

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

*В. І. Гук*

**ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ**

Методичний посібник

*Для студентів денної та заочної форм навчання  
напряму підготовки 6.030502 „Економічна кібернетика”  
освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”*

Черкаси  
2013

Гук В. І. Теорія випадкових процесів : методичний посібник : для студентів напрямку підготовки 6.030502 „Економічна кібернетика” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” / В. І. Гук. – Черкаси: Східноєвропейський ун-т економіки і менеджменту, 2013. – 45 с. – [Укр. мова.]

Рецензент

*С. М. Одокієнко*, к.т.н., доцент кафедри загальнотехнічних наук Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Відповідальний за випуск

*О. М. Строгалова*

Затверджено методичною радою університету як методичний посібник для студентів напрямку підготовки 6.030502 „Економічна кібернетика” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”, протокол № 5 від 14.02.2012.

## ВСТУП

Навчальна дисципліна „Теорія випадкових процесів” є нормативною навчальною дисципліною, що входить до циклу дисциплін професійної підготовки спеціальності 6.030502 "Економічна кібернетика".

В курсі розглядаються основні теоретичні положення теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування. Вводяться необхідні визначення та математичні поняття, що дозволяють вивчати процеси функціонування систем в динаміці, наводиться класифікація випадкових процесів, формулюються основні математичні задачі, розглядаються шляхи їх розв'язання. Наводяться алгоритми та аналізуються практичні методи отримання рішення поставлених математичних задач. Після вивчення математичних методів в курсі розглядаються можливі застосування введеного математичного апарату для вирішення економічних задач.

В даному курсі розглядаються сучасні підходи до вивчення дисципліни "Теорія випадкових процесів", що засновані на широкому використанні у навчальному процесі елементів інформатики. Традиційні аналітичні методи доповнюються розглядом чисельних методів, орієнтованих на використання ПЕОМ. Студенти привчаються до систематичного практичного використання універсальних математичних комп'ютерних програм Excel, Maple, MatLab та ін., що дозволяють без виконання рутинних математичних перетворень та обчислень отримувати рішення досить складних задач.

*Мета дисципліни* – надати методи аналізу поведінки та розвитку складних економічних систем, які мають елементи невизначеності та непередбачуваності і розвиваються у часі, або просторі з деякою випадковістю.

*Завдання курсу* - формування теоретичних знань і практичних навичок дослідження випадкових процесів в розвитку економічних систем.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні знати:

- класифікацію випадкових процесів;
- дискретні та неперервні випадкові процеси;
- марківські випадкові процеси

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні вміти:

- використовувати інструментарій теорії випадкових процесів для побудови моделей реальних економічних процесів та управління такими процесами.

Вивчення дисципліни базується на таких курсах:

- *вища математика;*
- *теорія ймовірностей та математична статистика.*

Знання, отримані в процесі вивчення дисципліни, використовуються в наступних курсах:

- *імітаційне моделювання;*
- *моделювання економіки;*
- *прогнозування соціально-економічних процесів;*
- *моделювання економічної динаміки.*

## 1. Навчальна програма

### **Змістовний модуль 1. Дискретні випадкові процеси**

#### **Тема 1. Випадкові процеси: основні поняття**

Визначення випадкового процесу. Перерізи.

Елементарні випадкові функції.

Закони розподілу випадкових процесів.

Основні числові характеристики випадкових процесів.

Кореляційна функція випадкового процесу. Нормована кореляційна функція.

*Література:* [1, с. 6-16].

#### **Тема 2. Марковські випадкові процеси із дискретними станами і часом.**

##### **Ланцюги Маркова**

Означення марковського випадкового процесу.

Марковські випадкові процеси з дискретними станами і дискретним часом.

Ланцюги Маркова.

Класифікація станів.

Однорідні ланцюги Маркова.

Імовірнісні графи. Вектор початкового стану системи.

Поглиналильні ланцюги Маркова.

Регулярні ланцюги Маркова.

*Література:* [1, с. 16-58].

#### **Тема 3. Застосування однорідних ланцюгів Маркова**

Імовірнісні моделі із застосуванням поглиналильних ланцюгів Маркова.

Імовірнісна модель грошових потоків та їх стабілізація.

Потокова імовірнісна модель використання добрив.

Відкрита модель Леонтєва.

#### **Тема 4. Застосування регулярних ланцюгів Маркова**

Імовірнісні моделі з використанням регулярних ланцюгів Маркова.

Імовірнісна модель грошових потоків зі збереженням контрольованої урядом грошової маси.

Імовірнісна модель грошових потоків зі збереженням грошової маси та вибіркоким втручанням уряду.

Імовірнісна модель роботи системи з обмеженою кількістю станів.

Оптимальна стратегія управління в марковських ланцюгах.

*Література:* [1, с. 59-72].

### **Змістовний модуль 2. Випадкові процеси з неперервним часом**

#### **Тема 5. Марківські процеси з дискретними станами та неперервним часом**

Пуассонівський процес.

Експоненціальний закон розподілу.

Зв'язок між пуассонівським та експоненціальним законами.

Системи рівнянь народження і загибелі.

*Література:* [1, с. 73-82].

## **Тема 6. Системи масового обслуговування**

Модель Ерланга. Основні числові характеристики.

Поняття пріоритетності обслуговування.

Основні числові характеристики систем та їх критерії.

Система масового обслуговування та її основні числові характеристики.

Символіка позначень Кендала. СМО з чергами.

*Література:* [1, с. 83-112].

## **Тема 7. Моделювання систем масового обслуговування**

Основні числові характеристики ймовірнісної моделі масового обслуговування М/М/1 із пуассонівським потоком вимог, необмеженою чергою і надійним каналом обслуговування.

Імовірні твірні функції та їх властивості. Використання імовірних твірних функцій для визначення основних числових характеристик цілочислових випадкових величин.

Аналітичний метод ймовірних твірних функцій розв'язку задач теорії масового обслуговування.

*Література:* [1, с. 113-137].

## **2. РОБОЧА ПРОГРАМА**

### **2.1. Тематика лекцій**

#### **Лекція 1. Поняття про стохастичні (випадкові) процеси**

*План лекції:*

1. Визначення випадкового процесу. Перерізи.
2. Елементарні випадкові функції.
3. Закони розподілу випадкових процесів.

#### **Лекція 2. Види випадкових процесів та їх особливості**

*План лекції:*

1. Основні числові характеристики випадкових процесів.
2. Кореляційна функція випадкового процесу. Кореляційна функція випадкового процесу. Нормована кореляційна функція.
3. Ергодичні та стаціонарні випадкові процеси.
4. Класифікація випадкових процесів по станам та часу.

#### **Лекція 3. Марковські випадкові процеси з дискретним часом**

*План лекції:*

1. Поняття марковського випадкового процесу.
2. Марковські випадкові процеси з дискретними станами. Ланцюги Маркова.
3. Загальна класифікація станів марковського процесу.

#### **Лекція 4. Однорідні ланцюги Маркова**

*План лекції:*

1. Матриці одно крокових ймовірностей переходу.

2. Ймовірнісні графи.
3. Ймовірності багатокрокових переходів системи.

### **Лекція 5. Поглинальні ланцюги Маркова**

*План лекції:*

1. Класифікація однорідних ланцюгів Маркова.
2. Поглинальні ланцюги Маркова та їх основні числові характеристики.
3. Фундаментальна матриця поглинального ланцюга Маркова.

### **Лекція 6. Регулярні ланцюги Маркова**

*План лекції:*

1. Знаходження ймовірностей станів системи після  $n$  кроків.
2. Регулярні ланцюги Маркова та їх числові характеристики.
3. Матриця стаціонарних ймовірностей.

### **Лекція 7. Застосування однорідних ланцюгів Маркова**

*План лекції:*

1. Ймовірнісні моделі із застосуванням поглинальних ланцюгів Маркова.
2. Ймовірнісні моделі грошових потоків та їх стабілізація.
3. Потоківі ймовірнісні моделі.

### **Лекція 8. Приклади застосування однорідних ланцюгів Маркова**

*План лекції:*

1. Потоківі ймовірнісна модель внесення добрив.
2. Потоківі ймовірнісна модель забруднення атмосфери.
3. Відкрита модель Леонтьєва.

### **Лекція 9. Ймовірнісні моделі регулярних ланцюгів Маркова**

*План лекції:*

1. Ймовірнісна модель грошових потоків із збереженням грошової маси.
2. Ймовірнісна модель мобільності професій при зміні поколінь.
3. Оптимальна стратегія управління в марковських ланцюгах.

### **Лекція 10. Ланцюги Маркова з неперервним часом**

*План лекції:*

1. Особливості марковських процесів з дискретними станами та неперервним часом.
2. Поняття Пуассонівського процесу та його властивості.
3. Експоненціальний закон розподілу випадкової величини.

### **Лекція 11. Математичне описання неперервних ланцюгів Маркова**

*План лекції:*

1. Закон розподілу проміжків часу між послідовними подіями в пуассонівському потоці.
2. Системи диференціальних рівнянь для неперервних ланцюгів Маркова.
3. Система рівнянь народження і загибелі.

## **Лекція 12. Модель Ерланга**

*План лекції:*

1. Система рівнянь Ерланга. Формули Ерланга.
2. Поняття системи масового обслуговування .
3. Характеристики функціонування системи масового обслуговування.

## **Лекція 13. Основні характеристики систем масового обслуговування**

*План лекції:*

1. Характеристики обслуговування. Поняття пріоритетності обслуговування.
2. Скорочена символіка позначень Кендала.
3. Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з  $n$  каналами і необмеженою чергою.

## **Лекція 14. Основні моделі систем масового обслуговування**

*План лекції:*

1. Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з  $1$  каналом і обмеженою чергою.
2. Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з  $n$  каналами і обмеженою чергою.

## 2.2. Завдання до лабораторних робіт

Загальна мета виконання лабораторних робіт курсу – набути навичок створення програмних моделей систем, які містять випадкові процеси. Кожна лабораторна робота присвячена вивченню певного типу випадкового процесу або певного типу математичної моделі, яка ці процеси включає як необхідні складові.

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

**Тема: Визначення характеристик випадкової величини за результатами спостережень.**

**Завдання:** Результати вимірювання зросту та ваги 60 людей наведені в таблиці згідно варіанту роботи. Вважаючи, що зріст та вага людини є випадковими величинами, визначити наступні характеристики цих випадкових величин:

1. Знайти статистичні оцінки числових характеристик кожної випадкової величини за формулами:

$m_x^*$  – статистична оцінка математичного сподівання  $m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$D_x^*$  – статистична оцінка дисперсії  $D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2$

$\sigma_x^*$  – статистична оцінка середнього квадратичного відхилення

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*}$$

$V^*$  – статистична оцінка коефіцієнту варіації  $V^* = \frac{\sigma_x^*}{m_x^*} \times 100\%$

2. Побудувати гістограму і емпіричні функції розподілів кожній з випадкових величин.
3. По вигляду гістограми зробити припущення про закон розподілу випадкової величини.
4. Побудувати діаграму розсіювання випадкових величин  $x$  і  $y$  і зробити припущення про наявність або відсутність статистичної залежності між величинами.
5. Обчислити коефіцієнт кореляції і побудувати кореляційну матрицю. За значенням коефіцієнта кореляції зробити висновок про наявність лінійної залежності між випадковими величинами.



Таблиця 1

## Варіанти завдань до лабораторної роботи № 1

Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4		Варіант 5	
Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг
164	64	172	80,8	177	77,1	145	54,3	147	62,5
170	70	165	79,9	167	67,3	176	75,8	188	95,2
185	92	169	76,5	182	81,7	184	81,6	173	83,4
180	84	177	83,8	193	93,8	152	59,2	183	91,3
171	67	162	80,2	192	92,5	176	75,5	186	94,1
163	79	182	83	197	101,3	185	81,9	193	99,9
173	89	165	78,9	158	58,1	178	77,4	182	90,9
171	70	172	90,5	178	78,9	178	77,3	177	86,8
157	69	186	84	191	88,8	171	72,0	186	93,9
168	69	170	91,9	169	69,0	166	68,7	203	107,3
155	59	188	81,8	173	72,0	165	68,1	166	77,9
187	96	155	90,6	163	63,3	186	82,7	187	94,8
164	62	161	75,4	162	62,6	181	79,4	174	84,2
189	99	164	72,8	170	72,2	156	61,7	177	86,7
187	93	165	76	172	70,3	171	72,0	154	68,2
165	70	156	81,4	159	59,7	178	76,8	165	77,0
156	57	167	84,5	174	71,0	176	75,8	173	83,2
170	72	174	82,6	176	79,3	159	63,6	179	88,3
158	63	172	75,8	181	81,0	170	71,6	173	83,4
184	95	163	76	176	78,7	170	71,7	158	71,8
185	84	186	89,7	177	80,0	157	62,2	173	83,6
187	87	176	87,7	176	77,9	186	82,7	172	82,6
179	85	166	91,2	193	95,5	175	74,9	193	99,3
161	71	165	85,1	179	77,9	179	77,6	187	94,7
173	78	172	89,2	178	79,6	171	72,2	184	92,5
195	106	169	71,1	175	77,8	172	73,1	182	90,9
177	82	181	85,1	200	97,3	175	74,7	165	77,1
164	81	171	77,4	189	90,7	161	65,1	178	87,7
173	77	169	70,5	204	103,2	175	75,3	185	93,4
161	63	178	87,3	173	72,0	174	74,5	163	75,5
173	75	175	72,7	197	97,7	174	74,0	177	86,7
177	82	173	97,2	164	64,5	177	76,7	169	80,4
167	72	165	68,5	185	83,5	181	79,2	166	77,8
172	82	189	96,3	189	87,6	180	78,8	176	85,8
159	60	165	85,1	199	99,3	180	78,3	168	79,9
191	103	166	91	179	82,3	175	74,8	175	84,9
177	92	168	87	175	74,5	194	88,3	158	71,4
162	69	178	81,5	187	85,5	159	63,8	175	85,5
156	56	150	86,7	176	75,6	190	85,8	162	74,7
161	64	149	82,1	188	86,7	164	67,1	174	84,1
180	84	169	79,7	166	63,1	183	80,9	184	92,0
183	84	169	79,5	172	72,6	169	70,9	184	92,6
172	80	180	81,3	165	62,6	168	70,0	172	82,6
180	92	172	84,2	176	76,9	160	64,4	175	84,9
163	69	153	82	180	75,8	169	70,6	186	93,9
168	72	162	86	180	79,9	180	78,4	168	79,2
185	90	171	79,2	177	76,0	181	79,3	185	93,3
185	78	184	87,8	202	100,7	162	65,7	173	83,5
152	55	172	90,8	163	64,3	182	79,8	173	83,7
161	72	174	83,9	173	74,1	169	70,8	194	100,5
175	81	163	77,9	154	51,6	173	73,6	194	100,7
180	87	181	84,8	194	93,3	180	78,3	179	88,6
161	58	181	89,7	167	66,7	186	82,7	176	85,7
154	60	193	78,1	173	70,7	182	80,0	172	82,9
170	78	148	77,2	188	86,0	167	69,4	162	74,8
151	57	181	84	185	87,0	175	75,1	177	86,8
155	58	161	85,8	189	87,8	190	85,7	185	93,5
169	72	181	84,2	186	85,3	176	75,6	179	88,2
174	80	179	78,8	166	65,3	165	67,7	190	97,0
183	81	161	84,8	169	70,7	171	71,9	183	91,8

