

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

*В. І. Гук*

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**(І частина)**

Методичний посібник

*Для студентів денної та заочної форм навчання  
напряму 0501 „Економіка і підприємництво”  
освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”*

Черкаси  
2010

Гук В. І. Вища математика : Частина 1: методичний посібник : для студентів денної та заочної форм навчання напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” / В. І. Гук. – Черкаси : Східноєвропейський ун-т економіки і менеджменту, 2010. – 28 с. [Укр. мова.]

Рецензент

*С. М. Одокієнко*, канд. техн. наук, доцент кафедри загальнотехнічних наук Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Відповідальний за випуск

*О. М. Строгалова*

Затверджено методичною радою СУЕМ як методичний посібник для студентів денної та заочної форм навчання напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”, протокол № 5/10 від 11.02.2010.

© Східноєвропейський університет  
економіки і менеджменту, 2010

## ВСТУП

Навчальна дисципліна „Вища математика” є нормативною навчальною дисципліною, що входить до циклу дисциплін природничо-наукової підготовки напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”.

Курс „Вища математика” розрахований на два семестри 1-го року навчання. У першому семестрі (методичний посібник, частина I) розглядаються основи лінійної алгебри, векторна алгебра, аналітична геометрія й теорія функцій однієї змінної. У другому семестрі (методичний посібник, частина II) розглядаються диференціальне числення функцій однієї та двох змінних, інтегральне числення та основи теорії диференціальних рівнянь.

У процесі вивчення курсу вводяться необхідні математичні поняття, формулюються основні математичні задачі, розглядаються твердження й теореми, які дозволяють дослідити поставлені задачі та вказати шляхи їх розв’язання. Наводяться алгоритми та аналізуються практичні методи отримання розв’язку поставлених математичних задач. Після вивчення окремої математичної теми в курсі розглядаються можливості застосування введеного математичного апарату для розв’язання економічних задач. Значна увага приділяється математичній постановці та формалізації економічної задачі.

У цьому курсі розглядаються сучасні підходи до вивчення дисципліни „Вища математика”, що засновані на широкому використанні в навчальному процесі елементів інформатики. Традиційні аналітичні методи доповнюються розглядом чисельних методів, орієнтованих на використання ПЕОМ. Робиться спроба привчити студентів до самостійного освоєння та систематичного практичного використання відомої системи комп’ютерної алгебри Maple, яка дозволяє без виконання рутинних математичних перетворень та обчислень отримувати розв’язок досить складних математичних задач.

*Мета курсу* – засвоєння базових математичних знань.

*Завдання курсу* – застосування математичних знань у процесі розв’язування економічних задач, побудови економіко-математичних моделей; розвиток аналітичного мислення.

Використовуються такі методи навчання: лекції, практичні заняття, виконання індивідуальних домашніх завдань (згідно з варіантом), виконання розрахунково-графічних робіт, виконання контрольних завдань, самостійна робота над літературою та періодичними джерелами з курсу, робота з конспектом лекцій, робота із спеціалізованими математичними програмами, робота в Інтернеті, науково-дослідна робота та участь у студентських конференціях. Після вивчення першої частини курсу передбачено складання заліку, а після вивчення другої частини курсу – складання іспиту.

## 1. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

### **Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри**

#### **Тема 1. Матриці та дії над ними**

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриці та дії над ними.

*Література:* [1, с. 10–13].

#### **Тема 2. Визначники квадратних матриць та їх властивості**

Поняття визначника. Загальне визначення. Загальне правило обчислення визначників. Властивості визначників.

*Література:* [1, с. 14–17].

#### **Тема 3. Оборнена матриця та її властивості**

Оборнена матриця, її властивості та правила обчислення. Ранг матриці.

*Література:* [1, с. 18–21].

#### **Тема 4. Розв'язання неособливих систем лінійних алгебраїчних рівнянь**

Матричний спосіб. Метод Крамера. Метод Гауса. Модифікації методу Гауса. Оцінка точності рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

*Література:* [1, с. 22–23, 25–29].

#### **Тема 5. Рішення систем $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими**

Теорема Кронекера-Капеллі. Різновиди рішень. Поняття базисного, фундаментального та опорного рішень. Системи лінійних однорідних рішень.

*Література:* [1, с. 23–25, 29–30].

### **Змістовий модуль 2. Векторна алгебра**

#### **Тема 6. Вектори та операції над ними**

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Системи координат. Проекції вектора. Розкладання вектора по ортам системи координат. Координати вектора, що заданий точками. Скалярний добуток векторів та його властивості. Векторний добуток векторів та його властивості.

*Література:* [1, с. 31–44].

### **Змістовий модуль 3. Аналітична геометрія**

#### **Тема 7. Аналітична геометрія на площині**

Метод координат на площині та деякі його застосування. Лінія на площині. Пряма на площині. Різновиди рівняння прямої на площині. Поняття про криві другого порядку на площині.

*Література:* [1, с. 48–75].

#### **Тема 8. Елементи аналітичної геометрії в просторі**

Пряма та площина в просторі.

*Література:* [1, с. 76–87].

## **Змістовий модуль 4. Функції та їх властивості**

### **Тема 9. Поняття про функції**

Числова множина. Множина дійсних чисел. Числові функції. Способи завдання функції. Графіки функцій. Основні елементарні функції та їх властивості.

*Література:* [1, с. 97–106].

## **2. РОБОЧА ПРОГРАМА**

### **2.1. Тематика лекцій**

#### **Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри**

**Лекція 1.** Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриці та дії над ними. Приведення матриці до трикутного та канонічного виду за допомогою елементарних перетворень. Множення матриць. Обчислення матричних виразів.

**Лекція 2.** Визначник квадратної матриці. Правила обчислення визначника для матриць другого та третього порядку. Загальне правило обчислення визначників. Обчислення визначника за формулою Лапласа. Властивості визначників.

**Лекція 3.** Обернена матриця та алгоритм її обчислення. Приклад. Розв'язання матричних рівнянь.

**Лекція 4.** Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратними матрицями коефіцієнтів. Норма матриці та число обумовленості матриці. Матричний метод розв'язання системи. Абсолютна та відносна точність розв'язку системи. Оцінка точності розв'язку системи за допомогою нев'язок.

**Лекція 5.** Метод Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера. Випадок нескінченної множини розв'язків. Поняття загального та часткового розв'язку системи. Приклад.

**Лекція 6.** Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Схема єдиного ділення. Схема з вибором головного елемента. Табличний варіант метода Гауса.

**Лекція 7.** Метод Гауса-Жордана. Приклад. Застосування метода Гауса для знаходження оберненої матриці, для обчислення визначників та для знаходження рангу матриці.

**Лекція 8.** Строге визначення рангу матриці. Поняття базисного мінору. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з довільною прямокутною матрицею. Теорема Кронекера-Капелі. Базисні розв'язки. Перший спосіб знаходження загального розв'язку системи.

**Лекція 9.** Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи. Загальне рішення однорідної системи.

**Лекція 10.** Неоднорідна система. Часткове рішення неоднорідної системи. Другий спосіб знаходження загального розв'язку неоднорідної системи.

## **Змістовий модуль 2. Векторна алгебра**

**Лекція 11.** Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Системи координат. Проекції вектора. Розкладання вектора по ортам системи координат. Координати вектора, що заданий точками. Довжина вектора.

**Лекція 12.** Скалярний добуток векторів та його властивості. Застосування скалярного добутку для обчислення кута між векторами. Векторний добуток векторів та його властивості. Застосування векторного добутку для знаходження площі трикутника. Розв'язання трикутника за допомогою метода координат.

## **Змістовий модуль 3. Аналітична геометрія**

**Лекція 13.** Лінія на площині та її рівняння. Пряма на площині. Різновиди рівняння прямої на площині. Використання різних видів рівняння прямої для розв'язання трикутника.

**Лекція 14.** Поняття про криві другого порядку на площині. Перетини конічної поверхні. Канонічне рівняння кола. Еліпс та його рівняння. Гіпербола та її рівняння. Парабола та її рівняння.

## **Змістовий модуль 4. Функції та їх властивості**

**Лекція 15.** Поняття множини. Числова множина. Множина дійсних чисел. Числові функції. Способи завдання функції. Графіки функцій. Основні елементарні функції та їх властивості.

**Лекція 16.** Екстремум функції. Локальний та глобальний екстремуми. Чисельне знаходження екстремуму методом розділу відрізка навпіл.

## **2.2. Тематика семінарських занять та домашні завдання**

*Загальна мета* виконання домашніх завдань – систематичне закріплення теоретичного матеріалу, використання математичних понять і формул для розв'язання типових задач, підготовка до заліків та іспитів. Кожне домашнє завдання присвячене закріпленню матеріалу певної теми, що передбачена навчальною програмою дисципліни. Кожне домашнє завдання виконується студентом самостійно, згідно з варіантом. Після виконання домашнього завдання вручну, тобто за допомогою паперу та ручки, слід перевірити правильність розв'язання кожної задачі за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple та роздрукувати отримане рішення. Усі домашні завдання виконуються на стандартних аркушах формату А4 та здаються на перевірку через тиждень після відповідного практичного заняття.

***В умовах задач усіх домашніх завдань замість номера варіанта N слід поставити відповідне число.***

## **Практичне заняття № 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ**

*Короткі теоретичні відомості.*

Транспонування матриці. Додавання та віднімання матриць. Обчислення матричних виразів. Елементарні перетворення матриць. Приведення матриці до трикутного або ступеневого виду та до канонічного виду за допомогою елементарних перетворень.

