

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

В. І. Гук

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(II частина)

Методичний посібник

*Для студентів денної та заочної форм навчання
напряму 0501 „Економіка і підприємництво”
освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”*

Черкаси
2010

Гук В. І. Вища математика : Частина II : методичний посібник : для студентів денної та заочної форм навчання напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” / В. І. Гук. – Черкаси: Східноєвропейський ун-т економіки і менеджменту, 2010. – 82 с. – [Укр. мова].

Рецензент

С. М. Одокієнко, к.т.н., доцент кафедри загальнотехнічних наук Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Відповідальний за випуск

О. М. Строгалова

Затверджено методичною радою університету як методичний посібник для студентів денної та заочної форм навчання напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”, протокол № 5/10 від 11.02.2010.

ВСТУП

Навчальна дисципліна „Вища математика” є нормативною навчальною дисципліною, що входить до циклу дисциплін природничо-наукової підготовки напряму 0501 „Економіка і підприємництво” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”.

Курс „Вища математика” розрахований на два семестри 1-го року навчання. У першому семестрі (методичний посібник, частина I) розглядаються основи лінійної алгебри, векторна алгебра, аналітична геометрія й теорія функцій однієї змінної. У другому семестрі (методичний посібник, частина II) розглядаються диференціальне числення функцій однієї та двох змінних, інтегральне числення та основи теорії диференціальних рівнянь.

У процесі вивчення курсу вводяться необхідні математичні поняття, формулюються основні математичні задачі, розглядаються твердження й теореми, які дозволяють дослідити поставлені задачі та вказати шляхи їх розв’язання. Наводяться алгоритми та аналізуються практичні методи отримання розв’язку поставлених математичних задач. Після вивчення окремої математичної теми в курсі розглядаються можливості застосування введеного математичного апарату для розв’язання економічних задач. Значна увага приділяється математичній постановці та формалізації економічної задачі.

У цьому курсі розглядаються сучасні підходи до вивчення дисципліни „Вища математика”, що засновані на широкому використанні в навчальному процесі елементів інформатики. Традиційні аналітичні методи доповнюються розглядом чисельних методів, орієнтованих на використання ПЕОМ. Робиться спроба привчити студентів до самостійного освоєння та систематичного практичного використання відомої системи комп’ютерної алгебри Maple, яка дозволяє без виконання рутинних математичних перетворень та обчислень отримувати розв’язок досить складних математичних задач.

В курсі використовуються наступні методи навчання - лекції, практичні заняття, виконання індивідуальних домашніх завдань (згідно варіанту), виконання розрахунково-графічних робіт, виконання контрольних завдань, самостійна робота над літературою і періодичними джерелами з курсу, робота з конспектом лекцій, робота із спеціалізованими математичними програмами, робота в Інтернеті, науково-дослідна робота та участь у студентських конференціях.

1. ВИМОГИ ДО ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета курсу – засвоєння базових математичних знань, вивчення основних понять та методів математичного аналізу для забезпечення інших навчальних дисциплін.

Змістом курсу є диференціальне та інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди, операційне числення.

Завдання курсу – застосування математичних знань у процесі аналізу функціональних залежностей; обчислення площі та об’єму геометричних об’єктів, розвиток аналітичного мислення.

2. ОБ'ЄМ НАВЧАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Дисципліна „Вища математика” викладається на протязі 1 курсу (1-й та 2-й семестри) в обсязі 252 годин, з них:

- лекції – 72 години (заочна форма – 18 годин);
- практичні заняття – 54 години (заочна форма – 4 години);
- самостійна робота студентів – 126 годин (заочна форма – 230 годин).

В якості форми контролю знань передбачені залік у першому та іспит у другому семестрах.

Після вивчення курсу студент повинен знати:

- основні поняття та визначення; постановки математичних задач;
- теоретичні обґрунтування методів вирішення основних задач;
- алгоритми вирішення основних математичних задач, методи аналізу отриманих результатів.

Після вивчення курсу студент повинні вміти:

- з допомогою елементів диференційного числення аналізувати та будувати графіки функцій, знаходити екстремуми функцій;
- знаходити інтерполяційний та апроксимаційні поліноми функцій, що задані таблицями;
- володіти апаратом інтегрального числення, аналітичними методами знаходити невизначені інтеграли від раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій;
- застосовувати визначені інтеграли для знаходження площі поверхні та об'єму геометричних тіл;
- застосовувати формули наближеного обчислення визначених інтегралів;
- застосовувати загальні методи розв'язування диференціальних та різницевих рівнянь.

3. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ (2 семестр)

3.1. Тематика та зміст лекцій

Змістовий модуль 1. Функції та їх властивості

Тема 1. Поняття про функції

Способи завдання функції. Графіки функцій. Основні елементарні функції та їх властивості.

Література: [1, с. 100–106]

Тема 2. Наближення функцій

Інтерполяція функцій. Постановка задачі. Інтерполяційні поліноми, їх види та особливості застосування. Постановка задачі апроксимації функції. Поліноміальна апроксимація. Метод найменших квадратів

Література: [1, с. 107–111]

Змістовий модуль 2. Елементи диференційного числення функції однієї змінної та їх застосування

Тема 3. Границі функції

Класифікація числових множин. Постійні та змінні величини. Множини. Функції. Границя послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв'язок між ними. Перша дивовижна границя. Друга дивовижна границя. Порівняння нескінченно малих. Використання еквівалентних нескінченно малих для наближеного обчислення функцій.

Література: [1, с. 112–129]

Тема 4. Неперервність функції

Властивості функції, неперервної на сегменті. Теорема Вейерштраса та Коші. Метод чисельного знаходження кореня неперервної функції

Література: [1, с. 130–136]

Тема 5. Похідна функції

Визначення похідної, геометричний та механічний зміст похідної. Правила та техніка обчислення похідної. Похідні вищих порядків

Література: [1, с. 137–156]

Тема 6. Диференціал функції однієї змінної

Диференціал, його геометричний зміст. Застосування диференціалу для наближених обчислень. Диференціали вищих порядків

Література: [1, с. 157–163]

Тема 7. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопітала. Формула Тейлора. Екстремуми функції, необхідні та достатні умови екстремуму

Література: [1, с. 164–170]

Тема 8. Застосування похідної до аналізу функціональної залежності

Схема дослідження функції. Інтервали зростання та спадання. Екстремуми функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Опуклість та вогнутість функції. Точки перегину. Асимптоти. Побудова графіків.

