 60°?

За допомогою інженерних калькуляторів (чи програми «калькулятор» комп'ютера) або спеціальних таблиць можна розв'язати дві задачі:
1) для даного кута α знайти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$;
2) за даним значенням $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ знайти кут α.

Якщо використовуєте калькулятор і кут дано в градусах і мінутах, то мінути переведіть у десяті частини градуса (поділіть їх на 60). Наприклад, для кута 55°42′ одержите 55,7°. Якщо, наприклад, для $\cos \alpha \approx 0{,}8796$ знайшли $\alpha \approx 28{,}40585°$, то частини градуса переведіть у мінути (помножте дробову частину на 60). Округливши, одержите: $\alpha \approx 28°24′$.

Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ можна знаходити за таблицями.

Таблиця синусів і косинусів (див. додаток 1) складається із чотирьох стовпців. У першому стовпці ліворуч уміщено градусну міру кутів від 0° до 45°, а в четвертому — від 90° до 45°. Над другим і третім стовпцями вказано назви «синуси» й «косинуси», а знизу цих стовпців — «косинуси» й «синуси».

Верхні назви «синуси» й «косинуси» стосуються кутів, менших від 45°, а нижні — кутів, більших за 45°. Наприклад, за таблицею знаходимо: $\sin 34° \approx 0{,}559$, $\cos 67° \approx 0{,}391$, $\sin 85° \approx 0{,}996$ і т. д.

За таблицею можна знайти кут α за даним значенням $\sin \alpha$ або $\cos \alpha$. Наприклад, треба знайти кут α, якщо $\sin \alpha \approx 0{,}615$. У стовпцях синусів знаходимо число, близьке до 0,615. Таким числом є 0,616. Отже, $\alpha \approx 38°$.

Таблиця тангенсів (див. додаток 2) складається із двох стовпців: в одному вміщено градусну міру кутів від 0° до 89°, а в другому — значення тангенсів цих кутів.

Наприклад, $\operatorname{tg} 19° \approx 0{,}344$. Якщо $\operatorname{tg} \alpha \approx 0{,}869$, то $\alpha \approx 41°$.

Дізнайтеся більше

1. Ви вже знаєте, що кожній градусній мірі кута α прямокутного трикутника відповідає єдине значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$. Тому синус, косинус і тангенс кута α є функціями цього кута. Ці функції називають *тригонометричними функціями*, аргумент яких змінюється від 0° до 90°.
2. Уточнимо походження слова «косинус». Рівність $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ і послужила основою утворення латинського слова *cosinus* — доповняльний синус, тобто синус кута, який доповнює даний до 90°.
3. Перші таблиці синусів кутів від 0° до 90° склав грецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.). Ці таблиці до нас не дійшли. Тригонометричні таблиці, які збереглися дотепер, уміщені у творі «Альмагест» александрійського вченого Клавдія Птолемея (II ст.).

Також збереглися таблиці синусів і косинусів індійського вченого Аріабхати (V ст.), таблиці тангенсів арабських учених ал-Баттані й Абу-ль-Вефи (X ст.).


Птолемей

Пригадайте головне

1. Сформулюйте залежність між синусом і косинусом кутів, які доповнюють один одного до 90°.
2. Назвіть значення синуса, косинуса і тангенса кутів 30°, 45°, 60°.
3. Поясніть, як знайти sin 36°; cos 64°; tg 57°.
4. Поясніть, як знайти кут α, якщо: $\sin\alpha = 0{,}655$; $\cos\alpha = 0{,}818$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}467$.

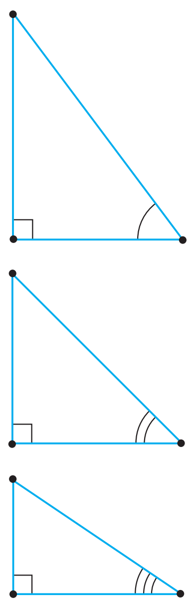
Розв'яжіть задачі

847'. Чи є правильною формула:
1) $\sin\alpha = \cos(60° - \alpha)$; 3) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$; 5) $\cos\alpha = \cos(90° - \alpha)$;
2) $\sin\alpha = \cos(90° + \alpha)$; 4) $\cos\alpha = \sin(30° + \alpha)$; 6) $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$?

848'. Чи є правильною рівність:

1) $\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sin 60° = \frac{1}{2}$;
2) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\cos 60° = \frac{1}{2}$;
3) $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) $\operatorname{tg} 60° = \frac{1}{2}$?

849'. Чи правильно, що при збільшенні кута (мал. 405):
1) синус кута зменшується; 4) косинус кута збільшується;
2) синус кута збільшується; 5) тангенс кута зменшується;
3) косинус кута зменшується; 6) тангенс кута збільшується?


Мал. 405

850'. Чи правильно, що за таблицею синусів і косинусів для даного кута α можна знайти: 1) лише $\sin\alpha$; 2) лише $\cos\alpha$; 3) $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?

851'. Чи правильно, що за таблицею тангенсів можна знайти:
1) $\sin\alpha$ за даним значенням кута α; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ за даним значенням кута α;
3) кут α за даним значенням $\operatorname{tg}\alpha$?

852°. Користуючись формулами $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, замініть:
1) косинуси даних кутів на синуси: cos 20°, cos 35°, cos 50°;
2) синуси даних кутів на косинуси: sin 10°, sin 65°, sin 85°.

853°. Користуючись формулами $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, замініть:
1) косинуси даних кутів на синуси: cos 40°, cos 74°;
2) синуси даних кутів на косинуси: sin 55°, sin 25°.

854°. Спростіть вираз:
1) $2\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha$; 3) $3\cos\alpha - 2\sin(90° - \alpha)$;
2) $\sin\alpha + \cos(90° - \alpha)$; 4) $3\sin(90° - \alpha) - 4\cos\alpha$.

855°. Спростіть вираз: 1) $\sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$; 2) $\cos\alpha - 2\sin(90° - \alpha)$.

856°. Знайдіть значення виразу:
1) $2\sin 30°$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 30°$; 5) $2\cos 30°$;
2) $4\cos 60°$; 4) $6\sin 45°$; 6) $8\operatorname{tg} 45°$.

857°. Знайдіть значення виразу:
1) $4\sin 60°$; 2) $2\cos 45°$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 60°$.

858°. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 3) $2 \sin 30° + \sqrt{3} \cos 30°$;
2) $\sqrt{2} \cos 45° \cdot \operatorname{tg} 45°$; 4) $6 \cos 60° - \sqrt{3} \operatorname{tg} 30°$.

859°. Знайдіть значення виразу:

1) $8 \sin 30° \cdot \cos 60°$; 2) $\sqrt{2} \cos 45° - 2 \sin 30°$.

860°. Яка градусна міра кута α, якщо:

1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; 5) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;
2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} \alpha = 1$?

861°. Яка градусна міра кута α, якщо:

1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

862°. За даними, наведеними на малюнках 406–408, знайдіть x.

863°. За даними, наведеними на малюнках 409–411, знайдіть x.

864°. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) кут A дорівнює $30°$. Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 4$ см; 3) AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см.
2) AC, якщо $BC = 2\sqrt{3}$ см;

865°. У прямокутному трикутнику MNK ($\angle K = 90°$) кут M дорівнює $60°$. Знайдіть:

1) MN, якщо $MK = 3$ см; 3) MK, якщо $NK = 7\sqrt{3}$ см.
2) NK, якщо $MK = 2\sqrt{3}$ см;

866°. Кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює $45°$. Знайдіть:

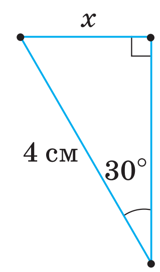
1) AB, якщо $AC = \sqrt{2}$ см; 3) AC, якщо $BC = 9$ см.
2) BC, якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см;

867°. З точки A до прямої проведено похилу $AB = 10$ см, яка утворює з прямою кут $60°$. Знайдіть:

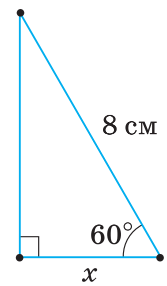
1) проекцію похилої; 2) відстань від точки A до прямої.

868°. Запишіть у порядку зростання:

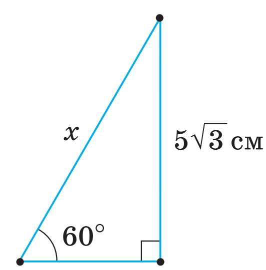
1) $\sin 15°, \sin 46°, \sin 75°, \sin 10°, \sin 11°$;
2) $\cos 50°, \cos 34°, \cos 20°, \cos 72°, \cos 25°$;
3) $\operatorname{tg} 37°, \operatorname{tg} 87°, \operatorname{tg} 66°, \operatorname{tg} 17°, \operatorname{tg} 48°$.



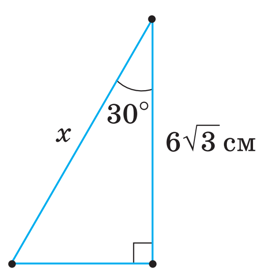
Мал. 406



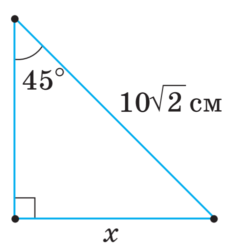
Мал. 407



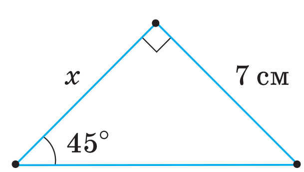
Мал. 408



Мал. 409



Мал. 410



Мал. 411

869°. Скориставшись калькулятором, знайдіть:
1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$,
якщо α дорівнює: 43°; 22°; 35°; 58°20′; 64°13′;
2) кут α, якщо:
$\sin\alpha$ дорівнює: 0,642; 0,771; 0,910; 0,640; 0,712;
$\cos\alpha$ дорівнює: 0,342; 0,962; 0,087; 0,914; 0,809;
$\operatorname{tg}\alpha$ дорівнює: 0,178; 0,269; 0,035; 0,447; 0,532.

870°. Скориставшись калькулятором, знайдіть:
1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$,
якщо α дорівнює: 39°; 54°12′;
2) кут α, якщо:
$\sin\alpha$ дорівнює: 0,750; 0,515;
$\cos\alpha$ дорівнює: 0,602; 0,915;
$\operatorname{tg}\alpha$ дорівнює: 0,934; 0,781.

871°. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть:
1) $\sin 20°$, $\sin 75°$, $\sin 33°$, $\sin 85°$;
2) $\cos 6°$, $\cos 67°$, $\cos 51°$, $\cos 24°$;
3) $\operatorname{tg} 65°$, $\operatorname{tg} 1°$, $\operatorname{tg} 73°$, $\operatorname{tg} 19°$.

872°. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть:
1) $\sin 53°$, $\sin 2°$; 2) $\cos 62°$, $\cos 13°$; 3) $\operatorname{tg} 10°$, $\operatorname{tg} 16°$.

873°. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть кут α, якщо:
1) $\sin\alpha = 0{,}999$; $\sin\alpha = 0{,}017$; $\sin\alpha = 0{,}574$;
2) $\cos\alpha = 0{,}766$; $\cos\alpha = 0{,}966$; $\cos\alpha = 0{,}225$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}900$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}344$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}781$.

874°. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть кут α, якщо:
1) $\sin\alpha = 0{,}588$; 2) $\cos\alpha = 0{,}731$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}839$.

875. Спростіть вираз:
1) $1 - \cos(90° - \alpha) + \sin\alpha$;
2) $2\sin\alpha + \cos(90° - \alpha) + \sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$.

876. Спростіть вираз: $(1 - \sin(90° - \alpha))(1 + \cos\alpha)$.

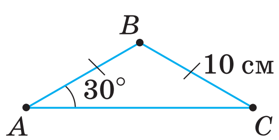
877. Знайдіть значення виразу:
1) $2\cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 2) $3\operatorname{tg}^2 60° - 4\cos^2 30°$.

878. Знайдіть значення виразу:
$\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 30° + \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$.

879. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 8 см, а протилежний йому кут — 60°. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

880. Катет прямокутного трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а прилеглий до нього кут — 60°. Знайдіть бісектрису цього кута.

881. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі — 30° (мал. 412). Знайдіть:
1) основу трикутника;
2) висоту, проведену до основи;
3) висоту, проведену до бічної сторони.



Мал. 412

882. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а кут трикутника:
1) 30°; 2) 45°.

883. За даними, наведеними на малюнках 413, 414, знайдіть довжини відрізків AD і CD.

884. За даними, наведеними на малюнку 415, знайдіть довжини відрізків AD і CD.

885. Сторона ромба дорівнює 4 см, а один із його кутів — 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

886. Більша діагональ ромба дорівнює $12\sqrt{3}$ см, а один із його кутів — 120°. Знайдіть сторону й меншу діагональ ромба.

887. Діагональ паралелограма дорівнює 12 см і перпендикулярна до його сторони. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює: 1) 30°; 2) 45°.

888. **Знайдіть радіус r кола, вписаного в рівносторонній трикутник, і радіус R кола, описаного навколо цього трикутника, якщо сторона трикутника дорівнює a.**

889. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо його сторона дорівнює 16 см, а гострий кут: 1) 30°; 2) 60°.

890. **Знайдіть відношення діаметрів кіл, вписаного в квадрат й описаного навколо цього квадрата.**

891. З точки, що розташована на відстані 5 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 45° і 30°. Знайдіть:
1) похилі; 2) проекції похилих на пряму.

892. З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути по 45°. Знайдіть довжину похилих, якщо відстань між їх основами дорівнює 10 см.

893. Визначте знак різниці: 1) $\text{tg}\,64° - \text{tg}\,58°$; 2) $\sin 21° - \sin 36°$.

894. Визначте знак різниці: $\cos 51° - \cos 41°$.

895*. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює 1 см. Знайдіть катети трикутника, якщо його гострий кут дорівнює:
1) 30°; 2) 45°.

896*. Сторона трикутника дорівнює 1 см, а прилеглі до неї кути — 45° і 60°. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

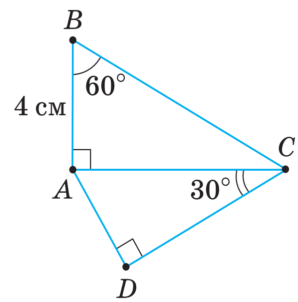
897*. Навколо кола радіуса R описано рівнобедрений трикутник із кутом 120°. Знайдіть сторони трикутника.

898*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а кут при основі — 60°. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції; 2) висоту трапеції; 3) діагональ трапеції.

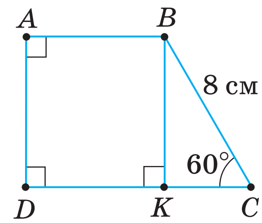
899*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 9 см, а кут при основі — 120°. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції; 2) висоту трапеції; 3) діагональ трапеції.

900*. Периметр трапеції — 144 см, а кути при більшій основі дорівнюють по 60°. Діагональ трапеції ділить її середню лінію на відрізки, один з яких на 16 см більший за другий. Знайдіть основи трапеції.

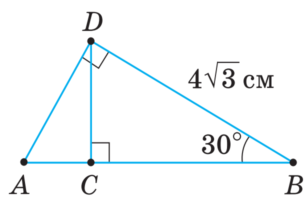
901*. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її середню лінію у відношенні 5 : 9, а кути при меншій основі дорівнюють по 120°. Знайдіть бічні сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 220 см.



Мал. 413



Мал. 414

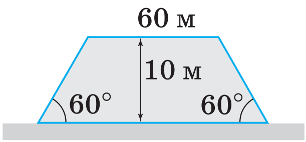


Мал. 415

902*. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 см і 18 см, а кут між ними — 30°. Знайдіть сторони паралелограма.

903*. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними — 150°. Знайдіть сторони паралелограма.

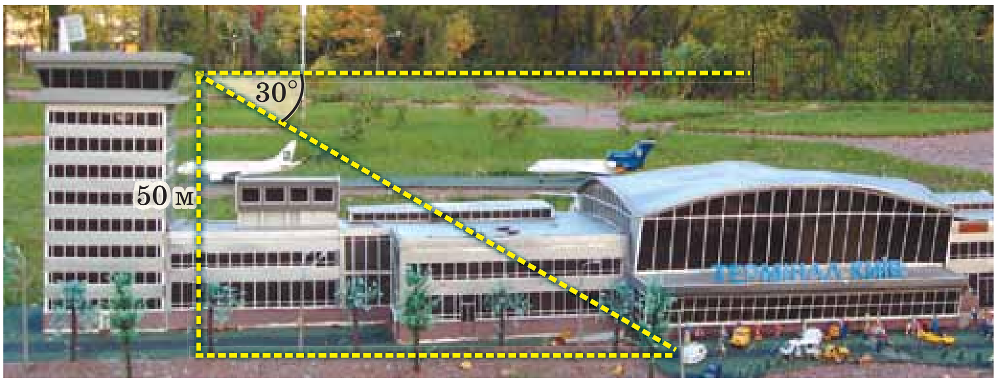
Проявіть компетентність



Мал. 416

904. Ширина верхньої частини насипу шосейної дороги, поперечний переріз якого — рівнобічна трапеція, дорівнює 60 м (мал. 416). Яка ширина основи насипу, якщо його висота дорівнює 10 м, а кут укосу — 60°?

905. Спостерігачеві, який стоїть на висоті 50 м, видно автомобіль під кутом 30° до горизонту (мал. 417). Як знайти відстань від спостерігача до автомобіля?



Мал. 417

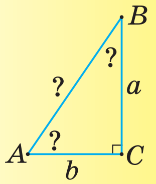
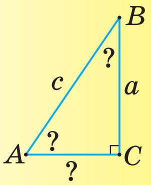
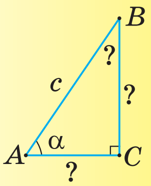
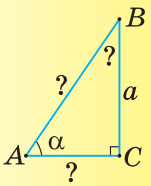
§ 19. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розв'язати прямокутний трикутник означає — за даними двома сторонами або стороною та гострим кутом знайти інші його сторони й гострі кути.

Можливі такі види задач, у яких вимагається розв'язати прямокутний трикутник: 1) за катетами; 2) за гіпотенузою й катетом; 3) за гіпотенузою й гострим кутом; 4) за катетом і гострим кутом. Алгоритми розв'язування цих чотирьох видів задач наведено в таблиці 29.

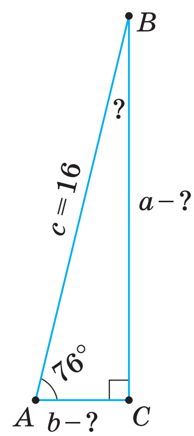
Таблиця 29

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
	Дано: $AC = b$, $BC = a$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\text{tg } A = \dfrac{a}{b}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
	Дано: $AB = c$, $BC = a$. Знайти: AC, $\angle A$, $\angle B$	1) $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \dfrac{a}{c}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
	Дано: $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AC, BC, $\angle B$	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $AC = c \cdot \cos\alpha$, 3) $BC = c \cdot \sin\alpha$
	Дано: $BC = a$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AB, AC, $\angle B$	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, 3) $AC = \dfrac{a}{\text{tg}\alpha}$

Задача. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 16$ і кутом $\alpha = 76°$ (мал. 418).

Розв'язання. Це задача третього виду. Алгоритм її розв'язування наведено в таблиці 29.

1) $\angle B = 90° - \alpha = 90° - 76° = 14°$;
2) $AC = c \cdot \cos\alpha = 16 \cdot \cos 76° \approx 16 \cdot 0{,}242 \approx 3{,}9$;
3) $BC = c \cdot \sin\alpha = 16 \cdot \sin 76° \approx 16 \cdot 0{,}970 \approx 15{,}5$.



Мал. 418

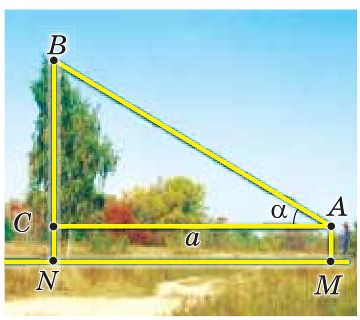
2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Розв'язування багатьох прикладних задач ґрунтується на розв'язуванні прямокутних трикутників. Розглянемо деякі види прикладних задач.

1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого є доступною.

Задача. Знайдіть висоту дерева (мал. 419).

Розв'язання. На деякій відстані $MN = a$ від дерева встановлюємо кутомірний прилад AM (наприклад, теодоліт) і знаходимо кут α між горизонтальним напрямком AC і напрямком на верхню точку B дерева. Тоді з прямокутного три-



Мал. 419

кутника ABC одержимо: $BC = a \cdot \text{tg}\ \alpha$. Урахувавши висоту кутомірного приладу $AM = h$, одержимо формулу для обчислення висоти дерева: $BN = a \cdot \text{tg}\ \alpha + h$.
Нехай результати вимірювання такі:
$a = 40$ м, $h = 1{,}5$ м і $\alpha = 31°$.
Тоді $BN = 1{,}5 + 40 \cdot \text{tg}\ 31° \approx 1{,}5 + 40 \cdot 0{,}601 \approx 25{,}5$ (м).

2. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

Задача. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас водною перешкодою (мал. 420).

Розв'язання. На горизонтальній прямій, що проходить через основу вежі (мал. 420), позначаємо дві точки M і N та вимірюємо відрізок $MN = a$. Встановлюємо кутомірний прилад у точках M і N та вимірюємо кути α і β.
Із прямокутних трикутників ADC і BDC одержимо:

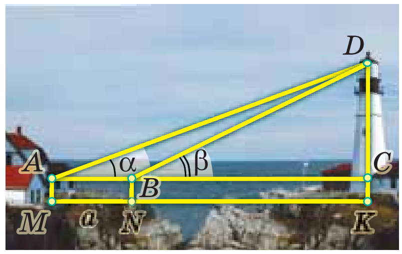
$$AC = \frac{DC}{\text{tg}\alpha},\ BC = \frac{DC}{\text{tg}\beta}.$$

Почленно віднімемо знайдені рівності:

$$AC - BC = \frac{DC}{\text{tg}\alpha} - \frac{DC}{\text{tg}\beta}.$$

Звідси $AB = DC\dfrac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$.

Отже, $DC = \dfrac{a \cdot \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}$.



Мал. 420

Додавши до DC висоту приладу $AM = h$, яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$DK = \frac{a \cdot \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha} + h.$$

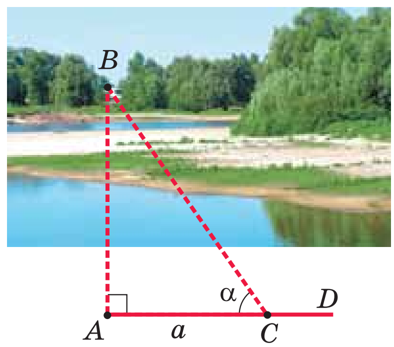
Нехай результати вимірювання такі:
$a = 10$ м, $h = 1{,}5$ м і $\alpha = 35°$, $\beta = 40°$.

Тоді $DK = \dfrac{10 \cdot \text{tg}35° \cdot \text{tg}40°}{\text{tg}40° - \text{tg}35°} + 1{,}5 \approx \dfrac{10 \cdot 0{,}700 \cdot 0{,}839}{0{,}839 - 0{,}700} + 1{,}5 \approx 43{,}8$ (м).

3. Задачі на знаходження відстані між двома пунктами, які розділені перешкодою.

Задача. Знайдіть відстань між пунктами A і B, розділеними річкою (мал. 421).

Розв'язання. Провішуємо пряму $AD \perp AB$ та позначаємо на ній деяку точку C. Вимірюємо відстань $AC = a$ і кут α. Із прямокутного трикутника ABC одержимо формулу $AB = a \cdot \text{tg}\ \alpha$ для знаходження відстані між пунктами A і B.
Нехай результати вимірювання такі:
$a = 50$ м, $\alpha = 72°$.
Тоді $AB = 50 \cdot \text{tg}\ 72° \approx 50 \cdot 3{,}08 \approx 154$ (м).

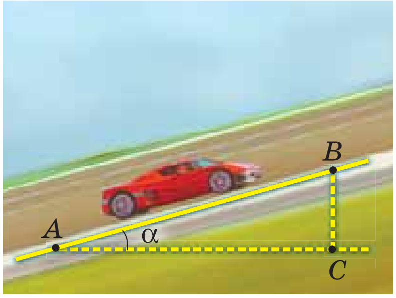


Мал. 421

4. Задачі на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмет тощо).

Задача. Знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 8 м.

Розв'язання. На малюнку 422 кут α — це кут підйому дороги, AC — горизонтальна пряма. Проведемо $BC \perp AC$, тоді BC — висота підйому дороги.
За умовою, $AB = 200$ м, $BC = 8$ м. Кут α знайдемо з прямокутного трикутника ABC: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{200} = 0{,}04$.
Тоді $\alpha \approx 2°$.



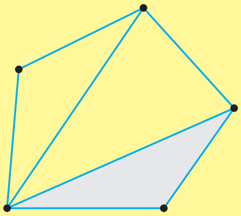
Мал. 422

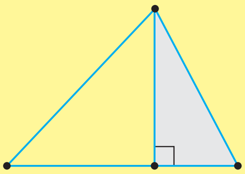
Дізнайтеся більше

У вас може виникнути запитання: *Чому в геометрії особливу увагу приділяють саме прямокутному трикутнику, хоча в довкіллі не часто можна натрапити на предмети такої форми?*

Давайте поміркуємо. Як у хімії вивчають у першу чергу елементи, а потім — їхні сполуки, а в біології — одноклітинні, а потім — багатоклітинні організми, так і в геометрії вивчають спочатку простіші геометричні фігури — точки, відрізки і трикутники, з яких складаються інші геометричні фігури.

Серед цих фігур прямокутний трикутник відіграє особливу роль. Справді, будь-який многокутник можна розбити на трикутники (мал. 423). Уміючи знаходити кутові й лінійні елементи цих трикутників, можна знайти й усі елементи многокутника. У свою чергу, будь-який трикутник можна розбити однією з його висот на два прямокутні трикутники, елементи яких зв'язані простішою залежністю (мал. 424). Знайти елементи трикутника можна, звівши їх до розв'язування цих двох прямокутних трикутників. Наведемо приклад.