*Література:* [1, с. 10–13, 2, с. 7-13].

### Домашнє завдання № 1.

**Задача 1.** За допомогою елементарних перетворень привести матриці до трикутного або ступеневого вигляду:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & N & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & N \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 30 & 15 & 45 \\ 75 & N & 53 & 132 \\ 75 & 12 & N & 32 \\ 25 & 32 & 24 & N \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Рангом матриці  $r(\mathbf{A})$  називатимемо кількість одиниць у канонічному вигляді матриці. Знайти ранги матриць:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Задача 3.** Задано матриці  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N-1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & N+3 \end{pmatrix}$

- Знайти  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  та  $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ ;
- Знайти  $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ ;
- Знайти  $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

### Практичне заняття № 2. МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Множення матриць. Особливості операції множення матриць. Властивості операції множення матриць. Ступінь матриці та її обчислення.

*Література:* [1, с. 13–14, 2, с. 7-18].

### Домашнє завдання № 2.

**Задача 1.** Задані матриці  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N-1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & N+3 \end{pmatrix}$

- а) Знайти  $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ ;  
 б) Знайти  $\mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B}$ ;  
 в) Знайти  $2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 5\mathbf{E}$ ;  
 г) Знайти  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{B}^2$ ,  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{BA}$  та перевірити виконання рівності  
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$ .

**Задача 2.** Знайти добутки  $\mathbf{AB}$  і  $\mathbf{BA}$  заданих матриць:

$$а) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

$$б) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -N \end{pmatrix}.$$

$$в) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & N \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Комутатором двох матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  зветься вираз  $[\mathbf{AB}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .  
 Знайти комутатори  $[\mathbf{AB}]$  для матриць:

$$а) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} N+1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & N & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$б) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & N+3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N-12 & 7 & 18 \\ 0 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Обчислити вирази  $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$  та  $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ , якщо задані матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & -3 \\ 3 & N & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \\ 2 & -1 & N \end{pmatrix}.$$

**Задача 5.** Знайти добутки  $\mathbf{AB}$  і  $\mathbf{BA}$ :



$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$б) \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1, \dots, 5} \\ j=1, \dots, 5 \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

$$в) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$г) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

**Задача 6.** Задані вектори-стовпці  $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  та  $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ .

Знайти  $\vec{\mathbf{x}}^T \cdot \vec{\mathbf{y}}$  та  $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}^T$

**Задача 7.** Обчислити значення матричних виразів  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^3$ ,  $\mathbf{A}^4$ ,  $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}^2$ :

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad б) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & N & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad в) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & N & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

### Практичне заняття № 3. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

Короткі теоретичні відомості.

Обчислення визначників другого та третього порядку. Правило трикутників та правило Саруса. Властивості визначників. Загальне визначення визначника. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення. Формула Лапласа.  
*Література:* [1, с. 14–17, 2, с. 18-35].

### Домашнє завдання № 3.

**Задача 1.** Використовуючи формулу, що наводиться у визначенні визначника, обчислити визначники 2-го й 3-го порядків:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{vmatrix} 1 & N-2 \\ 3 & 4-N \end{vmatrix}; & \text{б) } \begin{vmatrix} 4+N & -2 \\ 7-N & 3 \end{vmatrix}; & \text{в) } \begin{vmatrix} N-7 & 5 \\ N+3 & -7 \end{vmatrix}; \\
 & \text{г) } \begin{vmatrix} -5 & N & 8 \\ -1 & N & -1 \\ 2 & -N & -2 \end{vmatrix}; & \text{д) } \begin{vmatrix} N-5 & 1 & 8 \\ N-1 & 2 & -4 \\ 2N & -1 & 3 \end{vmatrix}; & \text{е) } \begin{vmatrix} N-1 & 0 & 0 \\ 0 & N+2 & 0 \\ 0 & 0 & N+3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

**Задача 2.** Записати загальну формулу для знаходження визначника 4-го порядку

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Для виводу формули виписати всі різні переставлення з чотирьох елементів у матриці  $\mathbf{A}_{4 \times 4}$ . Визначити кількість інверсій для кожного переставлення. Використати знайдені переставлення в якості другого індексу елементів матриці  $\mathbf{A}$ .

**Задача 3.** Виписати формули для знаходження мінорів  $\mathbf{M}_{11}$ ,  $\mathbf{M}_{21}$  і  $\mathbf{M}_{32}$  квадратних матриць  $\mathbf{A}_{3 \times 3}$  та  $\mathbf{A}_{4 \times 4}$ .

**Задача 4.** Обчислити алгебраїчні доповнення  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{23}$  та  $\mathbf{A}_{32}$  для матриць:

$$\text{а) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ N & -N & N \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ N & N-2 & N+2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 5.** За допомогою формули розкладання Лапласа обчислити визначники:

$$a) \begin{vmatrix} 5-N & N+6 & N-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 2 & N & 0 \\ 3 & N-2 & 1 \\ -4 & 5-N & 0 \end{vmatrix}; \quad в) \begin{vmatrix} N & 0 & 1 \\ -N & 1 & 1 \\ N-2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$г) \begin{vmatrix} 2 & N & 3 & 5 \\ 0 & 7 & N & 0 \\ 3 & 2 & -N & 0 \\ N & 2 & 2 & N \end{vmatrix}; \quad д) \begin{vmatrix} N & 0 & 0 & 2 \\ -2 & N & -N & 4 \\ 4 & -2 & -N & 3 \\ -N & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad е) \begin{vmatrix} N & N & 0 & 2 \\ 2 & -2 & N & 0 \\ 4 & N & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 1 & N \end{vmatrix}$$

**Задача 6.** Виписати формули для обчислення визначників:

а) трикутної матриці  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & N \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix};$

б) діагональної матриці  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$

**Задача 7.** Обчислити визначники, скористувавшись винесенням множника за знак визначника:

$$a) \begin{vmatrix} 36N & 24N & 48N & 30N \\ 48 & 64 & 16 & -32 \\ 12 & -9 & 15 & 3 \\ 24 & 4 & 28 & -16 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 49 & -21 & 63 \\ 10N & 20N & 25N \\ 22 & 44 & 33 \end{vmatrix}.$$

**Задача 8.** Обчислити визначники, у яких обмінялися місцями два стовпчики:

$$\begin{vmatrix} N & a_{12} & a_{13} \\ -N & a_{22} & a_{23} \\ N & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} N & a_{13} & a_{12} \\ -N & a_{23} & a_{22} \\ N & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**Задача 9.** Безпосереднім обчисленням показати, що справедлива рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & N & 4 \\ 7 & -N & 1 \\ 2 & 9N & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & N & 1 \\ 1 & -N & 7 \\ 4 & 9N & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 10.** Безпосереднім обчисленням показати, що справедлива рівність:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & -N \\ 5 & 2 & 3N \\ 11 & 5 & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -N \\ 4 & 2 & 3N \\ 8 & 5 & N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & -N \\ 1 & 2 & 3N \\ 3 & 5 & N \end{vmatrix}$$

**Задача 11.** Безпосереднім обчисленням показати, що  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ , якщо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & N & 6 \\ 7 & -2 & 9 \\ -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Задача 12.** Обчислити визначники шляхом приведення матриці до трикутного вигляду:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & N \\ 2 & N & 3 & 3 \\ 0 & -2 & N & 4 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & N \\ 2 & N & 5 & 0 \\ 5 & -1 & N & 2 \\ 3 & 0 & 4 & N \end{vmatrix}.$$

**Задача 13.** Обчислити визначники з використанням формули розкладання Лапласу. Попередньо, за допомогою елементарних перетворень матриць, отримати нулі у вибраному рядку або стовпчику:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 1 & -3 & N \\ N & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & N & 3 \\ N & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & N & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & N \end{vmatrix}.$$

## **Практичне заняття № 4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ**

*Короткі теоретичні відомості.*

Міnor та алгебраїчне доповнення елемента матриці. Союзна матриця. Визначення та властивості оберненої матриці. Алгоритм обчислення оберненої матриці. Матричні рівняння та їх розв'язання.

*Література:* [1, с. 18–21, 2, с. 41–52].

#### Домашнє завдання № 4.

**Задача 1.** Знайти визначники матриць:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ -N & 2 & 3 \\ -9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad б) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N-3 & -7 & -2 \\ 4 & N & -3 \\ -4 & 2 & N+3 \end{pmatrix} \quad в) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & N & -4 & -8 \\ 8 & 4 & N & -4 \\ N & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -8 & 1 & N \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Знайти союзні матриці для матриць:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad б) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & N \\ N & -1 & 0 \\ 0 & N+2 & 7 \end{pmatrix} \quad в) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} N & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & N & 0 \\ 2 & -N & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & N \end{pmatrix}$$

**Задача 3.** Обчислити обернені матриці та виконати перевірку отриманого результату:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & 7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad б) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N & 2 & 3 \\ 3 & 2N & -1 \\ -1 & 0 & N \end{pmatrix}; \quad в) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \\ N & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$г) \mathbf{D} = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N \\ 0 & N & 0 \end{pmatrix}; \quad д) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & N & N \\ N & 0 & 2 \\ 3 & N & 2 \end{pmatrix}; \quad е) \mathbf{F} = \begin{pmatrix} N & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Задано матриці  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ . Знайти добутки  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  і  $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} N & 2 & N \\ 2 & N & N \\ N & 3 & N \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} N & 2 & 0 \\ -N & N & N \\ 2 & N & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 5.** Знайти обернену матрицю з використанням методу приведення до канонічного вигляду:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -N \\ 0 & 2 & 2 & N \\ N & -2 & -3 & -2 \\ 0 & N & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad б) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & N & N & 0 \\ 3 & 2 & N & 3 \\ N & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & N \end{pmatrix}; \quad в) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & N & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ N & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Розв'язати матричні рівняння

$$a) \begin{pmatrix} N & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -N & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} N & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad б) \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & N \\ N & -3 & -2 \\ -5 & 2 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & N & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Практичне заняття № 5. МАТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Поняття про систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Сумісні та несумісні, визначені та невизначені системи. Матрична форма запису системи. Матричний метод розв'язання системи. Абсолютна та відносна точність розв'язання системи. Оцінка точності розв'язання системи за допомогою нев'язки.