Література: [1, с. 171–180]

Тема 9. Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для довільної функції.

Література: [1, с. 181–185]

Змістовий модуль 3. Елементи диференційного числення функції багатьох змінних

Тема 10. Диференційованість функцій багатьох змінних

Поняття функції кількох змінних. Геометричне зображення функції двох змінних. Границя, неперервність функції двох змінних.

Література: [1, с. 261–275].

Тема 11. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум, умовний екстремум

Частинні похідні, геометричний зміст для функції двох змінних. Повний диференціал. Повторне диференціювання. Екстремуми функції двох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму. Чисельні методи оптимізації функцій багатьох змінних.

Література: [1, с. 276–279]

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення

Тема 12. Невизначений інтеграл

Первісна. Загальний вигляд первісної. Таблиця інтегралів. Властивості невизначеного інтеграла. Інтегрування підстановкою. Інтегрування частинами. Інтегрування простих раціональних дробів. Розкладання раціонального дробу на прості та їх інтегрування. Інтегралі від деяких ірраціональних функцій, та деяких класів тригонометричних функцій. Тригонометричні підстановки. Нижня та верхня інтегральні суми та їх властивості.

Література: [1, с. 193–220]

Тема 13. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл Обчислення визначеного інтеграла за допомогою невизначеного. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Невласні інтегралі. Наближене обчислення визначеного інтеграла. Формула прямокутників. Формула трапецій. Формула Сімпсона.

Література: [1, с. 221–236, 255–260]

Тема 14. Узагальнення поняття інтеграла

Обчислення площ фігур за допомогою визначеного інтеграла. Обчислення об'ємів за допомогою визначеного інтеграла.

Література: [1, с. 237–254]

Змістовий модуль 5. Розкладання функції в ряд

Тема 18. Числові ряди, їх збіжність

Числова послідовність. Числовий ряд. Поняття збіжності ряду. Необхідна ознака збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Порівняння рядів. Ознака

Даламбера. Ознака Коші. Інтервальна ознака збіжності ряду. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютна та умовна збіжність. Поняття функціонального ряду. Інтегрування та диференціювання рядів.

Література: [2, с. 109–124].

Тема 19. Степеневі ряди

Степеневі ряди. Інтервал збіжності степеневого ряду. Ряди по степеням $(x-a)$. Ряди Тейлора та Маклорена. Приклади розкладання функції у ряди. Застосування рядів для наближених обчислень.

Література: [2, с. 125–143].

Тема 20. Ряди Фур'є

Приклади розкладання функцій у ряди Фур'є. Застосування рядів для наближених обчислень.

Література: [2, с. 144–162].

3.2. Тематика та зміст практичних занять (2 семестр)

Практичне заняття № 1

Тема. Графіки функцій

Мета заняття:

- 1) вивчити характерні особливості графіків основних елементарних функцій;
- 2) навчитися будувати графіки функцій методом послідовних перетворень;
- 3) навчитися будувати графіки суми, різниці, добутку та частки від ділення двох функцій.

Практичне заняття № 2

Тема. Апроксимація функції методом найменших квадратів

Мета заняття:

- 1) навчитися визначати степінь апроксимуючого поліному;
- 2) навчитися складати систему нормальних рівнянь для знаходження коефіцієнтів апроксимуючого поліному;
- 3) навчитися знаходити середньоквадратичну похибку апроксимації.

Практичне заняття № 3

Тема. Границі функції

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати границі функції;
- 2) навчитися обчислювати односторонні границі функції;
- 3) навчитися використовувати першу та другу дивовижні границі для обчислення границі функції.

Практичне заняття № 4

Тема. Нескінченно малі

Мета заняття:

- 1) навчитися знаходити головну частину функції;
- 2) навчитися використовувати еквівалентні нескінченно малі для знаходження границі функції;

3) навчитися використовувати еквівалентні нескінченно малі для наближеного *обчислення функцій*.

Практичне заняття № 5

Тема. Неперервність функції

Мета заняття:

- 1) навчитися знаходити точки розриву функції та визначати їх тип;
- 2) навчитися відділяти корені неперервної функції;
- 3) навчитися знаходити корені неперервної функції чисельним методом поділу відрізка навпіл.

Практичне заняття № 6

Тема. Правила та техніка обчислення похідної

Мета заняття:

- 1) навчитися знаходити похідну функції згідно визначення;
- 2) навчитися знаходити похідні з використанням табличних значень;
- 3) навчитися знаходити похідні складних функцій.

Практичне заняття № 7

Тема. Правила та техніка обчислення похідної

Мета заняття:

- 1) навчитися знаходити похідні за допомогою логарифмування;
- 2) навчитися знаходити похідні вищих порядків.

Практичне заняття № 8

Тема. Диференціал функції однієї змінної

Мета заняття:

- 1) навчитися знаходити диференціал функції;
- 2) навчитися застосовувати диференціал для наближених обчислень;
- 3) навчитися знаходити диференціали вищих порядків.

Практичне заняття № 9

Тема. Основні теореми диференціального числення

Мета заняття:

- 1) навчитися використовувати правило Лопітала;
- 2) навчитися використовувати формулу Тейлора.

Практичне заняття № 10

Тема. Екстремуми функції

Мета заняття:

- 1) навчитися використовувати необхідні та достатні умови для знаходження екстремуму функції.

Практичне заняття № 11

Тема. Формула Тейлора

Мета заняття:

- 1) навчитися використовувати формулу Тейлора для многочлена;
- 2) навчитися розкласти в ряд Тейлора довільну функцію.