## Продовження

Варіант 6		Варіант 7		Варіант 8		Варіант 9		Варіант 10	
Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг
154	61,5	149	56,6	157	65,6	154	60,7	149	55,2
170	74,0	176	74,5	189	85,4	172	74,8	178	78,3
188	87,4	174	73,5	161	68,3	181	81,7	165	67,7
177	78,7	168	69,3	193	88,2	184	84	176	76,3
169	73,0	174	73,6	186	84	169	72,5	176	76,3
166	70,5	167	68,9	176	77,6	179	80,3	179	79,2
184	84,6	188	82,4	163	69,2	169	72,5	170	71,4
176	78,2	172	71,8	175	76,9	172	74,8	165	67,4
174	76,6	184	80,1	177	78,1	189	87,9	174	75,1
184	84,2	178	75,8	179	79,2	174	76,4	162	65,4
169	72,8	166	67,7	171	74,7	170	73,2	167	69,1
186	85,6	185	80,7	189	85,6	190	88,8	189	87,1
166	70,9	181	78,3	179	79,2	169	72,4	186	84,5
163	68,4	176	74,7	167	71,7	181	81,7	162	65,4
181	82,0	172	72,0	166	71,5	185	84,8	175	76
180	81,5	167	68,7	185	82,9	174	76,4	186	84,1
170	73,6	149	56,7	187	84,6	183	83,3	177	77,1
170	73,4	181	77,8	176	77,4	190	88,8	176	76,5
176	77,9	175	73,7	181	80,5	182	82,5	182	81,1
183	83,2	174	73,6	173	75,6	192	90,3	181	80,6
182	82,7	162	65,5	179	79,1	187	86,5	166	68,8
184	84,2	170	70,5	185	83,4	173	75,5	183	82,1
175	77,6	185	80,7	176	77,8	187	86,4	171	72,4
165	70,4	170	70,7	180	80	185	84,9	193	89,9
171	74,7	179	76,9	171	74,3	182	82,6	157	61,5
165	69,9	173	72,5	185	83,2	167	70,8	176	76,3
183	83,7	173	73,0	169	73,1	186	85,8	175	75,6
166	70,8	177	75,3	169	73,3	182	82,5	165	67,6
168	72,1	173	73,0	185	83,2	164	68,5	174	74,8
182	82,5	171	71,5	194	88,9	182	82,6	170	71,4
180	80,9	180	77,4	187	84,3	191	89,4	201	96,8
187	86,3	176	74,5	173	75,4	188	87,1	177	77,4
179	80,2	149	56,4	179	79,1	189	87,9	172	73,3
172	75,4	161	64,7	188	85,1	183	83,3	176	76,3
183	83,3	170	70,9	188	85,1	177	78,6	193	89,6
175	77,6	172	71,9	176	77,7	175	77,1	171	72,4
167	71,2	166	68,0	174	76,2	175	77,1	174	74,9
187	86,4	170	71,0	185	83	170	73,1	180	79,2
171	74,3	172	71,8	180	80	183	83,3	186	84,1
181	81,8	190	84,2	174	76,3	180	81	186	84,2
182	83,0	180	77,6	184	82,6	184	84,1	182	81
173	76,0	183	79,7	177	78	190	88,8	175	75,5
176	77,9	176	74,4	182	81,5	185	84,9	187	84,9
184	84,6	168	69,1	182	81,1	196	93,4	174	74,8
175	77,7	196	87,9	181	80,8	170	73,2	184	82,5
182	82,4	168	69,5	185	83,2	174	76,3	185	83,9
188	87,0	202	91,8	169	73,2	172	74,9	172	73
180	81,6	190	83,9	174	76,4	181	81,9	187	85
160	66,3	178	76,3	175	77,1	192	90,3	179	78,8
180	81,4	171	71,6	165	70,7	185	84,8	176	76,2
177	79,2	161	64,7	182	81,4	171	74	183	82,2
179	80,1	175	74,3	179	79,6	178	79,4	174	75,1
167	71,5	180	77,7	177	78,1	197	94,1	180	79,9
189	88,2	176	74,4	170	73,9	185	85	172	73,5
190	88,7	183	79,4	184	82,4	181	81,8	176	76,3
179	80,2	178	75,7	183	81,9	184	84	184	82,8
182	82,4	177	75,6	180	80	177	78,6	172	73,2
181	82,0	182	78,4	188	85,1	193	91,1	149	54,9
181	81,9	174	73,3	174	76,2	202	98,2	185	83,7
170	74,0	178	76,1	168	72,8	171	71,9	194	90,9

## Продовження

Варіант 11		Варіант 12		Варіант 13		Варіант 14		Варіант 15	
Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг
164	64	172	80,8	177	77,1	145	54,3	147	62,5
170	70	165	79,9	167	67,3	176	75,8	188	95,2
185	92	169	76,5	182	81,7	184	81,6	173	83,4
180	84	177	83,8	193	93,8	152	59,2	183	91,3
171	67	162	80,2	192	92,5	176	75,5	186	94,1
163	79	182	83	197	101,3	185	81,9	193	99,9
173	89	165	78,9	158	58,1	178	77,4	182	90,9
171	70	172	90,5	178	78,9	178	77,3	177	86,8
157	69	186	84	191	88,8	171	72,0	186	93,9
168	69	170	91,9	169	69,0	166	68,7	203	107,3
155	59	188	81,8	173	72,0	165	68,1	166	77,9
187	96	155	90,6	163	63,3	186	82,7	187	94,8
164	62	161	75,4	162	62,6	181	79,4	174	84,2
189	99	164	72,8	170	72,2	156	61,7	177	86,7
187	93	165	76	172	70,3	171	72,0	154	68,2
165	70	156	81,4	159	59,7	178	76,8	165	77,0
156	57	167	84,5	174	71,0	176	75,8	173	83,2
170	72	174	82,6	176	79,3	159	63,6	179	88,3
158	63	172	75,8	181	81,0	170	71,6	173	83,4
184	95	163	76	176	78,7	170	71,7	158	71,8
185	84	186	89,7	177	80,0	157	62,2	173	83,6
187	87	176	87,7	176	77,9	186	82,7	172	82,6
179	85	166	91,2	193	95,5	175	74,9	193	99,3
161	71	165	85,1	179	77,9	179	77,6	187	94,7
173	78	172	89,2	178	79,6	171	72,2	184	92,5
195	106	169	71,1	175	77,8	172	73,1	182	90,9
177	82	181	85,1	200	97,3	175	74,7	165	77,1
164	81	171	77,4	189	90,7	161	65,1	178	87,7
173	77	169	70,5	204	103,2	175	75,3	185	93,4
161	63	178	87,3	173	72,0	174	74,5	163	75,5
173	75	175	72,7	197	97,7	174	74,0	177	86,7
177	82	173	97,2	164	64,5	177	76,7	169	80,4
167	72	165	68,5	185	83,5	181	79,2	166	77,8
172	82	189	96,3	189	87,6	180	78,8	176	85,8
159	60	165	85,1	199	99,3	180	78,3	168	79,9
191	103	166	91	179	82,3	175	74,8	175	84,9
177	92	168	87	175	74,5	194	88,3	158	71,4
162	69	178	81,5	187	85,5	159	63,8	175	85,5
156	56	150	86,7	176	75,6	190	85,8	162	74,7
161	64	149	82,1	188	86,7	164	67,1	174	84,1
180	84	169	79,7	166	63,1	183	80,9	184	92,0
183	84	169	79,5	172	72,6	169	70,9	184	92,6
172	80	180	81,3	165	62,6	168	70,0	172	82,6
180	92	172	84,2	176	76,9	160	64,4	175	84,9
163	69	153	82	180	75,8	169	70,6	186	93,9
168	72	162	86	180	79,9	180	78,4	168	79,2
185	90	171	79,2	177	76,0	181	79,3	185	93,3
185	78	184	87,8	202	100,7	162	65,7	173	83,5
152	55	172	90,8	163	64,3	182	79,8	173	83,7
161	72	174	83,9	173	74,1	169	70,8	194	100,5
175	81	163	77,9	154	51,6	173	73,6	194	100,7
180	87	181	84,8	194	93,3	180	78,3	179	88,6
161	58	181	89,7	167	66,7	186	82,7	176	85,7
154	60	193	78,1	173	70,7	182	80,0	172	82,9
170	78	148	77,2	188	86,0	167	69,4	162	74,8
151	57	181	84	185	87,0	175	75,1	177	86,8
155	58	161	85,8	189	87,8	190	85,7	185	93,5
169	72	181	84,2	186	85,3	176	75,6	179	88,2
174	80	179	78,8	166	65,3	165	67,7	190	97,0
183	81	161	84,8	169	70,7	171	71,9	183	91,8

## Продовження

Варіант 16		Варіант 17		Варіант 18		Варіант 19		Варіант 20	
Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг	Результати вимірювання зросту, см	Результати вимірювання ваги, кг
154	61,5	149	56,6	157	65,6	154	60,7	149	55,2
170	74,0	176	74,5	189	85,4	172	74,8	178	78,3
188	87,4	174	73,5	161	68,3	181	81,7	165	67,7
177	78,7	168	69,3	193	88,2	184	84	176	76,3
169	73,0	174	73,6	186	84	169	72,5	176	76,3
166	70,5	167	68,9	176	77,6	179	80,3	179	79,2
184	84,6	188	82,4	163	69,2	169	72,5	170	71,4
176	78,2	172	71,8	175	76,9	172	74,8	165	67,4
174	76,6	184	80,1	177	78,1	189	87,9	174	75,1
184	84,2	178	75,8	179	79,2	174	76,4	162	65,4
169	72,8	166	67,7	171	74,7	170	73,2	167	69,1
186	85,6	185	80,7	189	85,6	190	88,8	189	87,1
166	70,9	181	78,3	179	79,2	169	72,4	186	84,5
163	68,4	176	74,7	167	71,7	181	81,7	162	65,4
181	82,0	172	72,0	166	71,5	185	84,8	175	76
180	81,5	167	68,7	185	82,9	174	76,4	186	84,1
170	73,6	149	56,7	187	84,6	183	83,3	177	77,1
170	73,4	181	77,8	176	77,4	190	88,8	176	76,5
176	77,9	175	73,7	181	80,5	182	82,5	182	81,1
183	83,2	174	73,6	173	75,6	192	90,3	181	80,6
182	82,7	162	65,5	179	79,1	187	86,5	166	68,8
184	84,2	170	70,5	185	83,4	173	75,5	183	82,1
175	77,6	185	80,7	176	77,8	187	86,4	171	72,4
165	70,4	170	70,7	180	80	185	84,9	193	89,9
171	74,7	179	76,9	171	74,3	182	82,6	157	61,5
165	69,9	173	72,5	185	83,2	167	70,8	176	76,3
183	83,7	173	73,0	169	73,1	186	85,8	175	75,6
166	70,8	177	75,3	169	73,3	182	82,5	165	67,6
168	72,1	173	73,0	185	83,2	164	68,5	174	74,8
182	82,5	171	71,5	194	88,9	182	82,6	170	71,4
180	80,9	180	77,4	187	84,3	191	89,4	201	96,8
187	86,3	176	74,5	173	75,4	188	87,1	177	77,4
179	80,2	149	56,4	179	79,1	189	87,9	172	73,3
172	75,4	161	64,7	188	85,1	183	83,3	176	76,3
183	83,3	170	70,9	188	85,1	177	78,6	193	89,6
175	77,6	172	71,9	176	77,7	175	77,1	171	72,4
167	71,2	166	68,0	174	76,2	175	77,1	174	74,9
187	86,4	170	71,0	185	83	170	73,1	180	79,2
171	74,3	172	71,8	180	80	183	83,3	186	84,1
181	81,8	190	84,2	174	76,3	180	81	186	84,2
182	83,0	180	77,6	184	82,6	184	84,1	182	81
173	76,0	183	79,7	177	78	190	88,8	175	75,5
176	77,9	176	74,4	182	81,5	185	84,9	187	84,9
184	84,6	168	69,1	182	81,1	196	93,4	174	74,8
175	77,7	196	87,9	181	80,8	170	73,2	184	82,5
182	82,4	168	69,5	185	83,2	174	76,3	185	83,9
188	87,0	202	91,8	169	73,2	172	74,9	172	73
180	81,6	190	83,9	174	76,4	181	81,9	187	85
160	66,3	178	76,3	175	77,1	192	90,3	179	78,8
180	81,4	171	71,6	165	70,7	185	84,8	176	76,2
177	79,2	161	64,7	182	81,4	171	74	183	82,2
179	80,1	175	74,3	179	79,6	178	79,4	174	75,1
167	71,5	180	77,7	177	78,1	197	94,1	180	79,9
189	88,2	176	74,4	170	73,9	185	85	172	73,5
190	88,7	183	79,4	184	82,4	181	81,8	176	76,3
179	80,2	178	75,7	183	81,9	184	84	184	82,8
182	82,4	177	75,6	180	80	177	78,6	172	73,2
181	82,0	182	78,4	188	85,1	193	91,1	149	54,9
181	81,9	174	73,3	174	76,2	202	98,2	185	83,7
170	74,0	178	76,1	168	72,8	180	80,9	194	90,9

### Звіт по лабораторній роботі повинен містити:

1. завдання на лабораторну роботу;
2. таблицю з вихідними даними згідно з номером варіанту;
3. розрахунки статистичних оцінок числових характеристик кожної випадкової величини ( $X$  – зріст,  $Y$  – вага) та формули, за якими такі розрахунки виконані. Приблизний вигляд розрахунків, виконаних за допомогою Microsoft Excel, наведений на рис. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
	№ измерения	Результаты измерения роста, см	Результаты измерения веса, кг	$M(x)$	$M(y)$	$(x-m(x))^2$	$Dx$	$\sigma$	$(y-m(y))^2$	$Dy$	$\sigma$	$V(x)$	$V(y)$	
1														
2	1	172	80,8	170,51667	82,80833	2,2002778	99,6777	9,98387	4,033402778	37,5733	9,98387	0,05855	0,12057	
3	2	165	79,9			30,4336111			8,458402778					
4	3	169	76,5			2,3002778			39,79506944					
5	4	177	83,8			42,0336111			0,983402778					
6	5	162	80,2			72,5336111			6,803402778			65	148	
7	6	182	83			131,8669444			0,036736111			70	154,429	
8	7	165	78,9			30,4336111			15,27506944			75	160,857	
9	8	172	90,5			2,2002778			59,16173611			80	167,286	
10	9	186	84			239,733611			1,420069444			85	173,714	
11	10	170	91,9			0,266944444			82,65840278			90	180,143	
12	11	188	81,8			305,6669444			1,016736111			95	186,571	
13	12	155	90,6			240,7669444			60,71006944			100	Еще	
14	13	161	75,4			90,56694444			54,88340278					
15	14	164	72,8			42,46694444			100,1667361					
16	15	165	76			30,4336111			46,35340278					
17	16	156	81,4			210,733611			1,983402778					
18	17	167	84,5			12,36694444			2,861736111					
19	18	174	82,6			12,1336111			0,043402778					
20	19	172	75,8			2,2002778			49,11673611					
21	20	163	76			56,5002778			46,35340278					
22	21	186	89,7			239,733611			47,49506944					
23	22	176	87,7			30,06694444			23,92840278					
24	23	166	91,2			20,4002778			70,42006944					
25	24	165	85,1			30,4336111			5,251736111					
26	25	172	89,2			2,2002778			40,85340278					
27	26	169	71,1			2,3002778			137,0850694					
28	27	181	85,1			109,900278			5,251736111					
29	28	171	77,4			0,23361111			29,25006944					
30	29	169	70,5			2,3002778			151,4950694					
31	30	178	87,3			56,0002778			20,17506944					
32	31	175	72,7			20,1002778			102,1784028					
33	32	173	97,2			6,166944444			207,1200694					
34	33	165	88,5			30,4336111			204,7284028					
35	34	180	86,3			341,6336111			182,0750694					

Рис. 1. Зразок розрахунків в Microsoft Excel

4. побудовані за допомогою надбудови «Анализ данных» програми Microsoft Excel гістограми розподілу випадкових величин  $X$  (зріст) та  $Y$  (вага). Зразки таких гістограм наведені на рис. 2 і рис. 3. По вигляду гістограм висувуються гіпотези про закони розподілу цих випадкових величин. Так, з вигляду гістограм, наведених на рис. 2 і рис. 3, можна висунути припущення, що і та і інша випадкові величини розподілені за нормальним законом.
5. діаграму розсіяння пари випадкових величин ( $X, Y$ ). Таку діаграму також можна побудувати за допомогою «Мастера диаграмм» Microsoft Excel, якщо вибрати вид діаграми – «точечная». Зразок діаграми розсіяння наведений на рис. 4. З вигляду діаграми розсіяння слід зробити висновок, чи можна вважати ці випадкові величини незалежними. Якщо залежність випадкових величин видна з діаграми розсіяння, то слід також оцінити, чи можна таку залежність вважати лінійною.