*Література:* [1, с. 22-23, 2, с. 70-77].

### Домашнє завдання № 5.

**Задача 1.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою матричного методу. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого рішення.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} N & -13 & -18 & 9 \\ 17 & -2 & N-13 & 6 \\ -5 & N-4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою матричного методу. Для перевірки знайти точний розв'язок системи за допомогою оператора **solve** системи комп'ютерної алгебри **Maple** та визначити абсолютну й відносну похибки розв'язку системи матричним методом. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого розв'язку. Порівняти значення нев'язок та абсолютних похибок.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 100000 \cdot N & -10 \cdot N & 80 \cdot N & 1.7 & -16 \\ -1 & 2000 \cdot N & -5 & -1.6 & -17 \\ 18 \cdot N & -16 & -100 \cdot N & -1.5 & -4 \\ -4 & 15 & -11 & -0.7 & 5 \end{pmatrix}$$

## Практичне заняття № 6. МЕТОД КРАМЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Теорема Крамера. Знаходження загального розв'язку виродженої невизначеної системи методом Крамера. Приклад.

*Література:* [1, с. 25-26, 2, с. 70-77].

### Домашнє завдання № 6.

**Задача 1.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою метода Крамера. Для кожного рівняння визначити нев'язку й оцінити точність отриманого рішення.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} N & -12 & -10 & 4 \\ N-4 & -10 & 19 & 2 \\ N+11 & -11 & 13 & -19 \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою метода Крамера. Для перевірки знайти точний розв'язок системи за допомогою оператора **solve** системи комп'ютерної алгебри **Maple** та визначити абсолютну й відносну похибки. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого розв'язку. Порівняти значення нев'язок та абсолютних похибок.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 100000 \cdot N & -10 \cdot N & 80 \cdot N & 1.7 & 16 \\ -1 & 2000 \cdot N & 5 & 1.6 & -17 \\ 18 \cdot N & 16 & 100 \cdot N & -1.5 \cdot N & -4 \\ 4 & 15 \cdot N & -11 & -0.7 & 5 \end{pmatrix}$$

## Практичне заняття № 7. МЕТОД ГАУСА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Схема єдиного ділення. Схема з вибором головного елемента. Табличний варіант метода Гауса.

*Література:* [1, с. 26-29, 2, с. 55-70].

### Домашнє завдання № 7.

**Задача 1.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою метода Гауса. Для кожного рівняння визначити нев'язку і оцінити точність отриманого рішення.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 11 \\ N - 18 & -8 & N - 9 & 10 \\ N + 17 & N + 10 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Розв'язати систему рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою метода Гауса. Для перевірки знайти точний розв'язок системи за допомогою оператора **solve** системи комп'ютерної алгебри **Maple** та визначити абсолютну й відносну похибки розв'язку системи. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого розв'язку. Порівняти значення нев'язок та абсолютних похибок.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 100000 \cdot N & -10 \cdot N & 80 \cdot N & -1.7 & 16 \\ -1 & 2000 \cdot N & -5 & 1.6 & -17 \\ 18 \cdot N & -16 & 100 \cdot N & -1.5 \cdot N & -4 \\ -4 & 15 \cdot N & -11 & -0.7 & 5 \end{pmatrix}$$

## Практичне заняття № 8. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДОВІЛЬНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Ранг матриці. Поняття базисного мінору. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з довільною прямокутною матрицею. Теорема Кронекера-Капелі. Базисні розв'язки. Перший спосіб знаходження загального розв'язку системи.

*Література:* [1, с. 20-25, 2, с. 56-70].

### Домашнє завдання № 8.

**Задача 1.** Система лінійних алгебраїчних рівнянь задана розширеною матрицею коефіцієнтів.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 100000.9 \cdot N & -10.3 \cdot N & 80.3 \cdot N & -1.7 & 16.5 \\ -0.1 & 2000.7 \cdot N & -5.2 & -1.6 & -17.4 \\ 18.7 \cdot N & -16.3 & -100.3 \cdot N & -1.5 \cdot N & -4.2 \\ -4.3 & 15.1 \cdot N & -11.7 & -0.7 & 5.1 \end{pmatrix}$$

Знайти першу, другу і третю норми матриці коефіцієнтів та число обумовленості матриці А. Знайти розв'язок системи рівнянь методом Гауса-Жордана. Обчислення проводити з точністю 5 знаків після десяткової коми. Для кожного рівняння визначити нев'язку та оцінити точність отриманого рішення. Виконати два кроки процедури уточнення коренів.

**Задача 2.** Визначити сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою теореми Кронекера-Капелі.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 \cdot N & -5 & 15 & 6 \cdot N \\ 20 & -40 & 30 & -20 & 60 & 43 \cdot N \\ 30000 & -60000 & 45000 & -30001 & 90001 & 65000 \cdot N \end{pmatrix}$$

У разі сумісності системи знайти загальний розв'язок методом Гауса-Жордана. Обчислення проводити з п'ятьма десятковими знаками після коми. Записати загальний розв'язок у матричному вигляді. Знайти два довільних часткових розв'язки системи. Визначити нев'язки та оцінити точність знайдених часткових розв'язків.

## Практичне заняття № 9. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДОВІЛЬНИХ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

*Короткі теоретичні відомості.*

Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи. Загальне рішення однорідної системи. Неоднорідна система. Часткове рішення неоднорідної системи. Другий спосіб знаходження загального розв'язку довільної неоднорідної системи.

*Література:* [1, с. 29-30, 2, с. 77-87].



### Домашнє завдання № 9.

**Задача 1.** Система лінійних алгебраїчних рівнянь задана розширеною матрицею коефіцієнтів.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot N & 4 \cdot N & N & 2 \cdot N & 3 \cdot N & 3 \cdot N \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 \cdot N & 5 & 9 - 3 \cdot N \end{pmatrix}$$

Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи та загальний розв'язок однорідної системи. Знайти частковий розв'язок неоднорідної системи. Записати у векторному вигляді формулу загального розв'язку заданої неоднорідної системи рівнянь.

**Задача 2.** Визначити сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що задана розширеною матрицею, за допомогою теореми Кронекера-Капелі.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 & N \\ 6 & 9 & 11 & N+3 & 3N+5 \\ 4 & 4 & 13 & 6 & 2N+2 \\ 2 & -1 & 10 & 5-N & N-3 \\ 8 & 11 & 15 & N+4 & 4N+5 \end{pmatrix}$$

У разі сумісності системи знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи та загальний розв'язок однорідної системи. Знайти частковий розв'язок неоднорідної системи. Записати у векторному вигляді формулу загального розв'язку заданої неоднорідної системи рівнянь. З використанням отриманої формули знайти два довільні часткові розв'язки неоднорідної системи. Визначити нев'язки та оцінити точність знайдених часткових розв'язків.

### Практичне заняття № 10. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - I (Лінійні операції над векторами)

*Короткі теоретичні відомості.*

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Системи координат. Проекції вектора. Розкладання вектора по ортам системи координат. Координати вектора, що заданий точками. Довжина вектора.

*Література:* [1, с. 20-25, 2, с. 56-70].

### Домашнє завдання № 10.

Розв'язати задачі згідно з варіантом вручну та з використанням системи Maple.

Номер варіанту	Задачі
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, 109, 113, 117	10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6
2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 90, 94, 98, 102, 106, 110, 114, 118	10.7, 10.8, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75, 79, 83, 87, 91, 95, 99, 103, 107, 111, 115, 119	10.13, 10.14, 10.15, 10.16, 10.17, 10.18
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100, 104, 108, 112, 116, 120	10.19, 10.20, 10.21, 10.22, 10.23, 10.24

**10.1.** У системі координат  $Oxy$  задати (графічно) два довільні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . По цих векторах побудувати графічно такі вектори:

a)  $\left(\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}\right)$ ; б)  $4\vec{a} + \vec{b}$ ; в)  $2 \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ; г)  $\frac{3}{4}(\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{4}(\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a} - \vec{b}$ .

**10.2.** Задані два довільні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Визначити, чи будуть колінеарними вектори  $\vec{c} = \vec{a} - 2\sqrt{3} \cdot \vec{b}$  та  $\vec{d} = -\sqrt{3} \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b}$ .