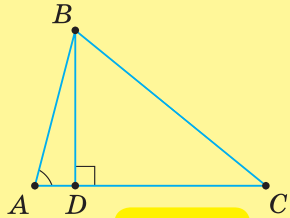

Мал. 423


Мал. 424

Задача. У ΔABC $AC = 50$ см, $AB = 35$ см і $\angle A = 76°$ (мал. 425). Знайдіть $\angle B$, $\angle C$ і сторону BC.

Розв'язання. Проведемо висоту BD. Точка D лежатиме між точками A і C, оскільки $\angle A$ — гострий і $AC > AB$. Із прямокутного трикутника ABD:
$BD = AB \cdot \sin A = 35 \cdot \sin 76° \approx 35 \cdot 0{,}970 \approx 40$ (см).
$DC = AC - AD = AC - AB \cdot \cos A = 50 - 35 \cdot \cos 76° \approx$
$\approx 50 - 35 \cdot 0{,}242 \approx 50 - 8{,}47 \approx 41{,}5$ (см).

Із прямокутного трикутника BDC: $\operatorname{tg} C = \dfrac{BD}{DC} \approx \dfrac{40}{41{,}5} \approx 0{,}964$.
Звідси $\angle C \approx 44°$.
$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) \approx 180° - (76° + 44°) \approx 180° - 120° \approx 60°$.



Мал. 425

Із прямокутного трикутника BDC: $BC = \dfrac{BD}{\sin C} = \dfrac{40}{\sin 44°} \approx \dfrac{40}{0{,}695} \approx 57{,}6$ (см).

Отже, $BC \approx 57{,}6$ см, $\angle B \approx 60°$, $\angle C \approx 44°$.

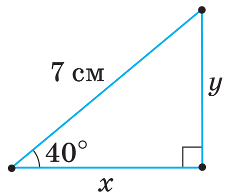
Пригадайте головне

1. Що означає — «розв'язати прямокутний трикутник»?
2. Назвіть види задач, у яких вимагається розв'язати прямокутний трикутник.
3. Запишіть алгоритм розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач.

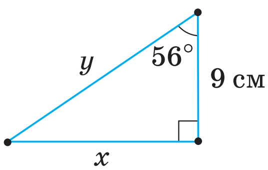
Розв'яжіть задачі

906'. Чи правильно, що для розв'язування прямокутного трикутника достатньо знати:
1) одну сторону;
2) дві сторони;
3) один гострий кут;
4) одну сторону і прямий кут;
5) одну сторону і гострий кут?

907'. Чи правильно названо вид задачі, у якій вимагається розв'язати прямокутний трикутник:
1) за кутами;
2) за катетами;
3) за гіпотенузою;
4) за гіпотенузою і катетом;
5) за гіпотенузою та прямим кутом;
6) за гіпотенузою й гострим кутом;
7) за катетом і прямим кутом;
8) за катетом і гострим кутом?

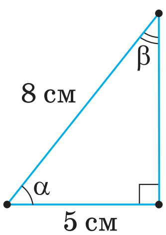


Мал. 426

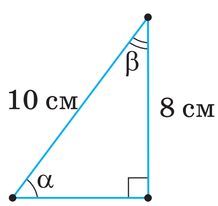


Мал. 427

908°. За даними, наведеними на малюнках 426, 427, знайдіть x і y.



Мал. 428



Мал. 429

909°. За даними, наведеними на малюнках 428, 429, знайдіть кути α і β.

910°. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть:
1) BC, якщо $AB = 5$ см, $\angle A = 55°$;
2) AB, якщо $AC = 7$ см, $\angle B = 41°$;
3) AC, якщо $BC = 6$ см, $\angle B = 38°$.

911°. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника, якщо:
1) катет дорівнює 9 см, а протилежний йому кут — 38°;
2) катет дорівнює 10 см, а прилеглий до нього кут — 54°.

912°. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 14 см і кутом 65° знайдіть:
1) катет, прилеглий до цього кута;
2) катет, протилежний цьому куту.

913°. Знайдіть кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AB = 12$ см, $BC = 9$ см;
2) $AB = 10$ см, $AC = 6$ см;
3) $AC = 8$ см, $BC = 16$ см.

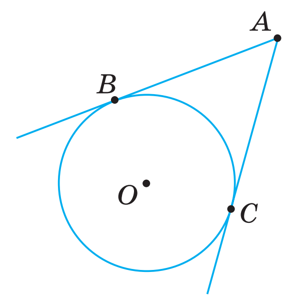
914°. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 20 см і катетом 14 см знайдіть:
1) кут, прилеглий до цього катета;
2) кут, протилежний цьому катету.

915°. У прямокутному трикутнику катет становить 0,2 гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

916°. Знайдіть кут між діагоналлю й більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 18 см і 20 см.

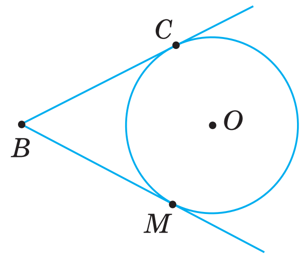
917°. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 14 см. Знайдіть кут між його діагоналлю й більшою стороною.

918°. Через точку A до кола радіуса 45 см проведено дотичні AB і AC (мал. 430). Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо:
1) $AB = 60$ см;
2) $AB = 50$ см.



Мал. 430

919°. Через точку B до кола радіуса 30 см проведено дотичні BM і BC (мал. 431). Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо $BM = 30$ см.



Мал. 431

920. Знайдіть невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:
1) за двома катетами:
а) $a = 20$, $b = 21$;   в) $a = 24$, $b = 18$;
б) $a = 9$, $b = 12$;   г) $a = 23{,}5$, $b = 40{,}2$;
2) за гіпотенузою та катетом:
а) $c = 17$, $a = 15$;   в) $c = 65$, $a = 56$;
б) $c = 20$, $a = 16$;   г) $c = 2{,}93$, $b = 2{,}85$.

921. Знайдіть невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:
1) за гіпотенузою та гострим кутом:
а) $c = 8$, $\angle A = 70°$;   в) $c = 18{,}2$, $\angle A = 32°$;
б) $c = 82$, $\angle A = 42°$;   г) $c = 4{,}67$, $\angle A = 65°$;
2) за катетом і прилеглим кутом:
а) $a = 12$, $\angle A = 32°$;   в) $a = 12$, $\angle A = 53°$;
б) $a = 18$, $\angle A = 17°$;   г) $a = 3{,}71$, $\angle A = 19°$.

922. Діагональ прямокутника дорівнює 25 см й утворює зі стороною кут 36°. Знайдіть сторони прямокутника.

923. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при основі — 75°. Знайдіть:
1) основу трикутника;   2) висоту, проведену до основи.

924. У коло радіуса 5 см вписано рівнобедрений трикутник із кутом між бічними сторонами 70°. Знайдіть:
1) висоту, проведену до основи;
2) бічну сторону трикутника.

925. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 21 см. Знайдіть:
1) бічну сторону;
2) кут між бічними сторонами трикутника.

926. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 27°$, $BC = 21$ см. Знайдіть:
1) другий катет;
2) гіпотенузу;
3) проекцію кожного катета на гіпотенузу.

927. З точки, що розміщена на відстані 15 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 24° і 61°. Знайдіть:
1) довжину похилих;   2) проекції похилих на пряму.

928. Знайдіть висоту ромба, якщо його сторона дорівнює 7,5 см, а гострий кут — 22°.

929. Сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см, а гострий кут — 36°. Знайдіть висоти паралелограма.

930. Сторона ромба дорівнює 64,5 см, а гострий кут — 28°. Знайдіть діагоналі ромба.

931*. У трапеції кути при більшій основі дорівнюють 16° і 54°, висота трапеції — 24 см, а менша основа — 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

932*. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см, а бічна сторона, яка дорівнює 10 см, утворює з більшою основою кут 48°. Знайдіть висоту трапеції.

933*. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 8 см, кут при основі — 41°, висота трапеції — 2 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

934*. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 49°54′, а основа більша за бічну сторону на 10,8 см.

Проявіть компетентність

935. Тінь від стовпа, висота якого 9 м, становить 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

936. Гірська залізниця на одному з перегонів підіймається на 1 м на кожні 60 м шляху. Знайдіть кут підйому дороги на цій ділянці.

937. На яку висоту h піднявся пішохід, який пройшов n км прямою дорогою, що підіймається під кутом α до горизонту? Обчисліть h, якщо: 1) $n = 1{,}5$ км, $\alpha = 4°30'$; 2) $n = 3$ км, $\alpha = 8°18'$.

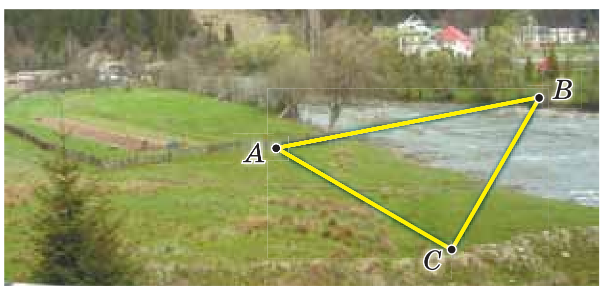
938. Вертикальний промінь прожектора перетинає хмару. Яка висота нижньої межі хмари, якщо спостерігач, який стоїть на відстані 600 м від прожектора, бачить місце перетину променя прожектора і хмари під кутом 75°?

939. Знайдіть відстань між пунктами A і B (до пункту B підійти не можна), якщо $AC = 60$ м, $\angle BAC = 41°$, $\angle ACB = 90°$ (мал. 432).

940. Санаторій розташований на вершині гори. Пряма дорога до санаторію завдовжки 1500 м має кут підйому 5°. На якій висоті від підніжжя гори розташований санаторій?

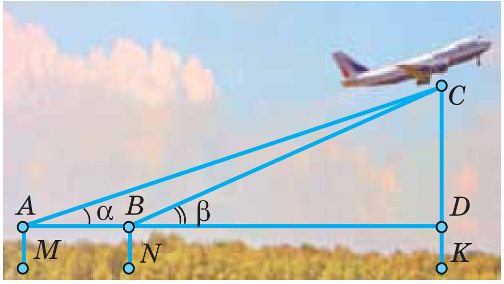
941. Щогла закріплена трьома однаковими тросами, які нахилені до землі під кутом 64°. Нижні кінці тросів віддалені від щогли на 35 м. На якій висоті закріплені на щоглі верхні кінці тросів?

942. За вісімсот метрів від місця підйому літака ростуть дерева заввишки 20 м. Під яким кутом має підійматися літак, щоб не зачепити дерева?



Мал. 432

Мал. 433



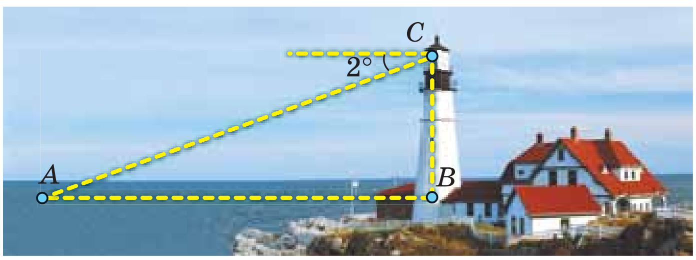
Мал. 434

943. Знайдіть кут підйому вулиці, на якій розташована школа, якщо довжина фундаменту школи — 40 м, а його висота на початку і в кінці будівлі дорівнює 180 см і 90 см (мал. 433).

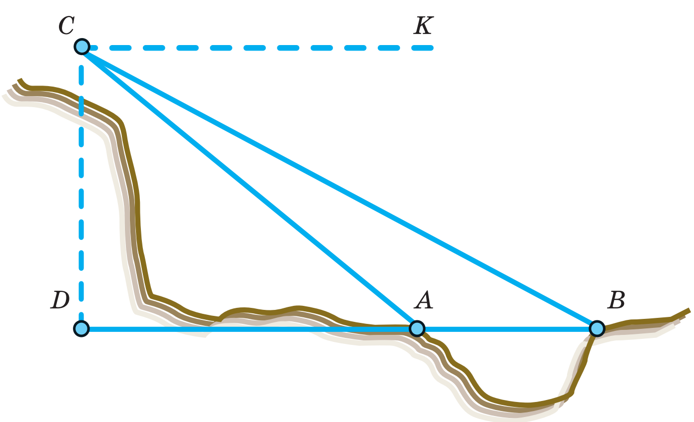
944. Щоб знайти, на якій висоті летить літак C (мал. 434), два спостерігачі в пунктах M і N установили кутомірні прилади й виміряли відстань $MN = a$. У той момент, коли точки A, B і C лежали в одній вертикальній площині, виміряли одночасно кути α і β. Знаючи відстань a, кути α і β, висоту h приладів, визначили шукану висоту CK. Поясніть спосіб знаходження висоти.
Знайдіть висоту, на якій перебував літак, якщо результати вимірювання такі: $a = 80$ м, $h = 1{,}5$ м, $\alpha = 39°$, $\beta = 44°$.

945. З башти маяка заввишки 75 м над рівнем моря видно корабель під кутом зниження 2° (мал. 435). Знайдіть відстань від маяка до корабля.

946. На малюнку 436 схематично зображено спосіб вимірювання недоступної відстані AB.
Поясніть вимірювання.
Знайдіть відстань AB, якщо $CD = 200$ м, $\angle KCB = 28°$, $\angle KCA = 39°$.



Мал. 435



Мал. 436

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте та доведіть теорему Піфагора.
2. Назвіть властивості похилих.
3. Дайте означення синуса, косинуса й тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
4. Поясніть, як за однією зі сторін прямокутного трикутника і гострим кутом знайти дві інші його сторони.
5. Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його гострі кути?
6. Сформулюйте види задач на розв'язування прямокутних трикутників та алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачу та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Знайдіть діагональ прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 9 см і 12 см.

А. 21 см.
Б. 3 см.
В. 20 см.
Г. 15 см.

2° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а висота — 12 см.

А. 22 см.
Б. 14 см.
В. 13 см.
Г. 15 см.

3° З точки до прямої проведено похилу завдовжки 8 см, яка утворює з прямою кут 60°. Знайдіть проекцію похилої на пряму.

А. 4 см.
Б. 2 см.
В. 6 см.
Г. 16 см.

4 Катети прямокутного трикутника відносяться, як 3 : 4, а його гіпотенуза дорівнює 10 см. Знайдіть катети трикутника.

А. 3 см і 4 см.
Б. 30 см і 40 см.
В. 6 см і 8 см.
Г. 4 см і 6 см.

5* Основи прямокутної трапеції дорівнюють 5 см і 14 см, а більша бічна сторона — 15 см. Знайдіть меншу діагональ трапеції.

А. 12 см.
Б. 13 см.
В. 22 см.
Г. 20 см.

№ 2

1° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо синус протилежного йому кута дорівнює 0,6 , а гіпотенуза — 10 см.

А. 6 см.
Б. 16 см.
В. 4 см.
Г. 60 см.

2° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катет дорівнює 8 см, а прилеглий до нього кут — 60°.

А. 10 см.
Б. 48 см.
В. 14 см.
Г. 16 см.

3° Діагональ прямокутника дорівнює 2 см й утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть сторони прямокутника.

А. 1 см і $\sqrt{3}$ см.
Б. 2 см і 1 см.
В. 2 см і $\sqrt{3}$ см.
Г. 3 см і 1 см.

4 Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює h, а кут між бічними сторонами — α.

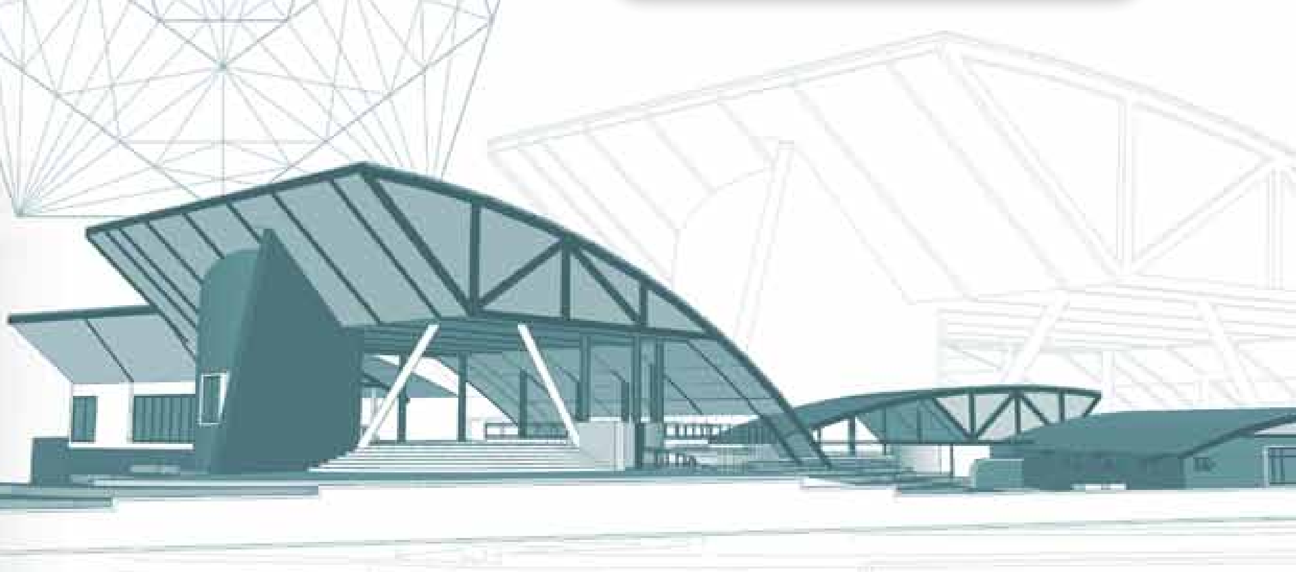
А. $h \cdot \sin\alpha$.
Б. $h \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.
В. $2h \cdot \mathrm{tg}\alpha$.
Г. $2h \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5* Тінь від стовпа, заввишки 12 м, дорівнює 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

А. ≈ 35°.
Б. ≈ 67°.
В. ≈ 87°.
Г. ≈ 76°.

Розділ 4

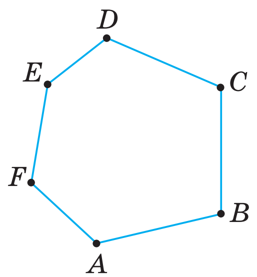
Многокутники. Площі многокутників



У розділі дізнаєтеся:

- про многокутник та його елементи;
- про суму кутів опуклого многокутника;
- які властивості многокутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- що таке площа та які її властивості;
- як обчислити площу трикутника й окремих видів чотирикутників: квадрата, прямокутника, паралелограма, ромба, трапеції

§ 20. МНОГОКУТНИК ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

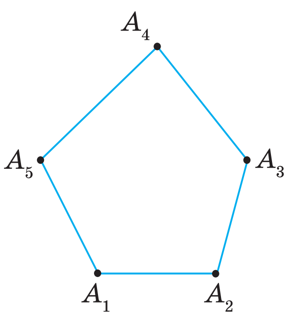


Мал. 437

Ви знаєте, що таке трикутник і чотирикутник. Більш загальним є поняття *многокутника*. На малюнку 437 ви бачите многокутник $ABCDEF$. Він складається з відрізків AB, BC, CD, DE, EF, FA, розміщених так, що суміжні відрізки не лежать на одній прямій, а несуміжні — не мають спільних точок. Відрізки, з яких складається многокутник, називають його *сторонами*, кути, утворені суміжними сторонами, — його *кутами*, а вершини цих кутів — *вершинами* многокутника.

Залежно від кількості вершин (кутів або сторін) многокутник називають трикутником, чотирикутником, п'ятикутником і т. д. Многокутник з n вершинами називають *n-кутником*.

Многокутник позначають назвами його вершин, наприклад, шестикутник $ABCDEF$ (мал. 437), п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (мал. 438).



Мал. 438

? На малюнку 439 ви бачите многокутники F_1 і F_2. У чому їх відмінність?

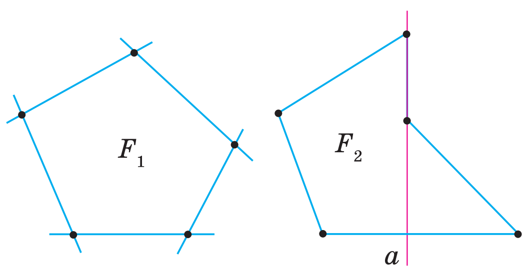
Жодна з прямих, які проходять через сторони многокутника F_1, не перетинає інших його сторін. Він лежить по один бік від будь-якої з цих прямих. Такий многокутник називають *опуклим*. Многокутник F_2 не є опуклим.

Надалі ми розглядатимемо лише опуклі многокутники.

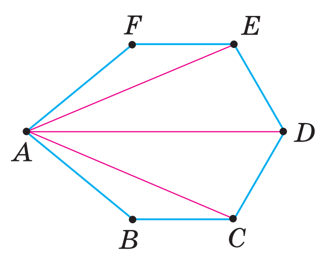
Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін. Його позначають буквою P.

Подивіться на малюнок 440. У шестикутнику $ABCDEF$ відрізки AC, AD, AE сполучають вершину A з несусідніми вершинами. Це — діагоналі шестикутника.

Діагоналлю n-кутника називають відрізок, який сполучає дві несусідні його вершини.



Мал. 439

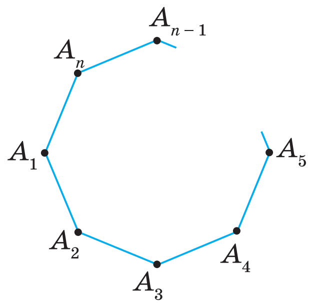


Мал. 440

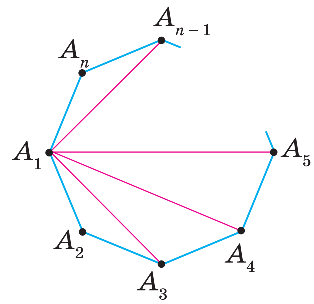
ТЕОРЕМА **(про суму кутів n-кутника).**

Сума кутів n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.

Дано: $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — n-кутник (мал. 441),
Довести:
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \ldots + \angle A_n = 180° \cdot (n - 2)$.
Доведення. З вершини A_1 у даному n-кутнику проведемо діагоналі A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 ... A_1A_{n-1} (мал. 442). Вони розбивають n-кутник на $n - 2$ трикутники. Сума всіх кутів утворених трикутників дорівнює сумі кутів даного n-кутника. Оскільки в кожному трикутнику сума кутів дорівнює 180°, то сума кутів даного n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.



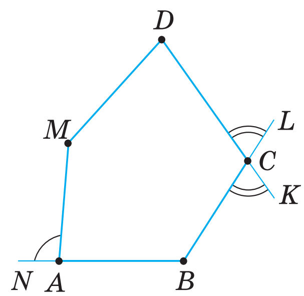
Мал. 441



Мал. 442

Кут, суміжний із кутом многокутника (мал. 443), називають *зовнішнім кутом многокутника*.

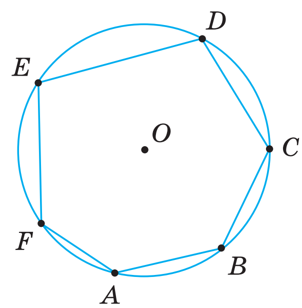
Многокутники можуть бути вписаними в коло (мал. 444) або описаними навколо кола (мал. 445). Спробуйте дати відповідні означення та порівняйте їх із наведеними в підручнику.



Мал. 443

***Многокутник*, усі вершини якого лежать на колі, називається *вписаним* у це коло, а *коло* — *описаним* навколо цього многокутника.**

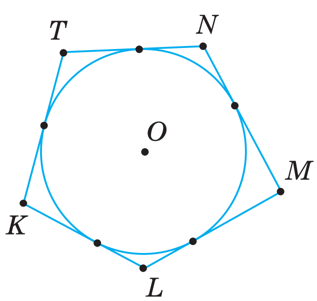
Сторони вписаного многокутника та його діагоналі є хордами кола. Кожний його кут є вписаним кутом (мал. 446).



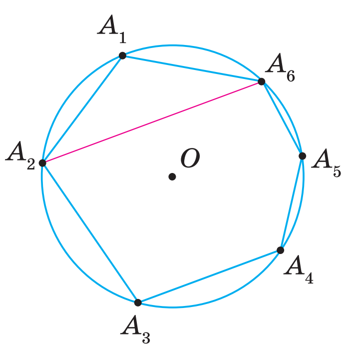
Мал. 444

***Многокутник*, усі сторони якого дотикаються до кола, називається *описаним* навколо цього кола, а *коло* — *вписаним* у цей многокутник.**

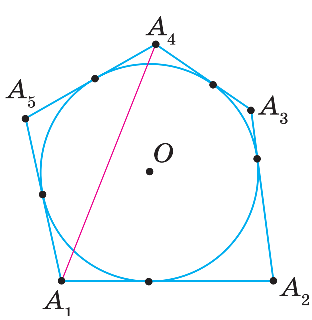
Сторони описаного многокутника є дотичними до кола, а його діагоналі — січними (мал. 447).



Мал. 445



Мал. 446

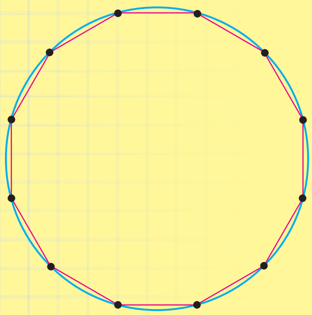


Мал. 447

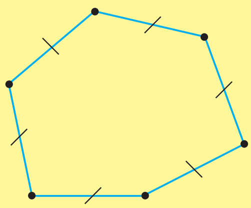
Дізнайтеся більше

1. Геометрична фігура називається *простою*, якщо її можна розбити на скінченну кількість трикутників. Многокутник — це проста фігура (див. мал. 440, 441). А от коло не є простою фігурою (мал. 448). Навіть вписавши в коло многокутник із надзвичайно великою кількістю сторін, ми лише наблизимо його контур до кола. Тому довжину кола та площу круга знаходять в геометрії іншими методами, ніж периметр і площу многокутника.