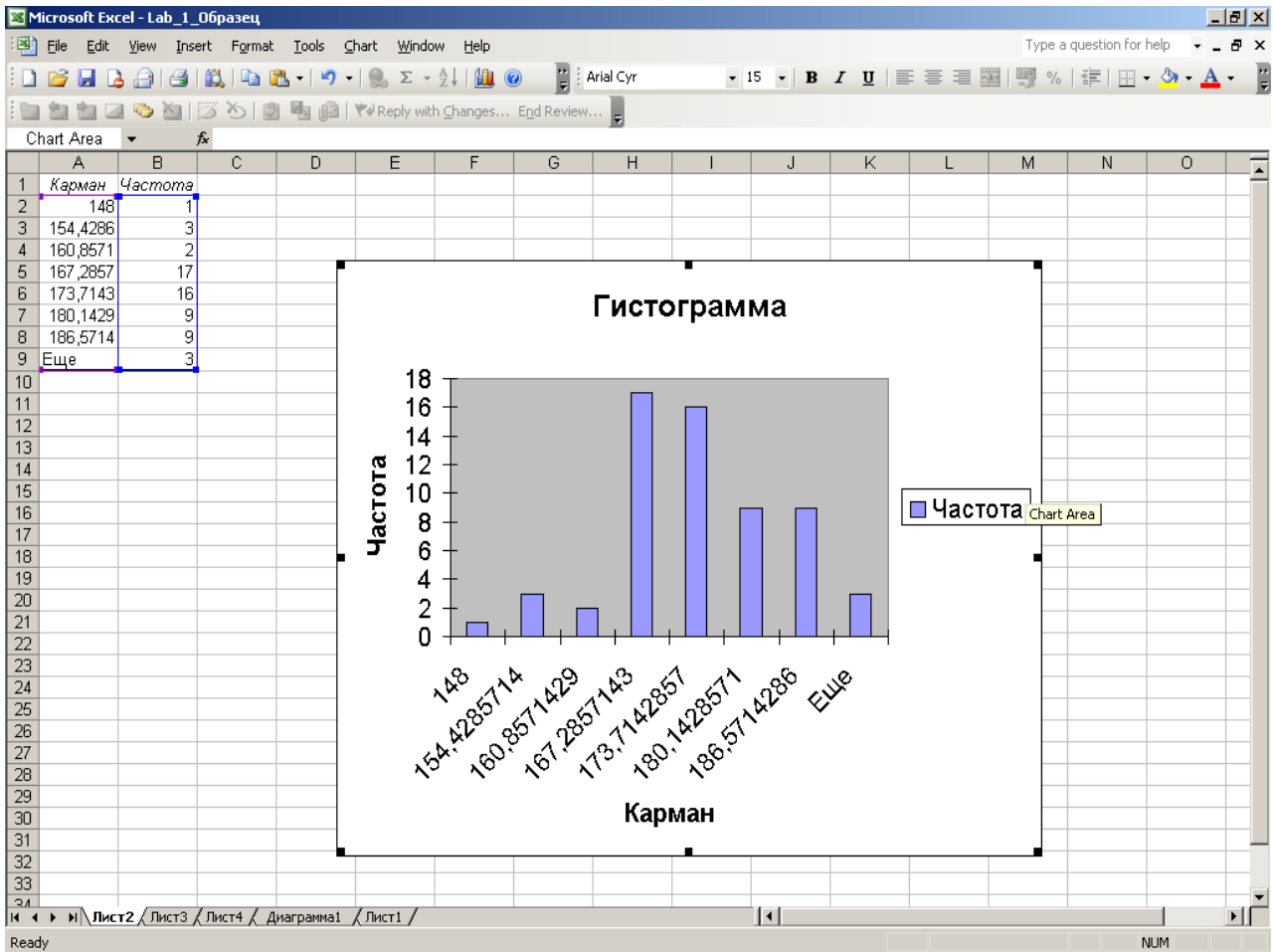


Рис. 2. Гістограма розподілу зросту

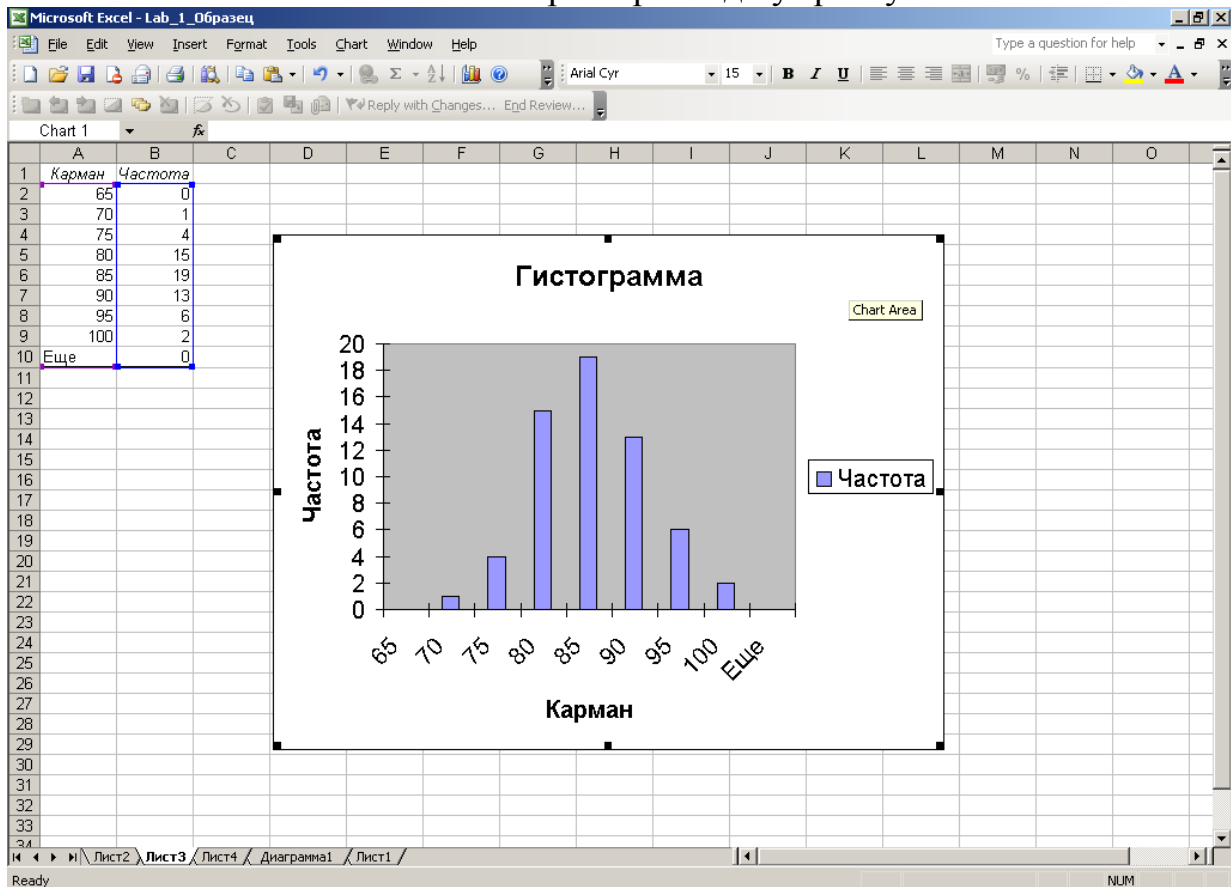


Рис. 3. Гістограма розподілу ваги

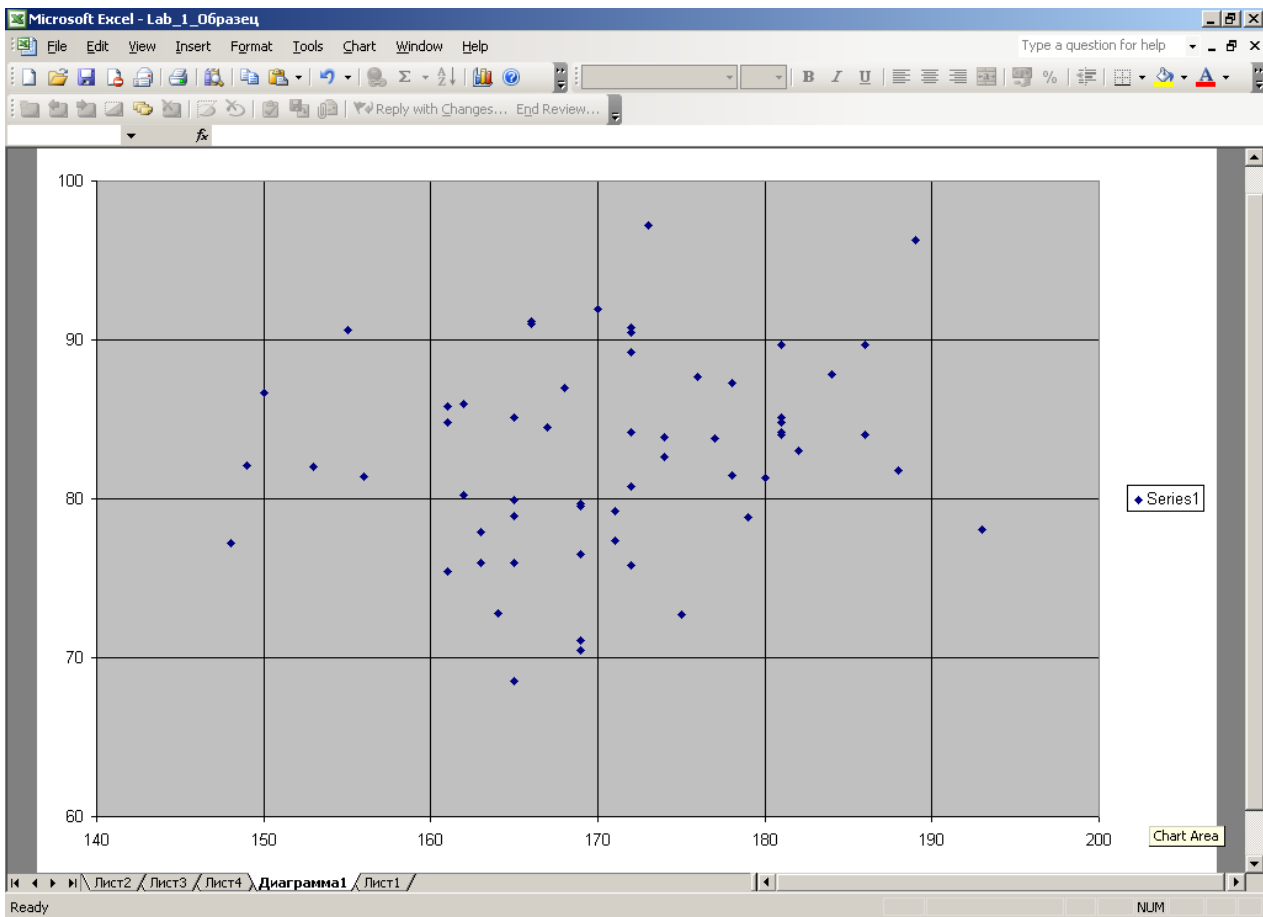


Рис. 4. Діаграма розсіювання зросту та ваги

б. кореляційну матрицю та коефіцієнт кореляції. Кореляційну матрицю можна обчислити знову за допомогою надбудови «Анализ данных» програми Microsoft Excel.

Статистична оцінка коефіцієнту кореляції розраховується за формулою

$$r_{x,y}^* = \frac{K_{x,y}^*}{\sigma_x^* \cdot \sigma_y^*};$$

Статистична оцінка кореляційного моменту знаходиться за формулою

$$K_{x,y}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*) \cdot (y_i - m_y^*)}{n-1};$$

статистичні оцінки математичного сподівання величин X та Y вже були знайдені по формулах

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{та} \quad m_y^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

а статистичні оцінки середніх квадратичних відхилень – по формулах

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n-1}}, \quad \sigma_y^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - m_y^*)^2}{n-1}}$$

Як відомо, коефіцієнт кореляції характеризує наявність, або відсутність статистичного зв'язку між випадковими величинами X та Y. Якщо модуль

цього коефіцієнту близький до одиниці – це вказує на наявність суттєвого зв'язку між випадковими величинами, а якщо модуль коефіцієнту кореляції близький до нуля – випадкові величини можна вважати слабо корельованими.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

**Тема: Визначення характеристик випадкового процесу за результатами спостережень.**

**Завдання:** Випадковий процес  $X(t)$  заданий сукупністю 100 реалізацій. У таблиці наведені значення 12 рівновіддалених перетинів цього процесу.

- 1) Вибрати 12 реалізацій випадкового процесу згідно з варіантом (див. Таблицю 3) та побудувати їх графіки.
- 2) Знайти оцінки числових характеристик кожного з перетинів випадкового процесу:
  - а) математичного очікування  $m_x$ ;
  - б) медіани  $m_e$ ;
  - в) дисперсії  $D_x$ ;
  - г) середнього квадратичного відхилення  $\sigma_x$

Побудувати графіки залежності математичного очікування і середнього квадратичного відхилення від часу.

- 3) Для кожного перетину випадкового процесу побудувати гістограму і приблизно оцінити вид розподілу відповідних випадкових величин. При побудові гістограми для вибору кількості інтервалів слід використовувати наближену формулу Стерджеса

$$N = \text{Int}(1,5 + 3,322 \cdot \lg n),$$

а для визначення величини інтервалів групування даних - формулу

$$\Delta \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$$

- 4) По чисельних значеннях побудованих гістограм обчислити кореляційні моменти для вибраних перетинів випадкового процесу. Сформувати кореляційну матрицю для цих перетинів. Привести її до нормованого вигляду. По значеннях коефіцієнтів нормованої кореляційної матриці і по графікам залежності математичного очікування і середнього квадратичного відхилення від часу визначити, чи можна вважати випадковий процес стаціонарним.
- 5) Якщо випадковий процес можна вважати стаціонарним, то обчислити нормовану кореляційну функцію такого процесу і побудувати її графік.

**Звіт по лабораторній роботі повинен містити:**

1. Завдання на лабораторну роботу(див. вище).
2. Таблицю початкових даних згідно варіанту.
3. Теоретичні відомості про випадкові процеси, визначення перетинів та реалізацій випадкового процесу та формули для знаходження статистичних



оцінок основних числових характеристик за результатами спостережень. В теоретичних відомостях слід навести також визначення поняття стаціонарного випадкового процесу.

4. Графік 12-ти реалізацій випадкового процесу з нанесеними на нім графіками математичного очікування і середнього квадратичного відхилення.
  5. Основні формули і результати обчислень статистичних оцінок числових характеристик випадкового процесу.
  6. Гістограми перетинів випадкового процесу.  
При побудові гістограм слід обґрунтувати вибір кількості і величини інтервалів групування даних для побудови гістограми; навести основні формули для розрахунку значень гістограми і вказати кількісні дані, отримані при побудові гістограми.
  7. Основні формули для обчислення елементів кореляційної матриці, що характеризує залежність між перетинам випадкового процесу.
  8. Результати обчислення нормованої кореляційної матриці.
  9. Аналіз отриманих результатів повинен містити відповіді на наступні питання:
    - 9.1. Як поводиться випадковий процес в часі?
    - 9.2. Який закон розподілу має кожен із перетинів випадкового процесу?
    - 9.3. Чи можна вважати постійними значення математичного очікування, середнього квадратичного відхилення і діагональних елементів кореляційної матриці? Чи є досліджуваний процес стаціонарним?
    - 9.4. Якою кореляційною функцією характеризується стаціонарний випадковий процес?
- Приклади виконання розрахунків за допомогою електронної таблиці Microsoft Excel наведені на рис. 5–7.