**10.3.** Дано:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$ . Знайти  $|\vec{a} + \vec{b}|$  і  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**10.4.** У трикутнику ABC: M – точка перетину медіан трикутника,  $AM = \vec{a}$ ,  $AC = \vec{b}$ . Розкласти AB та BC по векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**10.5.** У паралелограмі ABCD: K і M – середини сторін BC і CD,  $AK = \vec{a}$ ,  $AC = \vec{b}$ . Виразити вектори BD і AD через  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**10.6.** Задані координати трьох послідовних вершин паралелограму A(1; -2; 3), B(3; 2; 1), C(4; 4; 4). Знайти координати його четвертої вершини D.

**10.7.** Заданий розклад вектора  $\vec{c}$  по базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :  $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ . Знайти розклад по цьому ж базису вектора  $\vec{d}$ , який паралельний вектору  $\vec{c}$  та протилежний йому за напрямом, за умови, що  $|\vec{d}| = 75$ .

**10.8.** ABCDEF – правильний шестикутник,  $AB = \vec{p}$ ,  $BC = \vec{q}$ . Виразити через  $\vec{p}$  та  $\vec{q}$  вектори CD, DE, EF, FA, AC, AD, AE.

**10.9.** Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  утворюють кут  $\varphi = 60^\circ$ , при цьому  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 8$ . Знайти  $|\vec{a} + \vec{b}|$  і  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**10.10.** На площині  $Oxy$  побудувати вектори  $OA = \vec{a} = 2\vec{i}$ ,  $OB = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $OC = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Розкласти вектор  $\vec{c}$  по векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**10.11.** Даний вектор  $\vec{c} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$ . Знайти вектор  $\vec{d}$ , який паралельний вектору  $\vec{c}$  та протилежний йому за напрямом, за умови, що  $|\vec{d}| = 27$ .

**10.12.** Знайти вектор  $\vec{x}$ , який колінеарний вектору  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ , утворює з ортом  $\vec{j}$  гострий кут та має довжину  $|\vec{x}| = 15$ .

**10.13.** Задані вектори  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ . Знайти:

а) координати орта  $\vec{a}^0$ ;

б) координати вектора  $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ ;

в) розклад вектора  $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$  по базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ;

г) проекцію  $\text{Pr}_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b})$ .

**10.14.** Відомі радіус-вектори  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  трьох послідовних вершин паралелограму. Знайти радіус-вектор його четвертої вершини.

**10.15.** Дані радіус-вектори вершин трикутника ABC:  $r_A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $r_B = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $r_C = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ . Показати, що трикутник рівносторонній.

**10.16.** Радіус-вектор точки M утворює з віссю  $Ox$  кут  $60^\circ$ , а з віссю  $Oz$  – кут  $45^\circ$ ; довжина радіус-вектора  $|\vec{r}| = 8$ . Знайти координати точки M, якщо її абсциса від'ємна.

**10.17.** Чи можуть вектори  $\vec{a} = (-2, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (-2, -4, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 3, -2)$  бути сторонами трикутника?

**10.18.** Чи може вектор утворювати з координатними осями кути  $30^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ ?

**10.19.** Три вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  попарно перпендикулярні, а їхні довжини дорівнюють, відповідно, 2, 3 та 6. Знайти довжину суми S цих векторів та напрямні косинуси вектора S.

**10.20.** Три сили  $F_1, F_2, F_3$  прикладені до однієї точки та мають взаємно перпендикулярні напрями. Знайти величину їх рівнодіючої сили, якщо відомі величини сил:  $|F_1|=2$ ,  $|F_2|=10$ ,  $|F_3|=11$ .

**10.21.** Знайти рівнодіючу силу R сил  $F_1$  та  $F_2$ , а також кути  $\alpha$  та  $\beta$ , які утворює сила R з силами  $F_1$  та  $F_2$ , якщо  $|F_1|=15$ ,  $|F_2|=10$ , а кут між силами  $F_1$  та  $F_2$  дорівнює  $45^\circ$ .

**10.22.** Знайти напрям та швидкість вітру, що є результатом взаємодії морського бризу, що дме зі швидкістю 14 м/с на берег, та вітру, що дме з берега на море зі швидкістю 9 м/с під кутом  $60^\circ$  до берегової лінії.

**10.23.** Якій умові повинні задовольняти вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  в тривимірному просторі, щоб з них можна було утворити трикутник?

**10.24.** У трикутнику  $ABC$  пряма  $AM$  є бісектрисою кута  $BAC$ , причому точка  $M$  лежить на стороні  $BC$ . Знайти вектор  $AM$ , якщо вектор  $AB = \vec{b}$ , вектор  $AC = \vec{c}$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 1$ .

### Практичне заняття № 11. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - II (Скалярний добуток)

*Короткі теоретичні відомості.*

Скалярний добуток векторів та його властивості. Застосування скалярного добутку для обчислення кута між векторами. Векторний добуток векторів та його властивості.

*Література:* [1, с. 38-41, 2, с. 101-106].

### Домашнє завдання № 11.

**1.** Задані вектори  $\vec{a} = (N - 40; N - 25)$  і  $\vec{b} = (N - 60; N - 30)$ . Знайти координати векторів: 1)  $\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$ , 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ , 3)  $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ , 4)  $2\vec{b} - \vec{a}$ .

**2.** Знайти довжину вектора  $AB$ , якщо точки  $A$  і  $B$  задані своїми координатами:

1)  $A(1, 30 - N)$ ;  $B(-1, 20 - N)$ ; 2)  $A(0, -2N)$ ;  $B(4N, 1)$ ;

3)  $A(1, 20 - N, 7)$ ;  $B(1, -1, 60 - N)$ ; 4)  $A(3, 2N, 2)$ ;  $B(4, N, 1)$ .

**3.** Знайти координати вектора  $AB$ , якщо задані координати точок  $A$  і  $B$ :

1)  $A(2, N)$ ,  $B(N, 3)$ ; 2)  $A(-N, 2)$ ,  $B(-N, 3)$ ;

3)  $A(3, 2, N)$ ,  $B(1, N, N)$ ; 4)  $A(-2, 3, 60 - N)$ ,  $B(3, 3, -60 - N)$ .

**4.** Знайти координати точки  $B$ , якщо задані точка  $A$  і вектор  $\vec{AB}$ :

1)  $A(3, 5, N)$ ,  $\vec{AB} = (-2, N, 1)$ ; 2)  $A(0, -N, 3)$ ,  $\vec{AB} = (3, 4, -N)$ ;

3)  $A(-N, 0, 3)$ ,  $\vec{AB} = (60 - N, 0, 30)$ ; 4)  $A(N, N, 10)$ ,  $\vec{AB} = (-3, 40 - N, 21)$ .

**5.** Задані точки  $A(N, 3, 5)$ ,  $B(2, -1, N)$ ,  $C(-2, 2, 40 - N)$ .

Перевірити справедливість рівності  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

**6.** Обчислити напрямні косинуси векторів:

$$\vec{a} = (-3, 40 - N); \vec{b} = (2, -2, N); \vec{c} = (40 - N, -2, -4).$$

**7.** Знайти координати векторів  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $-\vec{a} + 4\vec{b}$ , якщо:

1)  $\vec{a} = (2, -N, 3)$ ;  $\vec{b} = (2, 4, 40 - N)$ ; 2)  $\vec{a} = (0, -3, N)$ ;  $\vec{b} = (0, -2, 40 - N)$ ;

3)  $\vec{a} = (N, 1, 3)$ ;  $\vec{b} = (2, 60 - N, 2)$ ; 4)  $\vec{a} = (0, N, 20)$ ;  $\vec{b} = (N, -1, -N)$ .

**8.** Визначити, при якому значенні  $\alpha$  вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  будуть колінеарними:

1)  $\vec{a} = (N, 2, -2)$ ;  $\vec{b} = (-3N, \alpha, 6)$ ; 2)  $\vec{a} = (2N, \alpha, -8)$ ;  $\vec{b} = (-N, 6, 4)$ ;

$$3) \vec{a} = (N, 2, 3); \quad \vec{b} = (\alpha, 4, 6); \quad 4) \vec{a} = (N, 2\alpha, 5); \quad \vec{b} = (-N, 2, -5).$$

9. Знайти скалярний добуток векторів, якщо задані їх довжина та кут між векторами:

$$1) |\vec{a}| = 2N, \quad |\vec{b}| = 3N, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad 2) |\vec{a}| = 50 - N, \quad |\vec{b}| = 60 - N, \quad \varphi = 0;$$

$$3) |\vec{a}| = N, \quad |\vec{b}| = 40, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}; \quad 4) |\vec{a}| = 30 - N, \quad |\vec{b}| = 100 - N, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

10. Відомі довжина векторів  $|\vec{a}| = N$ ,  $|\vec{b}| = N$  та кут  $\varphi = 45^\circ$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Знайти скалярні добутки:

$$1) (\vec{a}, \vec{a}); \quad 2) (-3\vec{b}, \vec{b});$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}); \quad 4) (2\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{b} - 3\vec{a}).$$

11. Обчислити скалярні добутки заданих векторів:

$$1) \vec{a} = (2, -N); \quad \vec{b} = (3, 2); \quad 2) \vec{a} = (N, 3, 3); \quad \vec{b} = (2, -1, N);$$

$$3) \vec{a} = (2, 0, -N); \quad \vec{b} = (4, 7, 2); \quad 4) \vec{a} = (-6, N, 10); \quad \vec{b} = (2, -3, -N).$$