Практичне заняття № 12

Тема. Диференціювання функцій багатьох змінних

Мета заняття:

- 1) навчитися диференціювати функцію багатьох змінних.

Практичне заняття № 13

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити екстремум функції двох змінних класичним методом.

Практичне заняття № 14

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити екстремум функції двох змінних чисельними методами нульового порядку.

Практичне заняття № 15

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити екстремум функції двох змінних чисельними методами першого порядку.

Практичне заняття № 16

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити екстремум функції двох змінних чисельними методами другого порядку.

Практичне заняття № 17

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити умовний екстремум функції двох змінних методом Лагранжа.

Практичне заняття № 18

Тема. Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Мета заняття:

1) навчитися знаходити умовний екстремум функції двох змінних чисельним методом штрафних функцій.

Практичне заняття № 19

Тема. Невизначений інтеграл

Мета заняття:

1) навчитися знаходити інтеграли за допомогою табличних значень та методом підстановки;

Практичне заняття № 20

Тема. Невизначений інтеграл

Мета заняття:

1) навчитися знаходити інтеграли за допомогою формули інтегрування частинами;

Практичне заняття № 21

Тема. Невизначений інтеграл

Мета заняття:

1) навчитися знаходити інтеграли від простих раціональних дробів.

Практичне заняття № 22

Тема. Невизначений інтеграл

Мета заняття:

- 1) навчитися розкладати раціональні дроби на прості та інтегрувати їх.

Практичне заняття № 23

Тема. Визначений інтеграл

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати визначений інтеграл за допомогою невизначеного по формулі Ньютона-Лейбніца.

Практичне заняття № 24

Тема. Визначений інтеграл

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати визначений інтеграл методами заміни змінної та інтегрування частинами.

Практичне заняття № 25

Тема. Наближене обчислення визначеного інтеграла

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати визначений інтеграл чисельними методами прямокутників, трапецій та методом Сімпсона.

Практичне заняття № 26

Тема. Використання визначеного інтеграла

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати площі фігур за допомогою визначеного інтеграла.

Практичне заняття № 27

Тема. Використання визначеного інтеграла

Мета заняття:

- 1) навчитися обчислювати об'єми за допомогою визначеного інтеграла.

3.3. Тематика та зміст самостійної роботи студентів

В період вивчення дисципліни студент виконує поточне вивчення теоретичного курсу в процесі підготовки до практичних занять та написання рефератів виконує значну інформаційно-пошукову роботу в Інтернеті, вивчення спеціальної літератури за тематикою курсу.

Форми самостійної роботи студентів

Самостійна робота студента передбачає виконання наступних робіт:

- обробка базової і додаткової літератури;
- написання рефератів;
- вивчення теоретичного матеріалу та підготовку до практичних занять;
- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- огляд періодичних видань та обробка спеціалізованої літератури за тематикою курсу;
- освоєння додаткових інструментальних програмних засобів, які можна використовувати згідно тематики курсу.

Для самостійної роботи студентів передбачені додаткові практичні заняття у комп'ютерних класах, де можна одержати консультацію викладача, удосконалити навички роботи з різноманітними інструментальними пакетами за комп'ютером.

Якщо студент пропустив лекції або практичні заняття, він обов'язково повинен відробити пропущені практичні заняття та виконати домашнє завдання та самостійно вивчити лекційний і заданий теоретичний матеріал, який представити у вигляді реферату.

3.4. Тематика та зміст індивідуальної роботи студентів

Індивідуальна робота зі студентами під час вивчення курсу «Математичний аналіз» передбачає наступні види робіт:

- Виконання індивідуальних домашніх завдань та формування звіту по домашній роботі. Підготовка до виконання домашніх робіт включає в себе попереднє вивчення теоретичного матеріалу.
- Виконання в індивідуальному режимі додаткових домашніх робіт або додаткових завдань підвищеної складності, запропонованих викладачем для студентів, які бажають підвищити власний рейтинг.
- Індивідуальне консультування викладачем студентів з тематики курсу.

3.5. Форми контролю та система оцінювання знань студентів

Знання студентів по дисципліні «Математичний аналіз» визначаються по поточному, модульному і підсумковому контролю.

Поточний контроль передбачає перевірку знань студентів по поточній темі практичного заняття і проводиться у формі перевірки домашніх завдань.

Модульний контроль передбачає проведення перевірки засвоєння тем даного змістового модуля у формі письмових відповідей на контрольні питання по темах.

Іспит є підсумковим контролем, який виставляється на основі передуючих йому виконанню та захисту домашніх завдань, поточному контролю знань та трьох модульних контролів, а також при захищеному студентом рефераті за обраною та узгодженою з викладачем тематикою.

Критерії оцінювання знань за рейтинговою системою

Основні положення

1. Максимальна кількість балів, набрана студентом за всі види робіт з дисципліни «Математичний аналіз» протягом семестру складає 100 балів.
2. Дисципліна може бути зарахована автоматично, якщо студент набрав 80 і більше балів.
3. Для допуску до підсумкового контролю (заліку) студент повинен набрати 40 балів.
4. Якщо студент на протязі семестру набрав кількість балів у межах від 25 до 39, то він може пройти додатковий контроль, види якого передбачені в п.8.

5. Відсутність студента на контрольній, атестаційній роботі, практичному занятті оцінюється у 0 балів. При наявності поважної причини відсутності студент може пройти додатковий контроль з метою відпрацювання пропущеного заняття, форма якого визначається в п. 8.
6. Студент, який не набрав протягом навчального семестру мінімальної кількості балів (40), не допускається до підсумкового контролю з дисципліни і повинен вивчити і скласти цю дисципліну додатково у термін, встановлений навчально-організаційним відділом, або підлягає відрахуванню.

На оцінку "відмінно" заслуговує студент, який виявив всебічні, систематичні та глибокі знання навчального програмного матеріалу, **вміє вільно** виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і знайомий з допоміжною літературою, що рекомендована програмою. Як правило, оцінку "відмінно" ставлять студентам, які засвоїли зв'язок основних понять дисципліни в їх значенні для майбутньої професії, що виявили творчі здібності в розумінні навчального програмного матеріалу.