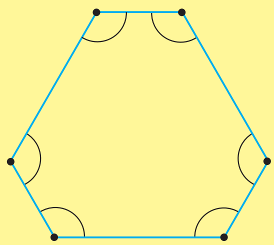
2. У вас могло виникнути запитання: *Чи завжди з рівності сторін многокутника випливає рівність його кутів і навпаки?* Ні. Цю властивість має лише трикутник. Ви знаєте приклад чотирикутника, у якого всі сторони рівні, а кути — ні. Це ромб. У прямокутнику всі кути рівні, а от сторони — ні. Серед многокутників із більшою кількістю вершин також можна виділити й рівносторонні многокутники, у яких не всі кути рівні (мал. 449), і рівнокутні многокутники, у яких не всі сторони рівні (мал. 450).



Мал. 448



Мал. 449



Мал. 450

3. **Кованцов Микола Іванович** (1924–1988) — відомий український математик-геометр, доктор фізико-математичних наук, професор. Народився в селі Соколов Саратовської області (Росія), але його становлення як вченого відбулося в Україні. Багато років обіймав посаду завідувача кафедри геометрії Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Перу М. І. Кованцова належать наукові та науково-популярні праці в галузі геометрії, методики навчання математики, історії математики, філософських проблем природознавства. Серед них особливе місце займають навчальні посібники для студентів університетів: «Проективна геометрія» (1985), «Диференціальна геометрія» (1973), «Математика і романтика» (1980).

Пригадайте головне

1. Що таке многокутник; n-кутник? Як його позначають?
2. Який відрізок називають діагоналлю многокутника?
3. Що таке периметр многокутника?
4. Сформулюйте теорему про суму кутів многокутника.
5. Що таке зовнішній кут многокутника?
6. Який многокутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?

Розв'яжіть задачі

946'. Чи правильно, що на малюнках 451, 452 зображено n-кутник? Якщо так, то назвіть його вершини, сторони й кути. Як по-іншому можна назвати цей n-кутник?

947'. Чи правильно, що на малюнку 453 зображено опуклий многокутник? Відповідь поясніть.

948'. Чи правильно, що периметр многокутника — це сума його:
1) кутів; 2) сторін?

949'. Чи правильно, що діагональ многокутника сполучає:
1) дві сусідні його вершини; 2) дві несусідні його вершини?

950'. Чи правильно записано формулу для обчислення суми кутів n-кутника:
1) $90°(n - 1)$; 2) $180°(n + 2)$; 3) $180°(n - 2)$?

951'. Назвіть зображені на малюнку 454 зовнішні кути п'ятикутника $KLMNP$ при вершині: 1) L; 2) P; 3) K.

952'. Чи правильно, що у многокутника, вписаного в коло, на колі лежать:
1) середини всіх його сторін; 2) усі вершини?

953'. Чи правильно, що у многокутника, описаного навколо кола, до кола дотикаються: 1) усі його діагоналі; 2) усі його сторони?

954°. Знайдіть периметр n-кутника, якщо в ньому всі сторони дорівнюють по 2 см і: 1) $n = 7$; 2) $n = 10$; 3) $n = 9$.

955°. Які діагоналі можна провести в n-кутнику $ABCDEF$ з вершини:
1) A; 2) C; 3) F?

956°. Накресліть семикутник $ABCDEOT$ і проведіть його діагоналі з вершини:
1) B; 2) O. Скільки утворилося трикутників при даній вершині?

957°. Чому дорівнює сума кутів:
1) п'ятикутника; 2) дев'ятикутника?

958°. Чому дорівнює сума кутів сімнадцятикутника?

959°. Скільки вершин у n-кутника, якщо сума його кутів дорівнює:
1) 1440°; 2) 1080°?

960°. Скільки вершин у n-кутника, якщо сума його кутів дорівнює 1620°?

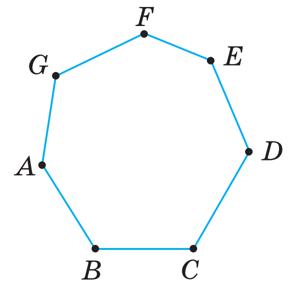
961°. Скільки вершин у n-кутника, якщо кожний його кут дорівнює:
1) 90°; 2) 144°?

962°. Скільки вершин у n-кутника, якщо кожний його кут дорівнює 156°?

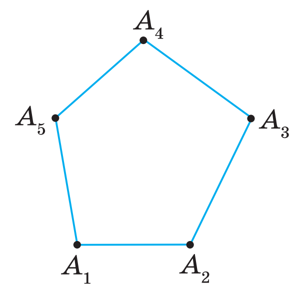
963°. За даними таблиці 30 знайдіть кути п'ятикутника $ABCDM$.

Таблиця 30

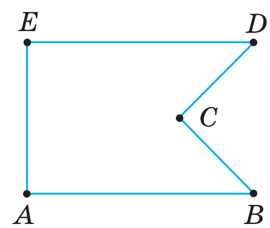
$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° - 20°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 10°$	$n° - 10°$	$5n°$
$\angle C$	$4n°$	$n°$	$n°$	$7n°$
$\angle D$	$5n°$	$n°$	$n° - 30°$	$9n°$
$\angle M$	$6n°$	$n° + 30°$	$n°$	$5n°$



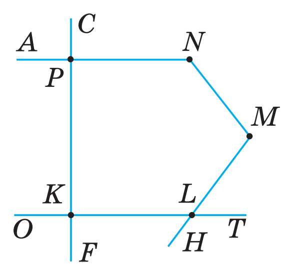
Мал. 451



Мал. 452



Мал. 453



Мал. 454

964°. Знайдіть зовнішній кут при вершині n-кутника, якщо кожний його кут дорівнює:
1) $90°$; 2) $156°$.

965°. Знайдіть зовнішній кут при вершині n-кутника, якщо кожний його кут дорівнює $144°$.

966°. Накресліть коло й позначте на ньому вісім точок — від A_1 до A_8. Послідовно сполучіть ці точки відрізками. Який n-кутник одержали?

967°. Накресліть коло й позначте на ньому сім точок — від A_1 до A_7. Послідовно сполучіть ці точки відрізками. Який n-кутник одержали?

968°. Із центра кола провели радіуси так, що утворилося 7 центральних кутів. Одержані на колі точки сполучили відрізками. Який многокутник утворився?

969°. Навколо кола опишіть: 1) шестикутник; 2) п'ятикутник. Позначте точки їх дотику до кола. Виміряйте утворені на сторонах відрізки. Чи справджується властивість відрізків дотичних? Як можна знайти периметр многокутника?

970°. Накресліть коло та проведіть п'ять дотичних до кола так, щоб утворився описаний п'ятикутник. Виміряйте відрізки сторін п'ятикутника від його вершин до точок дотику з колом. Позначте на малюнку рівні відрізки.

971. Периметр п'ятикутника дорівнює 136,4 см. Довжини чотирьох сторін відносяться, як 6 : 7 : 8 : 11. Знайдіть довжину п'ятої сторони п'ятикутника, якщо вона на 15,6 коротша від найменшої з чотирьох інших сторін.

972. Доведіть, що кожна сторона многокутника менша від його півпериметра.

973. **Скільки діагоналей у n-кутнику?**

974. Знайдіть кількість діагоналей у:
1) десятикутнику (мал. 455); 2) сімнадцятикутнику (мал. 456).

975. Чи існує п'ятикутник, у якого кути дорівнюють:
1) $100°, 90°, 120°, 116°, 113°$; 2) $110°, 100°, 118°, 112°, 101°$?

976. Чи можна побудувати многокутник, крім трикутника, у якому всі кути гострі?

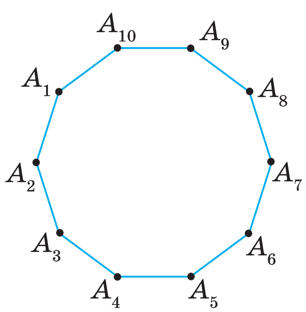
977. Три кути многокутника дорівнюють: 1) по $80°$; 2) по $90°$. Усі інші кути дорівнюють по $150°$. Яка кількість вершин у многокутнику?

978. Три кути многокутника дорівнюють по $100°$. Усі інші кути дорівнюють по $120°$. Яка кількість вершин у многокутнику?

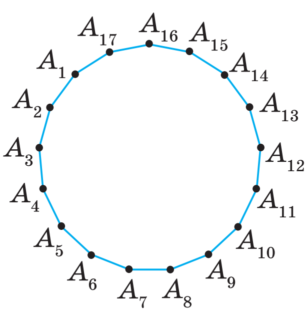
979. Зовнішні кути п'ятикутника відносяться, як:
1) 3 : 4 : 5 : 7 : 8; 2) 1 : 2 : 4 : 5 : 6.
Як відносяться його внутрішні кути?

980. **Доведіть, що сума всіх внутрішніх і всіх зовнішніх кутів n-кутника пропорційна кількості його вершин.**

981. Скільки вершин у вписаному многокутнику, якщо кожний центральний кут, що спирається на його сторону, дорівнює:
1) $60°$; 2) $40°$?



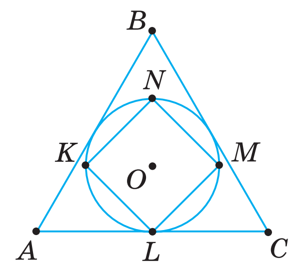
Мал. 455



Мал. 456

982. За якою формулою можна обчислити центральний кут, що спирається на сторону вписаного многокутника, у якого всі сторони рівні?

983. У рівносторонній трикутник зі стороною 6 см вписано коло (мал. 457). Знайдіть діагональ квадрата, вписаного в дане коло.



Мал. 457

984*. Доведіть, що кожний кут многокутника менший від 180°.

985*. У кожному з двох многокутників усі кути рівні. Кут першого многокутника:
1) удвічі менший від кута другого многокутника;
2) дорівнює зовнішньому куту другого многокутника.
Яку кількість вершин має кожний многокутник?

986*. Доведіть, що вписаний многокутник, у якому всі сторони рівні, має:
1) рівні кути; 2) рівні зовнішні кути.

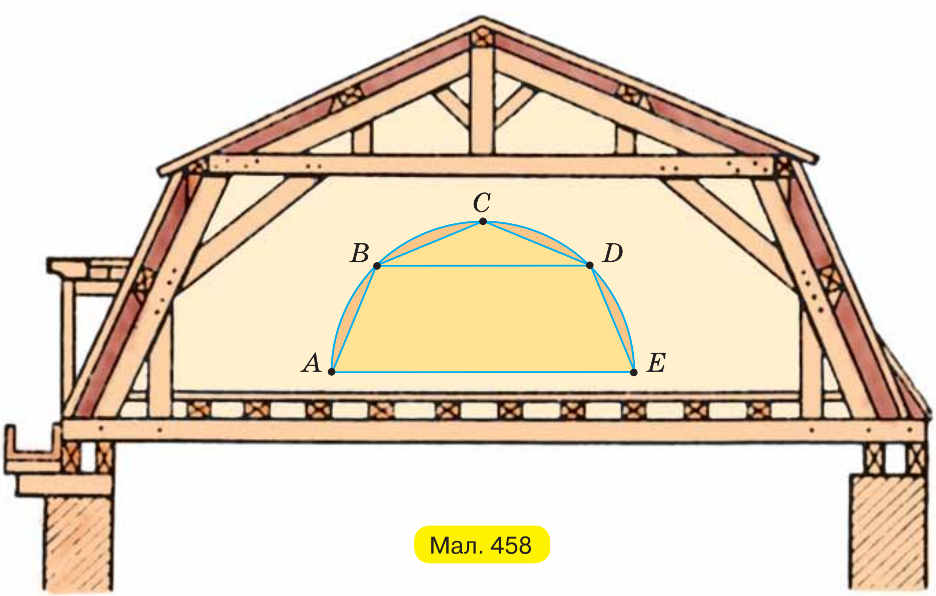
987*. Скільки вершин у вписаному многокутнику з рівними сторонами, якщо його кут:
1) дорівнює зовнішньому куту;
2) удвічі більший за зовнішній кут;
3) відноситься до зовнішнього кута, як 5 : 2?

988*. Доведіть, що у вписаному n-кутнику з рівними сторонами при $n > 4$ кут многокутника більший за його зовнішній кут.

989*. Рівнобічну трапецію з кутом при основі 54° вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, який лежить проти бічної сторони, дорівнює 36°. Де розташований центр кола, вписаного в дану трапецію?

Проявіть компетентність

990. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному розрізі половину восьмикутника, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні (мал. 458). Знайдіть ширину перекриття BD, сторону восьмикутника та висоту мансардної кімнати $ABDE$, якщо $AE = 6$ м.

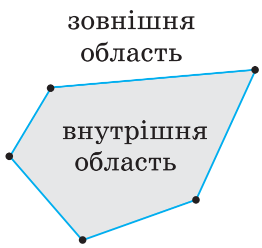


Мал. 458

§ 21. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

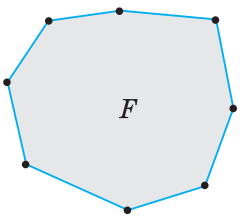
1. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ

Многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню (мал. 459). Многокутник разом з його внутрішньою областю називають плоским многокутником.



Мал. 459

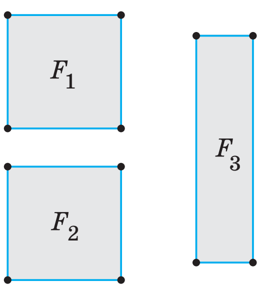
Кожний плоский многокутник (наприклад, многокутник F на мал. 460) займає частину площини. Якщо міру цієї частини площини деяким числом, то одержимо *площу многокутника*. Далі будемо говорити «площа многокутника», маючи на увазі, що многокутник — плоский. Це стосується й інших плоских фігур.



Мал. 460

Площу позначають буквою S. Іноді вказують назву фігури, наприклад S_F, а для кількох фігур — індекси, наприклад S_1, S_2 і т. д.

На малюнку 461 фігури F_1 і F_2 рівні, бо суміщаються накладанням. Зрозуміло, що вони мають рівні площі. Загалом, **рівні фігури мають рівні площі.**



Мал. 461

Дві фігури, які мають рівні площі, називають *рівновеликими*. Наприклад, рівновеликими є усі три фігури на малюнку 461, оскільки фігури F_1 і F_2 є рівними, а фігуру F_3 складено з двох половинок фігури F_1. Зрозуміло, що **рівні фігури завжди є рівновеликими** (наприклад, як фігури F_1 і F_2), **але не будь-які рівновеликі фігури — рівні** (наприклад, як фігури F_3 і F_1).

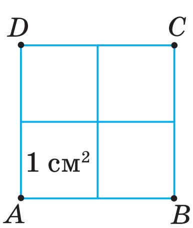
Щоб виміряти площу фігури, потрібно обрати *одиницю вимірювання*. Для цього використовують квадрат, у якому сторона дорівнює одиниці вимірювання довжини. Площа квадрата зі стороною 1 см — це одиниця вимірювання площі у *квадратних сантиметрах*, зі стороною 1 м — у *квадратних метрах* і т. д.

Отже, **одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.**

Коротко записують так: 1 см^2, але говорять: «один квадратний сантиметр». Говорити «сантиметр у квадраті» — неправильно!

Деякі одиниці вимірювання площі мають спеціальні назви: *ар* (площа квадрата зі стороною 10 м), *гектар* (площа квадрата зі стороною 100 м) та ін.

На малюнку 462 ви бачите квадрат $ABCD$ зі стороною 2 см. Він складається з чотирьох квадратів площею 1 см^2, тому його площа дорівнює 4 см^2.



Мал. 462

Записують: $S_{ABCD} = 4$ см^2.

Зрозуміло, що **площу будь-якої фігури виражають додатним числом.**

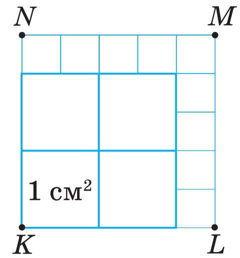
? Чи зміниться площа квадрата $ABCD$, якщо за одиницю вимірювання візьмемо 1 мм^2? Ні, площа квадрата не зміниться, але буде виражена інакше: $S_{ABCD} = 400$ мм^2.

На малюнку 463 довжина сторони квадрата $KLMN$ дорівнює 2,5 см. Він уміщує 4 квадрати площею 1 см^2 і ще 9 маленьких квадратів площею 0,25 см^2. Тому $S_{KLMN} = 4 + 9 \cdot 0{,}25 = 6{,}25$ (см^2).

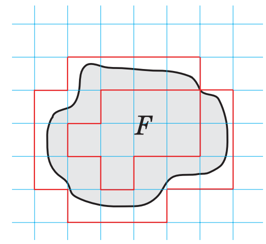
Зрозуміло, що **площа будь-якої фігури дорівнює сумі площ частин, з яких вона складається.**

Щоб наближено виміряти площу фігури F, використовують палетку (мал. 464). Для її виготовлення на прозорій плівці наносять сітку з горизонтальних і вертикальних прямих із кроком, що дорівнює деякій одиниці довжини. Палетку накладають на фігуру F і підраховують кількість n «цілих» квадратів, розміщених усередині неї. Потім підраховують кількість m квадратів, у яких лише частина розміщена всередині фігури. За тим до числа n додають половину числа m.

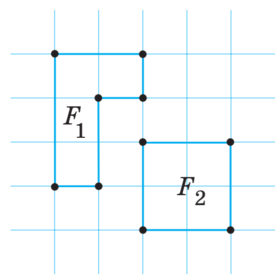
Два многокутники називають *рівноскладеними*, якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників. Такими є, наприклад, фігури F_1 і F_2 на малюнку 465, бо кожна з цих фігур складається з однакової кількості квадратів.



Мал. 463



Мал. 464



Мал. 465

2. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

Із попередніх класів ви знаєте, що площу квадрата зі стороною a можна обчислити по-іншому — за *формулою площі квадрата*:

$$S = a^2.$$

Для квадратів $ABCD$ (див. мал. 462) і $KLMN$ (див. мал. 463) одержимо:

$$S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ (см}^2\text{)}, \qquad S_{KLMN} = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки 4 см^2 < 6,25 см^2, можемо записати: $S_{ABCD} < S_{KLMN}$.

Будемо вважати формулу площі квадрата основною і приймемо її без доведення. Для інших фігур формули площі треба *виводити*, спираючись на основні властивості площі.

Щоб вивести формулу площі многокутника, можна:
або розбити його на частини, формули площ яких відомі;
або доповнити його до такої фігури, формула площі якої відома.

ТЕОРЕМА **(про площу прямокутника).**

Площа прямокутника дорівнює добутку його суміжних сторін.

Дано: $ABCD$ — прямокутник (мал. 465),
$AB = a$, $AD = b$.

Довести: $S_{ABCD} = ab$.

Доведення. Добудуємо даний прямокутник $ABCD$ до квадрата $AMKN$ зі стороною $a + b$ (мал. 466).

Тоді $S_{AMKN} = (a + b)^2$.

З іншого боку, квадрат $AMKN$ складається з двох прямокутників $ABCD$ і $OKLC$ та двох квадратів $BMOC$ і $DNLC$.

Тому, за властивостями площі,

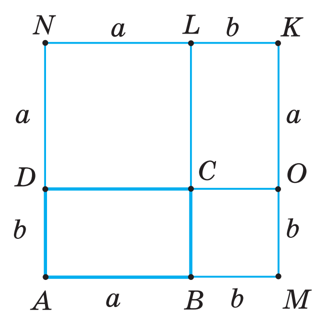
$$S_{AMKN} = S_{ABCD} + S_{OKLC} + S_{BMOC} + S_{DNLC}.$$

Прямокутники $ABCD$ і $OKLC$ — рівні, бо мають рівні суміжні сторони a і b.

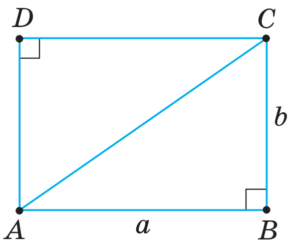
Тому, за властивостями площі, $S_{ABCD} = S_{OKLC}$.

Квадрати $BMOC$ і $DNLC$ мають сторони b і a відповідно, тому

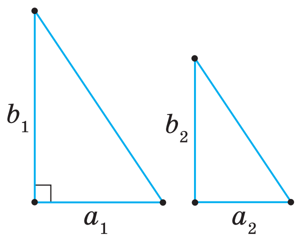
$$S_{BMOC} = b^2,\ S_{DNLC} = a^2. \text{ Отже, } S_{AMKN} = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2.$$



Мал. 466



Мал. 467



Мал. 468

Далі одержуємо:

$$(a + b)^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2, \text{ або } a^2 + 2ab + b^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2.$$

Звідси $S_{ABCD} = ab$.

НАСЛІДОК. Площа прямокутного трикутника з катетами a і b дорівнює половині добутку катетів.

Справді, діагональ AC розбиває прямокутник $ABCD$ зі сторонами a і b (мал. 467) на два рівні прямокутні трикутники ABC і ADC з катетами a і b.

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab}$$

Задача. Доведіть, що відношення площ подібних прямокутних трикутників дорівнює квадрату їх коефіцієнта подібності.

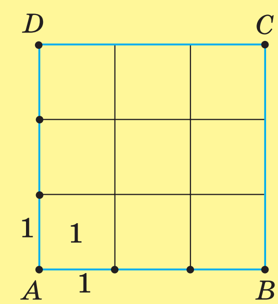
Розв'язання. Нехай один із даних прямокутних трикутників (мал. 468) має катети a_1, b_1 і площу S_1, другий — катети a_2, b_2 і площу S_2, а коефіцієнт їх подібності дорівнює k. Доведемо, що $\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$.

Оскільки трикутники подібні, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Знайдемо площі трикутників та їх відношення:

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1 = \frac{1}{2}ka_2 \cdot kb_2 = \frac{1}{2}k^2a_2b_2; \quad S_2 = \frac{1}{2}a_2b_2; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_2b_2}{\frac{1}{2}a_2b_2} = k^2.$$

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Як довести, що площа квадрата дорівнює квадрату його сторони?*

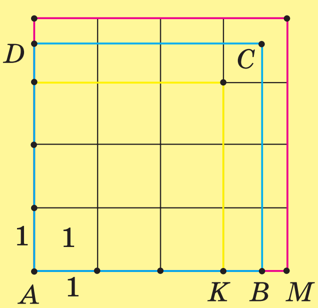


Мал. 469

Нехай сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a. Можливі два випадки: сторону AB можна розбити на n одиничних відрізків, де n — натуральне число (мал. 469); на стороні AB можна розмістити n одиничних відрізків, але залишається остача — відрізок, коротший від одиничного відрізка (мал. 470).

Розглянемо перший випадок (мал. 469). Розіб'ємо сторону AB на n одиничних відрізків (на малюнку їх 3), тоді $a = 1 \cdot n = n$. Так само розіб'ємо сторону AD. Через точки поділу проведемо прямі, перпендикулярні до AB і AD відповідно. Ці прямі розбивають квадрат $ABCD$ на $n \cdot n = n^2$ рівних квадратів площею 1.

Тому $S_{ABCD} = 1 \cdot n^2 = 1 \cdot a^2 = a^2$.



Мал. 470

Розглянемо другий випадок (мал. 470). Нехай на відрізку AB уміщується n одиничних відрізків і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж 1. Це означає, що відрізок AK із n одиничних відрізків є меншим від відрізка AB, а відрізок AM із $n + 1$ одиничних відрізків — більшим за цей відрізок.

Одержали нерівність: $n < a < n + 1$.

Щоб точніше оцінити площу даного квадрата, поділимо одиничний відрізок на m рівних частин. Тоді довжина кожної частини дорівнюватиме $\dfrac{1}{m}$.

Нехай на відрізку AK їх уміститься $n+\frac{k}{m}$, а на відрізку AM — $n+\frac{k+1}{m}$.

Число a лежатиме в межах $n+\frac{k}{m}<a<n+\frac{k+1}{m}$, а квадрат цього числа — у межах $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<a^2<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Площа квадрата зі стороною AK дорівнюватиме $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2$, а квадрата зі стороною AM — $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Тому площа квадрата $ABCD$ лежатиме в межах $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<S_{ABCD}<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

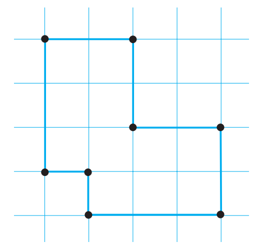
При збільшенні кількості точок поділу число m стане як завгодно великим. Площа квадрата $ABCD$ і квадрат числа a лежатимуть у межах, різниця між якими як завгодно мала: $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2-\left(n+\frac{k}{m}\right)^2=2\left(n+\frac{k}{m}\right)\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$.

А це можливо лише тоді, коли $S_{ABCD}=a^2$.

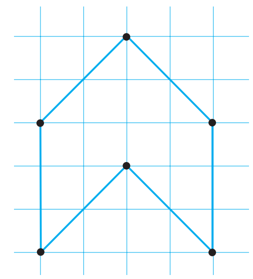
2. Символ S для позначення площі фігури походить від латинського слова *superficils*, що означає «поверхня».

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке площа фігури. Які її властивості?
2. У яких одиницях вимірюють площу?
3. Що таке рівновеликі фігури? Рівноскладені фігури?
4. Як наближено виміряти площу фігури за допомогою палетки?
5. За якою формулою обчислюють площу квадрата?
6. За якою формулою обчислюють площу прямокутника?
7. Як обчислити площу прямокутного трикутника?
8. Чому дорівнює відношення площ подібних прямокутних трикутників?



Мал. 471



Мал. 472

Розв'яжіть задачі

991'. Чи правильно, що площа — це:
1) фігура; 2) величина, що характеризує фігуру?

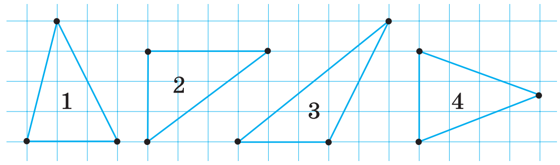
992'. Чи правильно, що фігури на малюнках 471 і 472: 1) рівновеликі; 2) рівноскладені? Відповідь поясніть.

993'. Чи правильно записано формулу площі квадрата зі стороною a:
1) $S=2a$; 2) $S=a+2$; 3) $S=a:2$; 4) $S=a^2$?