Таблиця 2

Реалізації випадкового процесу

Номер	Результати вимірювань										
1	-0,588	-0,896	-0,867	0,075	0,729	0,494	0,771	0,113	0,231	0,400	0,149
2	-0,656	0,410	-0,732	0,839	0,093	0,523	0,899	-0,194	0,789	0,178	-0,695
3	0,834	0,000	-0,603	-0,021	0,526	1,160	1,370	0,599	0,904	0,712	-0,253
4	0,660	0,182	-0,747	0,294	-0,141	0,981	-0,069	0,554	0,014	0,450	0,379
5	-0,326	-1,800	-0,690	-0,404	-0,136	-0,157	0,047	0,088	-0,061	0,963	0,349
6	-0,187	0,083	-0,541	-0,742	0,540	0,972	0,656	0,132	0,521	-0,502	-1,020
7	-0,609	-0,297	-0,565	-0,403	0,208	0,972	0,777	0,476	0,465	-0,361	0,223
8	1,030	-0,608	-0,681	0,193	0,282	0,060	1,410	0,579	0,072	0,201	0,897
9	-0,165	-1,070	-0,834	0,260	-0,260	1,120	0,334	-0,048	-0,132	0,192	0,272
10	0,724	-1,170	-0,775	0,417	-0,013	-0,223	0,355	0,485	0,526	0,068	-0,342
11	0,516	0,310	-0,444	-0,123	1,300	1,170	0,685	0,631	0,710	0,072	-0,347
12	0,081	-0,178	-0,788	-0,477	0,471	-0,354	1,410	0,006	0,315	0,658	-0,456
13	0,258	0,261	-0,834	0,230	0,501	0,605	0,243	-0,137	0,344	0,036	-0,055
14	0,510	0,316	-0,908	0,330	0,688	-0,217	0,722	0,257	-0,032	-0,367	-0,168
15	0,134	-0,676	-1,230	0,161	0,940	1,180	0,871	-0,033	0,302	-0,322	0,073
16	-0,111	-0,774	-0,417	-0,019	0,432	0,348	0,746	1,640	0,401	-0,078	-0,784
17	0,128	-0,386	-1,130	-0,255	0,679	0,662	0,982	1,140	-0,239	0,425	0,008
18	-0,159	0,237	-1,020	0,131	-0,137	0,059	1,130	1,060	0,287	-0,054	-0,011
19	0,363	-0,410	-0,935	-0,032	0,260	0,903	1,130	0,267	0,776	0,227	-0,108
20	-0,072	-0,374	-0,934	-0,248	0,177	1,150	0,714	0,780	-0,113	0,851	-0,482
21	-0,486	-0,534	-0,195	-0,169	0,376	0,764	1,340	0,318	-0,187	1,020	0,742
22	-0,198	-0,006	-0,423	0,121	0,580	1,030	0,034	0,781	-0,442	1,100	-0,471

23	0,724	0,152	-0,220	0,139	0,157	-0,033	0,535	0,248	0,311	0,192	0,048
24	0,122	-0,488	-0,955	-0,268	0,065	-0,053	0,318	1,050	0,636	-0,850	-0,379
25	0,769	-0,617	-0,345	0,362	0,072	1,380	1,100	0,613	0,802	0,613	0,848
26	-0,604	-0,822	-0,606	0,228	0,540	0,286	1,140	0,649	0,099	0,195	0,636
27	0,330	-0,289	-0,519	-0,274	-0,258	1,010	0,534	0,569	0,468	0,626	0,269
28	-0,189	-0,938	-0,594	-0,234	0,398	0,146	0,049	0,248	0,135	-0,550	-0,569
29	-0,913	-0,815	-0,600	0,353	0,403	0,378	0,966	1,050	-0,390	0,665	1,150
30	0,055	0,062	-0,312	-0,189	0,421	0,377	0,411	0,916	0,350	-0,559	0,187
31	0,209	0,888	-0,852	-0,187	1,910	0,904	0,431	0,876	0,211	0,345	-0,526
32	0,563	-0,280	-0,694	0,142	0,851	0,864	1,100	0,267	0,359	-0,154	0,195
33	-0,476	-0,419	-0,514	0,095	0,292	1,460	0,900	-0,201	0,491	-0,726	0,134
34	-0,554	-1,390	-0,577	0,454	0,129	0,853	0,378	0,245	-0,289	-0,297	-0,258
35	-0,012	-0,975	-0,486	-0,231	0,512	0,237	1,290	0,916	1,020	-0,044	-0,338
36	0,082	-0,980	-0,743	-0,287	0,446	-0,174	0,664	0,553	0,044	0,179	0,158
37	0,670	-0,755	-0,819	-0,040	0,688	0,439	0,768	0,385	-0,071	0,559	0,010
38	0,076	0,189	-0,845	-0,357	0,661	0,672	0,647	0,349	0,846	-0,096	-0,457
39	-0,737	-0,965	-0,270	0,229	0,748	0,938	-0,131	1,060	0,717	0,605	0,746
40	-0,196	-0,199	-0,338	0,136	-0,171	0,733	0,331	0,721	0,456	-0,222	-0,096
41	0,443	-1,580	-0,778	0,491	0,111	0,527	0,722	-0,098	-0,150	-0,595	-0,965
42	-0,254	0,039	-0,471	-0,045	0,587	0,475	0,873	0,468	-0,183	0,544	-0,776
43	-0,796	0,257	-0,243	-0,006	1,580	1,700	1,060	-0,228	0,460	0,006	-0,392
44	0,240	-1,480	-1,010	0,407	0,427	0,679	1,290	-0,042	-0,112	-0,031	-0,377
45	-0,215	-0,998	-1,490	0,051	0,860	0,187	1,040	0,429	-0,495	0,198	-0,012
46	0,406	-1,340	-0,812	-0,361	-0,358	0,288	1,040	0,241	0,172	-0,272	-0,893
47	-0,405	-1,170	-1,180	0,026	0,625	0,657	0,495	0,092	-0,062	-0,864	-0,541
48	0,093	0,569	-0,592	0,235	0,506	-0,170	0,369	0,309	-0,035	-0,427	-1,270
49	1,150	0,012	-0,283	-0,033	0,339	0,922	0,857	0,071	0,263	0,113	-0,327
50	-0,526	-0,080	-0,492	-0,235	0,754	1,070	0,861	0,819	-0,351	0,102	-0,824
51	-0,199	0,547	-0,481	-0,146	0,334	0,307	0,512	0,713	0,112	0,007	0,221
52	0,479	0,100	-0,566	0,019	0,199	0,794	1,050	0,089	0,374	0,591	0,093
53	0,288	-1,230	-0,767	0,495	0,733	0,631	0,816	0,181	0,077	0,217	0,084
54	-0,746	-0,582	0,009	-0,203	0,874	0,826	0,994	1,000	-0,045	-0,459	-0,712
55	0,508	-0,418	-0,395	-0,015	-0,443	0,475	0,479	0,062	0,531	-0,884	-1,660
56	-0,229	-1,330	-0,569	-0,115	-0,021	0,031	0,733	0,813	0,542	0,820	-1,020
57	0,611	0,049	-0,455	0,000	0,107	0,857	0,258	0,487	0,356	0,134	-0,428
58	-0,032	-1,290	-0,845	0,156	0,991	0,381	0,870	0,094	0,709	-0,224	0,307
59	-0,092	-0,358	-0,742	0,327	0,509	0,838	0,678	0,092	0,574	0,221	-0,009
60	-0,337	0,285	-0,895	0,092	-0,208	0,126	0,750	-0,256	0,221	0,130	-1,190
61	0,505	-0,013	-0,827	0,234	0,639	0,245	0,614	0,156	0,313	-1,230	-0,239
62	-0,544	-0,736	-0,994	-0,129	0,694	0,816	0,654	0,404	-0,308	0,089	0,278
63	0,136	-0,677	-0,341	0,302	0,640	0,453	0,390	0,622	0,651	0,263	0,310
64	0,592	-0,271	-0,211	0,384	0,560	0,510	0,645	0,527	0,737	0,068	-0,413
65	1,350	0,431	-0,219	0,063	0,500	1,440	1,390	-0,034	0,330	0,199	-1,590
66	0,506	-0,561	-0,612	-0,166	0,432	0,544	0,901	0,323	0,474	-0,054	-0,296
67	0,232	-0,364	-0,641	-0,315	-0,341	0,277	0,317	1,240	0,296	0,317	-0,092
68	0,642	-1,690	-0,766	0,341	-0,168	0,987	0,934	0,770	0,112	0,236	-0,006
69	0,237	-0,411	-0,369	0,084	0,277	0,982	0,651	0,375	-0,083	0,133	-0,912
70	0,235	-0,268	-0,757	-0,113	0,009	0,279	0,889	-0,103	0,246	-0,627	0,007
71	0,274	1,190	-0,841	0,416	0,482	-0,092	1,480	-0,013	-0,061	-0,290	-1,370
72	-0,120	0,047	-0,667	-0,172	0,692	-0,289	0,290	0,095	0,251	-0,147	0,275
73	0,604	-0,618	-1,350	0,250	0,013	0,552	0,608	0,678	0,136	-0,447	0,533
74	0,172	1,440	-0,608	0,084	0,580	0,205	0,838	1,120	0,119	0,287	0,856
75	0,082	0,664	-0,965	-0,155	0,846	-0,053	-0,121	0,586	0,012	-0,249	0,536
76	0,258	0,099	-0,991	-0,410	0,474	0,962	0,786	-0,393	0,269	0,055	-1,270
77	0,157	-0,778	-0,844	-0,039	0,584	0,607	0,949	0,320	-0,329	0,453	-0,304
78	-1,050	0,031	-0,830	0,166	0,778	1,730	0,469	0,535	0,344	0,289	0,304
79	-0,559	-0,178	-0,759	0,266	0,683	0,106	0,588	0,622	0,107	0,216	-0,693
80	-0,736	-0,743	-1,160	0,119	0,024	0,366	1,090	1,120	0,070	0,179	-1,350
81	-0,089	0,424	-0,649	0,003	0,373	0,875	1,140	0,549	0,899	0,051	-0,448
82	-0,310	-0,945	-0,685	-0,285	0,147	1,160	0,683	1,060	-0,045	-0,317	-0,381
83	0,343	-0,162	-0,980	0,183	0,339	0,234	1,130	0,595	0,169	0,097	-0,954

84	0,100	-0,607	-0,482	-0,017	0,683	0,219	0,205	0,401	0,453	0,481	0,159
85	-0,505	-0,520	-0,620	0,043	0,561	1,220	0,700	1,020	0,201	-0,136	-0,464
86	-0,138	0,315	-0,700	0,811	0,362	0,585	0,479	0,352	0,672	0,680	-1,120
87	0,226	-1,360	-0,886	-0,088	0,428	1,120	0,983	0,633	0,092	0,359	0,377
88	0,626	-0,011	-0,887	-0,423	0,019	0,459	0,097	0,713	0,023	-0,478	-0,264
89	-0,076	-0,636	-1,100	-0,214	0,743	1,100	0,942	0,745	-0,048	-0,188	-0,675
90	-0,970	-0,897	-0,668	0,042	1,210	0,844	1,420	0,599	0,227	-0,211	0,073
91	-0,314	-0,256	-0,469	0,164	-0,009	0,523	0,768	1,100	0,456	-0,810	-0,735
92	-0,153	-0,798	-0,463	-0,006	1,160	-0,244	0,304	0,424	0,249	-0,505	0,357
93	-0,992	-1,150	-0,326	-0,008	0,248	0,221	0,708	0,675	-0,112	0,927	-0,108
94	0,592	-0,401	-0,980	0,142	0,302	-0,189	0,865	0,258	-0,131	-0,026	-0,422
95	0,037	-0,288	-0,870	-0,701	0,920	1,180	1,300	-0,367	0,525	0,898	-0,339
96	-0,596	-0,164	-0,489	0,333	0,055	0,050	0,837	0,743	0,269	-0,020	0,275
97	1,040	0,009	-1,110	0,200	0,349	0,285	0,707	-0,164	-0,174	-0,364	-0,203
98	0,210	-0,135	-0,418	-0,285	0,484	0,339	0,515	0,361	-0,057	0,443	-0,014
99	0,249	-0,918	-0,594	0,260	1,250	1,140	0,901	0,180	0,119	0,241	0,254
100	-0,204	0,289	-0,828	0,390	0,120	1,020	1,210	-0,411	0,171	0,222	0,697

Таблиця 3

## Варіанти завдань

Номер варіанту	Номери реалізацій випадкового процесу
1	1, 2, 5, 7, 21, 33, 43, 50, 62, 79, 85, 96
2	3, 8, 10, 23, 25, 37, 49, 57, 65, 68, 88, 97
3	5, 9, 22, 28, 40, 42, 45, 51, 56, 82, 86, 100
4	2, 7, 26, 34, 39, 50, 54, 62, 79, 80, 85, 96
5	4, 11, 14, 32, 37, 52, 55, 57, 64, 68, 73, 88
6	6, 18, 22, 28, 40, 42, 51, 56, 60, 82, 92, 100
7	12, 20, 30, 35, 36, 38, 48, 58, 59, 75, 81, 95
8	13, 15, 31, 44, 53, 63, 67, 69, 70, 71, 76, 87
9	15, 17, 24, 38, 48, 63, 74, 75, 77, 84, 95, 98
10	11, 14, 32, 37, 41, 46, 52, 55, 61, 64, 66, 94
11	6, 9, 16, 18, 20, 22, 59, 72, 81, 86, 89, 92
12	1, 7, 21, 26, 33, 34, 47, 50, 60, 79, 85, 96
13	3, 8, 10, 23, 29, 39, 43, 49, 65, 90, 93, 97
14	2, 7, 26, 29, 33, 39, 43, 54, 80, 90, 93, 96
15	19, 27, 41, 46, 52, 55, 61, 66, 68, 73, 83, 88
16	5, 21, 33, 34, 47, 50, 60, 62, 79, 82, 85, 91
17	2, 4, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80
18	1, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
19	53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, 99
20	1, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 92, 96, 100