На оцінку "добре" заслуговує студент, який виявив глибокі знання навчального програмного матеріалу, **успішно** виконує завдання, передбачені програмою, засвоїв основну літературу, що рекомендована програмою. Як правило, оцінку "добре" ставлять студентам, які показали систематичний характер знань із дисципліни та здатні до їх самостійного поповнення й оновлення в ході подальшої навчальної та професійної діяльності.

На оцінку "задовільно" заслуговує студент, який виявив знання основного навчального програмного матеріалу в об'ємі, необхідному для подальшого навчання та подальшої роботи за професією, **здатний** виконувати завдання, передбачені програмою. Як правило, оцінку "задовільно" ставлять студентам, які припустили помилки у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але володіють необхідними знаннями для їх усунення під керівництвом викладача. **На оцінку "незадовільно"** заслуговує студент, який виявив прогалини у знанні основного навчального програмного матеріалу, припустив **принципові** помилки у виконанні передбачених програмою завдань. Як правило, цю оцінку ставлять студентам, які не можуть продовжувати навчання або приступити до професійної діяльності після закінчення вищого навчального закладу без додаткових знань із відповідної дисципліни.

Система модульно-рейтингового контролю та оцінювання

Максимально можлива рейтингова кількість балів – 100

За правильно і своєчасно (на практичних заняттях) розв'язані прості стандартні задачі – до 20 балів.

За правильно розв'язані стандартні задачі підвищеної складності під час індивідуальної та самостійної роботи – до 25 балів.

За правильно розв'язані нестандартні задачі підвищеної складності під час індивідуальної та самостійної роботи – до 20 балів (20+25+20=65).

Контрольна робота – до 35 балів.

На заліку або іспиті – до 35 балів.

Результати оцінювання

"відмінно" – **90-100** балів (A)

"добре" – **75-89** балів (BC)

"задовільно" – **60-74** балів (DE)

"незадовільно" – **35-59** балів (недопуск до іспиту з можливістю повторного складання) (FX)

"незадовільно" – до **35** (недопуск до іспиту з обов'язковим повторним курсом) (F).

4. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2007. - 288 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 2. – М.: Айрис-Пресс, 2007. - 256 с.

Основна

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-Пресс, 2007. - 576 с.
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс. – М.: Айрис-Пресс, 2007. - 480 с.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. 3-є видання, доп. і доопр. К.: Кондор, 2006. - 588 с.
6. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2 Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних 2-е вид. доп. і доопр. К.: Кондор, 2006. - 460 с.
7. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення 2-е вид. і доопр. К.: Кондор, 2006. - 608 с.
8. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Частина 5. Тести. - Харків:ХНУРЕ, 2007. - 512 с.
9. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: MAPLE: Искусство программирования. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2008. - 792 с.
10. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2000. - 592 с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові ряди. – К.: Техніка, 2000. - 792 с.
12. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. пос./ Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К.: Либідь, 2002. - 288 с. (том 1, 2).
13. Очков В.Ф. Физические и экономические величины в MATHCAD и MAPLE. М.: Финансы и статистика, 2006.

14. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. - 528 с.

Додаткова

15. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. - К.: Вища школа, 1993. - 648 с.: іл.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. – М.: Издательство физ-мат. литературы, 1963. - 856 с.
17. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1970.

5. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіанти контрольної роботи визначаються за вказівкою викладача.

Увага! Контрольні роботи, виконані не за своїм варіантом, не розглядаються і повертаються студенту. Після повернення роботи із зауваженнями викладача необхідно виправити роботу та здати її для повторної перевірки.

Практичне заняття № 1. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Короткі теоретичні відомості.

Визначення похідної, геометричний та механічний зміст похідної. Таблиця похідних. Правила та техніка обчислення похідної. Похідні вищих порядків
Література: [1, с. 137–156, 2, с. 288-301].

Домашнє завдання № 1.

Задача 1. Знайти похідну заданих функцій:

- | | |
|---|--|
| 1. а) $y = \cos^5(\arcsin^{-2}(\ln x))$ | б) $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$ |
| в) $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$ | г) $y = -\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x\right)$ |
| 2. а) $y = \ln^3(\cos^{-2}(3^{-x} \operatorname{tg}^2 3x))$ | б) $y = 2^{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} \sin^4 2x$ |
| в) $y = 2^{\ln x}$ | г) $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5(x^2 - 1)$ |
| 3. а) $y = \ln^5\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right)$ | б) $y = 2^{\cos^3 2x - 3 \sin \frac{2}{x}}$ |
| в) $y = (\cos x)^x$ | г) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1 - x^8}$ |
| 4. а) $y = \sin^{-3}\left(\arccos\left(2^{-x} \cdot e^{x^2}\right)\right)$ | б) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ |
| в) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$ | г) $y = x \sin 2x + \frac{1}{5} \cos^5 3x$ |

5. a) $y = \sqrt{2x+1} \cdot \arcsin 2x$

b) $y = x^{\sqrt{x}}$

6. a) $y = \sin^2 \left(\operatorname{arctg}^3 \left(e^{-x^3 \sqrt{x}} \right) \right)$

b) $y = x^{\operatorname{tg} x}$

7. a) $y = \cos^{-7} (\arcsin 2x)$

b) $y = x^{\arcsin x}$

8. a) $y = \sin^2 \left(\operatorname{arctg}^3 \left(e^{-x^3 \sqrt{x}} \right) \right)$

b) $y = x^{\operatorname{tg} x}$

9. a) $y = \operatorname{arctg}^2 \left(1 + \sqrt{1-x^2} \right)$

b) $y = (\operatorname{tg} x)^x$

10. a) $y = \arcsin^5 \left(\cos^2 \left(3^x \cdot \sqrt[3]{x} \right) \right)$

b) $y = x^{\frac{1}{x}}$

11. a) $y = \arccos^{-2} \left(\cos^3 \frac{1}{\ln x} \right)$

b) $y = (\ln x)^x$

12. a) $y = \operatorname{tg}^5 \left(\arcsin^{-1} \left(8^{x^2} \cdot \sqrt{x} \right) \right)$

b) $y = \left(\frac{1}{x} \right)^x$

13. a) $y = \sqrt{4x-x^2} + \frac{1}{(4x-x^2)^3}$

b) $y = (\arcsin x)^x$

14. a) $y = e^{\sqrt[3]{\cos 2x}} \cdot \sin^3 \frac{x}{2}$

b) $y = (\sin x)^{\ln x}$

15. a) $y = \frac{\arcsin x}{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$