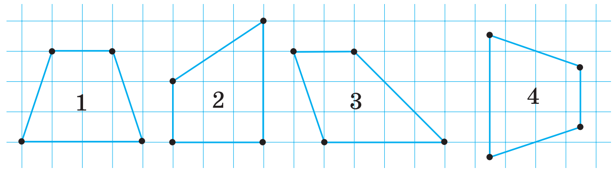
994'. Чи правильно записано формулу площі прямокутника зі сторонами a і b:
1) $S=2(a+b)$; 2) $S=2ab$; 3) $S=a^2b^2$; 4) $S=ab$?

995'. Чи правильно записано формулу площі прямокутного трикутника з катетами a і b:
1) $S=a+b$; 2) $S=ab$; 3) $S=\frac{1}{2}a^2b^2$; 4) $S=\frac{1}{2}ab$?

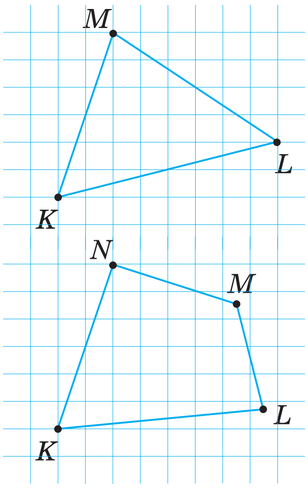
996°. Знайдіть наближені значення площ фігур, зображених на малюнку: 1) 473; 2) 474.



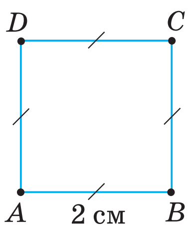
Мал. 473



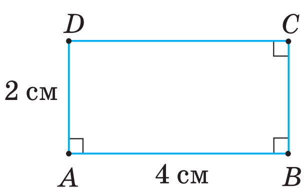
Мал. 474



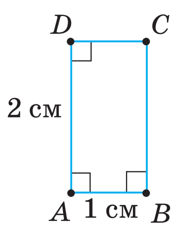
Мал. 475



Мал. 476



Мал. 477



Мал. 477

997°. Знайдіть наближені значення площ фігур, зображених на малюнку 475.

998°. Доведіть, що висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить його на рівновеликі трикутники.

999°. Доведіть, що діагональ прямокутника, ділить його на рівновеликі трикутники.

1000°. Точку всередині трикутника сполучено відрізками з його вершинами. Знайдіть площу трикутника, якщо утворені частини мають площу 12 см^2, 39 см^2 і 45 см^2.

1001°. Точку всередині трикутника сполучено відрізками з його вершинами. Утворені частини трикутника мають площу 90 см^2, 25 см^2 і 45 см^2. Знайдіть площу трикутника.

1002°. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:
1) 16 см^2; 2) 9 см^2; 3) 121 см^2.

1003°. Яка довжина сторони квадрата, площа якого дорівнює:
1) 25 см^2; 2) 49 см^2?

1004°. За даними на малюнках 476, 477 обчисліть площу прямокутника *ABCD*.

1005°. Яку площу має прямокутник *ABCD* на малюнку 478?

1006°. Як зміниться площа прямокутника, якщо одну з його сторін:
1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 50 % ?

1007°. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін:
1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 50 % ?

1008°. Периметр прямокутника зі сторонами a і b дорівнює P, а його площа — S. Знайдіть невідомі величини за таблицею 31.

Таблиця 31

a	4 см			8 см
b		12 см	7 см	
P	11 см		21 см	
S		6 см^2		4 см^2

1009°. Прямокутники *ABCD* і *MTOH* мають рівні площі. У прямокутнику *ABCD* сторони дорівнюють 10 см і 60 см. Знайдіть сторони прямокутника *MTOH*, якщо вони відносяться, як:
1) 2 : 3; 2) 3 : 8; 3) 0,3 : 0,5.

1010°. Прямокутники $ABCD$ і $KLMN$ мають рівні площі. У прямокутнику $KLMN$ сторони дорівнюють 2 см і 9 см. Знайдіть сторони прямокутника $ABCD$, якщо вони відносяться, як 1 : 2.

1011°. Чому дорівнює площа прямокутного трикутника з катетами:
1) 3 см і 5 см; 2) 2 см і 5 см; 3) 10 см і 4,5 см?

1012°. Яка площа прямокутного трикутника з катетами 4 см і 9 см?

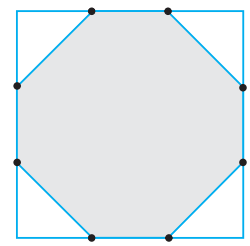
1013°. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 45°, якщо один з його катетів дорівнює: 1) 2 см; 2) 0,3 дм; 3) 0,05 м.

1014°. Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 6 см.

1015°. Квадрат зі стороною a та прямокутник зі сторонами b і c мають рівні площі. Знайдіть периметр кожного чотирикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см; 2) $a = 6$ см, $c = 2$ см.
Який із двох чотирикутників має менший периметр?

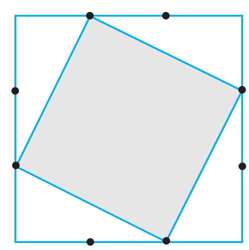
1016°. Квадрат зі стороною 10 см має таку саму площу, що й прямокутник, у якого одна зі сторін дорівнює 20 см. Знайдіть периметр кожного чотирикутника. Який із двох чотирикутників має менший периметр?

1017. Кожну сторону квадрата завдовжки a поділено на 3 рівні частини й одержані точки сполучено так, як показано на малюнку 479. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



Мал. 479

1018. Кожну сторону квадрата завдовжки a поділено на 3 рівні частини й одержані точки сполучено так, як показано на малюнку 480. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



Мал. 480

1019. Різниця периметрів двох квадратів дорівнює c, а різниця їхніх площ — d. Знайдіть площі квадратів, якщо:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см^2; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см^2.

1020. Ширина прямокутної рамки дорівнює c, а її площа — S. Знайдіть периметри зовнішнього та внутрішнього контуру рамки, якщо:
1) $c = 2$ см, $S = 96$ см^2; 2) $c = 3$ см, $S = 564$ см^2.

1021. Площа прямокутника дорівнює S. Складіть вирази для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться, як $m : n$.

1022. Периметр прямокутника дорівнює P. Складіть вирази для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться, як $m : n$.

1023. Який геометричний зміст для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ мають формули:
1) $(a + b)c = ac + bc$; 2) $(a - b)c = ac - bc$;
3) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$?

1024. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Точка O розміщена на відстані d від кожного катета. Знайдіть відстань від цієї точки до гіпотенузи, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 1$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см.

1025*. **Будь-які два рівноскладені многокутники є рівновеликими.** Доведіть.

1026*. Точка M ділить відрізок AB навпіл, а точка N — на нерівні частини. Доведіть, що площа прямокутника зі сторонами AN і NB дорівнює різниці площ квадратів зі сторонами MB і MN.

1027*. У прямокутнику зі сторонами 4 см і 6 см проведено бісектриси кутів при його більшій стороні. Знайдіть площі частин, на які поділено прямокутник.

1028*. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 46°, а його площа — 545 см². Знайдіть сторони прямокутника.

1029*. Якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то $AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2AB \cdot BC$. Чи правильне це твердження?

1030*. **Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку гіпотенузи та висоти, проведеної до гіпотенузи.**

1031*. Доведіть, що площі трикутників, на які розбиває прямокутний трикутник висота, проведена до гіпотенузи, відносяться, як проекції катетів на гіпотенузу.

Проявіть компетентність

1032. За картою України (див. QR код) з’ясуйте, з яких частин складається площа України; яка частина має найменшу площу, найбільшу площу. Яку частину площі України становить площа області, у якій ви мешкаєте?

1033. Побудуйте: 1) коло радіуса 2 см; 2) будь-який многокутник. Із прозорої плівки виготовте палетку та визначте наближені значення площ зображених фігур.

1034. Площа ділянки дорівнює 6 а. Чому дорівнює площа цієї ділянки у квадратних метрах; у гектарах?

1035. Ділянка прямокутної форми на плані в масштабі 1 : 100 має сторони 10 см і 25 см. Яка площа цієї ділянки?

1036. Прямокутний шматок лінолеуму має розмір 9 × 4 м. Чи вистачить його для покриття підлоги у двох кімнатах розмірами 2 × 8 м і 4 × 5 м?

1037. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість рулонів шпалер (без підгонки малюнка) необхідно придбати для ремонту кімнати у вас удома, якщо рулон має довжину 10,5 м і ширину 0,6 м.

1038. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість кахельної плитки розмірами 20 × 30 см необхідно придбати для ремонту ванної кімнати у вас удома.

1039. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість паркетних дощечок прямокутної форми розмірами 30 × 5 см необхідно придбати для настилання паркету в кімнаті у вас удома.

1040. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість ламінату прямокутної форми розмірами 138 × 19,5 см необхідно придбати для його настилання в кімнаті у вас удома.

1041. Площу фігури можна визначити способом зважування (мал. 481). Для цього фігуру креслять на аркуші цупкого паперу або картону та вирізають за контуром. З того самого матеріалу вирізають квадрат певних розмірів. Потім порівнюють масу обох фігур. Поясніть, на чому ґрунтується такий спосіб.

Мал. 481

§ 22. ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

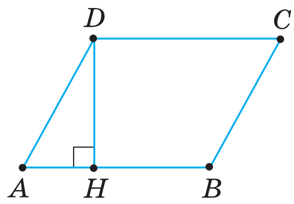
Ви вже знаєте формули площ трьох фігур — квадрата, прямокутника та прямокутного трикутника. Виведемо формулу площі паралелограма.

ТЕОРЕМА (про площу паралелограма).

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

Д а н о: $ABCD$ — паралелограм (мал. 482),
DH — висота,
$AB = a$, $DH = h_a$.

Д о в е с т и: $S_{ABCD} = ah_a$.

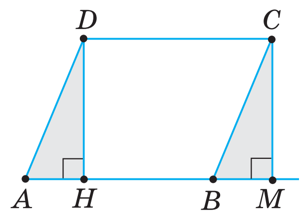


Мал. 482

Д о в е д е н н я. Проведемо з вершини C висоту $CM = DH = h_a$ (мал. 483). Одержали трапецію $AMCD$. Розглянемо дві пари фігур, які її складають:

1) даний паралелограм $ABCD$ і ΔBMC;

2) прямокутник $HMCD$ і ΔAHD.



Мал. 483

За властивостями площі одержуємо:

1) $S_{AMCD} = S_{ABCD} + S_{\Delta BMC}$;

2) $S_{AMCD} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$.

Тому $S_{ABCD} + S_{\Delta BMC} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$.

Розглянемо ΔBMC і ΔAHD.

У них: $CM = DH$ як висоти, проведені до однієї сторони AB паралелограма, $AD = BC$ як протилежні сторони паралелограма.

Отже, $\Delta BMC = \Delta AHD$ за катетом і гіпотенузою.

Тому, за властивостями площі, $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta AHD}$.

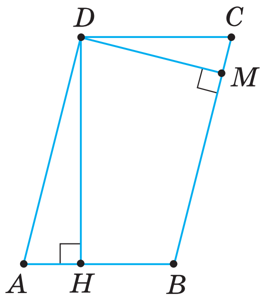
Отже, $S_{ABCD} = S_{HMCD}$.

Для прямокутника $HMCD$ маємо:

$$S_{HMCD} = CD \cdot DH = AB \cdot DH = ah_a.$$

Оскільки, за доведеним, площа даного паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $HMCD$, то

$$\boxed{S_{ABCD} = ah_a.}$$



Мал. 484

Задача. У паралелограмі сторони дорівнюють 8 см і 6,4 см, а висота, проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої його сторони.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 484), у якому $AB = 6{,}4$ см, $BC = 8$ см, $DM = 6$ см.
Потрібно знайти висоту DH.
Площу паралелограма $ABCD$ можна виразити двома способами: як добуток сторони BC на висоту DM і як добуток сторони AB на висоту DH.
Звідси:
$S_{ABCD} = BC \cdot DM = 8 \cdot 6 = 48$ (см^2), (1)
$S_{ABCD} = AB \cdot DH$. (2)
Із рівностей (1) і (2) одержуємо:

$$DH = S_{ABCD} : AB = 48 : 6{,}4 = 7{,}5 \text{ (см)}.$$

Щоб знайти довжину невідомої сторони або висоти паралелограма, виразіть його площу двома способами: через одну із двох суміжних сторін паралелограма та висоту, проведену до неї, та через іншу суміжну сторону та відповідну їй висоту. Складіть і розв'яжіть рівняння відносно шуканої величини.

Чи можна знайти площу ромба за стороною та висотою, проведеною до неї? Так, оскільки ромб — окремий вид паралелограма.

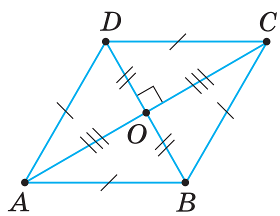
Ви знаєте, як знаходити площу прямокутного трикутника за його катетами. Скористаємося цим, щоб вивести ще одну формулу площі ромба.

ТЕОРЕМА **(про площу ромба за його діагоналями).**

Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.

Дано: $ABCD$ — ромб (мал. 485),
AC і BD — діагоналі,
$AC = d_1$, $BD = d_2$.

Довести: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Мал. 485

Доведення. У ромбі $ABCD$ всі сторони рівні. Його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні й у точці перетину діляться навпіл. Тому вони розбивають ромб на чотири рівні прямокутні трикутники ABO, CBO, CDO і ADO з катетами $\frac{d_1}{2}$ і $\frac{d_2}{2}$.

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CBO} = S_{\Delta CDO} = S_{\Delta ADO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{8}.$$

Оскільки площа ромба дорівнює сумі площ цих трикутників, то

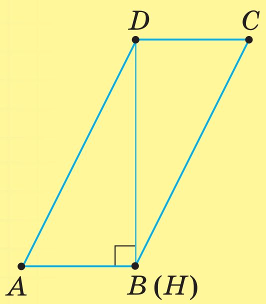
$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{8} = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

НАСЛІДОК. Площа квадрата дорівнює половині квадрата його діагоналі.
Твердження випливає з того, що квадрат є окремим видом ромба й має рівні діагоналі d. Отже, якщо d — діагональ квадрата, то $S = \frac{1}{2} d^2$.

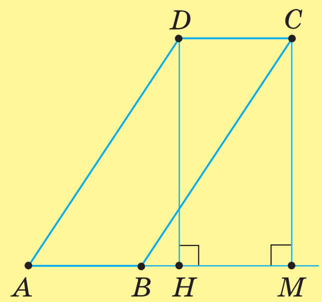
Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Чи залежить формула площі паралелограма $ABCD$ від розміщення висоти DH* (див. мал. 482)? Не залежить. У розміщенні точки H можливі три випадки. Один із них розглянуто в теоремі про площу паралелограма. Інші два випадки такі: точка H розміщується або у вершині B паралелограма (мал. 486), або на продовженні його сторони AB (мал. 487).

У другому випадку (мал. 486) паралелограм $ABCD$ складається з двох рівних прямокутних трикутників ABD і CDB, тому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = ah_a$. У третьому випадку (мал. 487) доведення аналогічне наведеному в підручнику. Проведіть його самостійно.



Мал. 486



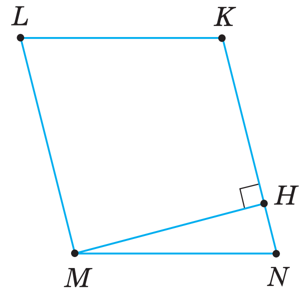
Мал. 487

2. Між рівновеликими й рівноскладеними фігурами існують зв'язки: будь-які два рівноскладені многокутники є рівновеликими (випливає з означення рівноскладених многокутників); будь-які два рівновеликі многокутники є рівноскладеними. Останнє твердження має назву «теорема Больяї — Гервіна». Її довели в XIX ст. Цікавим є той факт, що Фаркаш Больяї (1775–1856, Угорщина), який довів теорему, був батьком Яноша Больяї (1802–1860) — одного з творців неевклідової геометрії. Янош з дитинства долучився до вивчення математики. Виявляючи неабиякі математичні здібності, він за 4 роки опанував семирічний курс Військово-інженерного коледжу у Відні, який закінчив у 1822 р. Основні положення неевклідової геометрії Я. Больяї розробив незалежно від М. І. Лобачевського і опублікував у 1832 р. На жаль, ця та інші видатні праці Я. Больяї не здобули визнання за його життя. Але наукова спільнота високо цінує його вклад у розвиток математики. На його честь названо астероїд 1441 Больяї та засновано математичну премію.


Янош Больяї

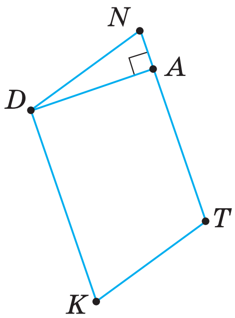
Пригадайте головне

1. За якою формулою можна обчислити площу паралелограма?
2. Як вивести формулу площі паралелограма за стороною та висотою, проведеною до цієї сторони?
3. За якою формулою можна обчислити площу ромба за його діагоналями?
4. Виведіть формулу площі ромба за його діагоналями.
5. За якою формулою можна обчислити площу квадрата за його діагоналями?



$S = MN \cdot MH$

Мал. 488



$S = DA \cdot NT$

Мал. 489

Розв'яжіть задачі

1042'. За даними на малюнках 488–489 з'ясуйте, чи є правильною наведена рівність для обчислення площі паралелограма. Відповідь поясніть.

1043'. Чи є правильною формула площі ромба за його діагоналями d_1 і d_2:

1) $S = d_1 + d_2$; 2) $S = d_1 d_2$; 3) $S = 2d_1 d_2$; 4) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$?

1044'. Чи є правильною формула площі квадрата за його діагоналлю d:

1) $S = 2d$; 2) $S = d^2$; 3) $S = 2d^2$; 4) $S = \frac{1}{2} d^2$?

1045°. За даними на малюнку 490 знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

1046°. За даними на малюнку 491 знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

1047°. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоту BH до сторони CD. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $CD = 60$ см, $BH = 50$ см; 2) $CD = 25$ см, $BH = 40$ см.

1048°. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоту CM до сторони AB. Знайдіть площу паралелограма, якщо $AB = 25$ см, $CM = 100$ см.

1049°. До сторони a паралелограма проведено висоту h_a. Знайдіть його площу, якщо: 1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0{,}75a$.

1050°. Знайдіть площу паралелограма, у якому проведено висоту $h_b = 5$ см до сторони $b = 1{,}2h_b$.

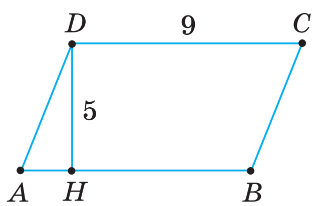
1051°. Площа паралелограма дорівнює S, а одна з його сторін — a. Знайдіть висоту, проведену до цієї сторони, якщо:
1) $S = 60$ см², $a = 15$ см; 3) $S = 75$ см², $a = 25$ см;
2) $S = 175$ см², $a = 35$ см; 4) $S = 96$ см², $a = 12$ см.

1052°. Площа паралелограма дорівнює 180 см², а одна з його сторін — 15 см. Знайдіть висоту, проведену до цієї сторони.

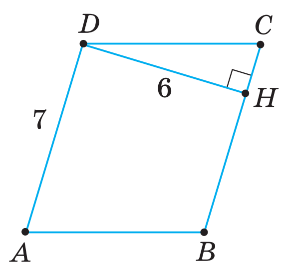
1053°. Знайдіть висоти паралелограма зі сторонами a і b та площею S за таблицею 32.

Таблиця 32

a	5 см	8,5 см	14 см	16 см
b	10 см	17 см	21 см	10 см
S	41 см²	34 см²	63 см²	64 см²
h_a				
h_b				



Мал. 490



Мал. 491

1054°. Площа паралелограма дорівнює S. Знайдіть відстань між його сторонами, що мають довжину n, якщо:
1) $S = 56$ см^2, $n = 7$ см; 2) $S = 90$ см^2, $n = 18$ см.

1055°. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2. Знайдіть відстань між його сторонами завдовжки 6 см.

1056°. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а висота, проведена до сторони a, дорівнює h_a. Знайдіть висоту, проведену до сторони b, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 3{,}6$ см, $h_a = 2{,}4$ см; 2) $a = 18$ мм, $b = 9$ мм, $h_a = 6$ мм.

1057°. Сторони паралелограма дорівнюють 30 см і 50 см, а висота, яку проведено до меншої сторони, дорівнює 25 см. Знайдіть висоту, проведену до більшої сторони.

1058°. **Доведіть, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами.**

1059°. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено довільну пряму. Чи рівні площі частин, на які вона ділить паралелограм?

1060°. Чому дорівнює площа ромба $ABCD$ на малюнку 492?

1061°. Чому дорівнює площа ромба $KLMN$ на малюнку 493?

1062°. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) 12 см і 16 см; 2) 1,6 дм і 3 дм.

1063°. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 40 мм і 42 мм.

1064°. **Доведіть, що діагоналі ромба розбивають його на чотири прямокутні трикутники з рівними площами.**

1065°. У ромбі $KLMN$ діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть площу ромба, якщо площа прямокутного трикутника KOL дорівнює:
1) 25 см^2; 2) 30 см^2.

1066°. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Площа прямокутного трикутника AOB дорівнює 18 см^2. Знайдіть площу ромба.

1067°. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо його діагональ AC дорівнює:
1) 4 см; 2) 0,3 дм.

1068°. Знайдіть площу квадрата $KLMN$, якщо його діагональ KM дорівнює 1,2 м.

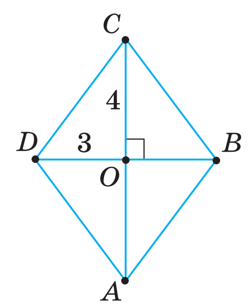
1069. Паралелограм має гострий кут 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють:
1) 15 см і 10 см; 2) 25 см і 20 см.

1070. Висота паралелограма, проведена до більшої сторони, утворює з меншою стороною кут 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють: 1) 10 мм і 15 мм; 2) 20 мм і 25 мм.

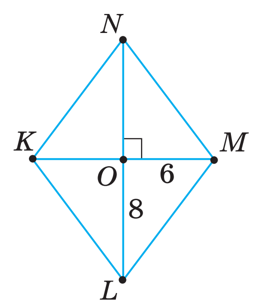
1071. Знайдіть площу ромба з тупим кутом 150°, якщо його сторона дорівнює: 1) 1 дм; 2) 2,6 см.

1072. Дві смуги завширшки m і n, перетинаючись, утворюють паралелограм із площею S. Знайдіть сторони паралелограма, якщо:
1) $m = 9$ см, $n = 24$ см, $S = 72$ см^2; 2) $m = 4$ дм, $n = 1$ дм, $S = 6$ дм^2.

1073. Площа паралелограма дорівнює S. Відстані від точки перетину його діагоналей до сторін відповідно дорівнюють m і n. Знайдіть периметр паралелограма, якщо:
1) $S = 56$ см^2, $m = 4$ см, $n = 3{,}5$ см; 2) $S = 36$ см^2, $m = 2$ см, $n = 3$ см.



Мал. 492



Мал. 493

1074. У паралелограмі з периметром P точка перетину діагоналей віддалена від його сторін на відстань m і n. Знайдіть площу паралелограма, якщо: 1) $P = 64$ см, $m = n = 4$ см; 2) $P = 63$ см, $m = 4$ см, $n = 5$ см.

1075. **Через довільну точку діагоналі паралелограма проведено дві прямі, паралельні його сторонам. Доведіть, що утворені чотирикутники, які лежать по різні боки від діагоналі, мають рівні площі.**

1076. Площа ромба дорівнює 36 см^2. Знайдіть його діагоналі, якщо вони відносяться, як: 1) 3 : 4; 2) 2 : 3; 3) 1 : 1.

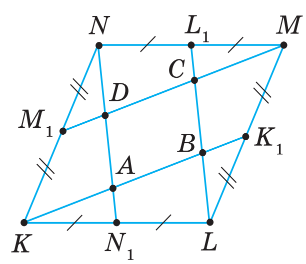
1077. Площа ромба удвічі менша від площі квадрата із таким самим периметром. Знайдіть гострий кут ромба.

1078. Два квадрати мають діагоналі відповідно 5 см і 3 см. Яка довжина діагоналі квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів?

1079. У скільки разів площа квадрата, вписаного в коло, менша від площі квадрата, описаного навколо цього кола?

1080*. Висоти паралелограма відносяться, як 2 : 3, його периметр дорівнює 40 см, а гострий кут — 30°. Знайдіть площу паралелограма.

1081*. Кут між висотами ромба дорівнює 60°. Доведіть, що площа ромба удвічі більша за площу трикутника, побудованого на даних висотах ромба.



Мал. 494

1082*. За даними на малюнку 494 доведіть, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 0,2 площі чотирикутника $KLMN$.

1083*. Довільну точку M всередині паралелограма $ABCD$ сполучено відрізками з його вершинами. Доведіть, що сума площ трикутників AMD і BMC дорівнює сумі площ трикутників AMB і CMD.

1084*. У паралелограмі діагональ перпендикулярна до сторони. За яких умов площа даного паралелограма дорівнюватиме квадрату цієї діагоналі?

1085*. Радіус кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки завдовжки m і n. Знайдіть площу ромба, якщо:
1) $m = 1{,}8$ см, $n = 3{,}2$ см; 2) $m = 4$ см, $n = 9$ см.

1086*. Знайдіть геометричне місце вершин паралелограмів зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного паралелограма.

1087*. На кожній стороні паралелограма взято по точці. Площа чотирикутника з вершинами в цих точках дорівнює половині площі паралелограма. Доведіть, що хоча б одна з діагоналей чотирикутника паралельна стороні паралелограма.

Проявіть компетентність

1088. Поле має форму паралелограма зі стороною 250 м і висотою, проведеною до цієї сторони, завдовжки 100 м. Через поле проходить путівець завширшки 5 м, який перетинає краї поля завдовжки 250 м і перпендикулярний до них. Яку площу поля можна засіяти?

1089. Ділянку, що має форму паралелограма, потрібно розділити на 3 частини однакової площі. Як провести межі?

1090. Прямокутну рамку стиснули так, що утворився паралелограм із тими самими сторонами, що й прямокутник. Чи рівні площі прямокутника та паралелограма?