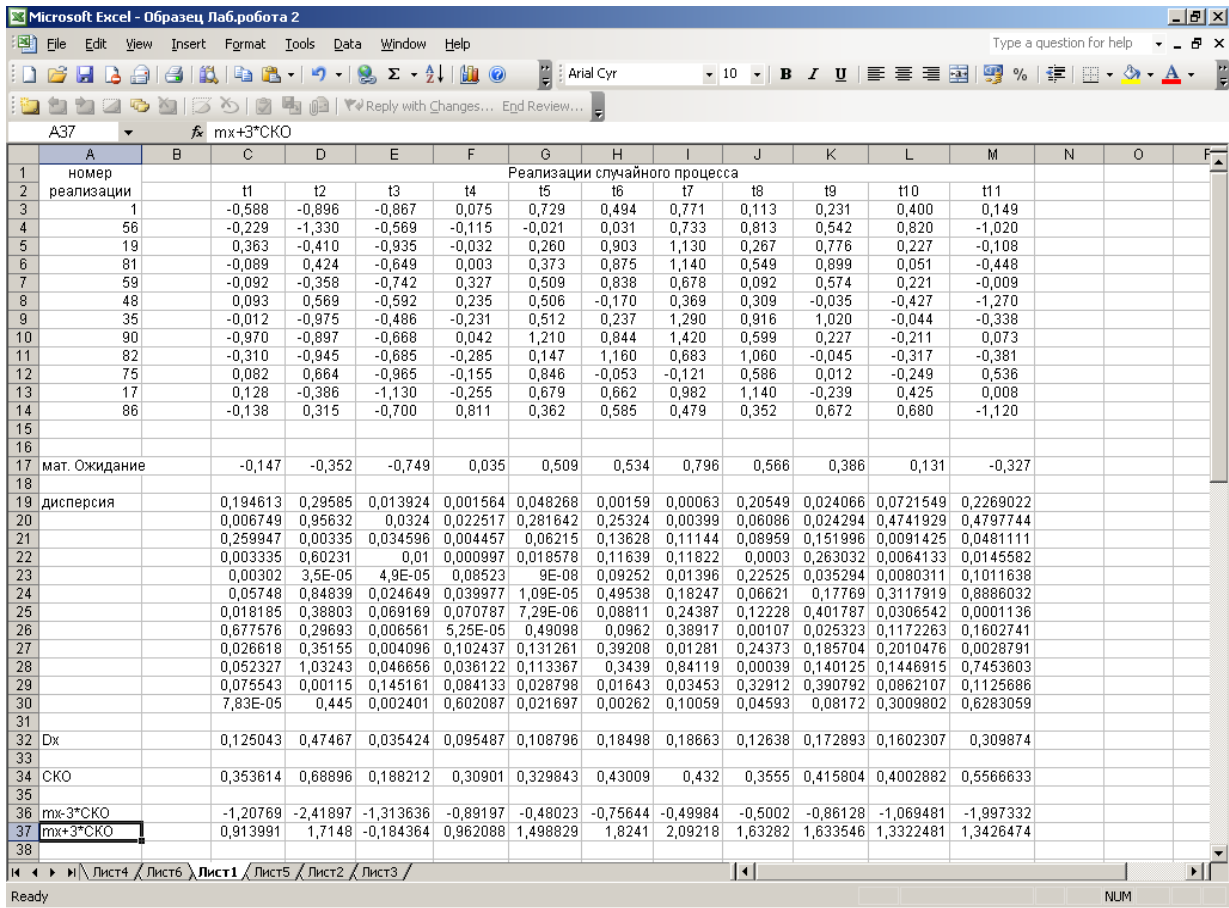


Рис. 5. Приклад виконання розрахунків в Microsoft Excel

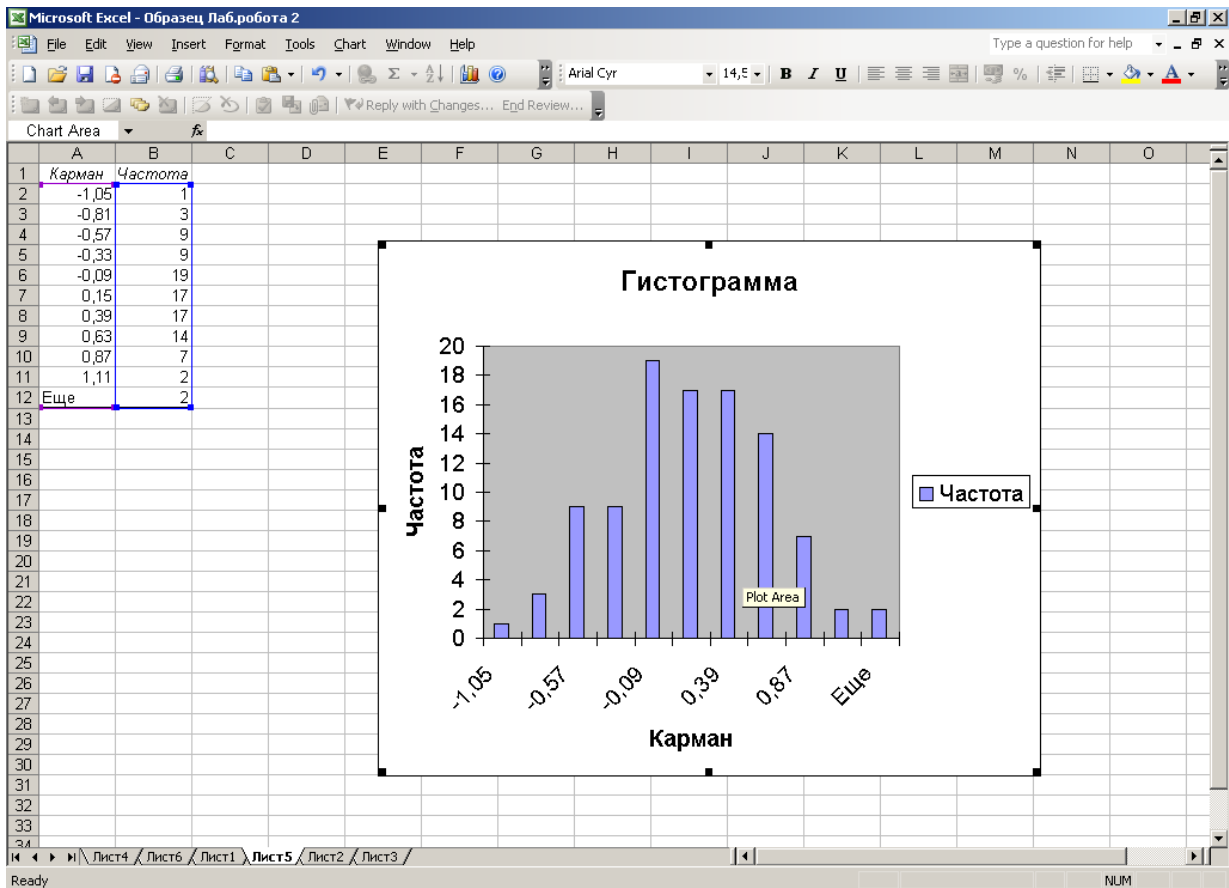


Рис. 6. Гістограма розподілу одного з перетинів випадкового процесу

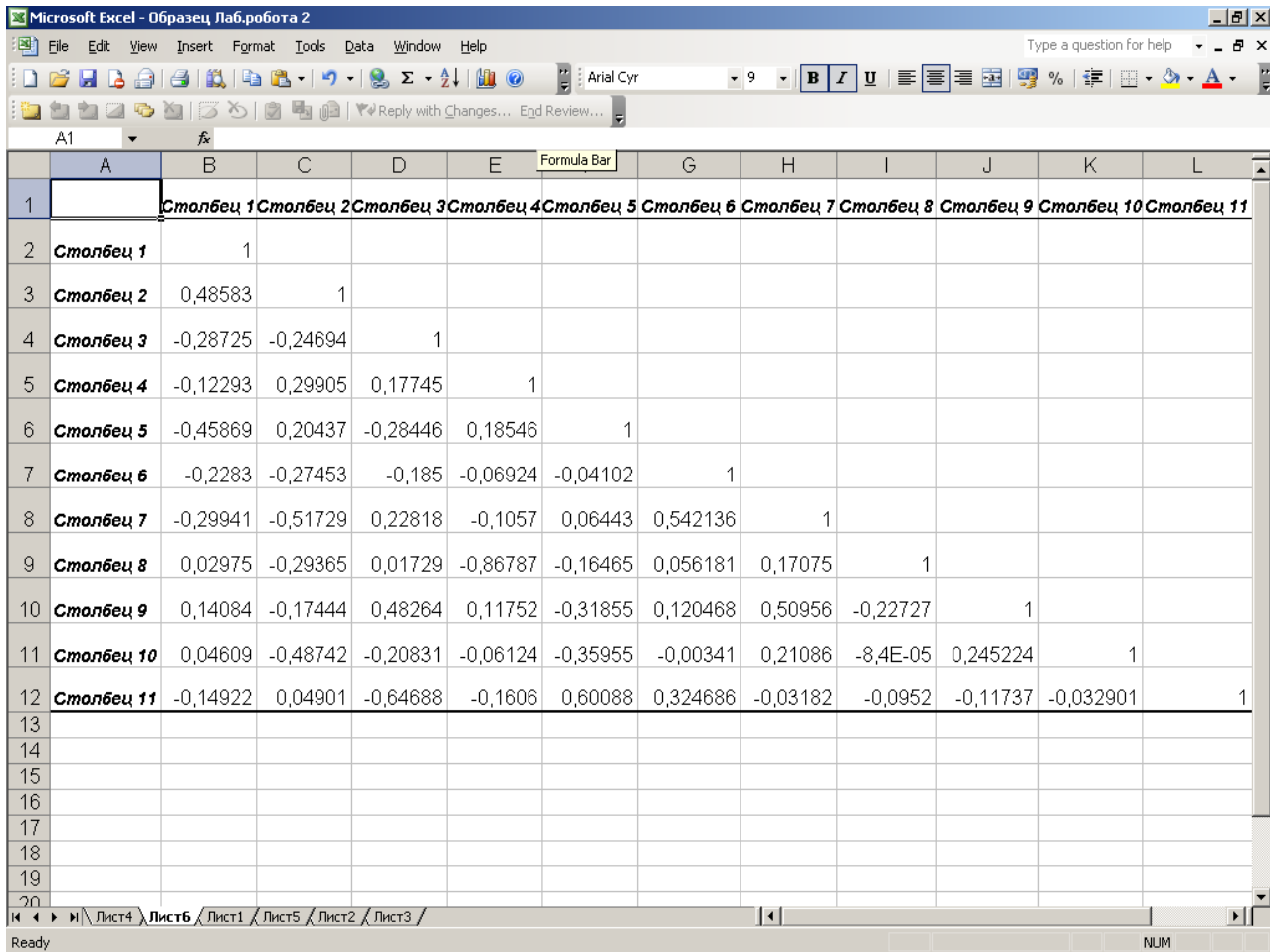


Рис. 7. Кореляційна матриця випадкового процесу

З наведених рисунків видно, що перетин випадкового процесу має нормальний розподіл, а сам випадковий процес є суттєво нестационарним.

### Лабораторна робота № 3

**Тема. Дослідження марківського випадкового процесу з дискретними станами і дискретним часом.**

**Завдання.** На підставі заданого завдання згідно варіанту побудувати матрицю перехідних ймовірностей системи і розмічений граф станів системи з зазначенням чисельних значень ймовірностей її переходу із стану в стан.

**Знайти:**

1) Ймовірність знаходження системи в кожному з можливих станів після третього кроку процесу.

2) Ймовірність всіх можливих станів системи в усталеному режимі.

3) Побудувати графік зміни ймовірності станів системи для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним).

Номер завдання відповідає номеру вашого варіанту згідно наступній таблиці.

Номер варіанту	Номер завдання
1, 11, 23	1.
2, 12, 24	2.
3, 13, 25	3.
4, 14, 26	4.
5, 15, 27	5.
6, 16, 28	6.
7, 17, 29	7.
8, 18, 30	8.
9, 19, 31	9.
10, 20, 32	10.

### Завдання.

**1.** В певні моменти часу  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{10}$  провадиться діагностика комп'ютера. Можливі наступні стани комп'ютера:

$S_0$  – комп'ютер повністю справний;

$S_1$  – незначні несправності, які дозволяють використовувати комп'ютер,

$S_2$  – суттєві несправності, які дають змогу використовувати комп'ютер тільки для певних робіт,

$S_3$  – комп'ютер зовсім непридатний до експлуатації.

Матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Побудувати розмічений граф станів системи. Знайти ймовірність всіх можливих станів системи в сталому режимі. Побудувати графік зміни ймовірності станів системи для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним). В початковий момент часу ( $t = 0$ ) комп'ютер був повністю справним.

**2.** Магазин продає дві марки автомобілів А і В. Досвід експлуатації цих марок автомобілів свідчить про те, що вони мають різні матриці перехідних ймовірностей, що побудовані для двох станів ( $S_1$  – справний,  $S_2$  – несправний):

$$\text{автомобіль марки А} \quad \mathbf{P}_A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix};$$

$$\text{автомобіль марки В} \quad \mathbf{P}_B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці переходів визначені для річного періоду експлуатації автомобілів.

Потрібно визначити:

а) ймовірності станів автомобілів після п'ятирічної експлуатації, якщо в початковому стані автомобілі були справні;

б) побудувати графіки змінювання ймовірності станів автомобілів для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесів (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним);

в) визначити, автомобіль якої марки буде більш надійним для наступних п'яти або десяти років експлуатації після першого п'ятирічного строку.

**3.** Система  $S$  – автомобіль може знаходитись в одному з п'яти можливих станів:

$S_1$  – справний, працює;

$S_2$  – несправний, чекає на діагностику;

$S_3$  – знаходиться на діагностиці;

$S_4$  – ремонтується;

$S_5$  – списується.

Побудувати граф станів системи.

Експертним шляхом визначити ймовірності переходів, якщо відомо, що надійність автомобіля дорівнює 90%, діагностика виконується звичайно на протязі однієї доби, ремонт в середньому займає 5 днів. Побудувати матрицю переходів.

Побудувати графік змінювання ймовірності стану автомобіля для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним).

**4.** Організація, що займається прокатом автомобілів, видає автомобілі напрокат в трьох пунктах: А, В і С. Клієнти можуть повертати автомобіль до любого з цих трьох пунктів. Аналіз процесу повернення автомобілів з прокату на протязі року показав, що клієнти повертають автомобілі в пункти А, В і С з наступними частотами:

Пункти видачі	Пункти прийому автомобілів		
	А	В	С
А	0,8	0,2	0
В	0,2	0	0,8
С	0,2	0,2	0,6

Потрібно:

а) припускаючи, що кількість клієнтів з року в рік не змінюється (або такими змінами можна знехтувати), визначити процентний розподіл клієнтів, що повертають автомобілі, по пунктам прийому в кінці року, якщо на початку року такий розподіл був рівномірним.

б) знайти ймовірності повернення автомобілів на кожен з пунктів прийому на протязі десяти років та побудувати відповідні графіки.

в) визначити ймовірності станів системи в усталеному режимі.

**5.** Водій таксі виявив, що якщо він знаходиться в місті А, то в середньому у 8 випадках з 10 він везе наступного пасажера в місто В, а у випадках, що залишилися, буде поїздка по місту А. Якщо ж він знаходиться в місті В, то в середньому в 4 випадках з 10 він везе пасажера до міста А, а у випадках, що залишилися, буде поїздка по місту В.

Потрібно:

- а) визначити можливі стани системи та побудувати граф станів;
- б) вписати матрицю перехідних ймовірностей системи;
- в) знайти ймовірності станів системи для кожного з 10 кроків та побудувати відповідні графіки, якщо:

- в початковому стані водій знаходився в місті А;

- в початковому стані водій знаходився в місті В;

г) визначити ймовірності станів системи в усталеному режимі.

**6.** Система S являє собою технічний устрій, що складається з  $m$  вузлів і час від часу (в моменти  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ ) проходить періодичний технічний огляд та ремонт. Після кожного кроку (моменту огляду та ремонту) система може виявитися в одному з наступних станів:

$S_0$  – с, ні один з вузлів не був замінений новим;

$S_1$  – один вузол був замінений новим, решта вузлів справні;

$S_2$  – два вузли були замінені новими, решта вузлів справні;

$S_i$  –  $i$  вузлів ( $i < m$ ) були замінені новими, решта вузлів справні;

$S_m$  – всі  $m$  вузлів були замінені новими;

Сумарний потік моментів закінчення огляду всіх вузлів – Пуасоновський з інтенсивністю  $\lambda=4$ . Ймовірність того, що в момент профілактики вузол доведеться замінити новим, дорівнює  $p = 0,4$ .

Розглядаючи процес профілактичного огляду та ремонту (заміни вузлів) як марковський процес розмноження та загибелі, обчислити ймовірності станів системи в усталеному режимі (для  $m = 3$ ), якщо в початковий момент часу всі вузли справні.

**7.** Технічний устрій має два можливих стана:

$S_1$  – справний, працює;

$S_2$  – несправний, ремонтується;

Матриця перехідних ймовірностей має вигляд: 
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Знайти ймовірність знаходження системи в кожному з можливих станів після третього кроку процесу.

Знайти ймовірність всіх можливих станів системи в усталеному режимі.

Побудувати графік зміни ймовірності станів системи для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним).

Знайти ймовірності станів системи в усталеному режимі, якщо в початковому стані технічний пристрій був справний.



**8.** Система  $S$  складається з трьох вузлів – I, II і III, кожен з яких може в процесі роботи системи вийти з ладу. Назвати можливі стани системи та побудувати графі станів для двох випадків:

- а) ремонт вузлів не провадиться (чистий процес «загибелі» системи);
- б) вузол, що вийшов з ладу, відразу починає відновлюватись.

Експертним шляхом визначити ймовірності переходів, якщо відомо, що надійність першого вузла дорівнює 90%, надійність другого вузла дорівнює 80%, а надійність третього вузла дорівнює 70%. Ремонт третього вузла зазвичай самий простий, ремонт другого вузла складніший, а ремонт третього вузла найбільш складний. Побудувати матрицю переходів.

Побудувати графік змінювання ймовірностей станів системи для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним).

**9.** В деякому місті виходять в світ три журнали:  $C_1$ ,  $C_2$  та  $C_3$ , а читачі передплачують тільки один з них. Нехай читачі можуть змінювати журнал, який вони передплачують, один раз на рік і ймовірності таких змін відомі. Статистичні дані свідчать, що:

- 30% читачів  $C_1$  передплачують в наступному році журнал  $C_2$ ;
- 40% читачів  $C_1$  передплачують в наступному році журнал  $C_3$ ;
- 15% читачів  $C_2$  передплачують в наступному році журнал  $C_3$ ;
- 10% читачів  $C_2$  передплачують в наступному році журнал  $C_1$ ;
- 8% читачів  $C_3$  передплачують в наступному році журнал  $C_1$ ;
- 12% читачів  $C_3$  передплачують в наступному році журнал  $C_2$ ;

Записати матрицю перехідних ймовірностей для середньорічних змін кількості передплатників журналів.

Вважаючи, що кількість передплатників в місті незмінна, визначити яка доля читачів буде передплачувати кожен з журналів на протязі 10 років, якщо початкове розподілення читачів по журналах було рівномірне.

Знайти ймовірності станів системи в усталеному режимі і визначити журнал, що буде користуватися найбільшим попитом читачів.

**10.** Технічний пристрій складається з двох вузлів та може знаходитись в одному з наступних станів:

- $S_1$  – обидва вузли справні, працює;
- $S_2$  – несправний тільки перший вузол;
- $S_3$  – несправний тільки другий вузол;
- $S_4$  – несправні обидва вузли.

Ймовірність виходу з ладу після місячної експлуатації для першого вузла  $p_1=0,4$ ; для другого вузла  $p_2=0,3$ ; а ймовірність спільного виходу з ладу обох вузлів –  $p_{1,2}=0,1$ . В початковому стані обидва вузли справні, працюють.

Записати матрицю перехідних ймовірностей та граф станів системи.

Визначити ймовірності станів системи на протязі 12 місяців.

Знайти ймовірності станів системи в усталеному режимі.

### Звіт по лабораторній роботі повинен містити:

- 1) завдання на лабораторну роботу згідно з номером варіанту;
- 2) граф станів та матрицю перехідних ймовірностей системи;
- 3) розрахунки ймовірностей станів системи на протязі 10-12 кроків, виконані за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple;
- 4) графіки ймовірностей станів системи, побудовані за допомогою системи Maple;
- 5) систему алгебраїчних рівнянь для знаходження фінальних ймовірностей станів системи та її розв'язання методом Крамера за допомогою системи

### Приклад виконання розрахунків для лабораторної роботи № 3

**Завдання.** Система S – автомобіль може знаходитись в одному з двох можливих станів:

$S_1$  – справний, працює;

$S_2$  – несправний, не працює.

Відома матриця перехідних ймовірностей  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

В початковий момент часу автомобіль був несправним.

Побудувати граф станів системи.

Побудувати графік змінювання ймовірності стану автомобіля для перших 10 кроків процесу. Зробити висновок про характер процесу (наявність усталеного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним).

Знайти фінальні ймовірності станів системи.