12. Обчислити кут між векторами:

$$1) \vec{a} = (4, 3); \quad \vec{b} = (-6, N); \quad 2) \vec{a} = (N, 0, -1); \quad \vec{b} = (2, 5, 3);$$

$$3) \vec{a} = (4, 2, 4); \quad \vec{b} = (-2, 2, N); \quad 4) \vec{a} = (1, 5, N); \quad \vec{b} = (-N, -5, -1).$$

13. Знайти кути трикутника ABC, якщо задані координати його вершин:

$$1) A(5, 2, 60 - N); \quad B(3, N, 4); \quad C(2, -N, 60 - N);$$

$$2) A(1, 2, N); \quad B(3, -N, 7); \quad C(N, 4, -2).$$

14. Обчислити модуль векторного добутку  $|\left[ \vec{a}, \vec{b} \right]|$ , якщо задані довжина векторів і кут між ними:

$$1) |\vec{a}| = 3N; \quad |\vec{b}| = 6; \quad \varphi = \frac{\pi}{6}; \quad 2) |\vec{a}| = 2N; \quad |\vec{b}| = 3; \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$3) |\vec{a}| = 4; \quad |\vec{b}| = N; \quad (\vec{a}, \vec{b}) = -20; \quad 4) |\vec{a}| = N; \quad |\vec{b}| = 3; \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 3.$$

15. Обчислити векторні добутки  $\left[ \vec{a}, \vec{b} \right]$  і  $\left[ \vec{b}, \vec{a} \right]$ , якщо задані вектори:

$$1) \vec{a} = (3, N, -1); \quad \vec{b} = (2, 1, N); \quad 2) \vec{a} = (5, 0, N); \quad \vec{b} = (-1, N, -1);$$

$$3) \vec{a} = (N, 2, 0); \quad \vec{b} = (0, 3, N); \quad 4) \vec{a} = (0, N, 0); \quad \vec{b} = (-N, 0, -N).$$

**Практичне заняття № 12. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - III (Трикутник)**

*Короткі теоретичні відомості.*

Векторний добуток векторів та його властивості. Застосування векторного добутку для знаходження площі трикутника. Розв'язання трикутника за допомогою метода координат.

Література: [1, с. 41-45, 2, с. 106-111].

### Домашнє завдання № 12.

Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин. Знайти:

- довжину висоти СН трикутника;
- косинус кута А трикутника;
- косинус кута  $\phi$  між висотою СН і медіаною ВF;
- площу трикутника;
- розклад вектора  $\overline{CH}$  по базису  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ .

Координати вершин А, В, С задаються відповідно до варіанта:

Варіант 1.	A ( - 6 ; -12 ) ;	B ( 1 ; 12 )	C ( 12 ; - 1 ) .
Варіант 2.	A ( - 6 ; -11 ) ;	B ( 1 ; 11 )	C ( 12 ; - 2 ) .
Варіант 3.	A ( - 7 ; -12 ) ;	B ( 2 ; 12 )	C ( 11 ; - 3 ) .
Варіант 4.	A ( - 7 ; -10 ) ;	B ( 2 ; 10 )	C ( 11 ; - 4 ) .
Варіант 5.	A ( - 8 ; -10 ) ;	B ( 3 ; 10 )	C ( 10 ; - 5 ) .
Варіант 6.	A ( - 8 ; - 8 ) ;	B ( 3 ; 9 )	C ( 10 ; - 6 ) .
Варіант 7.	A ( - 9 ; - 9 ) ;	B ( 4 ; 9 )	C ( 9 ; - 7 ) .
Варіант 8.	A ( - 9 ; - 7 ) ;	B ( 4 ; 8 )	C ( 9 ; - 8 ) .
Варіант 9.	A ( -10 ; - 7 ) ;	B ( 5 ; 8 )	C ( 8 ; - 9 ) .
Варіант 10.	A ( -10 ; - 6 ) ;	B ( 5 ; 7 )	C ( 8 ; - 9 ) .
Варіант 11.	A ( -10 ; - 5 ) ;	B ( 5 ; 6 )	C ( 7 ; -10 ) .
Варіант 12.	A ( -10 ; - 4 ) ;	B ( 5 ; 5 )	C ( 7 ; -11 ) .
Варіант 13.	A ( - 9 ; - 3 ) ;	B ( 6 ; 4 )	C ( 6 ; -12 ) .
Варіант 14.	A ( - 9 ; - 2 ) ;	B ( 6 ; 3 )	C ( 6 ; - 1 ) .
Варіант 15.	A ( - 8 ; - 1 ) ;	B ( 7 ; 2 )	C ( 5 ; - 2 ) .
Варіант 16.	A ( - 8 ; 0 ) ;	B ( 7 ; 1 )	C ( 5 ; - 3 ) .
Варіант 17.	A ( - 7 ; 1 ) ;	B ( 8 ; 0 )	C ( 4 ; - 4 ) .
Варіант 18.	A ( - 7 ; 2 ) ;	B ( 8 ; - 1 )	C ( 4 ; - 5 ) .
Варіант 19.	A ( - 6 ; 3 ) ;	B ( 9 ; - 2 )	C ( 3 ; - 6 ) .
Варіант 20.	A ( - 6 ; 4 ) ;	B ( 10 ; - 3 )	C ( 3 ; - 7 ) .
Варіант 21.	A ( - 5 ; 5 ) ;	B ( 10 ; - 4 )	C ( 2 ; - 8 ) .
Варіант 22.	A ( - 5 ; 5 ) ;	B ( 10 ; - 5 )	C ( 2 ; - 9 ) .
Варіант 23.	A ( - 4 ; 5 ) ;	B ( 9 ; - 6 )	C ( 1 ; - 9 ) .
Варіант 24.	A ( - 4 ; 6 ) ;	B ( 9 ; - 7 )	C ( 1 ; -10 ) .
Варіант 25.	A ( - 3 ; 7 ) ;	B ( 8 ; - 8 )	C ( 0 ; -11 ) .
Варіант 26.	A ( - 3 ; 8 ) ;	B ( 8 ; - 9 )	C ( 0 ; -12 ) .
Варіант 27.	A ( - 2 ; 9 ) ;	B ( 7 ; - 9 )	C ( 2 ; -12 ) .
Варіант 28.	A ( - 2 ; 10 ) ;	B ( 6 ; -10 )	C ( 2 ; -10 ) .
Варіант 29.	A ( - 1 ; 11 ) ;	B ( 5 ; -11 )	C ( 4 ; - 8 ) .
Варіант 30.	A ( - 1 ; 12 ) ;	B ( 4 ; -12 )	C ( 4 ; - 5 ) .

### Практичне заняття № 13. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

*Короткі теоретичні відомості.*

Лінія на площині та її рівняння. Пряма на площині. Різновиди рівняння прямої на площині. Використання різних видів рівняння прямої для розв'язання трикутника.  
*Література:* [1, с. 53-62, 2, с. 126-146].

#### Домашнє завдання № 13.

Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин. Записати рівняння:

- а) сторони АВ;
- б) медіани АМ;
- в) висоти ВD;
- г) бісектриси кута В трикутника;
- д) кола, що проходить через усі вершини трикутника.

*Координати вершин А, В, С задаються відповідно до варіанта:*

Варіант 1.	$A(-6; -12);$	$B(1; 12)$	$C(12; -1).$
Варіант 2.	$A(-6; -11);$	$B(1; 11)$	$C(12; -2).$
Варіант 3.	$A(-7; -12);$	$B(2; 12)$	$C(11; -3).$
Варіант 4.	$A(-7; -10);$	$B(2; 10)$	$C(11; -4).$
Варіант 5.	$A(-8; -10);$	$B(3; 10)$	$C(10; -5).$
Варіант 6.	$A(-8; -8);$	$B(3; 9)$	$C(10; -6).$
Варіант 7.	$A(-9; -9);$	$B(4; 9)$	$C(9; -7).$
Варіант 8.	$A(-9; -7);$	$B(4; 8)$	$C(9; -8).$
Варіант 9.	$A(-10; -7);$	$B(5; 8)$	$C(8; -9).$
Варіант 10.	$A(-10; -6);$	$B(5; 7)$	$C(8; -9).$
Варіант 11.	$A(-10; -5);$	$B(5; 6)$	$C(7; -10).$
Варіант 12.	$A(-10; -4);$	$B(5; 5)$	$C(7; -11).$
Варіант 13.	$A(-9; -3);$	$B(6; 4)$	$C(6; -12).$
Варіант 14.	$A(-9; -2);$	$B(6; 3)$	$C(6; -1).$
Варіант 15.	$A(-8; -1);$	$B(7; 2)$	$C(5; -2).$
Варіант 16.	$A(-8; 0);$	$B(7; 1)$	$C(5; -3).$
Варіант 17.	$A(-7; 1);$	$B(8; 0)$	$C(4; -4).$
Варіант 18.	$A(-7; 2);$	$B(8; -1)$	$C(4; -5).$
Варіант 19.	$A(-6; 3);$	$B(9; -2)$	$C(3; -6).$
Варіант 20.	$A(-6; 4);$	$B(10; -3)$	$C(3; -7).$
Варіант 21.	$A(-5; 5);$	$B(10; -4)$	$C(2; -8).$
Варіант 22.	$A(-5; 5);$	$B(10; -5)$	$C(2; -9).$
Варіант 23.	$A(-4; 5);$	$B(9; -6)$	$C(1; -9).$
Варіант 24.	$A(-4; 6);$	$B(9; -7)$	$C(1; -10).$
Варіант 25.	$A(-3; 7);$	$B(8; -8)$	$C(0; -11).$
Варіант 26.	$A(-3; 8);$	$B(8; -9)$	$C(0; -12).$
Варіант 27.	$A(-2; 9);$	$B(7; -9)$	$C(2; -12).$
Варіант 28.	$A(-2; 10);$	$B(6; -10)$	$C(2; -10).$
Варіант 29.	$A(-1; 11);$	$B(5; -11)$	$C(4; -8).$
Варіант 30.	$A(-1; 12);$	$B(4; -12)$	$C(4; -5).$

## Практичне заняття № 14. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

*Короткі теоретичні відомості.*

Поняття про криві другого порядку. Перетини конічної поверхні. Канонічне рівняння кола. Еліпс та його рівняння. Гіпербола та її рівняння. Парабола та її рівняння.