1091. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, скільки кахельної плитки розміром 33 × 33 см потрібно придбати, щоб замостити підлогу коридору у вашому домі у спосіб «за діагоналлю», коли краї плитки не паралельні стінам.

§ 23. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Ви вже знаєте, як обчислити площу прямокутного трикутника за його катетами. Виникає запитання: як знайти площу будь-якого трикутника?

ТЕОРЕМА (про площу трикутника).

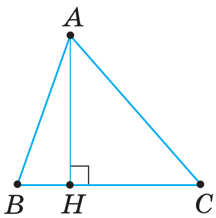
Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

Дано: ΔABC (мал. 495), AH — висота, $BC = a$, $AH = h_a$.

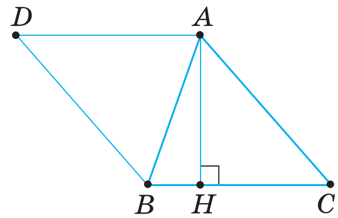
Довести: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ah_a$.

Доведення. На стороні AB даного трикутника ABC побудуємо рівний йому трикутник BAD (мал. 496). Утворений чотирикутник $ADBC$ — паралелограм, оскільки, за побудовою, $AD = BC$, $BD = AC$. У ньому сторона $BC = a$, висота $AH = h_a$, тому $S_{ADBC} = ah_a$. Оскільки паралелограм складений із двох рівних трикутників ABC і BAD, то площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ADBC$.
Звідси одержуємо:

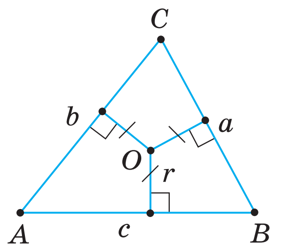
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ADBC} = \frac{1}{2} ah_a.$$



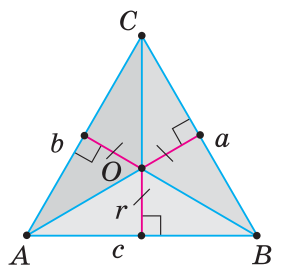
Мал. 495



Мал. 496



Мал. 497



Мал. 498

Задача. Доведіть, що площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.

Розв'язання. Нехай ABC — даний трикутник (мал. 497), у якому $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — півпериметр, точка O — центр вписаного кола, r — радіус вписаного кола.
Доведемо, що $S_{\Delta ABC} = pr$.
З'єднаємо відрізками вершини трикутника ABC із центром O вписаного в нього кола (мал. 498). Утворилися три трикутники BOC, AOC і AOB. У кожному з них радіус вписаного кола r є висотою, проведеною до сторони, що дорівнює відповідно a, b або c.
Тому $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}br$, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}cr$.
Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ цих трикутників. Отже:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = pr.$$

Щоб знайти площу трикутника (чотирикутника), можна скористатися способом додавання площ його частин. Для застосування цього способу іноді потрібні допоміжні побудови, щоб утворилися допоміжні трикутники, площу яких можна знайти за даними задачі.

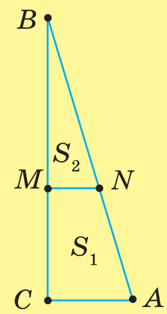
Дізнайтеся більше

1. Способи обчислення площі трикутника (а також прямокутника і трапеції) були відомі ще в Стародавньому Єгипті. Відомості про це дійшли до нас у папірусах. Найбільш відомі з них — папірус Рінда (близько 1800 р. до н. е.), який містить 84 задачі з розв'язаннями (сторінку з нього ви бачите на мал. 499), і так званий московський папірус (близько 1600 р. до н. е.), який містить 25 задач із розв'язаннями. Щоб знайти площу трикутника, стародавні єгиптяни основу трикутника ділили навпіл і множили на висоту. А от для визначення площі рівнобедреного трикутника користувалися піводобутком його бічних сторін.


Мал. 499


Мал. 500

2. Геометричні розрахунки за точними формулами проводились і в Стародавньому Вавилоні. Відомості збереглися у клинописних табличках (приклад ви бачите на мал. 500). Тексти, які дійшли до нас, свідчать, що вавилоняни знали й використовували у практичних задачах пропорційність паралельних відрізків. Наприклад, вони вміли знаходити довжину відрізків MN, CM і BM (мал. 501) у трикутнику ABC за його стороною $AC = 30$, різницею $S_1 - S_2 = 42$ площ трапеції і трикутника, на які розбивається даний трикутник паралельною прямою MN, та різницею $BM - CM = 20$. Зараз для розв'язування цієї задачі нам довелось би складати систему рівнянь.



Мал. 501

Пригадайте головне

1. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
2. Виведіть формулу площі трикутника за стороною та висотою, проведеною до цієї сторони.
3. Поясніть, як знайти площу трикутника за площами його частин. Наведіть приклад.

Розв'яжіть задачі

1092'. За даними на малюнках 502–504 назвіть сторони трикутника ABC та проведені до них висоти.

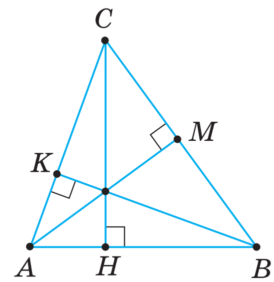
1093'. Чи є правильною рівність для обчислення площі трикутника:

1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AM$ (мал. 502);
2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$ (мал. 502);
3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AK$ (мал. 503);
4) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot CL$ (мал. 503);
5) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot AC$ (мал. 504);
6) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ (мал. 504)?

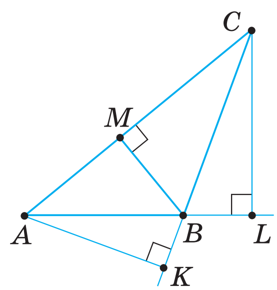
Відповідь поясніть.

1094°. За даними на малюнках 505, 506 знайдіть площу трикутника ABC.

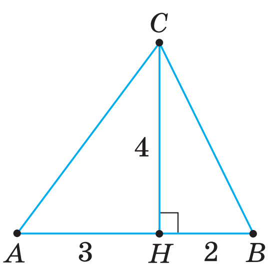
1095°. За даними на малюнку 507 знайдіть площу трикутника ABC.



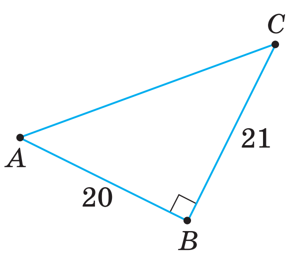
Мал. 502



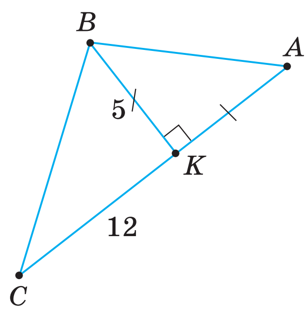
Мал. 503



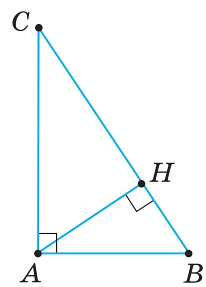
Мал. 505



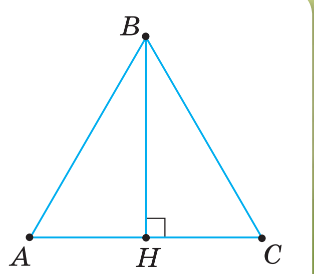
Мал. 506



Мал. 507



Мал. 504



Мал. 508

1096°. У трикутнику ABC проведено висоту BH (мал. 508). Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $AC = 6$ см, $BH = 5$ см; 2) $AC = 25$ см, $BH = 100$ см.

1097°. У трикутнику ABC проведено висоту BH завдовжки 4 дм. Знайдіть площу трикутника, якщо $AC = 2{,}5$ дм.

1098°. До сторони a трикутника проведено висоту h_a. Знайдіть його площу, якщо:
1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}8a$; 2) $h_a = 12$ мм, $a = 1{,}5h_a$.

1099°. До сторони $a = 2$ дм трикутника проведено висоту $h_a = 0{,}75a$. Знайдіть площу трикутника.

1100°. Площа трикутника дорівнює S, а одна з його висот — h. Знайдіть сторону, до якої проведено цю висоту, якщо:
1) $S = 72$ см², $h = 12$ см;
2) $S = 155$ см², $h = 10$ см;
3) $S = 75$ см², $h = 7{,}5$ см.

1101°. Площа трикутника дорівнює 75 см², а одна з його висот — 7,5 см. Знайдіть сторону, до якої проведено цю висоту.

1102°. Знайдіть висоти трикутника зі сторонами a, b і c та площею S за таблицею 33.

Таблиця 33

a	13 см	13 см	7 см	9 см
b	14 см	20 см	15 см	10 см
c	15 см	21 см	20 см	17 см
S	84 см²	126 см²	42 см²	36 см²
h_a				
h_b				
h_c				

1103°. Як зміниться площа даного трикутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази;
2) одну з його сторін зменшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, збільшити в 4 рази?

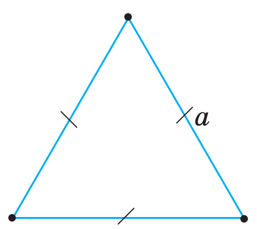
1104°. Як зміниться площа даного трикутника, якщо одну з його сторін збільшити в 4 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази?

1105°. Знайдіть площу рівностороннього трикутника (мал. 509), якщо його сторона дорівнює: 1) 8 см; 2) 1,2 дм; 3) 2 м; 4) $2\sqrt{3}$ см; 5) $\sqrt{6}$ дм.

1106°. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) 10 см; 2) $\sqrt{3}$ дм.

1107°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють:
1) 26 см і 20 см; 2) 17 см і 16 см.

1108'. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють 13 см і 10 см.



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Мал. 509

1109°. За даними на малюнках 510, 511 доведіть, що трикутники AMC і BMC мають рівні площі.

1110°. Доведіть, що трикутники AMC і BMC на малюнку 512 мають рівні площі.

1111°. **У трикутнику проведено медіану. У якому відношенні поділилась його площа?** Відповідь обґрунтуйте.

1112°. **У трикутнику проведено середню лінію. Яку частину площі даного трикутника становить площа утвореного трикутника?**

1113°. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник із площею S. Чому дорівнює площа даного трикутника, якщо:
1) $S = 52{,}5$ см^2; 2) $S = 105$ см^2?

1114°. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник із площею 21 см^2. Чому дорівнює площа даного трикутника?

1115°. У трикутнику зі сторонами a, b і c радіус вписаного кола дорівнює r, а площа — S. Знайдіть невідомі величини за таблицею 34.

Таблиця 34

a	17 см	13 см	7 см	13 см
b	28 см	20 см	15 см	37 см
c	39 см	21 см	20 см	40 см
p				
r	5 см	$\frac{14}{3}$ см	2 см	$\frac{16}{3}$ см
S				

1116. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи, як $m : n$, а висота, проведена до основи, дорівнює h. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $m = 5$, $n = 6$, $h = 12$ см; 2) $m = 17$, $n = 16$, $h = 15$ см.

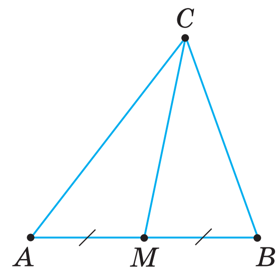
1117. У рівнобедреному трикутнику основа відноситься до бічної сторони, як 10 : 13, а висота, проведена до основи, дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.

1118. Середня лінія трикутника дорівнює q, а висота, перпендикулярна до неї, дорівнює h. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $q + h = 12{,}5$ см, $q - h = 0{,}5$ см;
2) $q + h = 23$ см, $h - q = 17$ см.

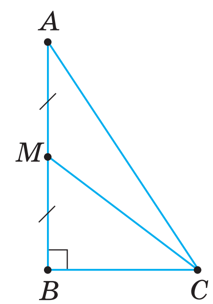
1119. Доведіть, що два трикутники мають рівні площі, якщо в них рівні відповідні середні лінії та висоти, які перпендикулярні до середніх ліній.

1120. Знайдіть площу прямокутного трикутника за його гіпотенузою та відношенням катетів:
1) 25 см, 3 : 4; 2) 5 см, 7 : 24; 3) 25,5 см, 8 : 15; 4) 82 см, 9 : 40.

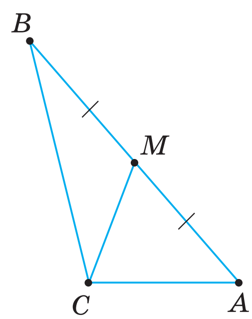
1121. Катети прямокутного трикутника відносяться, як 5 : 12. Знайдіть площу трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:
1) 39 см; 2) 26 см.



Мал. 510



Мал. 511



Мал. 512

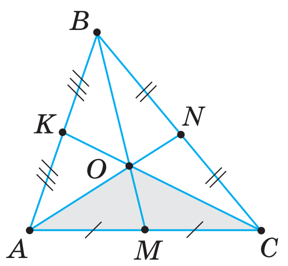
1122. Площа прямокутного трикутника дорівнює S, а його катети відносяться, як $m : n$. Знайдіть катети, якщо:
1) $S = 720$ см^2, $m = 9$, $n = 40$; 2) $S = 1320$ см^2, $m = 11$, $n = 9{,}6$.

1123. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки: 1) 4 см і 9 см; 2) 1 см і 16 см.

1124. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 30°, якщо його гіпотенуза дорівнює: 1) 8 см; 2) 12 см.

1125. Знайдіть площу прямокутного трикутника за півсумою t його катетів та радіусами r і R вписаного й описаного кіл, якщо:
1) $t = 7$ см, $r = 2$ см, $R = 5$ см; 2) $t = 17$ см, $r = 4$ см, $R = 13$ см.

1126. Трикутник має сторони a, b і c, причому $a < b < c$. Складіть нерівність для висот трикутника h_a, h_b і h_c. Відповідь обґрунтуйте.

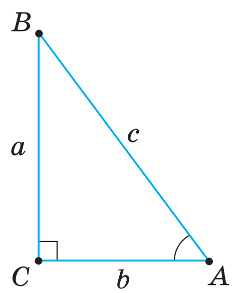


Мал. 513

1127. **Доведіть, що площа трикутника з вершиною в точці перетину медіан даного трикутника та спільною з ним стороною становить третину площі даного трикутника** (мал. 513).

1128. Відома площа одного з двох подібних трикутників. Які вимірювання та обчислення треба виконати, щоб знайти площу другого трикутника?

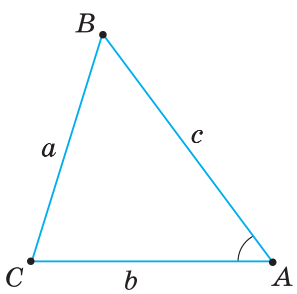
1129. У паралелограмі $ABCD$ вершина D розміщується на відстані 4 см від діагоналі AC, що дорівнює 16 см. $AB = 12$ см. Знайдіть відстань:
1) від точки D до прямої AB;
2) між прямими AB і CD;
3) від середини діагоналі до сторони CD паралелограма.



Мал. 514

1130*. **Доведіть, що площу прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) обчислюють за формулою: $S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2}\, a \cdot c \cdot \sin B$** (мал. 514).

1131*. **Доведіть, що площу гострокутного трикутника ABC обчислюють за формулою: $S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2}\, a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin C$** (мал. 515).



Мал. 515

1132*. **Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.**

1133*. Кожний трикутник рівноскладений з прямокутником, у якого одна із сторін дорівнює стороні трикутника, а друга дорівнює половині відповідної висоти трикутника. Доведіть.

1134*. Кожний трикутник рівноскладений з паралелограмом, який має однакову з трикутником основу і висоту, що дорівнює половині висоти трикутника. Доведіть.

1135*. Доведіть, що в трикутнику з висотами h_a, h_b і h_c та радіусом вписаного кола r має місце рівність: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

1136*. Сторони трикутника продовжено (рухаючись за стрілкою годинника) на їх власну довжину. Одержані точки сполучено відрізками. Яка площа утвореного трикутника?

1137*. У якому відношенні, рахуючи від вершини, потрібно поділити бічну сторону трикутника двома прямими, паралельними основі, щоб площа трикутника була поділена на три рівні частини?

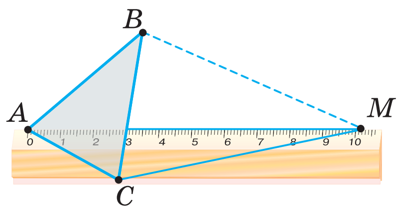
1138*. Висота трикутника дорівнює 4 см. На якій відстані від вершини трикутника потрібно провести пряму, що перетинає ці дві сторони та паралельна третій його стороні, щоб площа трикутника поділилась у відношенні $m : n$, рахуючи від вершини?

1139*. Доведіть, що коло, вписане в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, добуток яких дорівнює площі цього трикутника.

Проявіть компетентність

1140. За допомогою паперових моделей трикутників проілюструйте рівності: $S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot h = a \cdot \frac{h}{2}$.

1141. Площу трикутника можна визначити за допомогою лінійки. Для цього потрібно прикласти лінійку до трикутника ABC так, як показано на малюнку 516, і через точку B провести $BM \parallel AC$. Поясніть, як обчислити шукану площу, знаючи ширину лінійки та довжину відрізка AM.



Мал. 516

1142. Як потрібно нанести поділки на лінійку (мал. 516), щоб точка M відразу вказала значення площі трикутника ABC?

1143. Виготовлено серію деталей трикутної форми, у яких найбільша сторона має ту саму довжину, а відстані до цієї сторони від протилежної вершини дорівнюють одна одній. Задайте форму й розміри контейнера, у якому найзручніше транспортувати всі ці деталі одночасно.

1144. Повітря тисне із силою 1,03 кг на кожний квадратний сантиметр. Який тиск повітря на трикутний тент над вікном, якщо одна сторона тенту — 1,8 м, а відстань від його протилежної вершини до цієї сторони дорівнює 0,5 м?

1145. На луці трикутної форми потрібно провести межу так, щоб одержати дві частини з рівними площами. Як це зробити за допомогою віх і польового циркуля?

§ 24. ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

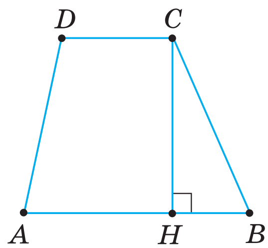
Ви знаєте, щоб вивести формули площ прямокутника, паралелограма або трикутника, потрібно утворити з цих фігур такі фігури, площі яких уміємо знаходити. Скористаємося цим способом для виведення формули площі трапеції.

ТЕОРЕМА (про площу трапеції)

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

Дано: $ABCD$ — трапеція (мал. 517), AB і CD — основи, CH — висота, $AB = a$, $CD = b$, $CH = h$.

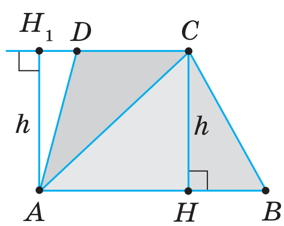
Довести: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



Мал. 517

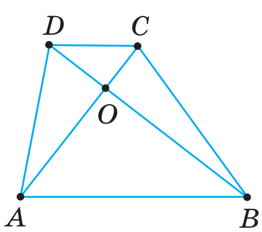
Доведення. Проведемо в трапеції діагональ AC (мал. 518). Вона розбиває трапецію на два трикутники ABC і ADC. Висота h трапеції є висотою трикутника ABC, проведеною до сторони $AB = a$, і дорівнює висоті трикутника ADC, проведеній до сторони $CD = b$.
Площа трапеції дорівнює сумі площ цих трикутників, тому

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



Мал. 518

Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.



Мал. 519

Задача. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 519). Доведіть, що трикутники AOD і BOC мають рівні площі.

Розв'язання. Розглянемо трикутники ABD і ABC. У них сторона AB — спільна, а висоти, проведені до цієї сторони, дорівнюють висоті трапеції.
Тому: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC}$.
Трикутник ABD складений із трикутників AOB і AOD, а трикутник ABC — із трикутників AOB і BOC.
Звідси одержуємо: $S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOB}$; $\quad S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AOB}$.
Отже, площі трикутників AOD і BOC рівні як різниці рівних площ.

Щоб встановити, що нерівні фігури мають рівні площі, можна довести, що площі цих фігур дорівнюють або сумі рівних площ, або різниці рівних площ.

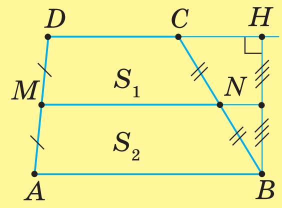
Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: *Чи існує трапеція, середня лінія якої ділить її площу навпіл?*

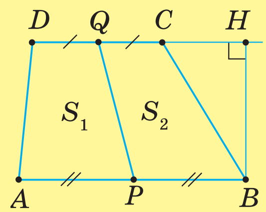
Узагалі, питання існування фігури із заданими властивостями може вирішуватись наведенням прикладу такої фігури. Однак не завжди цей шлях виявляється найпростішим. Історія свідчить про те, що інколи на пошук прикладу, який підтверджує існування деякого математичного об'єкта, вчені витрачали багато років.

Щоб спростити пошук, проводять попередні аналітичні розрахунки. Це ми і зробимо, шукаючи відповідь на поставлене запитання.

Нехай дана трапеція $ABCD$ (мал. 520) має основи a і b та висоту h. Середня лінія MN розбиває її на дві трапеції, які мають рівні висоти, що дорівнюють $\frac{h}{2}$ (доведіть це самостійно). Позначимо площі цих трапецій S_1 і S_2 та виразимо їх через основи даної трапеції та її висоту:



Мал. 520



Мал. 521

$$S_1=\frac{CD+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{b+\frac{a+b}{2}}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{3b+a}{4}\cdot\frac{h}{2},\qquad S_2=\frac{AB+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{3a+b}{4}\cdot\frac{h}{2}.$$

Знайдемо відношення площ S_1 і S_2. Після скорочень одержимо: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3b+a}{3a+b}$.

Рівність площ S_1 і S_2 можлива лише тоді, коли $3b + a = 3a + b$, тобто якщо $a = b$.

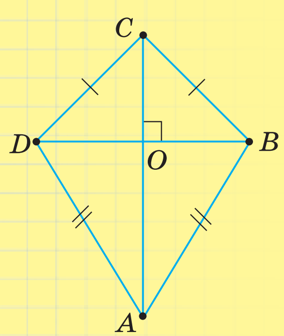
А такої трапеції не існує.

Цікавим є той факт, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції (іноді його називають другою середньою лінією трапеції), ділить площу трапеції навпіл. Доведіть цей факт самостійно, спираючись на малюнок 521.

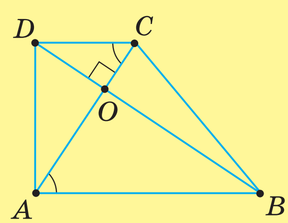
2. Вивчаючи чотирикутники, ви ознайомилися з дельтоїдом (мал. 522). Цей чотирикутник, як і ромб, має взаємно перпендикулярні діагоналі. Існують трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями (мал. 523), а також довільні чотирикутники з такою самою властивістю (мал. 524). І ромб, і дельтоїд, і названа трапеція є окремими видами чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями.

Доведіть самостійно, що **площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку цих діагоналей**.

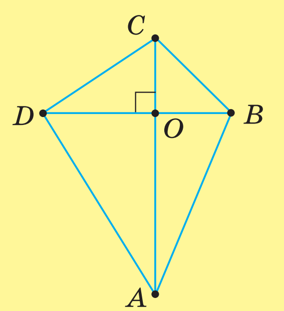
Ця формула поширюється і на ромб, і на дельтоїд, і на відповідну трапецію.



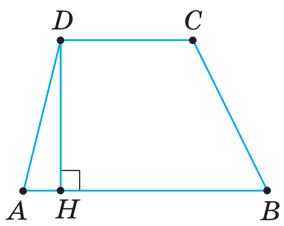
Мал. 522



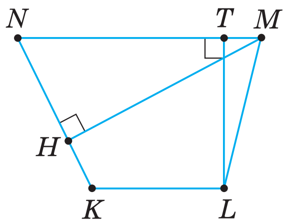
Мал. 523



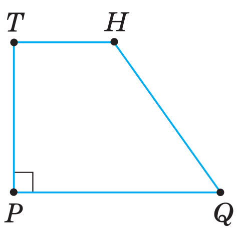
Мал. 524



Мал. 525



Мал. 526



Мал. 527

Пригадайте головне

1. За якою формулою обчислюють площу трапеції? Як її вивести?
2. Як знайти площу трапеції, знаючи її середню лінію і висоту?
3. Поясніть, як можна довести рівність площ двох нерівних фігур.

Розв'яжіть задачі

1146'. Чи є правильною рівність для обчислення площі трапеції:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$ (мал. 525);

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DH$ (мал. 525);

3) $S_{KLMN} = \frac{1}{2}(KL + NM) \cdot TL$ (мал. 526);

4) $S_{KLMN} = (KN + LM) \cdot \frac{MH}{2}$ (мал. 526);

5) $S_{PQHT} = PQ \cdot PT$ (мал. 527);

6) $S_{PQHT} = \frac{HT + PQ}{2} \cdot PT$ (мал. 527)?

Відповідь поясніть.

1147°. За даними на малюнках 528, 529 знайдіть площу трапеції $ABCD$.

1148°. За даними на малюнку 530 знайдіть площу трапеції $ABCD$.

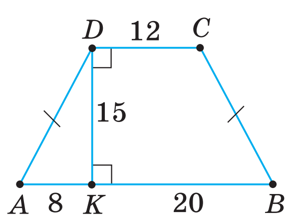
1149°. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD проведено висоту CH. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $AB = 60$ см, $CD = 36$ см, $CH = 50$ см;
2) $AB = 25$ см, $CD = 55$ см, $CH = 100$ см.

1150°. У трапеції $ABCD$ з основами $AB = 25$ см і $CD = 45$ см проведено висоту $CH = 40$ см. Знайдіть площу трапеції.

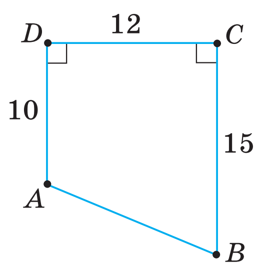
1151°. Основи трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 0{,}8a$, $h = a$;
2) $a = 2$ дм, $b = 0{,}75a$, $h = 0{,}5a$.