б) $y = \ln \frac{\sqrt{e^x+1} + 1}{\sqrt{e^x+1} - 1}$

г) $y = \arccos^{-2} \left(\ln^{-1} \left(2^x \sin x \right) \right)$

б) $y = \operatorname{tg}^2 2x + \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^5}}$

г) $y = \ln \left(2x^2 + \sqrt{9x^3+1} \right)$

б) $y = \frac{1}{3} \ln^{-3} \left(\sin^3 \left(2x \cdot e^x \right) \right)$

г) $y = 5^{\log_2(1-x^2) + \sqrt{x}}$

б) $y = \operatorname{tg}^2 2x + \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^5}}$

г) $y = \ln \left(2x^2 + \sqrt{9x^3+1} \right)$

б) $y = e^{-x^2} \cdot 2 \log_3(1-x^2)$

г) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$

б) $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \cos^2(\ln x)$

г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

г) $y = \ln^2(1+\cos x)$

б) $y = 2 \cos^2(2x-1) \cdot \sin 3x$

г) $y = \ln \left(e^x + \sqrt[3]{1-e^x} \right)$

б) $y = \sin^2 \left(\arccos^{-2} \left(3^{-x^2} \cdot \sqrt{x} \right) \right)$

г) $y = \ln \frac{2^{x^2} - 1}{2^{x^2} + 1}$

б) $y = \ln \left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x} \right)$

г) $y = \left(\arccos \frac{2}{x+1} \right)^2$

б) $y = \frac{e^{\operatorname{arctg}^2 2x}}{1+4x^2}$

B) $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

16. a) $y = \operatorname{tg}^{-3} \left(\operatorname{arctg}^3 \left(3^{-x^2} \cdot \sqrt{x} \right) \right)$

B) $y = x^{\operatorname{tg} x}$

17. a) $y = \operatorname{ctg}^4 \left(\arccos^{-2}(\ln x) \right)$

B) $y = (\ln x)^x$

18. a) $y = \sin^5 \left(\arcsin^2 \sqrt{1-x^2} \right)$

B) $y = x^{x^2}$

19. a) $y = (2x^2 + 1) \arcsin \frac{2}{2x+1}$

B) $y = (\sqrt{x})^x$

20. a) $y = \sin^{-4} \left(\cos^2 \left(3^{-x} \cdot \operatorname{tg}^2 x \right) \right)$

B) $y = x^{\sqrt{x^2+1}}$

21. a) $y = \arcsin^3 \left(\sqrt[4]{\log_2 \sin x} \right)$

B) $y = (x^2 + 1)^x$

22. a) $y = \sin^5 \left(\cos^{-3} \left(3^{-x^2} \cdot \sqrt{x} \right) \right)$

B) $y = (\arcsin x)^x$

23. a) $y = \ln^5 \left(\operatorname{arctg}^{-3} \left(e^{-x^3} \cdot \sqrt{x} \right) \right)$

B) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$

24. a) $y = \operatorname{tg}^6 \left(\arccos^{-2} \left(\ln x \cdot 2^{-x} \right) \right)$

Г) $y = \frac{\cos x}{\sin^4 3x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos x}$

б) $y = \sqrt[3]{1-x^2} \cdot \arcsin^2 \frac{2}{x}$

Г) $y = \frac{\ln \arccos \frac{1}{x}}{3+x^2}$

б) $y = \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x+1} + \sqrt{\cos 3x}$

Г) $y = \frac{1}{x} \arcsin \frac{1}{x}$

б) $y = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 + \sin^2 \frac{x}{2}} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Г) $y = (1-2x^2) \cdot 2^{\arccos \frac{2}{x}}$

б) $y = \operatorname{arctg}^{-3} \left(\operatorname{tg}^5 \ln x \right)$

Г) $y = \ln \left(7x + \sqrt{49x^2 + 1} \right)$

б) $y = \ln \frac{1 + \sqrt{4x^2 + 1}}{2x}$

Г) $y = 3^{\arcsin \frac{2}{x}} \cdot \arccos \frac{2}{x}$

б) $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

Г) $y = \left(\arcsin \frac{2}{x+1} \right)^3 + 2^{\frac{2}{x+1}}$

б) $y = \ln^2 \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$

Г) $y = \frac{2x^2-1}{4} \sqrt{2 + \cos^2 \frac{x}{2}}$

б) $y = \frac{1}{3} \cos^3 2x + \frac{1}{3} \sin^3 2x$

Г) $y = 3^{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x}} + \ln 2x$

б) $y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$

$$B) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$Г) y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1}$$

$$25. \text{ a) } y = x^2 \sqrt{1-x^2} \quad \text{б) } y = 4 \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$B) y = x^{\ln x} \quad \Gamma) y = \operatorname{arctg} e^{2x}$$

$$26. \text{ a) } y = 2 \sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+3}}$$

$$\text{б) } y = (e^{\cos x} + 3)^2$$

$$B) y = x^{x^x} \quad \Gamma) y = \ln \sin(2x+5)$$

$$27. \text{ a) } y = x^2 \sqrt{1-x^2} \quad \text{б) } y = 2 \sqrt{\arcsin 3x}$$

$$B) y = (\cos x)^{\sin x} \quad \Gamma) y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \ln(1+x^2)$$

$$28. \text{ a) } y = x \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}} \quad \text{б) } y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$B) y = x^{\frac{1}{x}} \quad \Gamma) y = \arcsin \sqrt{1-3x}$$

$$29. \text{ a) } y = \frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$$

$$\text{б) } y = \sin x - x \cos x$$

$$B) y = x^{-\operatorname{tg} x} \quad \Gamma) y = x^m \ln x$$

$$30. \text{ a) } y = \frac{x}{\sqrt{8^2-x^2}} \quad \text{б) } y = \frac{\sin^2 x}{2+3 \cos^2 x}$$

$$B) y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x} \quad \Gamma) y = \frac{x \ln x}{x-1}$$

Практичне заняття № 2. ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

Короткі теоретичні відомості.