*Література:* [1, с. 62-75, 2, с. 146-171].

### Домашнє завдання № 14.

Привести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, визначити тип кривої та побудувати її графік. Знайти ексцентриситет, координати фокусів і рівняння директриси. На графіку показати фокуси, директрису та проілюструвати характерну властивість кривої.

*Загальне рівняння кривої другого порядку задається відповідно до варіанта:*

Варіант 1.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
Варіант 2.	$f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$
Варіант 3.	$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 5x - 5y - 5 = 0$
Варіант 4.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
Варіант 5.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$
Варіант 6.	$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 + 40x + 36y = 26$
Варіант 7.	$f(x,y) = 8x^2 + 12y^2 - 40x - 36y = 124$
Варіант 8.	$f(x,y) = 3x^2 + 7y^2 + 42x - 49y = 105$
Варіант 9.	$f(x,y) = 9x^2 + 25y^2 - 90x + 60y = 225$
Варіант 10.	$f(x,y) = 3x^2 + 16y^2 - 72x - 48y = 192$
Варіант 11.	$f(x,y) = 8x^2 + 25y^2 - 48x - 90y + 60 = 0$
Варіант 12.	$f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 + 54x - 40y - 36 = 0$
Варіант 13.	$f(x,y) = 12x^2 + 8y^2 + 72x - 72y + 40 = 0$
Варіант 14.	$f(x,y) = 8x^2 + 6y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
Варіант 15.	$f(x,y) = 45x^2 + 32y^2 - 135x + 96y - 18 = 0$
Варіант 16.	$f(x,y) = 8x^2 - 5y^2 - 48x - 40y = -85$
Варіант 17.	$f(x,y) = 8x^2 - 12y^2 + 40x + 36y = -96$
Варіант 18.	$f(x,y) = 9x^2 - 25y^2 - 54x - 48y = 45$
Варіант 19.	$f(x,y) = 25x^2 - 49y^2 - 70x + 42y = 175$
Варіант 20.	$f(x,y) = 25x^2 - 36y^2 + 200x + 72y = -150$
Варіант 21.	$f(x,y) = 5y^2 - 8x^2 - 48x - 40y - 85 = 0$
Варіант 22.	$f(x,y) = 7y^2 - 12x^2 - 54x + 56y - 252 = 0$
Варіант 23.	$f(x,y) = 9y^2 - 16x^2 + 50x - 100y + 25 = 0$
Варіант 24.	$f(x,y) = 8y^2 - 5x^2 - 4x + 10y - 319 = 0$
Варіант 25.	$f(x,y) = 5y^2 - 30x^2 - 6x + 32y = 0$
Варіант 26.	$f(x,y) = y^2 - 12y - 4x + 48 = 0$
Варіант 27.	$f(x,y) = 2y^2 + 4y - x + 1 = 0$
Варіант 28.	$f(x,y) = 2x^2 - 6x - y + 7 = 0$
Варіант 29.	$f(x,y) = 5y - y^2 - x = 0$
Варіант 30.	$f(x,y) = 4x^2 - 8x - y + 3 = 0$



## Практичне заняття № 15. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Короткі теоретичні відомості.

Числові функції. Способи завдання функції. Графіки функцій. Основні елементарні функції та їх властивості. Поняття про екстремуми та асимптоти функції. Пошук екстремуму функції чисельним методом поділу відрізка навпіл.

Література: [1, с. 101-107, 2, с. 225-245].

### Домашнє завдання № 15.

**Задача 1.** Побудувати графіки наведених нижче основних елементарних функцій та описати їх властивості за схемою:

- |                               |                            |
|-------------------------------|----------------------------|
| а) Область визначення функції | б) Область значень функції |
| б) Парність або непарність    | в) Періодичність та період |
| г) Корні (або нулі) функції   | д) Інтервали монотонності  |
| д) Екстремуми функції         | е) Асимптоти функції       |

**1. Степенева функція** вигляду  $y = x^\alpha$ . В залежності від значення показника степеня  $\alpha$  можливі наступні випадки:

- |                                   |                           |                                   |                              |
|-----------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1.1. При $\alpha = 0$             | $y = x^0 = 1;$            | 1.2. При $\alpha = 1$             | $y = x;$                     |
| 1.3. При $\alpha = 2$             | $y = x^2;$                | 1.4. При $\alpha = 3$             | $y = x^3;$                   |
| 1.5. При $\alpha = \frac{1}{2}$   | $y = x^{\frac{1}{2}};$    | 1.6. При $\alpha = \frac{1}{3}$   | $y = x^{\frac{1}{3}};$       |
| 1.7. При $\alpha = \frac{1}{3}$   | $y = x^{\frac{1}{3}};$    | 1.8. При $\alpha = -1$            | $y = \frac{1}{x};$           |
| 1.9. При $\alpha = -2$            | $y = \frac{1}{x^2};$      | 1.10. При $\alpha = -3$           | $y = \frac{1}{x^3};$         |
| 1.11. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ | $y = \frac{1}{\sqrt{x}};$ | 1.12. При $\alpha = -\frac{1}{3}$ | $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$ |

**2. Показникова функція** вигляду  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ;  $a \neq 1$ . В залежності від значення основи степеня  $a$  можливі наступні випадки:

- |                  |            |                      |            |
|------------------|------------|----------------------|------------|
| 2.1. При $a > 1$ | $y = a^x;$ | 2.2. При $0 < a < 1$ | $y = a^x.$ |
|------------------|------------|----------------------|------------|

**3. Логарифмічна функція** вигляду  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ;  $a \neq 1$ . В залежності від значення основи логарифма  $a$  можливі наступні випадки:

- |                  |                 |                      |                 |
|------------------|-----------------|----------------------|-----------------|
| 3.1. При $a > 1$ | $y = \log_a x;$ | 3.2. При $0 < a < 1$ | $y = \log_a x.$ |
|------------------|-----------------|----------------------|-----------------|

**4. Тригонометричні функції:**

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 4.1. $y = \sin x;$              | 4.2. $y = \cos x$               |
| 4.3. $y = \operatorname{tg} x;$ | 4.4. $y = \operatorname{ctg} x$ |

## 5 *Обернені тригонометричні функції:*

5.1.  $y = \arcsin x$ ;

5.2.  $y = \arccos x$

5.3.  $y = \operatorname{arctg} x$ ;

5.4.  $y = \operatorname{arcctg} x$

**Задача 2.** Знайти глобальний мінімум функції  $f(x)$  з точністю  $\varepsilon = 0,1$  на інтервалі  $[a, b]$  методом поділу відрізка навпіл. Обчислення оформити у вигляді таблиці:

№ шага	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$\Delta = x_4 - x_0$

Побудувати графік заданої функції та нанести на нього всі точки локального мінімуму. Визначити чи є знайдене чисельним методом значення глобальним або локальним мінімумом функції на заданому інтервалі.

Вид функції  $f(x)$  задається в таблиці залежно від номера варіанта.

Варіант	$f(x)$	a	b
1	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 139x^2 + 438x + 2160$	-7	+13
2	$f(x) = x^4 - 11x^3 - 126x^2 + 344x + 1088$	-7	+13
3	$f(x) = x^4 - 7x^3 - 21x^2 + 367x + 440$	-7	+13
4	$f(x) = x^4 - 14x^3 - 43x^2 + 644x - 588$	-7	+13
5	$f(x) = x^4 - 17x^3 + 2x^2 + 644x - 1176$	-7	+13
6	$f(x) = x^4 - 18x^3 - 19x^2 + 1152x - 2880$	-7	+13
7	$f(x) = x^4 - 25x^3 + 32x^2 + 1648x - 5760$	-7	+23
8	$f(x) = x^4 - 26x^3 + 89x^2 + 1340x - 6300$	-7	+13
9	$f(x) = x^4 - 26x^3 + 124x^2 + 936x - 5760$	-7	+13
10	$f(x) = x^4 - 25x^3 + 125x^2 + 625x - 3750$	-7	+13
11	$f(x) = x^4 + x^3 - 94x^2 + 56x + 960$	-8	+12
12	$f(x) = x^4 + x^3 - 102x^2 + 40x + 1600$	-8	+12
13	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 103x^2 - 195x + 1350$	-8	+12
14	$f(x) = x^4 - 97x^2 - 84x + 540$	-8	+12
15	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 73x^2 + 88x + 420$	-8	+12
16	$f(x) = x^4 - 8x^3 - 55x^2 + 54x + 120$	-6	+14
17	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 22x^2 + 288x - 288$	-6	+14
18	$f(x) = x^4 - 14x^3 - x^2 + 350x - 600$	-6	+14
19	$f(x) = x^4 - 17x^3 + 25x^2 + 441x - 1170$	-6	+14
20	$f(x) = x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 328x - 672$	-6	+14
21	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 112x^2 + 160x + 768$	-10	+10
22	$f(x) = x^4 + x^3 - 113x^2 + 75x + 1188$	-10	+10
23	$f(x) = x^4 + x^3 - 121x^2 + 59x + 1980$	-10	+10
24	$f(x) = x^4 - 79x^2 + 66x + 432$	-10	+10
25	$f(x) = x^4 - x^3 - 76x^2 + 4x + 288$	-10	+10
26	$f(x) = x^4 - 5x^3 - 90x^2 + 200x + 704$	-10	+10
27	$f(x) = x^4 - 8x^3 - 85x^2 + 404x + 480$	-10	+10
28	$f(x) = x^4 - 15x^3 - 22x^2 + 540x - 504$	-10	+10
29	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 28x^2 + 384x - 576$	-10	+10
30	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 27x^2 + 378x - 648$	-10	+10