1152°. Основи трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть площу трапеції, якщо $b = 5$ см, $a = 1{,}2b$, $h = a$.

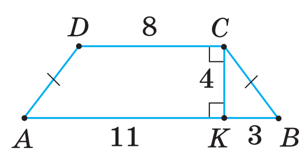
1153°. Площа трапеції дорівнює S, а її висота — h. Знайдіть суму основ трапеції, якщо: 1) $S = 60$ см², $h = 12$ см; 2) $S = 150$ см², $h = 25$ см.



Мал. 528



Мал. 529

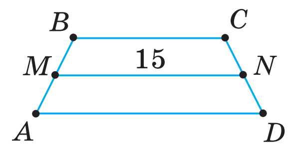


Мал. 530

1154°. Площа трапеції дорівнює 90 см², а її висота — 15 см. Знайдіть суму основ трапеції.

1155°. Площа трапеції дорівнює S, а її середня лінія — q. Знайдіть висоту трапеції, якщо:
1) $S = 60$ см², $q = 15$ см;
2) $S = 175$ см², $q = 35$ см.

1156°. Площа трапеції дорівнює 75 см², а її середня лінія — 25 см (мал. 531). Знайдіть висоту трапеції.



Мал. 531

1157°. Основи трапеції дорівнюють a і b, середня лінія — q, висота — h, а площа — S. Знайдіть невідомі величини за таблицею 35.

Таблиця 35

a	10 см	23 см		
b	14 см		22 см	9 см
q		25 см		16 см
h	7 см		10 см	
S		125 см²	210 см²	176 см²

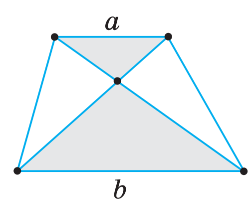
1158°. Як зміниться площа трапеції, якщо:
1) обидві її основи зменшити у 2 рази, а висоту — збільшити у 2 рази;
2) середню лінію збільшити у 2 рази?

1159°. Як зміниться площа трапеції, якщо обидві її основи збільшити у 2 рази, а висоту — зменшити у 2 рази?

1160°. Площа трапеції дорівнює S, висота — h, а її основи відносяться, як $m : n$. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) $S = 36$ см², $h = 2$ см, $m = 4$, $n = 5$;
2) $S = 150$ см², $h = 5$ см, $m = 2$, $n = 3$.

1161°. Площа трапеції дорівнює 90 см², висота — 6 см, а її основи відносяться, як 1 : 2. Знайдіть основи трапеції.

1162°. **У трапеції з основами a і b проведено діагоналі** (мал. 532). **Чому дорівнює відношення площ трикутників, що прилягають до основ?**



Мал. 532

1163. За даними основами a і b та бічною стороною c рівнобічної трапеції знайдіть її площу, якщо:
1) $a = 24$ см, $b = 12$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 14$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см.

1164. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 32 см і 14 см, а бічна сторона — 15 см. Знайдіть площу трапеції.

1165. Периметр трапеції дорівнює P, її бічні сторони дорівнюють c і d, а висота — h. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $P = 120$ см, $c = d = 17$ см, $h = 15$ см;
2) $P = 58$ см, $c = 15$ см, $d = 13$ см, $h = 12$ см.

1166. Бічні сторони трапеції утворюють з її основою кути 45° і 30°. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює висоті завдовжки 6 см.

1167. У прямокутній трапеції основи дорівнюють a і b. Її більша бічна сторона утворює з основою кут 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 5$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 3$ см.

1168. У прямокутній трапеції дві найменші сторони мають довжину a. Найбільший кут трапеції дорівнює 135°. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 3$ см.

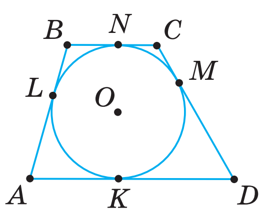
1169. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і $3a$, а площа — $2a^2$. Чому дорівнює гострий кут трапеції?

1170. У трапеції менша діагональ d перпендикулярна до її основ a і b. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a + 2b = 3{,}3$ см, $a - b = 1{,}8$ см, $d = 4$ см;
2) $3a + 2b = 44$ см, $a - 2b = 4$ см, $d = 12$ см.

1171. Відрізок, проведений з вершини тупого кута трапеції паралельно її бічній стороні, ділить основу у відношенні 1 : 2. Знайдіть основи трапеції, якщо площа утвореного трикутника дорівнює 6 см², а висота трапеції — 3 см. Скільки випадків потрібно розглянути?

1172. Менша основа трапеції дорівнює 4 см. Пряма a розбиває трапецію на паралелограм і трикутник з рівними площами. Знайдіть більшу основу трапеції.

1173. **Доведіть, що площа трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку півсуми її бічних сторін на висоту** (мал. 533).



Мал. 533

1174. Трапеція, описана навколо кола, має периметр P і площу S. Знайдіть радіус кола.

1175. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Одна з діагоналей дорівнює 8 см, а площа трапеції — 40 см². Знайдіть другу діагональ.

1176*. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см, а бічна сторона, яка дорівнює 10 см, утворює з більшою основою кут 48°. Знайдіть площу трапеції.

1177*. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 16 см. Менша діагональ є бісектрисою тупого кута, який дорівнює 120°. Знайдіть площу трапеції.

1178*. **Доведіть, що існує безліч нерівних трапецій, які мають із трапецією *ABCD* спільну середню лінію та однакову з нею площу.**

1179*. У яких межах може змінюватися площа трапеції, більша основа якої дорівнює 16 см, а висота — 2 см?

1180*. **Відрізок, паралельний основам a і b трапеції, ділить її на дві фігури із рівними площами. Яка довжина цього відрізка?**

1181*. Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами AB і CD перетинаються в точці O. Доведіть, що площа трикутника BOC є середнім пропорційним між площами трикутників AOB і COD.

1182*. Основи трапеції відносяться, як $m : n$. Знайдіть відношення площ чотирьох частин трапеції, на які її розбивають діагоналі.

1183*. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а її площа — h^2. Під яким кутом перетинаються діагоналі трапеції?

1184*. Знайдіть площу рівнобічної трапеції з бічною стороною c і перпендикулярною до неї діагоналлю d, якщо основи трапеції відносяться, як 3 : 5.

1185*. У трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями відрізок, що сполучає середини основ, дорівнює середній лінії трапеції. Доведіть.

1186*. Якщо у трапеції середину бічної сторони з'єднати відрізками з кінцями іншої бічної сторони, то утворений трикутник має площу, удвічі меншу від площі трапеції. Доведіть.

1187*. У трикутнику через точку перетину медіан проведено три відрізки, кожний з яких паралельний одній зі сторін трикутника. Доведіть, що три утворені трапеції, які складають трикутник, мають рівні площі.

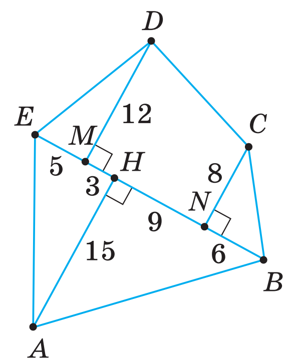
Проявіть компетентність

1188. На малюнку 534 зображено план ділянки в масштабі 1 : 1000. Яка площа цієї ділянки?

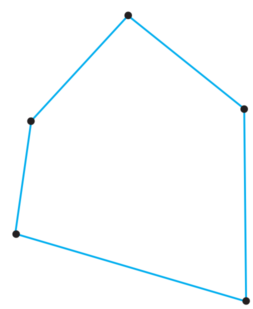
1189. Як за планом на малюнку 535 знайти площу ділянки, якщо план виконано в масштабі 1 : 1000?

1190. Ділянка має форму прямокутної трапеції. Як провести перпендикулярну пряму до її основ, щоб поділити площу ділянки навпіл?

1191. У ліхтаря скляні вставки мають форму трапеції, у якій паралельні сторони дорівнюють 20 см і 16 см, а відстань між ними — 10 см. Чи вистачить скла прямокутної форми розмірами 30 × 24 см, щоб вирізати 4 вставки для ліхтаря? Відповідь поясніть.



Мал. 534



Мал. 535

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке многокутник; *n*-кутник? Як його позначають?
2. Які елементи многокутника? Що таке зовнішній кут многокутника; діагональ; периметр?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів многокутника.
4. Який многокутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?
5. Поясніть, що таке площа фігури. Які основні властивості площі?
6. За якою формулою знаходять площу квадрата?
7. Виведіть формули площі прямокутника; паралелограма; трикутника; трапеції.
8. Чому дорівнює відношення площ подібних трикутників?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1° Знайдіть суму кутів шестикутника.

А. 60°.
Б. 120°.
В. 540°.
Г. 720°.

2° Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Периметр квадрата дорівнює 24 см, а одна зі сторін прямокутника — 4 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

А. 6 см.
Б. 9 см.
В. 20 см.
Г. 36 см.

3° Площа рівнобедреного трикутника ABC з основою AC дорівнює 4800 см^2. Знайдіть висоти, проведені до бічних сторін трикутника, якщо $AB = 100$ см.

А. 24 см і 48 см.
Б. 48 см і 48 см.
В. 48 см і 96 см.
Г. 96 см і 96 см.

4 У трапеції $ABCD$ менша основа CD та висота відповідно дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника ABC дорівнює 60 см^2.

А. 45 см^2.
Б. 56 см^2.
В. 75 см^2.
Г. 88 см^2.

5* У ромбі $ABCD$ діагоналі дорівнюють 9 см і 40 см. Більшу діагональ AC точка K ділить у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини A. Знайдіть площу трикутника AKB.

А. 90 см^2.
Б. 135 см^2.
В. 180 см^2.
Г. 54 см^2.

РОЗДІЛ I

§ 1

1. 1) Ні; 2) так. **2.** Мал. 15. **3.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **4.** 2). **5.** Ні (мал. 17); так (мал. 18). **6.** 1) $\angle ENM$, $\angle FNP$; 2) $\angle AMN$, $\angle CMK$; 3) $\angle DKM$, $\angle BKP$. **8.** 5 см, 45 см, 45 см, 45 см. **9.** 30 см, 60 см, 60 см, 60 см. **10.** 1) Так; 2) ні. **11.** Ні. **12.** 100°, 100°, 100° (мал. 20); 100°, 100° (мал. 21). **13.** 60°. **14. 1**) 60°; 2) 70°. **15.** 150°. **16.** 1) Ні; 2) ні. **17.** Так. **19.** Ні. **20.** 90°, 90°, 90°, 90°. **21.** 180°. **22.** *Вказівка*: знайдіть градусну міру четвертого кута. **23.** 1) 105°; 2) 90°. **24.** 1) 100°; 2) 60°. **25.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **26.** 64 см. **27.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **28.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **29.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **30.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. **31.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за трьома сторонами і властивістю рівнобедреного трикутника ABC. **32.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 40°, 60°, 120°, 140°. **33.** 30°, 60°, 120°, 150°. **34.** 1) 2; 2) 4; 3) 2. **35.** 1) Ні; 2) ні. **36.** 90°. **37.** 1) 142°, 22°, 136°, 60°; 2) 131°, 35°, 89°, 105°. **38.** 130°, 30°, 115°, 85°. **39.** *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів, суміжних із кутами цього чотирикутника. **40.** 1) Так; 2) ні. **41.** Так. **42.** *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника вдвічі більша за суму його кутів. **43.** 115° (мал. 24); 160° (мал. 25). **44.** 100°. **45.** 10 см. **46.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Запишіть нерівності для сторін трикутників AOB і COD та зробіть висновок. **47.** *Вказівка*: у ΔABM $\angle M = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, у ΔCDN $\angle N = 180° - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D$. Додайте ці рівності та зробіть висновок. **49.** 48 штук. **51.** 3) *Вказівка*: місце будівництва заводу — точка перетину діагоналей чотирикутника.

§ 2

52. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **53.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **54.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **55.** Ні (мал. 35); ні (мал. 36). **56.** 1,2 дм, 0,4 дм. **57.** 5 см, 10 см. **59.** 1) 3 см, 21 см, 3 см, 21 см; 2) 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см. **60.** 6,5 см, 9,5 см, 6,5 см, 9,5 см **61.** $AB = CD = 4$ см, $AD = BC = 6$ см (мал. 37); $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 10$ см (мал. 38). **62.** $AB = CD = 6$ см, $AD = BC = 6{,}8$ см. **63.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю суми внутрішніх односторонніх кутів. **64.** 1) 120°, 60°; 2) 90°, 90°. **65.** 45°, 135°. **67.** 1) Ні; 2) ні. **68.** Ні. **69.** $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle B = \angle D = 135°$ (мал. 40); $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle B = \angle D = 130°$ (мал. 41). **70.** $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. **71.** 1) 65°, 115°, 65°, 115°; 2) 60°, 120°, 60°, 120°. **72.** 135°, 45°, 135°, 45°. **73.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. **74.** Ні. **75.** 1) $OC = 6$ см, $OD = 3$ см; 2) $AC = 12$ см, $BD = 6$ см; 3) $AD = 8$ см, $DC = 5$ см. **76.** 1) 80°, 100°, 80°, 100°; 2) 54°, 126°, 54°, 126°. **77. 1**) 160°, 20°, 160°, 20°; 2) 72°, 108°, 72°, 108°. **78.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 120°, 60°, 120°, 60°. **79.** 60° (мал. 45); 50° (мал. 46). **80.** 120°. **81.** *Вказівка*: проведіть висоти з вершини тупого кута паралелограма й розгляньте утворені прямокутні трикутники. **82.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 2) 45°, 135°, 45°, 135°; 3) 89°, 91°, 89°, 91°. **83.** 16°, 96°. **84.** 45°, 135°, 45°, 135°. **85.** *Вказівка*: доведіть, що трикутник, який утворюють бісектриси зі стороною паралелограма, — прямокутний. **86.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих. **87.** 1) 70 см; 2) 14 см. **88.** 1) 6 см, 3 см; 2) 15 см. **89.** 40 см. **90.** *Вказівка:* доведіть рівність відповідних трикутників. **91.** По 9 см. **92.** *Вказівка:* скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника. **93.** 30 см. **94.** 1) 45°; 2) 135°. **95.** 6 см. **96.** 2 см або 4 см. **97.** 10 см, 15 см, 10 см, 15 см. **98.** 9,6 см, 14,4 см, 9,6 см, 14,4 см. **99.** Сторони відносяться, як 1 : 2. **100.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **101.** 1) $AB \parallel OO_1$.

§ 3

103. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **105.** За ознакою паралелограма. **106.** На мал. 60. **109.** За означенням паралелограма. **110.** Так. **111.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **112.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **113.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **114.** 1) 35°; 2) 5 см. **115.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **116.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **117.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **118.** *Вказівка:* спочатку доведіть, що $AECF$ — паралелограм. **119.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих паралелограма. **120.** *Вказівка*: доведіть, що чотирикутник — паралелограм та скористайтеся властивістю сторін паралелограма. **122.** *Вказівка:* скористайтесь ознакою паралелограма. **123.** *Вказівка:* скористайтесь ознакою паралелограма. **124.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **125.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих, а потім — ознакою паралелограма. **126.** 1) Ні; 2) так. **127.** Так. **128.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **129.** *Вказівка:* спочатку доведіть рівність трикутників EBM і KDN. **130.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що $\Delta AKM = \Delta CNP$ і $\Delta BPK = \Delta DMN$. **131.** 1) 3 см; 2) 4 см. **132.** 4 см. **133.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників ABE і CDF, а потім скористайтесь ознакою паралелограма. **134.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтесь ознакою паралелограма. **135.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що $MNKP$ — паралелограм, а потім скористайтеся властивістю паралелограма. **136.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма. **137.** 1) *Вказівка*: доведіть, що $ABCD$ — паралелограм та скористайтеся його властивістю; 2) 36°. **139.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтесь ознакою паралелограма. **140.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **141.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих, а потім — ознакою паралелограма. **142.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралелограма.

§ 4

145. 1) Ні; 2) так. **146.** Так. **147.** Властивість діагоналей паралелограма. **148.** 1) Ні; 2) так. **149.** 1) Ні; 2) так. **150.** 54°, 36°, 54°. **151.** 1) AD = 16 см, DC = 12 см; 2) BD = 20 см; 3) $AO = OC = BO = OD$ = 10 см. **152.** 1) по 6 см; 2) по 3 см; 3) по 9 мм. **153.** 1) 14 см і 14 см; 2) 28 см. **154.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями діагоналей прямокутника. **155.** 35°, 125°, 55° (мал. 81); 30°, 60°, 30° (мал. 82). **156.** 65°, 130°, 25°. **157.** 30° (мал. 84); 60°(мал. 85). **158.** 90°. **159.** 1) 2 см; 2) 7 мм; 3) 0,22 дм. **160.** 1) 20 см; 2) 0,5 дм; 3) 14 мм. **162.** 1) 32 см; 2) 30 см. **163.** 56 см. **165.** *Вказівка*: доведіть, що кути даного паралелограма — прямі. **166.** *Вказівка*: доведіть, що діагоналі паралелограма рівні. **168.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника. **170.** *Вказівка*: нехай α — кут між діагоналлю та стороною паралелограма; знайдіть кути паралелограма. **171.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°. **172.** 1) 54°, 36°; 2) 18°. **173.** 1) 9,6 см, 14,4 см; 2) 10 см, 14 см; 3) 8 см, 16 см. **174.** 1) 6 см; 2) 4,3 см. **175.** 1) 26 см або 22 см; 2) 14 см або 16 см. **177.** *Вказівка*: покажіть, що бісектриса прямокутника відтинає від нього рівнобедрений трикутник. **178.** 1) 90 см; 2) 22,8 дм. **179.** 12 см, 12 см, 13,1 см, 13,1 см. **184.** $2a - b$ (мал. 88); $b - 2a$ (мал.89). **185.** *Вказівка*: добудуйте трикутник до прямокутника; скористайтеся тим, що діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. **186.** 3 см, 3 см. **187.** *Вказівка*: через дану точку на основі проведіть пряму, паралельну бічній стороні трикутника; покажіть, що ця пряма відтинає від даного трикутника рівнобедрений трикутник та скористайтеся властивістю висот, проведених до бічних сторін рівнобедреного трикутника. **188.** 2) 10 см. **189.** 1) $ABCD$ — прямокутник. **190.** Ні. **191.** *Вказівка*: можна, наприклад, перевірити, що в даного предмета протилежні сторони попарно рівні та діагоналі рівні. **192.** 2) *Вказівка*: у прямокутнику протилежні сторони рівні; 2) 20 см.

§ 5

194. 1) Ні; 2) так. **195.** Так. **196.** Наприклад, взаємна перпендикулярність діагоналей. **197.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **198.** 1) Ні; 2) так. **199.** 1) Ні; 2) так. **200.** Так. **201.** Так. **202.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **203.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **204.** Ні. **205.** 1) $BC = AD = DC$ = 10 см; 2) AC = 32 см, BD = 24 см. **206.** $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 25°$. **207.** 1) 0,6 дм; 2) 70 мм. **208.** 3 см. **209.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. **210.** *Вказівка*: скористайтесь означенням ромба й ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. **211.** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 25°$, $\angle 2 = 65°$, $\angle 5 = 90°$. **212.** 1) 18°, 72°; 2) 27°, 63°. **213.** 30°, 60°. **214.** *Вказівка*: діагональ даного ромба розбиває його на два рівносторонні трикутники (60°, 120°, 60°, 120°). **215.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 75°, 105°, 75°, 105°; 3) 25°, 155°, 25°, 155°. **216.** 70°, 110°, 70°, 110° (мал. 104); 36°, 144°, 36°, 144° (мал. 105). **217.** 60°, 120°, 60°, 120°. **218.** 1) 12,8 дм; 2) 180 мм. **219.** 40 см. **220.** 1) по 5 см; 2) по 7 см; 3) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 45°$, $\angle 2 = 90°$. **221.** 1) 64 см; 2) 2,4 дм. **222.** 168 мм. **223.** 1) 3 см; 2) 14,5 мм; 3) 0,75 дм. **224.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника. **226.** *Вказівка*: скористайтесь означеннями паралелограма та ромба. **227.** *Вказівка*: покажіть, що сторони даного паралелограма рівні. **228.** 30°, 150°, 30°, 150°. **229.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — ромб, AM і AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD; доведіть, що $\Delta ABM = \Delta ADP$. **230.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 80 см. **231.** 1) 70°, 110°, 70°, 110°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°. **232.** 80°, 100°, 80°, 100°. **233.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°. **234.** 60°, 120°, 60°, 120°. **235.** 1) 16 см; 3) всі по 4 см. **236.** *Вказівка*: обчисліть кути ромба. **238.** 1) 16 см; 2) 58 мм; 3) 0,82 дм. **240.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta AND = \Delta CND = \Delta AMB = \Delta CMB$. **241.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **242.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — ромб, AM, AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD; доведіть, що $\Delta ACM = \Delta ACP$; див. задачу 229. **243.** 30°, 150°, 30°, 150°. **244.** *Вказівка*: проведіть діагоналі ромба та покажіть, що кути ACN і CAl та кути BDK і DBM відповідно рівні. **245.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника $MPKN$. **246.** *Вказівка*: покажіть спочатку, що точка перетину діагоналей та основи перпендикулярів, проведених до протилежних сторін ромба, лежать на одній прямій; потім покажіть, що діагоналі чотирикутника з вершинами в основах побудованих перпендикулярів є рівними. **247.** *Вказівка*: доведіть, що сторони чотирикутника паралельні діагоналям прямокутника й дорівнюють їх половині. **249.** 5 см. **250.** *Вказівка*: покажіть спочатку, що бісектриси двох пар сусідніх кутів прямокутника перетинаються під прямим кутом; потім доведіть, що одержаний прямокутник є квадратом. **251.** *Вказівка*: якщо перегнути тканину за діагоналями, то краї тканини мають суміститися. **252.** Один. **253.** 1) Ні, бо може бути ромб. **254.** *Вказівка*: позначте стовпці — A і B; проведіть пряму через середину O відрізка AB перпендикулярно до прямої AB; на побудованій прямій від точки O по обидві сторони відкладіть відрізки довжиною OA. **255.** 2) Порада не є правильною. Може бути ромб. **256.** *Вказівка*: покажіть, що промені BA і BC є доповняльними.

§ 6

257. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. **258.** 1) Ні; 2) так. **259.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **260.** 4 см (мал. 127); 3 см (мал. 128). **261.** Ні. **262.** 1) 6 см; 2) 4 см. **263.** 15 см. **266.** 1) По 4 см і по 6 см; 2) 6 см і 12 см; 4 см і 8 см. **268.** 4 см (мал. 133); 12 см (мал. 134). **269.** Ні. **270.** 1) 4 см; 2) 7 см. **271.** 1) 4 см, 2,5 см, 3,5 см; 2) 15 мм, 20 мм, 25 мм. **272.** 4,5 см; 5 см; 7 см. **273.** *Вказівка*: виразіть середні лінії трикутника через його сторони. **274.** 1) По 4 дм; 2) по 8 мм. **275.** По 2 см. **276.** 1) 4,8 дм; 2) 600 мм. **277.** 24 см. **278.** 1) 28 см; 2) 56 см; 3) 60 см. **279.** 1) Рівносторонній; 2) рівнобедрений. **280.** 1) 1,2 дм і 1,8 дм; 2) 200 мм і 28 см. **281.** 10 см і 22 см. **284.** 1) 9 см; 2) 12 см; 3) 20 см. **285.** 1) 4 см, 5 см, 6 см; 2) 0,25 дм, 6 см, 6,5 см. **286.** 1) 36 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. **287.** 10 см; 10 см; 5 см. **288.** 15 см; 15 см; 10 см. **289.** 2 см. *Вказівка*: продовжте промінь AM на 4 см за точку M, одержите точку P; продовжте відрізок OK за точку K на 4 см, одержите точку D; розгляньте трикутник BAP. **290.** 1) 7,5 см, 10 см, 12,5 см; 2) 6 см, 8 см, 10 см. **291.** 1) 28 см, 32 см, 36 см; 2) 1,4 дм, 1,6 дм, 1,8 дм. **292.** *Вказівка*: виразіть периметри трикутників через сторони одного з них. **293.** 2) 12 см, 24 см, 30 см; 3) 24 см. **294.** *Вказівка*: виразіть сторони кожного з чотирьох трикутників через сторони даного трикутника. **295.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Фалеса для кутів ADB і DBC та прямих MC і AN. **296.** 1) 25 см; 2) 3,5 дм. **297.** 1) 10 см; 2) 49 см. **298.** 1) 16 см; 2) 2,6 дм. **301.** *Вказівка*: проведіть прямі, що проходять через дані точки паралельно середнім лініям трикутника. **303.** *Вказівка*: через точку M проведіть пряму паралельно BD; скористайтеся теоремою Фалеса. **304.** *Вказівка*: через основу медіани трикутника проведіть пряму паралельно іншій його медіані; скористайтеся теоремою Фалеса. **306.** 1) 36 см. **307.** *Вказівка*: через точку M проведіть пряму, паралельну BC; скористайтеся теоремою Фалеса. **309.** *Вказівка*: відкладіть відрізок AB так, щоб точка B лежала на першій лінії аркуша, а точка A — на дев'ятій лінії. **310.** *Вказівка*: MN — середня лінія трикутника ABC. **313.** Таких доріг три. Вони є середніми лініями трикутника.