**Хід роботи.** 1. Граф станів системи складається з двох вершин:

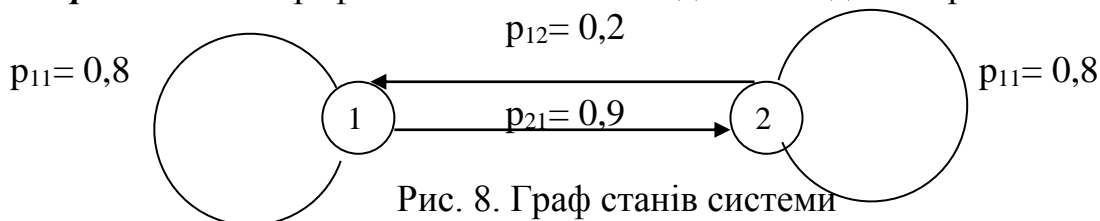


Рис. 8. Граф станів системи

2. Розрахунок ймовірностей станів системи виконується за допомогою системи Maple:

1. Підключаємо бібліотеку лінійної алгебри

```
>with(linalg):
```

2. Формуємо матрицю перехідних ймовірностей

```
>P:=matrix(2,2,[0.8,0.2,0.9,0.1]);
```

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

3. Формуємо вектор початкових ймовірностей (0 - ймовірність першого стану, 1 - ймовірність другого)

```
>p0:=vector(2,[0,1]);
```

$$p_0 = (0 \quad 1)$$

4. Кожний наступний вектор станів системи знаходиться за рекурентною формулою  $p(i+1) := P^T * p(i)$ . За наведеною формулою знаходимо вектори станів системи після першого, другого, та інших кроків (до десятого включно).

```

>p1:=evalm(transpose(P) &*p0);
           p1 = ( 0.9  0.1 )
>p2:=evalm(transpose(P) &*p1);
           p2 = ( 0.81  0.19 )
>p3:=evalm(transpose(P) &*p2);
           p3 = ( 0.819  0.181 )
>p4:=evalm(transpose(P) &*p3);
           p4 = ( 0.8181  0.1819 )
>p5:=evalm(transpose(P) &*p4);
           p5 = ( 0.81819  0.18181 )
>p6:=evalm(transpose(P) &*p5);
           p6 = ( 0.818181  0.181819 )
>p7:=evalm(transpose(P) &*p6);
           p7 = ( 0.8181819  0.1818181 )
>p8:=evalm(transpose(P) &*p7);
           p8 = ( 0.81818181  0.18181819 )
>p9:=evalm(transpose(P) &*p8);
           p9 = ( 0.818181819  0.181818181 )
>p10:=evalm(transpose(P) &*p9);
           p10 = ( 0.8181818181  0.1818181819 )

```

5. Для побудови графіку ймовірностей станів системи сформуємо дві ступінчасті функції - функцію ймовірностей 1-го стану та функцію ймовірностей 2-го стану

```

>f1(t) :=piecewise(t<1,p0[1],t<2,p2[1],t<3,p3[1],t<4,p4[1],t
<5,p5[1],t<6,p6[1],t<7,p7[1],t<8,p8[1],t<9,p9[1],t>=9,p10[1
]);

```

$$f1(t) := \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 0.81 & t < 2 \\ 0.819 & t < 3 \\ 0.8181 & t < 4 \\ 0.81819 & t < 5 \\ 0.818181 & t < 6 \\ 0.8181819 & t < 7 \\ 0.81818181 & t < 8 \\ 0.818181819 & t < 9 \\ 0.8181818181 & t \geq 9 \end{cases}$$

```
> plot(f1(t), t=0..10);
```

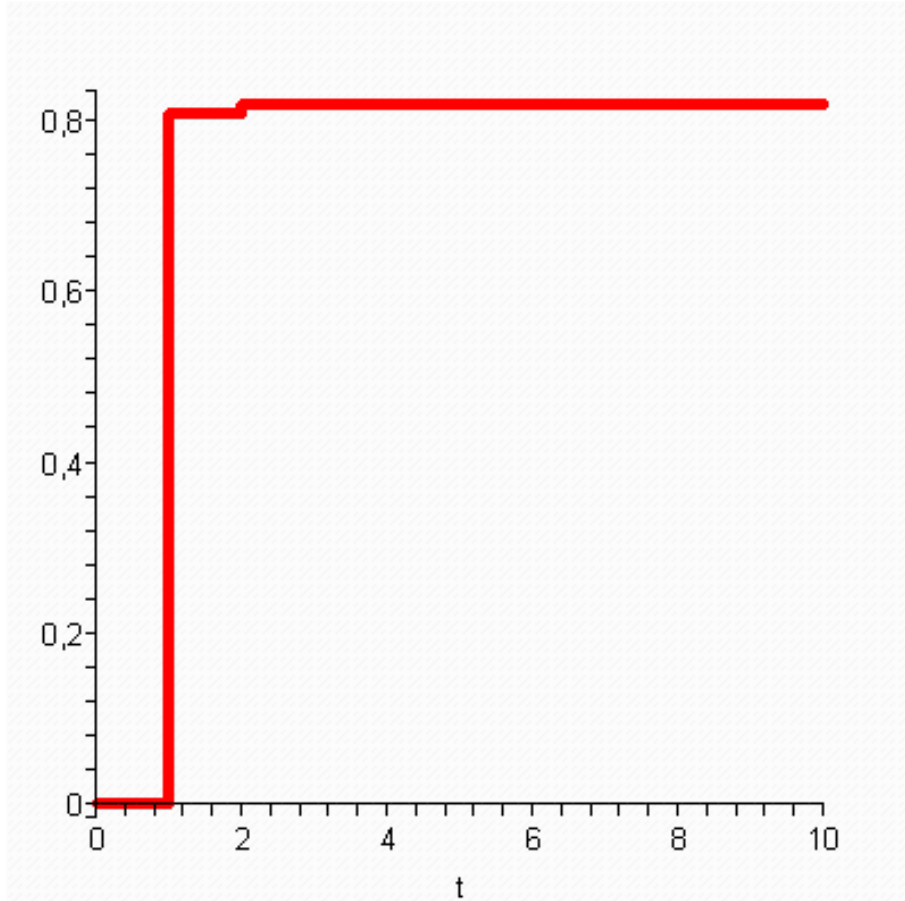


Рис. 9. Графік функції ймовірностей 1-го стану системи

```
>f2(t) :=piecewise(t<1,p0[2], t<2,p2[2], t<3,p3[2], t<4,p4[2], t
<5,p5[2], t<6,p6[2], t<7,p7[2], t<8,p8[2], t<9,p9[2], t>=9,p10[2
1]);
```

$$f_2(t) := \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0.19 & t < 2 \\ 0.181 & t < 3 \\ 0.1819 & t < 4 \\ 0.18181 & t < 5 \\ 0.181819 & t < 6 \\ 0.1818181 & t < 7 \\ 0.18181819 & t < 8 \\ 0.181818181 & t < 9 \\ 0.1818181819 & 9 \leq t \end{cases}$$

<

```
>plot(f2(t), t=0..10, 0.18..0.2);
```

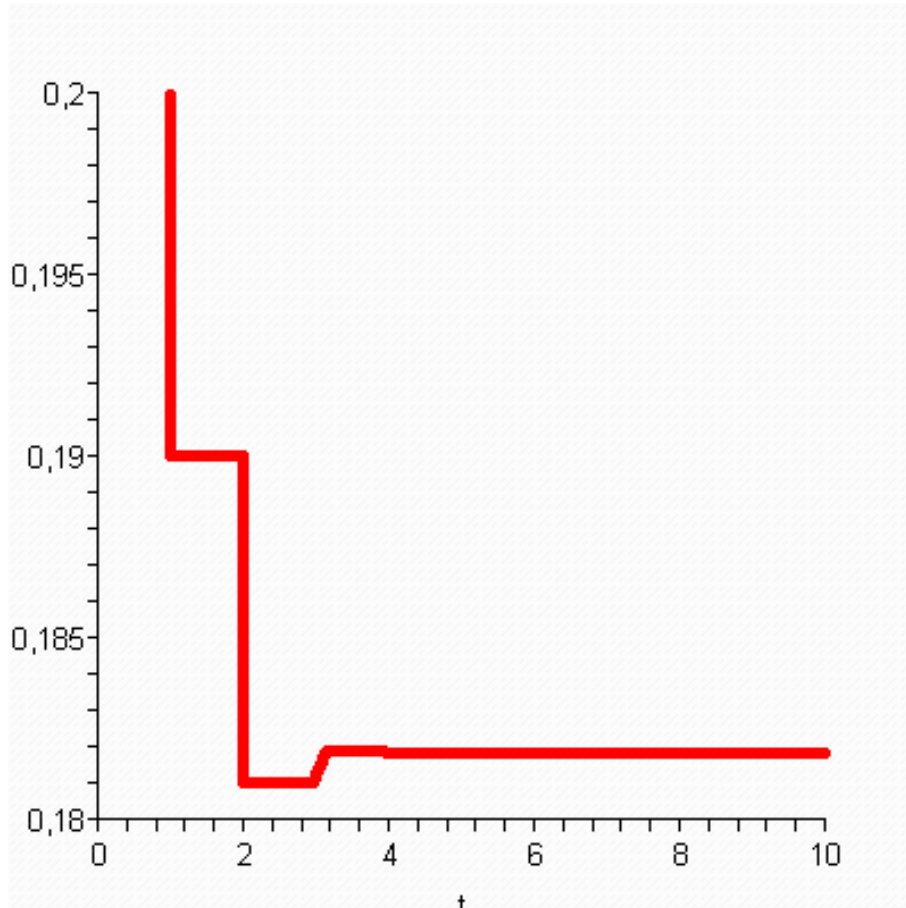


Рис. 9. Графік функції ймовірностей 2-го стану системи

**Висновок 1.** З побудованих графіків видно, що ймовірності станів системи швидко стабілізуються і вже після 4-го кроку на графіках не помітно змін ймовірності, тобто процес має усталений режим вже після 4-го кроку.

В усталеному режимі система знаходиться в 2-му стані з приблизною ймовірністю 0,82, а ймовірність того, що система знаходиться в 1-му стані значно менша і дорівнює приблизно 0,18.

Для знаходження фінальних ймовірностей складаємо систему рівнянь. Розв'язок системи знайдемо за допомогою оператора **solve**.

```
>eqn1:=-0.9*p1+0.2*p2=0;
```

$$eqn1 := -0.9 p1 + 0.2 p2 = 0$$

```
>eqn2:=p1+p2=1;
```

$$eqn2 := p1 + p2 = 1$$

```
>solve({eqn1, eqn2}, {p1, p2});
```

$$\{p1 = 0.1818181818, p2 = 0.8181818182\}$$

**Висновок 2.** Фінальні ймовірності, отримані внаслідок розв'язання системи рівнянь практично співпадають із значеннями ймовірностей станів після 10-го кроку.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

**Тема:** Марківські випадкові процеси з дискретними станами і безперервним часом.

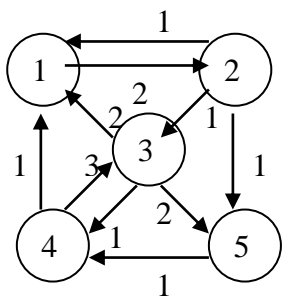
**Завдання.** Розмічений граф станів системи і початковий стан системи задані в таблиці варіантів.

Скласти систему диференціальних рівнянь Колмогорова і початкові умови для цієї системи.

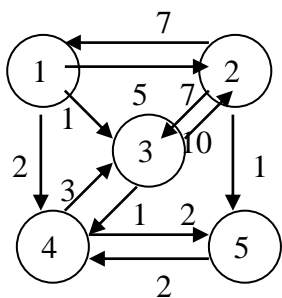
Розв'язати систему за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple і побудувати графіки функцій ймовірностей станів системи залежно від часу. Визначити по графіках час  $t_{кр}$ , починаючи з якого процес в системі можна вважати стаціонарним.

Скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження фінальних ймовірностей станів системи. Розв'язати систему рівнянь за допомогою Maple.

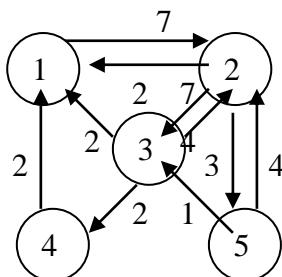
Визначити на скільки відрізняються знайдені значення від значень ймовірностей станів системи, що були отримані в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь Колмогорова при  $t = t_{кр}$ .



- S(o)=S1 – варіант 1
- S(o)=S2 – варіант 2
- S(o)=S3 – варіант 3
- S(o)=S4 – варіант 4
- S(o)=S5 – варіант 5



- S(o)=S1 – варіант 6
- S(o)=S2 – варіант 7
- S(o)=S3 – варіант 8
- S(o)=S4 – варіант 9
- S(o)=S5 – варіант 10



- S(o)=S1 – варіант 11
- S(o)=S2 – варіант 12
- S(o)=S3 – варіант 13
- S(o)=S4 – варіант 14
- S(o)=S5 – варіант 15

Рис. 11. Графи станів системи з початковими умовами

для різних варіантів роботи

## Виконання розрахунків за допомогою системи Maple

1. Задаємо диференціальні рівняння  $s1 - s4$ :

```
>s1:=diff(p1(t),t)=-2*p1(t)+1*p2(t)+1*p4(t);
```

$$s1 := \frac{d}{dt} p1(t) = -2 p1(t) + p2(t) + p4(t)$$

```
>s2:=diff(p2(t),t)=-1*p2(t)-1*p2(t)-1*p2(t)+2*p1(t);
```

$$s2 := \frac{d}{dt} p2(t) = -3 p2(t) + 2 p1(t)$$

```
>s3:=diff(p3(t),t)=-2*p3(t)-1*p3(t)+2*p2(t)+3*p4(t);
```

$$s3 := \frac{d}{dt} p3(t) = -3 p3(t) + 2 p2(t) + 3 p4(t)$$

```
>s4:=diff(p4(t),t)=-3*p4(t)-1*p4(t)+1*p3(t)+1*p5(t);
```

$$s4 := \frac{d}{dt} p4(t) = -4 p4(t) + p3(t) + p5(t)$$

```
>s5:=1=p1(t)+p2(t)+p3(t)+p4(t)+p5(t);
```

$$s5 := 1 = p1(t) + p2(t) + p3(t) + p4(t) + p5(t)$$

2. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь за допомогою оператора **dsolve**. Розв'язки задачі Коши – функції  $p1(t)$ ,  $p2(t)$ ,  $p3(t)$ ,  $p4(t)$ ,  $p5(t)$  за допомогою системи **Maple** отримуємо в аналітичному вигляді. (Отримані формули досить громіздкі, тому в явному вигляді не наводяться).

```
>F:=dsolve({s1,s2,s3,s4,s5,p1(0)=1,p2(0)=0,p3(0)=0,p4(0)=0,p5(0)=0},  
{p1(t),p2(t),p3(t),p4(t),p5(t)});
```

3. Для побудови графіків функцій  $p1(t)$ ,  $p2(t)$ ,  $p3(t)$ ,  $p4(t)$ ,  $p5(t)$  позначимо їх відповідно через  $r1$ ,  $r2$ ,  $r3$ ,  $r4$  та  $r5$ . Побудуємо графіки за допомогою оператора **plot**.

```
>r1:=subs(F,p1(t));r2:=subs(F,p2(t));r3:=subs(F,p3(t));r4:=subs(F,  
p4(t));r5:=subs(F,p5(t));  
>plot({r1,r2,r3,r4,r5},t=0..15);
```

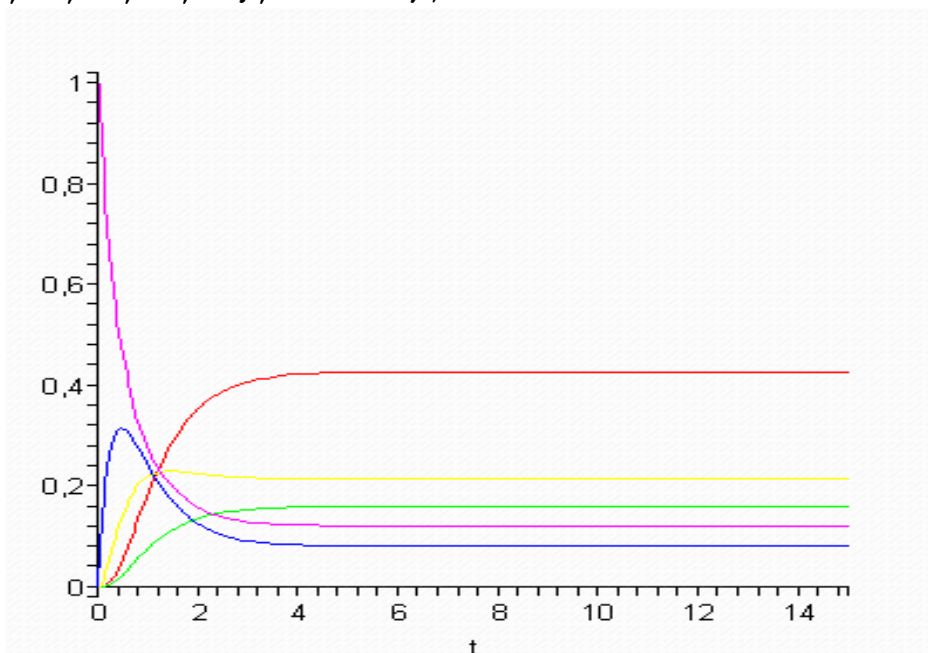


Рис. 12. Графіки функцій ймовірностей станів системи

4. Для знаходження фінальних ймовірностей формуємо систему лінійних рівнянь:

$$\text{>g1} := 0 = -2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 + 1 \cdot P_4;$$

$$g1 := 0 = -2 P_1 + P_2 + P_4$$

$$\text{>g2} := 0 = -1 \cdot P_2 - 1 \cdot P_2 - 1 \cdot P_2 + 2 \cdot P_1;$$

$$g2 := 0 = -3 P_2 + 2 P_1$$

$$\text{>g3} := 0 = -2 \cdot P_3 - 1 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_4;$$

$$g3 := 0 = -3 P_3 + 2 P_2 + 3 P_4$$

$$\text{>g4} := 1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5;$$

$$g4 := 1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$\text{>g5} := 0 = -1 \cdot P_5 + 2 \cdot P_3 + 1 \cdot P_2;$$

$$g5 := 0 = -P_5 + 2 P_3 + P_2$$

Замість четвертого рівняння записане рівняння нормування.

5. Розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оператора **solve**

$$\text{>P} := \text{evalf}(\text{solve}(\{g1, g2, g3, g4, g5\}, \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}));$$

$$P := \{P_2 = 0.07407407407, P_4 = 0.1481481481, P_1 = 0.1111111111, P_3 = 0.1975308642, P_5 = 0.4691358025\}$$

$$\text{>z1} := \text{subs}(P, P_1);$$

$$z1 := 0.1111111111$$

$$\text{>z2} := \text{subs}(P, P_2); \text{z3} := \text{subs}(P, P_3); \text{z4} := \text{subs}(P, P_4); \text{z5} := \text{subs}(P, P_5);$$

$$z2 := 0.07407407407$$

$$z3 := 0.1975308642$$

$$z4 := 0.1481481481$$

$$z5 := 0.4691358025$$

6. Будуємо графіки функцій ймовірностей та показуємо прямі фінальних ймовірностей.

$$\text{>plot}(\{r1, r2, r3, r4, r5, z1, z2, z3, z4, z5\}, t=0..10);$$

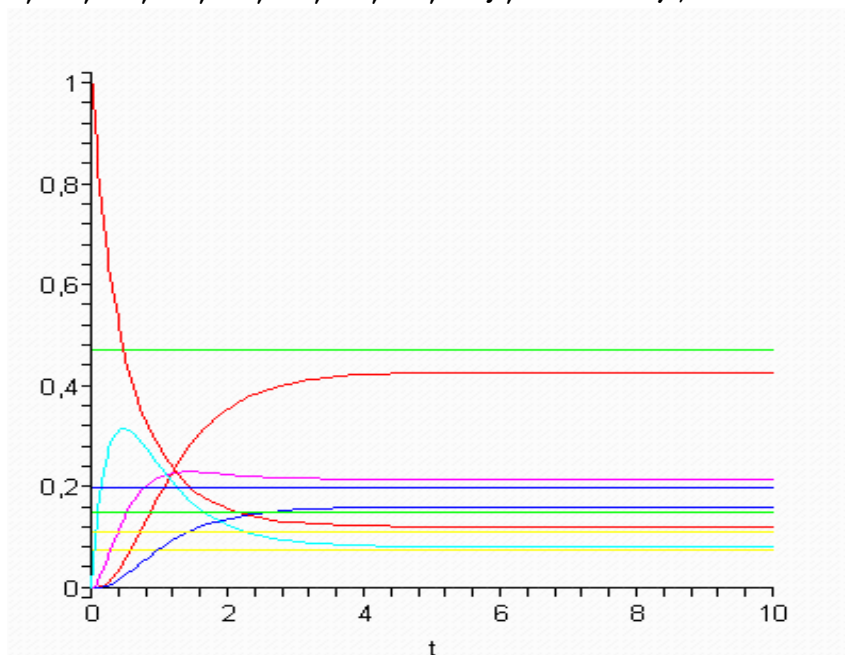




Рис. 13. Графіки функцій ймовірностей станів системи з показаними прямими фінальних ймовірностей

7. Обрахуємо фінальні ймовірностей при  $t_{кр} = 5$  та знаходимо різницю між цими значеннями та значеннями фінальних ймовірностей.

```
>y1:=evalf(subs(t=5,r1));y2:=evalf(subs(t=5,r2));y3:=evalf(subs(t=5,r3));y4:=evalf(subs(t=5,r4));y5:=evalf(subs(t=5,r5));
```

```
y1 := 0.1205776887
```

```
y2 := 0.08071404874
```

```
y3 := 0.2135535896
```

```
y4 := 0.1596429756
```

```
y5 := 0.4255116972
```

```
>y1-z1;y2-z2;y3-z3;y4-z4;y5-z5;
```

```
0.0094665776
```

```
0.00663997467
```

```
0.0160227254
```

```
0.0114948275
```

```
-0.0436241053
```

**Висновок.** Знайти функції ймовірностей станів системи в перехідний період можна шляхом складання системи диференційних рівнянь Колмогорова та розв'язання задачі Коши. Фінальні ймовірності можна знайти значно простіше шляхом складання та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Найдені першим та другим способами значення фінальних ймовірностей незначно відрізняються одне від одного.

### **2.3. Загальні вимоги до оформлення звітів з лабораторних робіт**

Звіт з лабораторної роботи виконується на аркушах формату А4 і складається з титульного аркушу, змісту, основної частини, висновків та списку літератури. Основна частина звіту повинна містити тему роботи, завдання на лабораторну роботу, короткі теоретичні відомості та хід виконання роботи. Хід виконання роботи розписується студентом докладно та містить в собі вихідні дані, та описання покрокового виконання роботи з наведенням необхідних формул та графіків у вигляді скріншотів.

## **3. ЛІТЕРАТУРА**

### **Базова**

1. Жлуктенко В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: Навч. посібник / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна – К.: КНЕУ, 2002. – 226 с.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие./ 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. — 432 с.

### Основна

3. Розанов Ю. А. Случайные процессы / Ю.А. Розанов // 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1979. – 184 с.
4. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для экон. спец. вузов / В. А. Колемаев, О. В. Староверов, В. Б. Турундаевский ; Под. ред. В. А. Колемаева. – М. : Высшая школа, 1991. – 400 с.
5. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Навч.-метод. посібник у 2 ч. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – ч. 1. Теорія ймовірностей. – К., КНЕУ, 2000.
6. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Навч.-метод. посібник у 2 ч. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – ч. 2. Математична статистика. – К., КНЕУ, 2001.

### Додаткова

7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е, доп. - М.: Высш. шк., 2002.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2002.
9. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

## 4. САМОСТІЙНА РОБОТА

Самостійна робота студентів передбачає самостійне вивчення узгодженої з викладачем теми, підготовку доповіді та виступ на семінарському занятті. Можливі теми для самостійного опрацювання наведені в наступній таблиці.

Тема	Питання для самостійного опрацювання	Форма контролю
1	2	3
1. Модель Ерланга.	Система рівнянь Ерланга. Формули Ерланга. Поняття системи масового обслуговування . Характеристики функціонування системи масового обслуговування.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді
2. Основні характеристики систем масового обслуговування	Характеристики обслуговування. Поняття пріоритетності обслуговування. Скорочена символіка позначень Кендала. Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з n каналами і необмеженою чергою.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді
3. Основні моделі систем масового обслуговування	Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з 1 каналом і обмеженою чергою. Ймовірнісна модель системи масового обслуговування з n каналами і обмеженою чергою.	Реферати, конспектування у зошиті, доповіді

## 5. ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ (ІРС)

Індивідуальна робота виконується студентами денної форми навчання і передбачає:

- 1) виконання індивідуальних завдань підвищеної складності для студентів, які бажають підвищити свій рейтинг;
- 2) індивідуальне консультування викладачем студентів з тематики дисципліни.

### ***ІРС № 1. Дослідження марковського випадкового процесу з дискретними станами і дискретним часом***

**Завдання.** На підставі заданої умови задачі побудувати матрицю перехідних ймовірностей системи і розмічений граф станів системи з зазначенням чисельних значень ймовірностей переходу зі стану в стан. Вважати, що в початковий момент часу система перебуває в стані S1.

#### **Знайти:**

Ймовірності перебування системи в кожному з можливих станів після третього кроку процесу.

Ймовірності станів системи в сталому режимі.

Побудувати графік зміни ймовірностей станів системи для перших 10 кроків процесу.

Зробити висновок про характер випадкового процесу (Наявність стаціонарного режиму, характерний час стабілізації, який стан є найбільш вірогідним і т.д.)

Умови задач задані на сторінках 73-77 підручника [2]. Номер завдання відповідає номеру вашого варіанта згідно наступної таблиці.

Номер варіанта	Номер задачі
1	2.1.
2	2.2.
3	2.3.
4	2.4.
5	2.5.
6	2.6.
7	2.7.
8	2.8.
9	2.9.
10	2.10.
11	2.11.

## ІРС № 2. Ланцюги Маркова

Задана матриця ймовірностей переходу для ланцюга Маркова та початкова розподіл ймовірностей в момент часу  $t_0 = 0$ .

Побудувати розмічений граф станів системи. Знайти розподіл ймовірностей в моменти часу  $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5$ .

За розміченим графом системи скласти систему рівнянь Колмогорова. У припущенні стаціонарності отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження фінальних ймовірностей  $P_i$ . Розв'язати систему з урахуванням умови нормування  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$  та знайти граничні (фінальні) ймовірності станів системи.

$$\begin{array}{l} \text{Варіант 1} \\ A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \\ P(t_0=0) = (0; 0; 1; 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Варіант 2} \\ A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \\ P(t_0=0) = (0,7; 0,3; 0; 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Варіант 3} \\ A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \\ P(t_0=0) = (1; 0; 0; 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Варіант 4} \\ A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \\ P(t_0=0) = (0; 0; 0; 1) \end{array}$$

## 6. КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Контрольна робота складається з двох розділів: „1. Теоретична частина” та „2. Контрольні завдання”. Варіант роботи визначається викладачем.

Контрольна робота виконується на аркушах формату А4. Титульний аркуш друкується на комп'ютері, містить назву навчального закладу, кафедри, курс, групу, прізвище та ініціали студента та відповідає зразку, що наведений у додатку А. Наступні сторінки пишуться студентом від руки, на одному боці аркуша, та нумеруються від титульної до останньої сторінки без пропусків і повторів. На титульній сторінці номер не ставиться.

**Контрольні завдання складаються з наведених в розділі 2.2 лабораторних робіт.** Короткі теоретичні відомості по кожній лабораторній роботі конспектуються студентом у відповідному розділі теоретичної частини. Звіт з кожної лабораторної роботи повинен містити основні формули, які використовувались при обчисленнях, а також описання ходу виконання роботи.

Виконану контрольну роботу студент подає на перевірку за 2 тижні до початку екзаменаційної сесії. У разі отримання негативної оцінки робота повертається на доопрацювання, після чого виконується повторно і знову подається на перевірку. До здачі заліку або іспиту з дисципліни студент допускається лише за умови отримання позитивної оцінки за контрольну роботу.

## **7. МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ**

### **Питання до модульного контролю 1.**

- 1) Що називається елементарною випадковою функцією?
- 2) Функція розподілу ймовірностей для випадкового процесу (одновимірна, двовимірна).
- 3) Що називається математичним сподіванням випадкового процесу?
- 4) Що називається дисперсією випадкового процесу?
- 5) Чому дорівнює  $M_x(t)$ ?
- 6) Чому дорівнює  $D_x(t)$ ?
- 7) Чому дорівнює кореляційна функція  $K_x(t_1, t_2)$ ?
- 8) Чому дорівнює нормована кореляційна функція  $r_x(t_1, t_2)$ ?
- 9) Означення марківського випадкового процесу.
- 10) Означення марківського випадкового процесу з дискретними станами та дискретним часом.
- 11) Що називається ергодичним станом марківського процесу?
- 12) Який стан марківського процесу називають нестійким?
- 13) Що називається поглинальним станом?
- 14) Що називають ланцюгом Маркова?
- 15) Імовірнісна матриця переходів та її властивості.
- 16) Що називають умовними ймовірностями переходу системи з одного стану до іншого?
- 17) Канонічна форма матриці  $\pi$  для поглинального ланцюга Маркова.
- 18) Що називають поглинальним ланцюгом Маркова?
- 19) Що називають ергодичним ланцюгом Маркова?
- 20) Що називають циклічним ланцюгом Маркова?
- 21) Що називають регулярним ланцюгом Маркова?

### **Питання до модульного контролю 2.**

- 1) Зміст вектора  $\vec{m}$ .
- 2) Зміст вектора  $\vec{f}$ .
- 3) Зміст вектора  $\vec{q}$ .
- 4) Який канонічний вигляд має матриця  $Q$ ?

- 5) Що називають вектором вартості.
- 6) Що називають вектором потреб.
- 7) Зміст елементів матриці  $N$ .
- 8) Імовірнісна модель грошових потоків із використанням регулярних ланцюгів Маркова.
- 9) Імовірнісна модель грошових потоків із вибірковою втручанням урядом у грошову ситуацію міст (регулярні ланцюги Маркова).
- 10) Імовірнісна модель мобільності професій.
- 11) Імовірнісна модель ефективності роботи системи.
- 12) Що називають матрицею вартості  $R$ .
- 13) Визначення марківського процесу із дискретними станами і неперервним часом.
- 14) Пуассонівський процес. Формула для обчислення ймовірностей для Пуассонівського процесу.
- 15) Визначити, чому дорівнює  $p_0(t)$ .
- 16) Визначити, чому дорівнює  $p_1(t)$ .
- 17) Визначити, чому дорівнює  $p_{k>1}(t)$ .
- 18) Чому дорівнює  $A(x,t)$ ?
- 19) Чому дорівнює  $M(k)$  для Пуассонівського розподілу?
- 20) Чому дорівнює  $D(k)$  для Пуассонівського розподілу?
- 21) Відсутність післядії для експоненціального закону розподілу.

## 8. ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Підсумковий контроль з дисципліни передбачений у формі іспиту. Екзаменаційний білет складається з теоретичного питання та практичної задачі. До участі в іспиту допускаються студенти за умови виконання всіх лабораторних робіт та захисту відповідних звітів.

### Питання до іспиту з теорії випадкових процесів

1. Випадкова величина та способи її математичного опису.
2. Числові характеристики випадкової величини і їх статистичні оцінки.
3. Гістограма і емпірична функція розподілу як статистичні оцінки закону розподілу випадкової величини.
4. Основні закони розподілу випадкових величин і їх особливості.
5. Перевірка гіпотез про відповідність експериментальних даних теоретичному закону розподілу.
6. Системи випадкових величин і їх характеристики. Поняття коваріації і коефіцієнта кореляції.
7. Поняття випадкового процесу. Приклади.
8. Поняття сімейства реалізацій і перетину випадкового процесу.
9. Одновимірний закон розподілу випадкової величини і його застосування для опису випадкового процесу.
10. Багатовимірний закон розподілу системи випадкових величин і його застосування для опису випадкового процесу.