### 3. ЛІТЕРАТУРА

#### Базові підручники

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2007. – 288 с.
2. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. I курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М. : Айрис-Пресс, 2007. – 576 с.

#### Основна література

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. Ч.1.: Учебн. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2009. – 368 с.
4. Дутка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
5. Булах Е.Г. Высшая математика для начинающих. Математика до анализа бесконечно малых. – Киев: Наукова думка, 2002, 264 с.
6. Овчинников П. П. Вища математика : підручник : у 2 ч. – Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников та ін. – К. : Техніка, 2000. – 592 с.

#### Додаткова література

7. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі : посібник для студентів вищих навч. закладів / М. К. Бугір. – К. : Академія, 1998. – 272 с.
8. Вірченко Н. О. Графіки елементарних та спеціальних функцій : довідник / Н. О. Вірченко, І. І. Ляшко. – К. : Наук. думка, 1996. – 584 с.
9. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища шк., 1993. – 648 с.: іл.
10. Крынский Х. З. Математика для экономистов : пер. с пол. – М. : Статистика, 1970. – 583 с.
11. Стрижак Т. Г. Элементы линейной алгебры та конструктивна теорія визначників : навч. посібник / Т. Г. Стрижак. – К. : Либідь, 1993. – 172 с.

### 4. САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема	Питання для самостійного опрацювання	Форма контролю
1	2	3
1. Система комп'ютерної алгебри <b>Maple</b> .	1. Структура вікна системи <b>Maple</b> . Основне меню. Основні команди системи. 2. Спеціалізовані пакети системи <b>Maple</b> . Основні команди пакету <b>linalg</b> . Основні команди пакету <b>geometry</b> . 3. Особливості побудови графіків функцій. 4. Мова програмування системи <b>Maple</b> . Умовні оператори. Оператори циклів.	Доповіді, розв'язання задач на практичних заняттях, виконання домашніх завдань.

1	2	3
2. Прямі методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.	1. Коректні і некоректні постановки задач. Класифікація коректно поставлених задач. 2. Метод квадратних коренів. Метод ортогоналізації. Метод LU-розкладу. 3. Оцінка достовірності розв'язків, отриманих прямими методами.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді
3. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.	1. Схема застосування ітераційних методів. 2. Метод простої ітерації, метод Зейделя. 3. Умови збіжності ітераційних методів. 4. Достовірність розв'язків, отриманих ітераційними методами	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді
4. Алгебраїчна проблема власних значень.	1. Власні вектори і власні значення матриць. 2. Ортогональні системи векторів. Ортогональні матриці. 3. Методи Якобі, Хаусхолдера, Гівенса, Шварца.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді
5. Аналітична геометрія у просторі.	1. Рівняння поверхні і лінії у просторі. 2. Рівняння площини у просторі. 3. Рівняння прямої у просторі. 4. Циліндричні поверхні. 5. Поверхні обертання та конічні поверхні. 6. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді

## 5. ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА

Індивідуальна робота виконується студентами денної форми навчання і передбачає:

- 1) виконання індивідуальних завдань підвищеної складності для студентів, які бажають підвищити свій рейтинг;
- 2) індивідуальне консультування викладачем студентів з тематики дисципліни.

### *Індивідуальна робота 1. Матриці та визначники.*

*Теоретичні питання.*

Операції над матрицями. Методи обчислення визначників. Ранг матриці. Обернена матриця. Матричні рівняння.

*Задачі.*

1. Знайти значення матричного многочлена  $f(A)$ :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Знайти ранг матриці приведенням до ступеневого вигляду. Вказати базисний мінор.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ 0 & 2 & -13 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

3. Обчислити визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 9 & 6 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Знайти обернену матрицю до заданої матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Розв'язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

## **Індивідуальна робота 2. Системи лінійних рівнянь.**

*Теоретичні питання.*

Дослідження системи лінійних рівнянь за допомогою теореми Кронекера-Капелі. Матричний метод. Метод Гауса. Метод Гауса-Жордана. Метод Крамера. Однорідні та неоднорідні системи лінійних рівнянь.

*Задачі.*

1. Дослідити систему рівнянь на сумісність і визначеність. Вказати головні (базисні) і вільні змінні.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -11 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 13x_1 - 7x_3 - 9x_4 = 35 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса. Вказати загальне і одне часткове рішення.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1 \\ \quad -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

3. Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

4. Розв'язати однорідну систему рівнянь. Вказати загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

### **Індивідуальна робота 3. Векторна алгебра.**

*Теоретичні питання.*

Вектори. Лінійні операції над векторами. Розклад векторів. Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів.

*Задачі.*

1. Задані вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  і кут між ними дорівнює  $120^\circ$ . Побудувати вектор  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - \frac{3}{2} \cdot \vec{b}$  і визначити його довжину, якщо  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ .

2. Перевірити, що чотири точки  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(-1; 1; -3)$  та  $D(3; -5; 3)$  є вершинами трапеції.

3. Задані вектори  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ . Знайти вектор  $\vec{x}$ , якщо відомі скалярні добутки  $(\vec{x}, \vec{a}) = -5$ ,  $(\vec{x}, \vec{b}) = -11$ ,  $(\vec{x}, \vec{c}) = 20$ .

4. В трикутнику з вершинами  $A(4; -14; 8)$ ,  $B(2; -18; 12)$ ,  $C(12; -8; 12)$  знайти довжину висоти, опущеної з вершини  $C$  на сторону  $AB$ .

#### **Індивідуальна робота 4. Аналітична геометрія на площині.**

*Теоретичні питання.*

Метод координат на площині. Пряма на площині. Криві другого порядку.

*Задачі.*

1. Знайти координати центру і радіус кола, яке проходить через точку  $A(-10; 4)$  і дотикається до осі  $Ox$  в точці  $B(-6; 10)$ .
2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку  $(-2; 1)$  на відстані 1 від початку координат.
3. При яких значеннях  $A$  і  $C$  пряма  $Ax + 3y + C = 0$ :
  - а) паралельна прямій  $3x - y + 8 = 0$ ;
  - б) перпендикулярна прямій  $y = 5x$ ;
  - в) проходить через точки  $(2; 2)$  і  $(-1; 4)$ ;
  - г) перетинається з прямою  $4x - 2y + 7 = 0$
4. Знайти площу чотирикутника, у якого дві вершини співпадають з фокусами еліпса  $5x^2 + 9y^2 = 225$ , а дві інші співпадають з кінцями його малої вісі.
5. Знайти довжину діаметру еліпса (тобто хорди, що проходить через центр еліпса)  $9x^2 + 27y^2 = 225$ , який перпендикулярний до асимптоти гіперболи  $x^2 - y^2 = 4$ , що проходить через першу і третю чверті.

### **6. КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ**

Контрольна робота складається з двох розділів: «1. Теоретична частина» та «2. Контрольні завдання». Варіант роботи визначається викладачем.

Контрольна робота виконується на аркушах формату А4. Титульний аркуш друкується на комп'ютері, містить назву навчального закладу, кафедри, курс, групу, прізвище та ініціали студента та відповідає зразку, що наведений в додатку А. Наступні сторінки пишуться студентом від руки, на одному боці аркуша, та нумеруються від титульної до останньої сторінки без пропусків і повторів. На титульній сторінці номер не ставиться.

**Контрольні завдання складаються з наведених в розділі 2.2 домашніх завдань.** Короткі теоретичні відомості по кожному домашньому завданню конспектуються студентом у відповідному розділі теоретичної частини. Кожне домашнє завдання повинне, окрім детального рішення, містити також перевірку.

Виконану контрольну роботу студент подає на перевірку за 2 тижні до початку екзаменаційної сесії. У разі отримання негативної оцінки робота повертається на доопрацювання, після чого виконується повторно і знову подається на перевірку. До здачі заліку або іспиту з дисципліни студент допускається лише за умови отримання позитивної оцінки за контрольну роботу.

## 7. ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

### 1-й модульний контроль.

1. Знайти матрицю  $C = (2A-3E)B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  
а  $E$  – одинична матриця.