§ 7

314. 1) Ні; 2) так. **315.** 1) Ні; 2) так. **316.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **317.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **318.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **319.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так. **320.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **321.** 1) BC і AD; 2) AB і CD; 3) $\angle A$ і $\angle D$ прилеглі до основи AD, $\angle B$ і $\angle C$ прилеглі до основи BC; 4) $\angle A$ і $\angle B$ прилеглі до бічної сторони AB, $\angle C$ і $\angle D$ прилеглі до бічної сторони CD. **322.** 1) 3 см; 2) 90°. **323.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралельних прямих. **324.** $\angle B = 130°$, $\angle D = 40°$ (мал. 161); $\angle B = 90°$, $\angle C = 134°$ (мал. 162); $\angle B = 140°$, $\angle C = 144°$ (мал. 163). **325.** 1) $\angle A = 70°$, $\angle C = 150°$; 2) $\angle A = 55°$, $\angle D = 35°$. **327.** $KCDM$ — трапеція. **328.** $ABCD$ — трапеція. **330.** 1) 7 см; 2) 3 см. **331.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. **332.** 4 см (мал. 167); 7 см (мал. 168); 15 см (мал. 169). **333.** Ні. **335.** 8 см, 16 см, 12 см. **336.** 4 см, 11 см, 7,5 см. **337.** 1) 40 см; 2) 62 см. **338.** 62 см. **339.** 1) 134° і 36°; 2) 145° і 25°. **340.** 128° і 56°. **341.** 1) 2 см; 2) 38 мм. **342.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — дана трапеція з основами BC і AD ($BC < AD$). Проведіть $CE \parallel AB$ і доведіть, що трикутник CED — рівнобедрений. **343.** $\angle A = \angle D = 58°$, $\angle B = \angle C = 122°$ (мал. 173); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (мал. 174); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (мал. 175). **344**. *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобічної трапеції та властивістю паралельних прямих. **345.** 70°, 110°, 110°, 70°. **346.** 36°, 144°, 144°, 36°. **347.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. **348.** *Вказівка*: доведіть рівність трикутників ABD і DCA. **349.** 6 см. **350.** 34 см. **351.** 1) *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ABK = \Delta DCM$. **352.** 1) 4 см і 12 см; 2) 5 см і 9 см. **353.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника і властивістю паралельних прямих. **354.** 1) 26 см; 2) 286 мм. **356.** 6 см. **357.** 8 см і 12 см. **358.** *Вказівка*: продовжте відрізок до перетину з бічними сторонами трапеції та скористайтеся теоремою Фалеса, потім скористайтеся властивостями середньої лінії трапеції та середньої лінії трикутника. **359.** 1) 14 см; 2) 9 см. **360.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями паралельних прямих. **361.** 120°, 60°, 120°, 60°. **362.** *Вказівка*: нехай трапеція $ABCD$ має основи AB і CD, а її діагоналі перетинаються в точці O; доведіть рівність трикутників ABC і BAD. **363.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралельних прямих. **364.** *Вказівка*: з вершини тупого кута трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі, до перетину з продовженням більшої основи та скористайтеся властивістю висоти рівнобедреного трикутника. **366.** 1) 60°; 2) 12 см і 24 см. **367.** $\frac{3a}{4}$. **369.** EF — середня лінія трапеції, $EF = 3$ см. **371.** 3,5 м. **372.** Так.

§ 8

373. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **374.** 1) Ні; 2) так. **375.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **376.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **377.** 1) Ні; 2) так. **378.** 1) Ні; 2) так. **380.** 90° (мал. 207); 180° (мал. 208). **381.** 60°. **382.** 1) 180°; 2) 120°; 3) 240°. **383.** 1) 30° і 330°; 2) 62° і 298°; 3) 100° і 260°. **384.** 1) 70°; 2) 210°. **385.** 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм. **386.** *Вказівка*: доведіть рівність дуг AC і BD. **387.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що дуга BC є спільною. **388.** 60° (мал. 213); 25° (мал. 214); 90° (мал. 215). **389.** 70°; 20°. **390.** 1) 26°; 2) 63°; 3) 100°. **391.** 1) 32°; 2) 64°; 3) 220°. **392.** 70° (мал. 218); 140° (мал. 219); 190° (мал. 220). **393.** 1) 60°, 60°, 60°; 2) 36°, 72°, 72°. **394.** 30°, 60°, 90°. **395.** 1) 120°, 60°, 180°; 2) 56°, 84°, 220°. **396.** 70°, 130°, 160°. **397.** 1) 32°, 32°, 116°; 2) 72°, 72°, 36°. **398.** 60°, 60°, 60°. **399.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 1 з теореми про вписаний кут. **400.** *Вказівка*: нехай AB і CD — хорди кола і $AB = CD$; сполучіть точки A, B, C і D із центром O кола; доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$. **401.** *Вказівка*: нехай хорда AC і діаметр BD кола із центром O перетинаються в точці K; доведіть рівність трикутників AKO і CKO. **402.** *Вказівка*: нехай хорда AC і діаметр BD кола із центром O перетинаються в точці K, причому $AK = KC$; доведіть рівність трикутників AKO і CKO. **405.** 1) 72° і 108°; 2) 80° і 100°. **406.** 1) 67°30′ і 112°30′; 2) 40° і 140°. **407.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про вписаний кут. **408.** 30° або 150°. **409.** 1) 45° і 135°; 2) 36° і 144°. **410.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що градусна міра всього кола дорівнює 360°, і теоремою про вписаний кут. **411.** 100° (мал. 221); 120° (мал. 222); 145° (мал. 223). **412.** 1) 70° і 35°; 2) 90° і 45°. **413.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **414.** *Вказівка*: див. задачу 413. **416.** 1) 45°; 2) 40°. **417.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про зовнішній кут трикутника і знайдіть кут ABC. **418.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника і теоремою про суміжні кути; знайдіть кут DBC трикутника DBC. **419.** 50° (мал. 227); 80° (мал. 228). **320.** 40°, 60°, 80°. **423.** 1) Коло, радіус якого дорівнює половині відрізка, що сполучає дані точки; 2) дуга кола, описаного навколо трикутника зі стороною AB і протилежним гострим кутом α. **424.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **425.** *Вказівка*: прикладіть вершину прямого кута косинця до будь-яких двох точок кола, що є зовнішнім контуром диска, та проведіть два діаметри кола.

§ 9

426. Мал. 241. **427.** Мал. 244. **428.** Ні. **429.** Ні. **430.** 1) 9 см; 2) 180°. **431.** $\angle B = 100°$, $\angle C = 85°$ (мал. 248); $\angle M = 75°$, $\angle N = 120°$, $\angle K = 105°$ (мал. 249); $\angle F = 90°$, $\angle E = 60°$, $\angle Q = 90°$, $\angle P = 120°$ (мал. 250). **432.** а) Ні; б) так. **433.** а) Так; б) ні. **434.** 1) 125°; 2) 108°; 3) 120°. **435.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **436.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **437.** 1) *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут; 2) за умови, що $AD \perp BC$. **438.** 10 см (мал. 252); 3 см і 7 см (мал. 253); $3\frac{1}{3}$ см і $6\frac{2}{3}$ см (мал. 254). **439.** 1) Так; 2) ні. **440.** 1) 40 см; 2) 6,4 дм. **441.** 1) 80 см; 2) 52 см. **443.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **444.** 1) 90°; 2) 60°. **445.** 1) 10 см; 2) 2,3 дм. **446.** 1) Так; 2) ні. **450.** 1) Так; 2) ні. **451.** Так. **452.** *Вказівка*: в утвореному чотирикутнику сусідні сторони мають бути рівними. **453.** 1) 3 мм, 10,5 мм, 18 мм, 10,5 мм; 2) 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. **454.** Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{1}{4}P$, тому: 1) 4 см; 2) 50 мм. **455.** 20 см. **457.** 1) *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R та проведіть у ньому два перпендикулярні діаметри; послідовно сполучіть точки перетину діаметрів з колом. **462.** Так. *Вказівка*: скористайтесь ознакою описаного чотирикутника. **465.** *Вказівка*: діаметр круга дорівнює меншій стороні прямокутника. **466.** *Вказівка*: проведіть у даному крузі два перпендикулярні діаметри. **467.** 2) *Вказівка*: криниця має бути розміщена в центрі кола, описаного навколо трапеції.

РОЗДІЛ 2

§ 10

468. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. **469.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так. **470.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **471.** 1) Ні; 2) так. **472.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) так; 6) так. **473.** ΔABC і ΔLMK (мал. 266): 1) $\angle A$ і $\angle L$, $\angle B$ і $\angle M$, $\angle C$ і $\angle K$; 2) AB і LM, BC і MK, AC і LK; ΔABC і ΔPTQ (мал. 267): 1) $\angle A$ і $\angle P$, $\angle B$ і $\angle T$, $\angle C$ і $\angle Q$; 2) AB і PT, BC і TQ, AC і PQ. **474.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 2. **475.** 1) $\frac{KC}{AC}$ і $\frac{DC}{BC}$; 2) $\frac{AB}{KD}$ і $\frac{BC}{DC}$; 3) $\frac{AB}{KD}$ і $\frac{AC}{KC}$. **476.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **477.** 1) $\angle A_1 = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$; 2) $\angle A = \angle A_1 = 45°$, $\angle B_1 = 110°$, $\angle C = 25°$. **478.** $\angle A = \angle A_1 = 80°$, $\angle B = \angle C_1 = 50°$. **479.** 1) Так; 2) ні. **480.** Так. **481.** 1) 6 см, 7 см; 2) 13 см, 18,5 см. **482.** $AB = \frac{169}{15}$ см; $A_1C_1 = \frac{630}{13}$ см. **483.** *Вказівка*: скористайтеся спочатку тим, що в подібних трикутників відповідні кути рівні, а потім — ознакою паралельності прямих. **484.** 1) $MN \parallel AC$; 2) $MN \parallel AB$. **485.** $MN \parallel BC$. **488.** 1) 17,1 од.; 20,52 од.; 2) 17,9 од.; 14,32 од.; 3) 15 од.; 7,5 од.. **489.** 36 од.; 27 од.; $\frac{36}{27}$ од. **491.** 1) 3 см; 2) 3,75 см; 3) 6 см. **492.** 1) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см. **493.** 3 см, 9 см, 12 см. **494.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що в подібних трикутниках відповідні кути рівні. **495.** 1) Ні; 2) ні. **496.** 1) Так; 2) так. **497.** Так, $k = \frac{2}{3}$. **498.** Так, $k = 2$. **499.** 6 см. **500.** 37,5 см. **501.** 112 см, 64 см. **502.** 30 см, 45 см. **503.** 1) 12 см; 2) 10 см. **504.** Так. **505.** Так. **506.** Так, $k = 1$. **507.** $k = \frac{1}{2}$. **508.** 1) 15 см, 30 см, 30 см; 2) 3,75 см, 11,25 см, 11,25 см. **509.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **510.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **511.** *Вказівка*: під мікроскопом градусні міри кутів не змінюються. **513.** 1) Масштаб 1 : 250 000; 2) 10 км; 3) 12,5 км. **514.** 45 см, 50 см, 25 см. **515.** 1) Так.

§ 11

516. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. **517.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **518.** 3 : 5 (мал. 278); 4 : 2 (мал. 279). **519.** 4 : 3. **520.** 1) PM; 2) MH. **521.** PH. **522.** 1) Ні; 2) ні. **523.** 1) 2 : 3; 2) 5 : 1. **524.** 2 : 1. **525.** 4. **526.** Так. **527.** Так. **528.** 1) 4 см, 6 см; 2) 12 см, 4 см; **529.** 6 см, 8 см. **535.** 1) Ні; 2) ні. **536.** Так. **537.** 1) 6 або 1,5; 2) 8 або 4,5; 3) $11\frac{2}{3}$ або 4,2. **538.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **539.** Так. **540.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з узагальненої теореми Фалеса. **542.** $AC = \frac{am}{m+n}$; $CB = \frac{an}{m+n}$. **543.** 1) 16 см, 32 см, 30 см; 2) 10 см, 24 см, 16 см. **544.** 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см. **545.** 1) BC = 16 мм, CL = 24 мм, LF = 16 мм, DC = 50 мм, KL = 20 мм; 2) BC = 6 см, CL = 9 см, LF = 6 см, DC = 15 см, KL = 6 см. **546.** 1) $\frac{125}{34}$ см, $\frac{100}{17}$ см, $\frac{50}{17}$ см, 2) $\frac{250}{17}$ см, $\frac{400}{17}$ см, $\frac{200}{17}$ см. **547.** 1) 15 см; 2) 22 см. **548.** 1) 3 см, 6 см; 2) 5,6 см, 8,4 см. **549.** 1) 12 см; 2) 1,2 дм. **550.** 1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$. **551.** 1) 4 см, 8 см, 12 см; 2) 3,1 см, 6,2 см, 9,3 см. **552.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **553.** 1) $\frac{10}{3}$; 2) 4,5. **556.** $\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c}$; $\frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{b+c}{a+b+c}$. **557.** 1) 21,6 см; 2) 36 см. **558.** *Вказівка*: скористайтесь узагальненою теоремою Фалеса. **559.** 1) *Вказівка*: спочатку доведіть, що $\Delta AOB \backsim \Delta DOC$; 2) 6,25 і 3,75. **560.** *Вказівка*: нехай AA_1 перетинає MN в точці O; доведіть, що $\Delta AMO \backsim \Delta ABA_1$ і $\Delta ANO \backsim \Delta ACA_1$. **561.** 1) Так; 2) лише для рівнобічної трапеції. **562.** 1) 8 см, 9 см; 2) $11\frac{1}{3}$ см, $12\frac{2}{3}$ см. **563.** 1) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$; 2) $\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b$, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, $\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b$. **565.** 10 хв. **566.** 28 м. **567.** 36 м.

§ 12

568. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) так. **569.** 1) Ні; 2) так. **570.** Так. **571.** Так. **575.** ΔABC і ΔMNC. **577.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. **578.** Так. **579.** Тому, що з рівності даних відношень не випливає рівність відповідних кутів трикутників. **580.** 1) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC$ = 2 см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1$ = 6 см; 2) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC$ = 4 см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1$ = 2 см. **581.** $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC$ = 9 см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1$ = 3 см. **582.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника та ознакою подібності трикутників за двома кутами. **583.** 1) Так; 2) ні. **584.** Так. **585.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **586.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **588.** 1) Так; 2) так. **589.** Ні. **590.** *Вказівка*: знайдіть гострі кути трикутників та скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **591.** $a : b$ або $b : a$. **592.** 1) $68\frac{4}{7}$ мм, $111\frac{3}{7}$ мм; 2) 1,5 дм, 0,9 дм. **593.** $6\frac{9}{11}$ см, $18\frac{2}{11}$ см. **594.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **595.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **596.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **597.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою паралельності прямих та ознакою подібності трикутників за двома кутами. **598.** 1) 5 см, 7 см, 3 см; 15 см, 21 см, 9 см; 2) 6 см, 8 см, 4 см; 4,5 см, 6 см, 3 см. **599.** 8 см, 10 см, 6 см; 16 см, 20 см, 12 см. **600.** 10 см, 8 см. **601.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини, та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. **602.** 1) 12 см; 2) 4 см. **603.** *Вказівка*: один із кутів, що утворює дана пряма з найбільшою стороною даного трикутника, має дорівнювати найбільшому його куту. **604.** 1) 4; 2) 3; 3) 2. **605.** 1) 4,2 см; 2) 6 см. **606.** *Вказівка*: див. задачу 605. **607.** 1) 5 : 3; 2) 13 : 5. **608.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **609.** *Вказівка*: рівні висоти можуть не бути відповідними. **610.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **611.** 8 см, 12 см. **612.** 12 см, 36 см. **613.** 18 см, 30 см. **614.** *Вказівка*: розгляньте дві пари подібних трикутників та почленно додайте одержані пропорції. **615.** 20 см, 30 см. **616.** 9 см, 18 см. **617.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **618.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини, та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. **619.** 1) $\frac{3}{4}$ см; 2) 1 см; 3) $1\frac{1}{4}$ см. **620.** *Вказівка*: проведіть дві висоти та розгляньте два подібні трикутники, катетами яких є дані висоти. **621.** 1) 12, 24; 2) 30, 20. **622.** *Вказівка*: проведіть діаметр кола BD та скористайтеся властивістю вписаних кутів, що спираються на хорду BC. **623.** *Вказівка*: доведіть подібність спочатку трикутників AOM і NKM та BON і BKA, а потім трикутників BKA і MKN. **624.** *Вказівка*: доведіть подібність ΔABC і, наприклад, ΔALK. **625.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що навколо чотирикутника $BDCM$ можна описати коло, а вписані кути BCD і BMD спираються на одну хорду. **626.** ab. **628.** 195 м. **629.** *Вказівка*: побудуйте подібний трикутник, сторони якого відповідно паралельні сторонам даного трикутника. **630.** 4) 189,65 м. **631.** *Вказівка*: на одному з трьох променів візьміть дві точки і проведіть з них перпендикуляри до двох інших променів; розгляньте дві пари подібних прямокутних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 13

632. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) так. **633.** 1) Ні; 2) так. **634.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **635.** Так. **636.** Ні. **637.** Наприклад, 10 см і 16 см та кут 50° між ними. **639.** ΔABC і ΔMNC. **641.** Перший і третій. **642.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **643.** 1) Так; 2) ні. **644.** Так. **645.** Перший і третій. **646.** Другий і третій. **647.** 1) 144 см, 96 см, 48 см; 2) 56 см, $37\frac{1}{3}$ см, $18\frac{2}{3}$ см. **648.** 40 см, $26\frac{2}{3}$ см, $13\frac{1}{3}$ см. **649.** 1) 6,4 мм, 10,4 мм, 38,4 мм, 62,4 мм; 2) 6 см, 10 см, 12 см, 20 см. **650.** $2\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ м, $16\frac{2}{3}$ см. **651.** Так. **652.** Ні. **653.** Наприклад, 10 см, 12 см, 18 см. **654.** Перший і другий. **655.** 1) 27 см, 36 см; 2) 119 см, 105 см. **656.** 30 см, 45 см. **657.** 1) 24 см; 2) 128 см. **658.** 27 см. **659.** 1) 36 мм; 2) 0,9 дм. **660.** 16 см. **661.** *Вказівка*: перетворіть дану рівність добутків у пропорцію. **662.** 1) AB = 5 см, BC = 7 см, AC = 3 см, KL = 15 см, LM = 21 см, KM = 9 см; 2) AB = 6 см, BC = 8 см, AC = 4 см, KL = 4,5 см, LM = 6 см, KM = 3 см. **663.** TO = 8 см, OM = 10 см, TM = 6 см, BC = 16 см, CE = 20 см, BE = 12 см. **664.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними. **665.** Рівні медіани можуть не бути відповідними. **666.** 12 см. **667.** 1) 2 : 7; 2) 1 : 4. **668.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину висот BH і CM; спочатку на стороні BC як на діаметрі побудуйте допоміжне коло та доведіть подібність трикутників BOC і MOH. **669.** 2. **670.** 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. **671.** 5 см. **672.** 1) 1 : 3; 2) 1 : 2. **673.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **674.** *Вказівка*: скористайтеся способом, аналогічним способу доведення ознаки подібності трикутників за трьома сторонами. **675.** $\frac{ma}{1+m}$. **676.** 2 : 1. **677.** 60°, 120°, 60°, 120°. **678.** 1) $\frac{a+mb}{1+m}$; 2) $\frac{2ab}{a+b}$; 3) $\frac{2ab}{a-b}$. **679.** *Вказівка*: розгляньте три пари подібних трикутників. **680.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$. **681.** *Вказівка*: доведіть, що вказані чотири точки є вершинами чотирикутника, у якому суми протилежних кутів становлять по 180°. **682.** 3 : 2. **683.** 1 : 1. **684.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **685.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. **686.** 9,8 м. **688.** *Вказівка*: у трикутнику AKB проведіть допоміжну середню лінію, паралельну AB, та розгляньте дві пари подібних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 14

689. 1) Так; 2) ні; 3) так. **691.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) ні; 9) так. **692.** 1) 6 см і 3 см, 8 см і 4 см, 10 см і 5 см; 2) 4 см і 2 см, 4 см і 2 см, 2 см і 1 см; 3) 30 см і 15 см, 30 см і 15 см, 30 см і 15 см. **693.** 12 см і 6 см, 12 см і 6 см, 18 см і 9 см. **694.** 1) 18 см, 24 см, 36 см; 2) 6 см, 6 см, 9 см; 3) 12 см, 12 см, 12 см. **695.** 9 см, 15 см, 21 см. **696.** 1) $AD = 8$ см, $DC = 12$ см; 2) $AD = 5\frac{5}{13}$ см, $DC = 4\frac{8}{13}$ см; 3) $AD = 1{,}5$ см, $DC = 2{,}5$ см; 4) $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. **697.** L. *Вказівка:* скористайтеся властивістю бісектриси і властивістю медіани трикутника. **698.** H. **699.** 1) 25 од., 20 од., 15 од., 12 од.; 2) 169 од., 65 од., 156 од., 60 од. **700.** 289 од., 136 од., 255 од., 120 од. **701.** 1) 2 од.; 2) 2 од.; 3) 6 од. **702.** 1) 4 см; 2) 2 см. **703.** 6 см. **705.** 8 см, 12 см, 16 см. **706.** 1 : 2. **707.** 1)Так; 2) Ні. **708.** 3 см, 12 см. **709.** 22,5 см, 57,5 см. **710.** $4\frac{2}{7}$ см, $5\frac{5}{7}$ см. **711.** 1) $\frac{3}{4}$ см; 2) $\frac{1}{6}$ см. **712.** 4,8 см. **713.** 6,72 см. **714.** 1) 24 см; 2) 120 мм. **715.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома сторонами та кутом між ними. **716.** *Вказівка*: див. задачу 715 (1). **717.** *Вказівка*: див. задачу 715 (2). **718.** *Вказівка*: див. задачу 715 (3). **720.** *Вказівка*: через вершину тупого кута проведіть пряму, паралельну бічній стороні; розгляньте утворений прямокутний трикутник та скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи. **722.** *Вказівка*: доведіть, що трикутник з вершинами в центрі середнього кола й точках дотику двох інших кіл до однієї зі сторін даного кута є прямокутним. **723.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю вписаних кутів, що спираються на одну хорду. **725.** *Вказівка*: щоб побудувати точки, які не є кінцями двох перпендикулярних діаметрів, поділіть діаметр у відношенні 1 : 9 та скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника. **727.** *Вказівка*: три точки — око, верхівка віхи й верхівка дерева мають лежати на одній прямій. Це можна зробити, якщо поставити віху й відійти від неї на таку відстань, щоб, коли дивитись одночасно на верхівку віхи та верхівку дерева, вони суміщались.

РОЗДІЛ 3

§ 15

728. 3). **729.** Так (мал. 358); ні (мал. 359). **730.** 3). **731.** 1) 13 см; 2) 15 м; 3) 16 см. **732.** 1) 5 см; 2) 8 м; 3) $12a$. **733.** 1) $a = 12$ см; 2) $b = 16$ см; 3) $c = 10a$. **734.** 1) $d = 25$ см; 2) $b = 24$ см; 3) $b = 9a$. **735.** *Вказівка*: у даному прямокутнику проведіть діагональ та скористайтеся теоремою Піфагора в утвореному прямокутному трикутнику. **736.** 4 см. **737.** 1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) $a\sqrt{2}$. **738.** 1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. **739.** 1) 1,5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **740.** 1) 24 см; 2) 15 см; 3) 12 см. **741.** 1) 15 см; 2) 20 см. **742.** 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 10 см. **743.** *Вказівка*: застосуйте теорему Піфагора до прямокутного трикутника з вершинами у двох сусідніх вершинах ромба й точці перетину його діагоналей. **744.** 1) 26 см; 2) 8 см; 3) 15 см. **745.** 19 см (мал. 362); $6\sqrt{2}$ см (мал. 363). **746.** 13 см. **747.** 1) 5 см, 12 см, 13 см; 2) 7 см, 24 см, 25 см. **748.** 1) 15 см, 20 см; 2) 12 см, 16 см. **749.** 9 см, 12 см, 15 см. **750.** 30 см, 16 см, 34 см. **751.** 1) 15 см, 18 см; 2) 16 см, 17 см. **752.** 1) 12 см, $2\sqrt{117} \approx 21{,}6$ см; 2) 24 см, $2\sqrt{193} \approx 27{,}8$ см. **753.** 1) 10 см; 2) 29 см. **754.** *Вказівка*: розгляньте два прямокутні трикутники, одним із катетів яких є менша бічна сторона трапеції. **755.** 8 см (мал. 365); 5 см (мал. 366). **756.** 14 см. **757.** 1) 20 см; 2) 13 см. **758.** 1) 10 см; 2) 25 см. **759.** 1) 4 см; 2) 6 см. **760.** 1) 8 см або 22 см; 2) 38 см або 88 см. **761.** 8 см. **762.** 1) 10 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **763.** 21 см або 11 см. **764.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **765.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності прямокутних трикутників за двома катетами. **766.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **767.** 1) 120 см; 2) ≈ 80,7 см. **768.** 1) 61 см, 11 см; 2) 37 см, 12 см. **769.** 1) 37 см, $\sqrt{769} \approx 27{,}7$ см; 2) 20 см, $2\sqrt{205} \approx 28{,}6$ см. **770.** 1) 8 см, 9,6 см, 9,6 см; 2) 12 см, 5,6 см, 4,2 см. **771.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — даний паралелограм, O — точка перетину його діагоналей; проведіть перпендикуляри з вершин B і C до прямої AD; розгляньте прямокутні трикутники, що утворилися, та скористайтеся теоремою Піфагора. **772.** *Вказівка*: див. задачу 771. **773.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **775.** 6 см. **776.** *Вказівка*: проведіть $BE \parallel CD$ та обґрунтуйте, що AE — діаметр і $CE = DB$. **778.** $\sqrt{241} \approx 15{,}5$ м. **779.** 328 м. **780.** 1) 6,5 м; 2) ≈ 6,7 м. **781.** 12 футів.

§ 16

783. 1) б; 2) в; 3) б. **784.** 1) а; 2) б; 3) в. **785.** $\sin\alpha = \frac{BD}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AD}{AB}$, $\text{tg}\alpha = \frac{BD}{AD}(\Delta BDA)$, $\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$, $\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}(\Delta ABC)$. **787.** $\sin\alpha \approx 0{,}5$, $\cos\alpha \approx 0{,}9$, $\text{tg}\,\alpha \approx 0{,}5$. **790.** 1) $\sin 35° \approx 0{,}6$, $\cos 35° \approx 0{,}8$, $\text{tg}\,35° \approx 0{,}7$; 2) $\sin 40° \approx 0{,}6$, $\cos 40° \approx 0{,}8$, $\text{tg}\,40° \approx 0{,}8$; 3) $\sin 75° \approx 0{,}9$, $\cos 75° \approx 0{,}3$, $\text{tg}\,75° \approx 3{,}7$. **791.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **792.** 1) Так; 2) так; 3) так. **793.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\text{tg}\,A = \frac{4}{3}$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$; $\text{tg}\,B = \frac{3}{4}$. **794.** 1) 0,96; 2) 0,96; 3) $\frac{24}{7}$. **795.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$. **796.** 1) *Вказівка*: нехай один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 3 см, тоді його гіпотенуза дорівнює 5 см; побудуйте прямокутний трикутник за такими катетом і гіпотенузою; кут, що лежить проти катета 3 см — шуканий. **797.** Див. задачу 796. **798.** Див. задачу 796. **801.** 1) 0,8; 0,6; $\frac{4}{3}$; 2) 0,6; 0,8; $\frac{3}{4}$. **802.** 1) 0,8; 0,6; 2) $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$. **803.** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **804.** 1) 0,86; 2) 0,38; 3) 1,33. **806.** 10 см і 6 см. **807.** 1) 8 см і 10 см; 2) 15 см і 39 см; 3) 12 см і 16 см. **809.** 8 м.