11. Математичне очікування випадкового процесу. Знаходження математичного очікування дискретного випадкового процесу.
12. Математичне очікування випадкового процесу. Знаходження математичного очікування безперервного випадкового процесу. Поняття центрованого випадкового процесу.
13. Дисперсія і середньоквадратичне відхилення дискретного випадкового процесу.
14. Дисперсія і середньоквадратичне відхилення безперервного випадкового процесу.
15. Кореляційна матриця випадкового процесу. Нормована кореляційна матриця.
16. Поняття стаціонарного випадкового процесу. Особливості нормованої кореляційної матриці для стаціонарних випадкових процесів. Кореляційна функція.
17. Класифікація випадкових процесів за часом і по станах.
18. Поняття ланцюга Маркова. Графік реалізації випадкового процесу, що є ланцюгом Маркова.
19. Граф станів системи і його використання для опису ланцюга Маркова.
20. Матриця перехідної ймовірності ланцюга Маркова і її властивості.
21. Поняття однорідного ланцюга Маркова. Формула знаходження ймовірності станів для однорідного ланцюга Маркова.
22. Поняття безперервного ланцюга Маркова. Однорідні і неоднорідні безперервні ланцюги Маркова.
23. Рівняння Колмогорова для знаходження вірогідності станів безперервного ланцюга Маркова. Мнемонічне правило складання рівнянь Колмогорова.
24. Поняття ергодичного випадкового процесу. Фінальна ймовірність станів безперервного ланцюга Маркова.
25. Знаходження фінальних ймовірностей станів ергодичної системи по рівняннях Колмогорова.
26. Поняття системи масового обслуговування та її пропускної спроможності.
27. Потік заявок системи масового обслуговування і його властивості. Пуассонівський потік.
28. Час обслуговування заявки в системі масового обслуговування і його характеристики.
29. Умови застосовності теорії марківських випадкових процесів для опису систем масового обслуговування.
30. Аналітична модель системи масового обслуговування з відмовами. Її граф станів, рівняння Ерланга і формули Ерланга.

#### **Задачі до іспиту з теорії випадкових процесів**

1. Заданий перетин випадкового процесу, що складається з  $n = 12$  вимірювань  
 $X(t_1) = (0.64; 0.54; 0.34; 0.23; 0.12; -0.16; -0.22; -0.26; -0.50; -0.30; -0.69; 0.18)$

Знайти незміщену статистичну оцінку математичного очікування, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для заданого перетину.

2. Випадковий процес  $X(t)$  заданий сукупністю 4-х реалізацій:

$$X1(t) = ( 0.64; 0.74; 0.62; 0.59; 0.35; -0.09; -0.39 )$$

$$X2(t) = ( -0.16; -0.12; -0.15; 0.05; 0.29; 0.43; 0.63 )$$

$$X3(t) = ( 0.12; 0.20; 0.24; 0.18; -0.20; -0.42; -0.46 )$$

$$X4(t) = ( -0.30; -0.13; -0.75; 0.84; 0.78; 0.73; 0.71 )$$

Знайти залежність математичного очікування від часу і побудувати відповідні реалізації нормованого випадкового процесу.

3. Заданий перетин випадкового процесу

$$X(t) = ( 0.209; 0.563; -0.476; -0.554; -0.012; 0.082; 0.670; 0.076; -0.737; -0.196; 0.443; -0.254; 0.240; -0.215; 0.406; -0.405; 0.093; 1.150; -0.526; -0.199 )$$

Побудувати гістограму і приблизно оцінити вид розподілу випадкової величини.

4. Задана кореляційна матриця випадкового процесу. Побудувати нормовану кореляційну матрицю і по її вигляду зробити висновок, чи можна вважати випадковий процес стаціонарним.

$$K = \begin{pmatrix} 0,1632 & 0,1379 & 0,0795 & 0,0457 & -0,0106 & -0,0642 \\ 0,1379 & 0,2385 & 0,2029 & 0,1621 & 0,0827 & 0,0229 \\ 0,0795 & 0,2029 & 0,2356 & 0,2152 & 0,1527 & 0,0982 \\ 0,0457 & 0,1621 & 0,2152 & 0,2207 & 0,1910 & 0,1491 \\ -0,0106 & 0,0827 & 0,1527 & 0,1910 & 0,2407 & 0,2348 \\ -0,0642 & 0,0229 & 0,0982 & 0,1491 & 0,2348 & 0,2691 \end{pmatrix}$$

5. Задана нормована кореляційна матриця випадкового процесу, що відповідає часовому кроку  $\Delta t = 0,5$  сек.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.70 & 0.41 & 0.24 & -0.05 & -0.03 & -0.30 \\ & 1 & 0.86 & 0.71 & 0.35 & 0.09 & 0.10 \\ & & 1 & 0.94 & 0.64 & 0.39 & 0.34 \\ & & & 1 & 0.83 & 0.61 & 0.52 \\ & & & & 1 & 0.92 & 0.65 \\ & & & & & 1 & 0.76 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Вважаючи випадковий процес стаціонарним побудувати нормовану кореляційну функцію  $\rho_x(\tau)$

6. Задана матриця перехідних ймовірностей і початковий розподіл ймовірностей ланцюга Маркова. Знайти ймовірності станів системи на 4-му кроці.

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = ( 0; 1; 0 )$$

7. Заданий розмічений граф станів ергодичного безперервного ланцюга Маркова. Побудувати систему рівнянь Колмогорова і вказати спосіб знаходження фінальних ймовірностей станів системи.



8. Система масового обслуговування з відмовами має 4 канали. Вважаючи, що потік заявок Пуассонівський з параметром  $\lambda=0,5$ , а час обслуговування - випадкова величина з показовим законом розподілу і параметром  $\mu = 0,9$ , зобразити граф станів системи і записати рівняння Ерланга для цієї системи.

9. АТС фірми має 5 ліній зв'язку. На фірму поступає простий потік заявок з щільністю  $\lambda = 3$  виклики в хвилину. Виклик, що поступив в мить, коли всі лінії зайняті, дістає відмову. Середня тривалість розмови - 2 хвилини. Визначити ймовірність відмови і ймовірність того, що всі лінії вільні.

10. Заданий перетин випадкового процесу, що складається з  $n = 12$  вимірювань  
 $X(t) = (0.24; 0.14; 0.04; 0.03; 0.12; -0.16; -0.22; -0.06; -0.30; -0.10; -0.49; 0.18)$

Знайти незміщену оцінку математичного очікування, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для заданого перетину.

11. Випадковий процес  $X(t)$  заданий сукупністю 4-х реалізацій:

$$X1(t) = ( 0.64; 0.74; 0.62; 0.59; 0.35; -0.09; -0.39 )$$

$$X2(t) = ( -0.16; -0.12; -0.15; 0.05; 0.29; 0.43; 0.63 )$$

$$X3(t) = ( 0.12; 0.20; 0.24; 0.18; -0.20; -0.42; -0.46 )$$

$$X4(t) = ( -0.30; -0.13; -0.75; 0.84; 0.78; 0.73; 0.71 )$$

Знайти залежність математичного очікування від часу і побудувати відповідні реалізації нормованого випадкового процесу.

12. Заданий перетин випадкового процесу

$$X(t) = (0.209; 0.563; -0.476; -0.554; -0.012; 0.082; 0.670; 0.076; -0.737; -0.196; 0.443; -0.254; 0.240; -0.215; 0.406; -0.405; 0.093; 1.150; -0.526; -0.199;)$$

Побудувати гістограму і приблизно оцінити вид розподілу випадкової величини.

13. Задана кореляційна матриця випадкового процесу. Побудувати нормовану кореляційну матрицю і по її вигляду зробити висновок, чи можна вважати випадковий процес стаціонарним.

$$K = \begin{pmatrix} 0,1632 & 0,1379 & 0,0795 & 0,0457 & -0,0106 & -0,0642 \\ 0,1379 & 0,2385 & 0,2029 & 0,1621 & 0,0827 & 0,0229 \\ 0,0795 & 0,2029 & 0,2356 & 0,2152 & 0,1527 & 0,0982 \\ 0,0457 & 0,1621 & 0,2152 & 0,2207 & 0,1910 & 0,1491 \\ -0,0106 & 0,0827 & 0,1527 & 0,1910 & 0,2407 & 0,2348 \\ -0,0642 & 0,0229 & 0,0982 & 0,1491 & 0,2348 & 0,2691 \end{pmatrix}$$

14. Задана нормована кореляційна матриця випадкового процесу, що відповідає часовому кроку  $\Delta t = 0,5$  сек.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.70 & 0.41 & 0.24 & -0.05 & -0.03 & -0.30 \\ & 1 & 0.86 & 0.71 & 0.35 & 0.09 & 0.10 \\ & & 1 & 0.94 & 0.64 & 0.39 & 0.34 \\ & & & 1 & 0.83 & 0.61 & 0.52 \\ & & & & 1 & 0.92 & 0.65 \\ & & & & & 1 & 0.76 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Вважаючи випадковий процес стаціонарним побудувати нормовану кореляційну функцію  $\rho_x(\tau)$

**15.** Задана матриця перехідних ймовірностей і початковий розподіл ймовірностей ланцюга Маркова. Знайти ймовірності станів системи на 3-му кроці.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (1; 0; 0)$$

**16.** Заданий розмічений граф станів ергодичного безперервного ланцюга Маркова. Побудувати систему рівнянь Колмогорова і вказати спосіб знаходження фінальних ймовірностей станів системи.

**17.** Система масового обслуговування з відмовами має 3 канали. Вважаючи, що потік заявок Пуассонівський з параметром  $\lambda=2$ , а час обслуговування - випадкова величина з показовим законом розподілу і параметром  $\mu=1$ , зобразити граф станів системи і записати рівняння Ерланга для цієї системи.

**18.** АТС фірми має 4 лінії зв'язку. На фірму поступає простий потік заявок з щільністю  $\lambda = 0,5$  викликів в хвилину. Виклик, що поступив в мить, коли всі лінії зайняті, дістає відмову. Середня тривалість розмови - 1 хвилину. Визначити ймовірність відмови і ймовірність того, що всі лінії вільні.

**19.** Заданий перетин випадкового процесу, що складається з  $n=12$  вимірювань  
 $X(t) = (0.74; 0.64; 0.44; 0.33; 0.22; -0.26; -0.32; -0.36; -0.60; -0.40; -0.79; 0.28)$

Знайти незміщену оцінку математичного очікування, дисперсії і середнього квадратичного відхилення для заданого перетину.

**20.** Випадковий процес  $X(t)$  заданий сукупністю 4-х реалізацій:

$$X1(t) = (0.64; 0.74; 0.62; 0.59; 0.35; -0.09; -0.39)$$

$$X2(t) = (-0.16; -0.12; -0.15; 0.05; 0.29; 0.43; 0.63)$$

$$X3(t) = (0.12; 0.20; 0.24; 0.18; -0.20; -0.42; -0.46)$$

$$X4(t) = (-0.30; -0.13; -0.75; 0.84; 0.78; 0.73; 0.71)$$

Знайти залежність математичного очікування від часу і побудувати відповідні реалізації нормованого випадкового процесу.

**21.** Заданий перетин випадкового процесу

$$X(t) = (0.209; 0.563; -0.476; -0.554; -0.012; 0.082; 0.670; 0.076; -0.737; -0.196; 0.443; -0.254; 0.240; -0.215; 0.406; -0.405; 0.093; 1.150; -0.526; -0.199)$$

Побудувати гістограму і приблизно оцінити вид розподілу випадкової величини.

**22.** Задана кореляційна матриця випадкового процесу. Побудувати нормовану кореляційну матрицю і по її вигляду зробити висновок, чи можна вважати випадковий процес стаціонарним.

$$K = \begin{pmatrix} 0,1632 & 0,1379 & 0,0795 & 0,0457 & -0,0106 & -0,0642 \\ 0,1379 & 0,2385 & 0,2029 & 0,1621 & 0,0827 & 0,0229 \\ 0,0795 & 0,2029 & 0,2356 & 0,2152 & 0,1527 & 0,0982 \\ 0,0457 & 0,1621 & 0,2152 & 0,2207 & 0,1910 & 0,1491 \\ -0,0106 & 0,0827 & 0,1527 & 0,1910 & 0,2407 & 0,2348 \\ -0,0642 & 0,0229 & 0,0982 & 0,1491 & 0,2348 & 0,2691 \end{pmatrix}$$

23. Задана нормована кореляційна матриця випадкового процесу, що відповідає часовому кроку  $\Delta t=0,5$  сек.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.41 & 0.24 & -0.15 & -0.08 & -0.03 \\ & 1 & 0.81 & 0.71 & 0.35 & 0.09 & 0.010 \\ & & 1 & 0.84 & 0.64 & 0.39 & 0.24 \\ & & & 1 & 0.93 & 0.61 & 0.32 \\ & & & & 1 & 0.82 & 0.45 \\ & & & & & 1 & 0.73 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Вважаючи випадковий процес стаціонарним побудувати нормовану кореляційну функцію  $\rho_x(\tau)$

24. Задана матриця перехідних ймовірностей і початковий розподіл ймовірностей ланцюга Маркова. Знайти ймовірності станів системи на 5-му кроці.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0; 0; 1)$$

25. Заданий розмічений граф станів ергодичного безперервного ланцюга Маркова. Побудувати систему рівнянь Колмогорова і вказати спосіб знаходження фінальних ймовірностей станів системи.

26. Система масового обслуговування з відмовами має 3 канали. Вважаючи, що потік заявок Пуассонівський з параметром  $\lambda$ , а час обслуговування - випадкова величина з показовим законом розподілу і параметром  $\mu$ , зобразити граф станів системи і записати рівняння Ерланга для цієї системи.

27. АТС фірми має 5 лінії зв'язку. На фірму поступає простий потік заявок з щільністю  $\lambda = 0,1$  виклику в хвилину. Виклик, що поступив в мить, коли всі лінії зайняті, дістає відмову. Середня тривалість розмови - 2 хвилини. Визначити ймовірність відмови і ймовірність того, що всі лінії вільні.

## 9. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ РЕКТОРСЬКОГО КОНТРОЛЮ

- 1) Що називається випадковим процесом?
- 2) Що називається перерізом випадкового процесу?
- 3) Класифікація випадкових процесів за часом.
- 4) Класифікація випадкових процесів за станами.
- 5) Щільність ймовірностей випадкового процесу  $X(t)$  для одного перерізу; для двох перерізів.
- 6) Що називають однорідними ланцюгами Маркова?
- 7) Що називають одно кроковою матрицею переходу системи?
- 8) Як визначаються ймовірності n-крокових переходів системи з одного стану до іншого?
- 9) Що називають вектором початкового стану системи? Властивості компонентів цього вектора.

- 10) Імовірнісні моделі та їх властивості.
- 11) Матриця  $Q$  та властивості її елементів. Властивості матриці  $Q$ .
- 12) Матриця  $R$  та властивості її елементів.
- 13) Фундаментальна матриця та її властивості.
- 14) Середнє значення загальної кількості разів перебування системи в одному зі станів  $\omega_i \in Q$ .
- 15) Дисперсія перебування системи в одному зі станів  $\omega_i \in Q$ .
- 16) Середня кількість кроків, що їх здійснить система, перш ніж набуде поглинального стану; її дисперсія.
- 17) Визначення ймовірностей, за яких система набуває поглинального стану.
- 18) Записати початкову модель грошового обігу між містами певного регіону.
- 19) Записати початкову модель із вибірковим втручанням уряду у грошову ситуацію міст.
- 20) Записати потокову модель в агрономії.
- 21) Записати потокову модель в екології.
- 22) Відкрита модель Леонтьєва. Її зміст.
- 23) Зміст оптимальної стратегії управління.
- 24) Рівняння народження та загибелі.
- 25) Модель Ерланга. Основні числові характеристики цієї моделі.
- 26) Експоненціальний закон розподілу. Числові характеристики для цього закону.
- 27) Зв'язок між пуассонівським потоком подій та експоненціальним законом розподілу.

*Додаток А*  
*Зразок титульної сторінки*  
*для оформлення лабораторної або контрольної роботи*

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

**Кафедра інформаційних технологій та економічної кібернетики**

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1**  
з дисципліни «Теорія випадкових процесів»

**Варіант № 12**

**Виконав**  
Студент гр. ЗІТ-91  
Ткаченко В. С.

**Перевірив**  
доцент кафедри ІТЕК  
Гук В. І.

**Черкаси, 2012**

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
1. Навчальна програма.....	4
2. РОБОЧА ПРОГРАМА .....	5
2.1. Тематика лекцій .....	5
2.2. Завдання до лабораторних робіт.....	8
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 .....	8
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 .....	16
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 .....	21
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4 .....	30
2.3. Загальні вимоги до оформлення звітів з лабораторних робіт.....	33
3. ЛІТЕРАТУРА .....	33
4. САМОСТІЙНА РОБОТА .....	34
5. ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ (ІРС).....	35
ІРС № 1. Дослідження марковського випадкового процесу з дискретними станами і дискретним часом .....	35
ІРС № 2. Ланцюги Маркова .....	36
6. КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ.....	36
7. МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ .....	37
8. ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ З ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ .....	38
9. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ РЕКТОРСЬКОГО КОНТРОЛЮ .....	43
<i>Додаток А Зразок титульної сторінки звіту.....</i>	<i>45</i>

---

Підписано до друку 24.12.2020. Формат 60x84/16.  
Гарнітура Times New Roman. Наклад 100 прим.

Надруковано в редакційно-видавничому відділі  
Східноєвропейського університету економіки і менеджменту,  
вул. Нечуя-Левицького, 16, Черкаси, 18036.