2. Знайти матрицю  $C = (2E-B)A$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  
а  $E$  – одинична матриця.

3. Знайти матрицю  $C = (3B-2E)A$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  
а  $E$  – одинична матриця.

4. Знайти матрицю  $C = (2E-B)A$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  
а  $E$  – одинична матриця.

5. Знайти матрицю  $C = B(2A+3E)$  якщо  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  
а  $E$  – одинична матриця.

6. Обчислити визначники наступних матриць:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Обчислити визначники наступних матриць:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Обчислити визначники наступних матриць:



$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Обчислити визначники таких матриць:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Обчислити визначники таких матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

15. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}$$

**2-й модульний контроль.**

17. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

18. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 - 4x_3 = -20 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

19. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 31 \\ 2x_1 - 3x_2 - 1x_3 = -21 \end{cases}$$

20. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 12 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

21. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = -13 \\ x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 11 \end{cases}$$

22. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

23. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

24. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 1x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases}$$

25. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

26. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

27. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом виключення невідомих (методом Гауса):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 0x_3 = -1 \end{cases}$$

28. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом виключення невідомих (методом Гауса):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

29. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом виключення невідомих (методом Гауса):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

30. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом виключення невідомих (методом Гауса):

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 0x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

31. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом виключення невідомих (методом Гауса):

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

**3-й модульний контроль.**

32. Задано три точки  $A(2; 5)$ ;  $B(-4; 7)$ ;  $C(8; 3)$ . Знайти координати та довжину вектора  $\overline{D} = 2\overline{AC} - \overline{AB}$
33. Задано три точки  $A(4; -3)$ ;  $B(4; 9)$ ;  $C(-6; 5)$ . Знайти координати та довжину вектора  $\overline{D} = \overline{AC} + 2\overline{AB}$
34. Задано три точки  $A(6; -7)$ ;  $B(2; 3)$ ;  $C(-4; 1)$ . Знайти координати та довжину вектора  $\overline{D} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$
35. Задано три точки  $A(2; -3)$ ;  $B(4; 3)$ ;  $C(-2; 1)$ . Знайти координати та довжину вектора  $\overline{D} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC}$
36. Задано три точки  $A(2; -3)$ ;  $B(4; 3)$ ;  $C(-2; 1)$ . Знайти скалярний добуток векторів  $\overline{AB}$  та  $\overline{BC}$ .
37. Задано три точки  $A(6; -7)$ ;  $B(2; 3)$ ;  $C(-4; 1)$ . Знайти кут між векторами  $\overline{AB}$  та  $\overline{AC}$ .
38. Задано три точки  $A(4; -3)$ ;  $B(4; 9)$ ;  $C(-6; 5)$ . Знайти кут між векторами  $\overline{BA}$  та  $\overline{BC}$ .
39. Задано три точки  $A(2; 5)$ ;  $B(-4; 7)$ ;  $C(8; 3)$ . Знайти проекцію вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{AC}$ .
40. Задано три точки  $A(0; 3)$ ;  $B(4; 5)$ ;  $C(6; 3)$ . Знайти проекцію вектора  $\overline{BC}$  на вектор  $\overline{BA}$ .
41. Задано точки  $A(2; 5)$ ;  $B(4; 1)$ . Знайти рівняння прямої, що проходить через ці точки та визначити координати точки перетину цієї прямої з прямою  $x = 5$ .
42. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $B(2; 4)$  та нахилена до осі  $Ox$  під кутом  $45^\circ$ .
43. Знайти відстань від точки  $A(4; 5)$  до прямої, що проходить через точки  $B(2; 3)$  та  $C(8; 8)$ .
44. Знайти площу трикутника, вершини якого мають координати  $A(1; 2)$ ;  $B(9; 4)$ ;  $C(3; 8)$ .
45. Знайти рівняння медіани трикутника, вершини якого мають координати  $A(1; 2)$ ;  $B(9; 4)$ ;  $C(3; 8)$ .
46. Визначити тип лінії другого порядку та побудувати графік цієї лінії:  

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$
47. Визначити тип лінії другого порядку та побудувати графік цієї лінії:  

$$5x^2 + 6y^2 + 40x + 36y = 0$$
48. Визначити тип лінії другого порядку та побудувати графік цієї лінії:  

$$x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$$
49. Визначити тип лінії другого порядку та побудувати графік цієї лінії:

$$x^2 + 4y^2 + 8x + 16y - 32 = 0$$

50. Визначити тип лінії другого порядку та побудувати графік цієї лінії:

$$x^2 - 4y^2 - 16x + 16y - 32 = 0$$

51. Побудувати графік елементарної функції:  $y = x \cdot \sin x$

52. Побудувати графік елементарної функції:  $y = x + x^2$

53. Побудувати графік елементарної функції:  $y = x^2 + \frac{1}{x}$

54. Побудувати графік елементарної функції:  $y = \frac{1}{\cos x}$

55. Побудувати графік елементарної функції:  $y = 2x^2 + 5x$

## 8. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ (іспиту)

1. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матриця коефіцієнтів. Розв'язок системи. Види систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Матриці та їх види. Поняття елементарних перетворень матриці.
3. Канонічний вид матриці. Приведення матриці до канонічного виду за допомогою елементарних перетворень. Поняття рангу матриці.
4. Операції додавання матриць та множення матриці на число. Обчислення матричних виразів з цими операціями.
5. Добуток матриць. Некомутативність операції множення матриць. Приклади.
6. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Множення квадратної матриці на діагональну, на трикутну матрицю та на вектор. Множення вектора-рядку на вектор-стовпчик та навпаки.
8. Степінь матриці та її обчислення. Перевірка асоціативності множення при обчисленні степені матриці.
9. Визначник матриці. Обчислення визначників другого та третього порядків. Правило Саруса.
10. Властивості визначників. Вплив на значення визначника операції транспонування та перестановки місцями рядків і стовпців визначника.
11. Поняття мінору  $k$ -го порядку та алгебраїчного доповнення. Обчислення алгебраїчних доповнень до елементів матриці.
12. Обчислення визначників  $n$ -го порядку шляхом розкладання по елементах рядка або стовпця.
13. Метод Крамера розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
14. Застосування елементарних перетворень матриці для обчислення визначника.
15. Поняття оберненої матриці та її властивості.
16. Поняття союзної матриці та правила її обчислення.
17. Поняття матричних рівнянь та методи їх розв'язання.
18. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

19. Властивості операції множення матриць. Асоціативність множення. Приклади.
20. Добуток матриць. Некомутативність операції множення матриць. Приклади.
21. Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
22. Поняття оберненої матриці та її властивості.
23. Аналіз сумісності систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.
24. Загальний випадок системи  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими. Головні та вільні невідомі. Базові розв'язки системи.
25. Множення квадратної матриці на діагональну, на трикутну матрицю та на вектор. Множення вектора-рядка на вектор-стовпчик та навпаки.
26. Обчислення визначників  $n$ -го порядку шляхом розкладання по елементах рядка або стовпця.

Додаток А

*Зразок титульної сторінки  
для домашньої або контрольної роботи*

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

**Кафедра інформаційних технологій  
та економічної кібернетики**

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1  
з дисципліни „Вища математика”**

**Варіант № 12**

Виконав  
Студент гр. ІТ-91  
Ткаченко В.С.

Перевірив  
доцент кафедри ІТЕК  
Гук В.І.

Черкаси 201\_

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
1. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ .....	4
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри .....	4
Тема 1. Матриці та дії над ними .....	4
Тема 2. Визначники квадратних матриць та їх властивості .....	4
Тема 3. Обернена матриця та її властивості .....	4
Тема 4. Розв'язання неособливих систем лінійних алгебраїчних рівнянь .....	4
Тема 5. Рішення систем $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими .....	4
Змістовий модуль 2. Векторна алгебра .....	4
Тема 6. Вектори та операції над ними .....	4
Змістовий модуль 3. Аналітична геометрія .....	4
Тема 7. Аналітична геометрія на площині .....	4
Тема 8. Елементи аналітичної геометрії в просторі .....	4
Змістовий модуль 4. Функції та їх властивості .....	5
Тема 9. Поняття про функції .....	5
2. РОБОЧА ПРОГРАМА .....	5
2.1. Тематика лекцій .....	5
2.2. Тематика семінарських занять та домашні завдання .....	6
Практичне заняття № 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ .....	6
Практичне заняття № 2. МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ .....	7
Практичне заняття № 3. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ .....	9
Практичне заняття № 4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ .....	12
Практичне заняття № 5. МАТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ .....	14
Практичне заняття № 6. МЕТОД КРАМЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ .....	14
Практичне заняття № 7. МЕТОД ГАУСА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ .....	15
Практичне заняття № 8. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДОВІЛЬНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ .....	16
Практичне заняття № 9. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДОВІЛЬНИХ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ .....	16
Практичне заняття № 10. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - I (Лінійні операції над векторами) .....	17
Практичне заняття № 11. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - II (Скалярний добуток) .....	20
Практичне заняття № 12. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА - III (Трикутник) .....	21
Практичне заняття № 13. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ .....	23
Практичне заняття № 14. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ .....	24
Практичне заняття № 15. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ .....	25
3. ЛІТЕРАТУРА .....	27
4. САМОСТІЙНА РОБОТА .....	27
5. ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА .....	28
6. КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ .....	31
7. ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ .....	32
8. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ (іспиту) .....	37