§ 17

810. 2), 4), 5). **811.** 2). **812.** 3). **813.** 2). **814.** $c \cdot \cos\alpha$ (мал. 390); $c \cdot \sin\alpha$ (мал. 391); $b \cdot \text{tg}\,\alpha$ (мал. 392). **815.** $\frac{a}{\text{tg}\alpha}$ (мал. 393); $\frac{a}{\sin\alpha}$ (мал. 394); $\frac{b}{\cos\alpha}$ (мал. 395). **817.** 1) 3 см; 2) 8 см; 3) 12 см. **818.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **819.** 1) 128 см; 2) 16 см; 3) 10 см. **820.** 1) 64 см; 2) 50 см; 3) 10 см. **821.** 1) 4,8 см; 2) 48 см; 3) 16,5 см. **822.** 1) $BC = c \cdot \cos\beta$, $AC = c \cdot \sin\beta$; 2) $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = \frac{a}{\text{tg}\alpha}$; 3) $AB = \frac{b}{\sin\beta}$, $AC = \frac{b}{\text{tg}\beta}$. **823.** $b \cdot \sin\alpha$. **824.** $l \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. **825.** 1) $2b \cdot \cos\alpha$; 2) $b \cdot \sin\alpha$. **826.** 1) $\frac{h}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2h}{\text{tg}\alpha}$. **827.** 1) $\frac{a}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **828.** $\frac{a\text{tg}\alpha}{\sin\beta}$ і $\frac{a\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}$ (мал. 396); $\frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$ і $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ (мал. 397). **829.** $a \cdot \sin\alpha$ і $a \cdot \sin\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha$. **830.** $2m \cdot \cos\alpha$, $2m \cdot \sin\alpha$. **831.** $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **832.** 1) $\frac{2r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{r}{\cos\alpha\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **833.** $\frac{h\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{\text{tg}\alpha}$.

834. $\frac{a}{2\cos\alpha}$. **835.** 1) $\frac{a}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **836.** 1) $\frac{m}{\sin\alpha}$, $\frac{m}{\sin\beta}$; 2) $\frac{m(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta)}{\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$ або $\frac{m(\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta)}{\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$.

837. $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sin\beta}$. **838.** 1) $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 2) $d\text{tg}\frac{\alpha}{2}$. **840.** $\frac{b\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **841.** $b + 2c \cdot \cos\alpha$. **842.** $a - 2c \cdot \sin\alpha$.

843. 1) $\frac{h}{\cos\alpha}$; 2) $b + 2h \cdot \text{tg}\,\alpha$. **844.** $\frac{b\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}$, $\frac{b\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}$. **845.** $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\text{tg}\frac{\beta}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\text{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\text{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$. **846.** 1) $\text{tg}\,\alpha = 0{,}8$.

§ 18

847. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. **848.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. **849.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. **850.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **851.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **852.** 1) sin 70°; sin 55°; sin 40°; 2) cos 80°; cos 25°; cos 5°. **853.** 1) sin 50°, sin 16°; 2) cos 35°, cos 65°. **854.** 1) sin α; 2) 2 sin α; 3) cos α; 4) –cos α. **855.** 1) 0; 2) –cos α. **856.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{3}$; 6) 8. **857.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 3. **858.** 1) 1; 2) 1; 3) 2,5; 4) 2. **859.** 1) 2; 2) 0. **860.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 60°; 5) 60°; 6) 45°. **861.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 30°. **862.** 2 см (мал. 406); 4 см (мал. 407); 10 см (мал. 408). **863.** 12 см (мал. 409); 10 см (мал. 410); 7 см (мал. 411). **864.** 1) 2 см; 2) 6 см; 3) 8 см. **865.** 1) 6 см; 2) 6 см; 3) 7 см. **866.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 9 см. **867.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **868.** 1) sin 10°, sin 11°, sin 15°, sin 46°, sin 75°; 2) cos 72°, cos 50°, cos 34°, cos 25°, cos 20°; 3) tg 17°, tg 37°, tg 48°, tg 66°, tg 87°. **869.** 1) ≈ 0,682; ≈ 0,731; ≈ 0,933. **870.** 1) α = 39°: 0,629; 0,777; 0,809; α = 54°12′ : 0,811; 0,585; 1,387; 2) 48°35′; 31°; 52°59′; 23°48′; 43°3′; 37°59′. **871.** 1) 0,342; 0,966; 0,545; 0,996; 2) 0,994; 0,391; 0,629; 0,913; 3) 2,14; 0,017; 3,27; 0,344. **872.** 1) 0, 799; 0,035; 2) 0,469; 0,974; 3) 0,176; 0,287. **873.** 1) 88°, 1°, 35°; 2) 40°, 15°, 77°; 3) 42°, 19°, 38°. **874.** 1) 36°; 2) 43°; 3) 40°. **875.** 1) 1; 2) 3sin α. **876.** 1 – cos² α. **877.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 6. **878.** 2. **879.** 4 см. **880.** 18 см. **881.** 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **882.** 1) 8 см і $8\sqrt{3}$ см; 2) $8\sqrt{2}$ см і $8\sqrt{2}$ см. **883.** $2\sqrt{3}$ см і 6 см (мал. 413); $3\sqrt{3}$ см і 9 см (мал. 414). **884.** 4 см і $2\sqrt{3}$ см. **885.** 4 см, $4\sqrt{3}$ см. **886.** 12 см і 12 см. **887.** 1) $12\sqrt{3}$ см і 24 см; 2) 12 см і $12\sqrt{3}$ см. **888.** $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **889.** 1) 4 см; 2) $4\sqrt{3}$ см. **890.** $1:\sqrt{2}$. **891.** 1) $5\sqrt{2}$ см і 10 см; 2) 5 см і $5\sqrt{3}$ см. **892.** $5\sqrt{3}$ см. **894.** «–». **895.** 1) $1+\sqrt{3}$ см і $3+\sqrt{3}$ см; 2) $2+\sqrt{2}$ см і $2+\sqrt{2}$ см. **896.** $\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\approx 0{,}9$ см, $\sqrt{3}-1\approx 0{,}73$ см. **897.** $2R+\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ і $2\sqrt{3}R+4R$. **898.** 1) 4 см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) $2\sqrt{19}$ см. **899.** 1) 6 см; 2) $3\sqrt{3}$ см. **900.** 24 см і 56 см. **901.** 40 см і 40 см. **902.** 24 см і 36 см. **903.** 10 см і 24 см. **904.** $60+\frac{20\sqrt{3}}{3}\approx 71{,}5$ м. **905.** 100 м. *Вказівка*: скористайтеся властивістю прямокутного трикутника з кутом 30°.

§ 19

906. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. **907.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) так. **908.** y ≈ 4,5 см і x ≈ 5,36 см (мал. 426); x ≈ 13,37 см і y ≈ 16, 09 см (мал. 427). **909.** α ≈ 51° і β ≈ 38° (мал. 428); α ≈ 53° і β ≈ 36° (мал. 429). **910.** 1) ≈ 4,1 см; 2) ≈ 10,67 см; 3) ≈ 4,69 см. **911.** 1) ≈ 11,52 см і ≈ 14,62 см; 2) ≈ 13,76 см і ≈ 17,01 см. **912.** 1) ≈ 5,92 см; 2) ≈ 12,64 см. **913.** 1) ≈ 48°36′; 2) ≈ 53°6′; 3) ≈ 63°24′. **914.** 1) ≈ 45°34′; 2) ≈ 44°26′. **915.** ≈ 78°28′, ≈ 11°32′. **916.** 1) ≈ 36°54′; 2) ≈ 41°59′. **917.** ≈ 26°36′. **918.** 1) ≈ 73°44′; 2) ≈ 83°58′. **919.** 90°. **920.** 1) а) c = 29, α ≈ 43°36′, β ≈ 46°24′; б) c = 15, α ≈ 36°52′, β ≈ 53°8′; в) c = 30, α ≈ 36°56′, β ≈ 53°4′; г) c ≈ 46,56; α ≈ 30°19′; β ≈ 59°41′; 2) а) b = 8, α ≈ 61°56′, β ≈ 28°4′; б) b = 12, α ≈ 53°8′, β ≈ 36°52′; в) b = 33, α ≈ 59°29′, β ≈ 30°31′; г) a ≈ 0,68; α ≈ 13°25′; β ≈ 76°35′. **921.** 1) а) a ≈ 7,52; b ≈ 2,74; $\angle B$ = 20°; б) a ≈ 54,87; b ≈ 60,94; $\angle B$ = 48°; в) a ≈ 9,64; b ≈ 15,43; $\angle B$ = 58°; г) a ≈ 4,23; b ≈ 1,97; $\angle B$ = 25°; 2) а) b ≈ 7,5, c ≈ 14,15, $\angle B$ = 58°; б) b ≈ 5,5, c ≈ 18,82, $\angle B$ = 73°; в) b ≈ 15,92, c ≈ 19,4, $\angle B$ = 37°; г) b ≈ 1,71, c ≈ 3,92, $\angle B$ = 71°. **922.** ≈ 14,69 см і ≈ 20,22 см. **923.** 1) ≈ 6,21 см; 2) ≈ 11,59 см. **924.** 1) ≈ 6,71 см; 2) ≈ 8,19 см. **925.** 1) ≈ 23,04 см; 2) ≈ 65°44′. **926.** 1) ≈ 41,22 см; 2) ≈ 46,26 см; 3) ≈ 36,72 см і ≈ 9,53 см. **927.** 1) ≈ 17,15 см і ≈ 36,88 см; 2) ≈ 8,31 см і ≈ 33,69 см. **928.** 2,81 см. **929.** ≈ 2,94 см і ≈ 4,70 см. **930.** ≈ 31,25 см і ≈ 125,16 см. **931.** ≈ 119,14 см. **932.** ≈ 7,43 см. **933.** ≈ 3,4 см. **934.** ≈ 73,1 см. **935.** ≈ 61°. **936.** ≈ 0°57′. **937.** 1) ≈ 0,118 км; 2) ≈ 0,438 км. **938.** ≈ 2239,2 м. **939.** ≈ 79,5 м. **940.** ≈ 130,8 м. **941.** ≈ 71,76 м. **942.** ≈ 1°26′. **943.** ≈ 1°17′. **944.** ≈ 403 м. **945.** ≈ 2149 м. **946.** ≈ 129,1 м.

РОЗДІЛ 4

§ 20

947. Ні. **948.** 1) Ні; 2) так. **949.** 1) Ні; 2) так. **950.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **952.** 1) Ні; 2) так. **953.** 1) Ні; 2) так. **954.** 1) 14 см; 2) 20 см; 3) 18 см. **956.** 1) 5; 2) 5. **957.** 1) 540°; 2) 1260°. **958.** 2700°. **959.** 1) 10; 2) 8. **960.** 11. **961.** 1) 4; 2) 10. **962.** 15. **963.** 1) 30°, 60°, 120°, 150°, 180°; 2) 80°, 100°, 110°, 110°, 140°; 3) 100°, 110°, 120°, 90°, 120°; 4) 20°, 100°, 140°, 180°, 100°. **964.** 1) 90°; 2) 24°. **965.** 36°. **966.** Восьмикутник. **967.** Семикутник. **968.** Семикутник. **971.** 8,4 см. **972.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **973.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **974.** 1) 35; 2) 119. **975.** 1) Ні; 2) ні. **976.** Ні. **977.** 1) 5; 2) 6. **978.** 5. **979.** 1) 6 : 5 : 4 : 2 : 1; 2) 8 : 7 : 5 : 4 : 3. **980.** *Вказівка*: сума внутрішнього й зовнішнього кутів многокутника дорівнює 180°. **981.** 1) 6; 2) 9. **982.** $\frac{360°}{n}$. **983.** $2\sqrt{3}$. **984.** *Вказівка*: скористайтесь означенням опуклого многокутника. **985.** 1) 3 і 6; 2) 6 і 3; 4 і 4. **986.** 1) *Вказівка*: проведіть радіуси до вершин многокутника та розгляньте утворені трикутники. **987.** 1) 4; 2) 6; 3) 7. **988.** *Вказівка*: розгляньте трикутник, сторона якого є стороною даного многокутника, а протилежна вершина лежить у центрі описаного кола. **990.** $6\sqrt{2}$ см, ≈ 4,6 см, $3\sqrt{2}$ см. *Вказівка*: нехай O — центр кола; доведіть, що ΔBOD — прямокутний.

§ 21

991. 1) Ні; так. **992.** 1) Ні; 2) ні. **993.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **994.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **995.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **996.** 1) $S_1 \approx 8$ кв. од. **997.** $S_{KLM} \approx 22{,}5$ кв. од. **1000.** 96 см². **1001.** 160 см². **1002.** 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 11 см. **1003.** 1) 5 см; 2) 7 см. **1004.** 4 см² (мал. 476); 8 см² (мал. 477). **1005.** 2 см². **1006.** 1) Збільшиться в 3 рази; 2) зменшиться в 4 рази; 3) збільшиться на 50 %. **1007.** 1) Збільшиться в 9 разів; 2) зменшиться в 16 разів; 3) збільшиться на 125 %. **1008.** 1) $b = 1{,}5$ см; $S = 6$ см²; 2) $a = 0{,}5$ см; $P = 25$ см; 3) $a = 3{,}5$ см; $S = 24{,}5$ см²; 4) $b = 0{,}5$ см; $P = 17$ см. **1009.** 1) 20 і 30; 2) 15 і 40; 3) $6\sqrt{10}$ і $10\sqrt{10}$. **1010.** 3 см і 6 см. **1011.** 1) 7,5 см²; 2) 5 см²; 3) 22,5 см². **1012.** 18 см². **1013.** 1) 2 см²; 2) 4,5 см²; 3) $\frac{25}{2}$ см². **1014.** 18 см². **1015.** 1) 24 см, 26 см; 2) 24 см, 40 см. Квадрат. **1016.** 40 см, 50 см. Квадрат. **1017.** $\frac{7a^2}{9}$. **1018.** $\frac{5a^2}{9}$. **1019.** 1) 81 см², 25 см²; 2) 19 см², 16 см². **1020.** 1) 56 см, 40 см; 2) 200 см, 176 см. **1021.** $\sqrt{\frac{mS}{n}}$; $\sqrt{\frac{nS}{m}}$ **1022.** $\frac{nP}{2(m+n)}$; $\frac{nP}{2(m+n)}$. **1023.** 1) Площа прямокутника зі сторонами $b + a$ і c дорівнює сумі площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c; 2) площа прямокутника зі сторонами $a - b$ і c дорівнює різниці площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c. **1024.** 1) 1 см; 2) 2 см. **1025.** *Вказівка*: скористайтеся означенням рівноскладених фігур. **1026.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями площі. **1027.** 9 см², 1 см², 7 см², 7 см². **1028.** ≈ 15,21 см і ≈ 35,83 см. **1029.** Так. *Вказівка*: покажіть, що сума площ квадратів зі сторонами відповідно AB і BC дорівнює площі квадрата зі стороною AC без подвоєної площі прямокутника зі сторонами AB і BC. **1030.** *Вказівка*: площа прямокутного трикутника дорівнює сумі площ прямокутних трикутників, на які його розбиває висота. **1031.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями середніх пропорційних у прямокутному трикутнику. **1034.** 0,06 га, 600 м². **1035.** 250 м². **1036.** Так.

§ 22

1042. Ні (мал. 488); так (мал. 489). **1043.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **1044.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **1045.** 45 кв. од. **1046.** 42 кв. од. **1047.** 1) 3000 см²; 2) 1000 см². **1048.** 2500 см². **1049.** 1) 80 см²; 2) 300 см². **1050.** 30 см². **1051.** 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см; 4) 8 см. **1052.** 12 см. **1053.** 1) $h_a = 8{,}2$ см; $h_b = 4{,}1$ см; 2) $h_a = 4$ см; $h_b = 2$ см; 3) $h_a = 4{,}5$ см; $h_b = 3$ см; 4) $h_a = 4$ см; $h_b = 6{,}4$ см. **1054.** 1) 8 см; 2) 5 см. **1055.** 4 см. **1056.** 1) 4 см; 2) 12 мм. **1057.** 15 см. **1058.** *Вказівка*: проведіть діагоналі паралелограма та прямі, що проходять через точку перетину діагоналей паралельно сторонам; покажіть, що площа кожного з восьми трикутників дорівнює $\frac{1}{8}$ площі даного паралелограма. **1059.** Так. **1060.** 24 кв. од. **1061.** 96 кв. од. **1062.** 1) 96 см^2; 2) 2,4 дм^2. **1063.** 840 мм^2. **1064.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. **1065.** 1) 100 см^2; 2) 120 см^2. **1066.** 72 см^2. **1067.** 1) 8 см^2; 2) 0,45 см^2. **1068.** 0,72 м^2. **1069.** 1) 75 см^2; 2) 250 см^2. **1070.** 1) $75\sqrt{3}$ мм^2; 2) $250\sqrt{3}$ мм^2. **1071.** 1) 0,5 дм; 2) 3,38 см^2. **1072.** 1) 8 см, 3 см; 2) 1,5 дм, 6 дм. **1073.** 1) 30 см; 2) 30 см. **1074.** 1) 128 см^2; 2) 140 см^2. **1075.** *Вказівка*: якщо від трикутників, що мають рівні площі, відрізати трикутники з рівними площами, то дістанемо фігури з рівними площами. **1076.** 1) $3\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{6}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{3}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см; $6\sqrt{2}$ см. **1077.** 4 см. **1078.** 30°. **1079.** У 2 рази. **1080.** 48 см^2. **1081.** *Вказівка*: спочатку покажіть, що діагональ ромба розбиває його на два рівносторонні трикутники, а потім виразіть площу ромба і площу трикутника, утвореного висотами, через сторону й висоту ромба. **1083.** *Вказівка*: трикутники AMD і CMD розбийте висотами, проведеними з вершини M, на прямокутні трикутники та покажіть, що сума їх площ дорівнює половині площі паралелограма. **1084.** Діагональ дорівнює стороні, до якої ця діагональ перпендикулярна. **1085.** 1) 24 см^2; 2) 156 см^2. **1086.** Дві прямі, які паралельні даній стороні паралелограма й відстоять від неї на відстані $\frac{S}{h}$. **1088.** 23 750 м^2. **1090.** Ні. Площа прямокутника більша за площу паралелограма.

§ 23

1093. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) ні. **1094.** 10 кв. од. (мал. 505); 210 кв. од. (мал. 506). **1095.** 42,5 кв. од. **1096.** 1) 15 см^2; 3) 1250 см^2. **1097.** 5 дм^2. **1098.** 1) 40 см^2; 3) 108 мм^2. **1099.** 1,5 дм^2. **1100.** 1) 12 см; 2) 31 см; 3) 20 см. **1101.** 12 см. **1102.** 1) $h_a = \frac{168}{13}$ см, h_b = 12 см, $h_c = \frac{168}{15}$ см; 2) $h_a = \frac{252}{13}$ см, h_b = 12,6 см, h_c = 12 см; 3) h_a = 12 см, $h_b = \frac{42}{15}$ см, h_c = 2,1 см; 4) h_a = 8 см, h_b = 7,2 см, $h_c = \frac{72}{17}$ см. **1103.** 1) Не зміниться; 2) збільшиться в 2 рази. **1104.** Збільшиться у 2 рази. **1105.** 1) $16\sqrt{3}$ см^2; 2) $0{,}36\sqrt{3}$ дм^2; 3) $\sqrt{3}$ м^2; 4) $3\sqrt{3}$ см^2; 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ дм^2. **1106.** 1) $25\sqrt{3}$ см^2; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ дм^2. **1107.** 1) 240 см^2; 2) 120 см^2. **1108.** 60 см^2. **1109.** *Вказівка*: порівняйте основи та висоти трикутників. **1110.** *Вказівка*: порівняйте основи та висоти трикутників. **1111.** Навпіл. **1112.** 0,25. **1113.** 1) 210 см^2; 2) 420 см^2. **1114.** 84 см^2. **1115.** 1) p = 42 см, S = 210 см^2; 2) p = 27 см, S = 126 см^2; 3) p = 21 см, S = 42 см^2; 4) p = 45 см, S = 240 см^2. **1116.** 1) 108 см^2; 2) 136 см^2. **1117.** 260 см^2. **1118.** 1) 39 см^2; 2) 60 см^2. **1119.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями середньої лінії трикутника. **1120.** 1) 150 см^2; 2) 3,36 см^2; 3) 135 см^2; 4) 720 см^2. **1121.** 1) 270 см^2; 2) 120 см^2. **1122.** 1) 18 см, 80 см; 2) 48 см, 55 см. **1123.** 1) 39 см^2; 2) 34 см^2. **1124.** 1) $8\sqrt{3}$ см^2; 2) $18\sqrt{3}$ см^2. **1125.** 1) 24 см^2; 2) 120 см^2. **1126.** $h_c < h_b < h_a$. **1127.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. **1128.** *Вказівка*: виміряйте відповідні сторони трикутників. **1129.** 1) $\frac{16}{3}$ см; 2) $\frac{16}{3}$ см; 3) $\frac{8}{3}$ см. **1130.** *Вказівка:* скористайтеся формулою площі прямокутного трикутника й виразіть один із катетів за формулами 1 і 2 таблиці 26 (с. 123). **1132.** *Вказівка*: спочатку з'єднайте дану точку з вершинами трикутника, потім знайдіть площу трикутника як суму площ одержаних трьох трикутників. **1133.** *Вказівка*: скористайтеся означенням рівноскладених фігур. **1135.** *Вказівка*: скористайтеся двома формулами площі трикутника. **1136.** $7S$, де S — площа даного трикутника. **1137.** $1 : \sqrt{2} - 1 : \sqrt{3} - \sqrt{2}$. **1138.** $4 \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$. **1141.** *Вказівка*: трикутники ABC і ACM мають рівні площі, тому площа трикутника ABC дорівнює половині добутку довжини відрізка AM на ширину лінійки. **1144.** 0,927 кг.

§ 24

1146. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. **1147.** 300 кв. од. (мал. 528); 150 кв. од. (мал. 529). **1148.** 44 кв. од. **1149.** 1) 2400 см^2; 2) 4000 см^2. **1150.** 1400 см^2. **1151.** 1) 90 см^2; 2) 1,75 дм^2. **1152.** 33 см^2. **1153.** 1) 10 см; 2) 12 см. **1154.** 12 см. **1155.** 1) 4 см; 2) 5 см. **1156.** 3 см. **1157.** 1) q = 12 см, S = 84 см^2; 2) b = 27 см, h = 5 см; 3) a = 20 см, q = 21 см; 4) a = 23 см, h = 11 см. **1158.** 1) Не зміниться; 2) збільшиться у 2 рази. **1159.** Не зміниться. **1160.** 1) 20 см, 16 см; 2) 36 см, 24 см. **1161.** 20 см, 10 см. **1162.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1163.** 1) 144 см^2; 2) 44 см^2. **1164.** 276 см^2. **1165.** 1) 645 см^2; 2) 180 см^2. **1166.** $18\left(3+\sqrt{3}\right)$ см^2. **1167.** 1) 10,5 см^2; 2) 8 см^2. **1168.** 1) 6 см^2; 2) 13,5 см^2. **1169.** 45°. **1170.** 1) 5,6 см^2; 2) 96 см^2. **1171.** Розгляньте два випадки. 8 см і 12 см або 2 см і 6 см. **1172.** 12 см. **1173.** *Вказівка*: якщо трапеція є описаною навколо кола, то сума її основ дорівнює сумі бічних сторін. **1174.** $\frac{2S}{P}$. **1175.** 10 см. **1176.** ≈ 130,03 см^2. **1177.** $96\sqrt{3}$ см^2. **1178.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції. **1179.** Від 16 см до 32 см. **1180.** $\frac{2ab}{a+b}$. **1181.** *Вказівка*: доведіть, що площі трикутників BOC і COD та площі трикутників AOB і BOC відносяться, як $AB : CD$. **1182.** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 : 1 : \frac{m}{n} : \frac{m}{n}$. **1183.** 90°. **1184.** $\frac{4dc}{5}$. **1185.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю медіани прямокутного трикутника, проведеної до його гіпотенузи. **1186.** *Вказівка*: покажіть, що сума площ двох інших з утворених трикутників дорівнює половині площі трапеції. **1187.** *Вказівка*: покажіть, що площа кожної такої трапеції дорівнює половині площі даного трикутника. **1188.** 346 500 кв. од. **1189.** *Вказівка*: розбийте чотирикутник на прямокутні трикутники та обчисліть їх площі. **1190.** *Вказівка*: покажіть, що відстань від меншої бічної сторони трапеції до шуканої прямої дорівнює половині середньої лінії трапеції. **1191.** Не вистачить, оскільки не можна розмістити всі чотири вставки на склі даних розмірів.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ СИНУСІВ І КОСИНУСІВ

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°
α	$\cos\beta$	$\sin\beta$	β

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ТАНГЕНСІВ

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім’я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	в кінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Головна редакторка *І. В. Красуцька*
Редактор *І. В. Луценко*
Головна художниця *І. П. Медведовська*
Технічний редактор *Е. А. Авраменко*
Коректорка *С. В. Войтенко*

Малюнки *О. Дядика*

Формат 84x108 $^{1}/_{16}$. Ум. друк. арк. 23,520 + 0,42 форзац.
Обл.-вид. арк. 20,50 + 0,40 форзац.
Тираж 000 пр.
Зам. №

ТОВ «Український освітянський видавничий центр “Оріон”»
Свідоцтво «Про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.

Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2
www.orioncentr.com.ua

Віддруковано