Максимум та мінімум функцій. Зростання та спад функцій. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Література: [1, с. 175–176, 2, с. 316–328].

Домашнє завдання № 2.

Задача 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на заданому відрізку $[a; b]$:

$$1) \quad y = x^4 - 2x^2 + 3 \quad [-2; 1]$$

$$2) \quad y = \frac{4-x^2}{4+x^2} \quad [-1; 3]$$

$$3) \quad y = \sqrt[3]{x^2} + 1 \quad [-2; 1]$$

$$4) \quad y = -3x^4 + 6x^2 \quad [-2; 2]$$

$$5) \quad y = x + 2\sqrt{x} \quad [0; 4]$$

$$6) \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad [-1; 3]$$

$$7) \quad y = x - 2 \sin x \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$8) \quad y = x - 2 \ln x \quad [1; e^3]$$

9)	$y = x + 2 \arctg x$	$[-1; 1]$	10)	$y = 2x - \operatorname{tg} x$	$[0; \pi]$
11)	$y = x^2 + \frac{2}{x}$	$[1; 3]$	12)	$y = \frac{x}{2} + \arctg \frac{x}{2}$	$[0; 2]$
13)	$y = e^{\sin x}$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	14)	$y = \frac{1}{x^2 + 3}$	$[0; 3]$
15)	$y = \frac{x}{\ln x}$	$[e; e^3]$	16)	$y = \frac{4x}{4 + x^4}$	$[0; 3]$
17)	$y = x\sqrt{x+3}$	$[1; 6]$	18)	$y = x^3 - 3x$	$[0; 3]$
19)	$y = \frac{x}{x^2 + 1}$	$[-3; 3]$	20)	$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$[-1; 2]$
21)	$y = \sin 2x - x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	22)	$y = 3x^4 - 2$	$[0; 4]$
23)	$y = \frac{1}{2}x + \cos x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	24)	$y = x - \ln(x+1)$	$[0; 3]$
25)	$y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$	$[0; 4]$	26)	$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$	$[0; \frac{\pi}{2}]$
27)	$y = 81x - x^4$	$[-1; 4]$	28)	$y = x - \sin x$	$[-\pi; \pi]$
29)	$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$	$[0; 2]$	30)	$y = 3 - 2x^2$	$[-1; 3]$

5.3. Повне дослідження функції та побудова графіку

Провести повне дослідження функції $y = f(x)$ методами диференціального числення, сформулювати таблицю поведінки функції та побудувати графік функції:

- | | | | | |
|-----|----|----------------------------------|----|--|
| 1) | a) | $y = x^3 - 3x^2$ | б) | $y = x \cdot e^x$ |
| 2) | a) | $y = x^2 + \frac{2}{x}$ | б) | $y = e^{\frac{1}{x}}$ |
| 3) | a) | $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ | б) | $y = x^2 \ln x$ |
| 4) | a) | $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$ | б) | $y = (2x-1)e^{\frac{2}{x}}$ |
| 5) | a) | $y = (x-1)^2(x+2)$ | б) | $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ |
| 6) | a) | $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ | б) | $y = x^2 \cdot e^{\frac{2}{x}}$ |
| 7) | a) | $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ | б) | $y = \frac{\ln x}{x}$ |
| 8) | a) | $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ | б) | $y = x \ln x$ |
| 9) | a) | $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ | б) | $y = \ln \frac{x+1}{x-2}$ |
| 10) | a) | $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ | б) | $y = e^{2x-x^2}$ |

- | | | | | |
|-----|----|---|----|----------------------------------|
| 11) | a) | $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ | б) | $y = \ln(x^2 + 1)$ |
| 12) | a) | $y = 16x(x-1)^3$ | б) | $y = x + e^{-x}$ |
| 13) | a) | $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x+1}$ | б) | $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ |
| 14) | a) | $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ | б) | $y = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ |
| 15) | a) | $y = \frac{x^2}{(x+3)^2}$ | б) | $y = \frac{e^x}{x}$ |
| 16) | a) | $y = \frac{x^2 - x - 6}{x-2}$ | б) | $y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$ |
| 17) | a) | $y = x^4 - 2x^2 + 3$ | б) | $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ |
| 18) | a) | $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ | б) | $y = x \operatorname{arctg} x$ |
| 19) | a) | $y = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}$ | б) | $y = e^{\frac{1}{x+2}}$ |
| 20) | a) | $y = \frac{x^2 - 5}{x-3}$ | б) | $y = x - \ln x$ |
| 21) | a) | $y = \frac{x^2 + 4x - 4}{x^2 - 3x + 2}$ | б) | $y = x \cdot e^{2x-1}$ |
| 22) | a) | $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ | б) | $y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$ |
| 23) | a) | $y = 2 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ | б) | $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ |
| 24) | a) | $y = 5 - \frac{2}{x} - x^2$ | б) | $y = \frac{e^x}{x+1}$ |
| 25) | a) | $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$ | б) | $y = x^3 e^{-x}$ |
| 26) | a) | $y = \frac{4x}{4+x^2}$ | б) | $y = e^{2x-x^2}$ |
| 27) | a) | $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ | б) | $y = \ln(x^2 - 4)$ |
| 28) | a) | $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$ | б) | $y = \ln(9 - x^2)$ |
| 29) | a) | $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$ | б) | $y = (2 + x^2)e^{-x^2}$ |

$$30) \quad a) \quad y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

$$б) \quad y = x^2 - 2 \ln x$$

5.4. Знаходження невизначених інтегралів

Знайти невизначені інтеграли:

$$1) \quad a) \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} - 4x}{3\sqrt{x}} dx \quad б) \int e^{3 + \sin^2 2x} \cdot \sin 4x dx \quad в) \int e^x \ln(1 + 3e^x) dx$$

$$г) \int \frac{19 - 4x}{2x^2 + 2x - 3} dx \quad д) \int \sin 6x \cdot \cos 7x dx$$

$$2) \quad a) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$$

$$б) \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

$$в) \int x \cdot 3^x dx$$

$$г) \int \frac{2x + 9}{x^2 + 5x + 9} dx$$

$$д) \int \cos 3x \cdot \cos x dx$$

$$3) \quad a) \int \frac{(2 + \sqrt{x})(x^2 + 5)}{\sqrt{x}} dx$$

$$б) \int 9x^3 + 6x^2 + 3x dx$$

$$в) \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$г) \int \frac{2x + 7}{x^2 - x - 12} dx$$

$$д) \int \sin 5x \cdot \sin x dx$$

$$4) \quad a) \int \sqrt{x^2 + 6} \cdot 2x dx$$

$$б) \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

$$в) \int x^2 \cdot e^{3x} dx$$

$$г) \int \frac{4x + 31}{2x^2 + 11x + 12} dx$$

$$д) \int \sin \frac{3}{4}x \cdot \cos \frac{x}{4} dx$$

$$5) \quad a) \int \sqrt[3]{x^3 - 5} \cdot x^2 dx$$

$$б) \int \frac{dx}{1 - \sin 2x}$$

$$в) \int x \arcsin \frac{1}{x} dx$$

$$г) \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$д) \int \cos^3 x dx$$

$$6) \quad a) \int \frac{2x}{x^2 + 8} dx$$

$$б) \int \frac{dx}{9 + 2x^2}$$

$$в) \int x \ln(x^2 + 1) dx$$

$$г) \int \frac{11x - 2}{x^2 + x - 2} dx$$

$$д) \int \sin^5 x dx$$

$$7) \quad a) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$б) \int \frac{dx}{8 + 5x^2}$$

$$в) \int x^2 \sin 4x dx$$

$$г) \int \frac{17 - 2x}{x^2 - 5x + 4} dx$$

$$д) \int \sin^4 x dx$$

$$8) \quad a) \int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx$$

$$б) \int \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}}$$

$$в) \int x \ln^2 x dx$$

$$г) \int \frac{9 - 2x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$д) \int \cos^4 x dx$$

- 9) a) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx$ б) $\int \frac{dx}{x(3+\ln^2 x)}$ в) $\int x \arcsin x dx$
- г) $\int \frac{4x+27}{2x^2-x-6} dx$ д) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$
- 10) a) $\int e^{5x^2} \cdot x dx$ б) $\int \frac{dx}{(3x+5)\sqrt{x}}$ в) $\int (2-x) \sin x dx$
- г) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8} dx$ д) $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$
- 11) a) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ б) $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$ в) $\int (1-\ln x) dx$
- г) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx$ д) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$
- 12) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ б) $\int x \cdot \sqrt[3]{4-x^2} dx$ в) $\int x \sin x \cos x dx$
- г) $\int \frac{dx}{x^3+8}$ д) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$
- 13) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ б) $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3} dx$ в) $\int (3x+4) \cos x dx$
- г) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ д) $\int \sin^4 3x dx$
- 14) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$ б) $\int x \sqrt{5-x} dx$ в) $\int x \ln^2 x dx$
- г) $\int \frac{(3x-7) dx}{x^3+4x^2+4x+16}$ д) $\int \cos^4 3x dx$
- 15) a) $\int \frac{(x^2-4x)^3}{3x^5} dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$ в) $\int x^2 \sin x dx$
- г) $\int \frac{(x+3) dx}{x^3+x^2-2x}$ д) $\int \cos^6 2x dx$
- 16) a) $\int (3\sin 2x - 2\cos x) dx$ б) $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx$ в) $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$
- г) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-81}$ д) $\int \sin^6 2x dx$
- 17) a) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx$ б) $\int x^3 (1-2x^4) dx$ в) $\int x^3 \cdot \ln x dx$
- г) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$ д) $\int \sin 6x \cdot \cos 2x dx$

- 18) a) $\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{x^3} dx$ б) $\int \sin(3-4x) dx$ в) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
 г) $\int \frac{(x+2)}{x(x-3)} dx$ д) $\int \cos 5x \sin 3x dx$
- 19) a) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx$ б) $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4 2x + 4}$ в) $\int \ln x dx$
 г) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 16}$ д) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
- 20) a) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ б) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$ в) $\int x^2 e^x dx$
 г) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)\left(x^2+x+1\right)} dx$ д) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$
- 21) a) $\int \sin(3x-2) dx$ б) $\int \frac{x dx}{2x^4+5}$ в) $\int (x+3)e^x dx$
 г) $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$ д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
- 22) a) $\int (x+5)^{10} dx$ б) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})}$ в) $\int \cos x \ln \sin x dx$
 г) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$ д) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$
- 23) a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x}}$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{9 - \sin^2 x}}$ в) $\int \arcsin x dx$
 г) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$ д) $\int \frac{dx}{\cos x (1 - \sin x)}$
- 24) a) $\int e^{-2x} dx$ б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$ в) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$
 г) $\int \frac{dx}{4x - 1 - 4x^2}$ д) $\int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)}$
- 25) a) $\int 2^{3x} dx$ б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ в)
 $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$ г) $\int \frac{(3x+4) dx}{x^2 + 5x}$ д) $\int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin x)}$

26)	a) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$	б) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x} dx$	в) $\int \sin(\ln x) dx$
		г) $\int \frac{dx}{x^2-25}$	д) $\int \frac{dx}{\sin x(1-\cos x)}$
27)	a) $\int (e^x+1)^2 dx$	б) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$	в) $\int \sin \sqrt{x} dx$
		г) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12} dx$	д) $\int \frac{dx}{\sin x}$
28)	a) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$	б) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x+7}$	в) $\int (x^2+1)e^{-2x} dx$
		г) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x} dx$	д) $\int \frac{dx}{\cos x}$

5.5. Знаходження невизначених інтегралів від дробово-раціональних функцій

Знайти невизначений інтеграл від дробу:

- | | | | | |
|-----|----|--|----|--|
| 1. | a) | $\frac{-7x^5+3x^4+4x^3+3x^2+5x+9}{-x-1}$ | б) | $\frac{-5x^6-x^5-6x^4-x^3-7x^2+8x+1}{5x^2-3x-3}$ |
| 2. | a) | $\frac{6x^5-9x^4+2x^3-7x^2+6x-8}{2-x}$ | б) | $\frac{-8x^6-x^5-7x^4-8x^3-2x^2+2x-1}{-5x^2+x+2}$ |
| 3. | a) | $\frac{9x^5+5x^4+8x^3-6x^2+x-2}{x+1}$ | б) | $\frac{-6x^6+4x^4+4x^3+6x^2+2x-9}{5x^2+3x-1}$ |
| 4. | a) | $\frac{-5x^5+4x^4-7x^3-8x^2-7x+2}{-x-2}$ | б) | $\frac{-2x^6-2x^5+x^4+x^3+9x^2-3x+5}{5x^2+x-5}$ |
| 5. | a) | $\frac{-6x^5-7x^4+5x^3-9x^2-3x+4}{x+3}$ | б) | $\frac{x^6-4x^5-7x^4+8x^3-5x^2-7x-3}{-5x^2-4x+5}$ |
| 6. | a) | $\frac{-7x^5-7x^4-7x^2+3x-6}{x-1}$ | б) | $\frac{-4x^6+x^5-5x^4-9x^3+8x^2+6x}{-4x^2+x+3}$ |
| 7. | a) | $\frac{-2x^5+5x^4-7x^3+8}{x+1}$ | б) | $\frac{8x^6+7x^5+4x^4-4x^3-7x^2-4x-6}{-6x^2-3x+1}$ |
| 8. | a) | $\frac{2x^5-6x^4-6x-3}{x+3}$ | б) | $\frac{2x^6-8x^5-3x^4-9x^3+6x^2-2x-7}{5x^2+4x-3}$ |
| 9. | a) | $\frac{8x^5+6x^4+8x^3+8x+6}{x-1}$ | б) | $\frac{6x^6+7x^5+6x^4+x^3+5x^2-5x+3}{-5x^2-x+3}$ |
| 10. | a) | $\frac{-7x^5-8x^4-5x^3-4x^2-4x-9}{1-x}$ | б) | $\frac{8x^6+9x^5+6x^4+4x^3-9x^2-x-8}{-5x^2-4x+3}$ |
| 11. | a) | $\frac{3x^4+4x^3+8x^2+4}{x+1}$ | б) | $\frac{4x^6-x^5-x^4-8x^3+2x^2+3x+5}{6x^2-3x-5}$ |
| 12. | a) | $\frac{-4x^5+2x^4+8x^3-9x^2-2x-3}{x+1}$ | б) | $\frac{-9x^6-5x^5-3x^4-3x^3+9x^2-2x-7}{6x^2+2x-5}$ |
| 13. | a) | $\frac{-x^5+5x^3+8x-4}{3-x}$ | б) | $\frac{-2x^6-8x^3-x^2-3x-4}{-4x^2+3x+1}$ |
| 14. | a) | $\frac{3x^5+x^4-9x^3+4x^2+4x+4}{x-3}$ | б) | $\frac{-7x^6+5x^5-8x^4+7x^3+9x^2-5x+6}{6x^2+3x-1}$ |
| 15. | a) | $\frac{9x^5+7x^4-4x^3+x^2+4x+3}{x+2}$ | б) | $\frac{4x^6-x^5-9x^3-5}{5x^2+x-1}$ |

$$16. \text{ a) } \frac{7x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 3x}{x - 1}$$

$$\text{б) } \frac{-2x^6 - 4x^5 + x^4 + x^3 - 8x^2 + 7x - 2}{-4x^2 - 3x + 5}$$

$$17. \text{ a) } \frac{8x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5}{-x - 1}$$

$$\text{б) } \frac{-8x^6 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 1}{-4x^2 + 3x + 2}$$

$$18. \text{ a) } \frac{8x^5 - 9x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 9x}{x - 1}$$

$$\text{б) } \frac{-8x^6 - 8x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 9}{-3x^2 - 4x + 2}$$

$$19. \text{ a) } \frac{8x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 9x + 1}{x + 2}$$

$$\text{б) } \frac{7x^6 + 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 4x - 2}{-3x^2 - x + 5}$$

$$20. \text{ a) } \frac{7x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 - x - 1}{x + 3}$$

$$\text{б) } \frac{-7x^6 + 8x^5 + 7x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 7x}{-4x^2 - 2x + 1}$$

$$21. \text{ a) } \frac{x^5 + 8x^4 + 2x^3 + 2x + 3}{x + 3}$$

$$\text{б) } \frac{6x^6 - 8x^5 + 7x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 8x + 3}{4x^2 + 2x - 2}$$

$$22. \text{ a) } \frac{8x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 9x - 8}{x + 1}$$

$$\text{б) } \frac{-3x^6 + 8x^5 - 9x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 3x + 9}{-4x^2 - 3x + 5}$$

$$23. \text{ a) } \frac{-2x^5 + 6x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 8}{x - 1}$$

$$\text{б) } \frac{2x^6 + 8x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 9x + 9}{5x^2 - x - 2}$$

$$24. \text{ a) } \frac{-6x^5 - 6x^4 - 4x^3 + x^2 - 8x + 1}{x + 1}$$

$$\text{б) } \frac{-5x^6 - 3x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x}{-6x^2 - 4x + 1}$$

$$25. \text{ a) } \frac{9x^5 - x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 5x + 9}{x + 1}$$

$$\text{б) } \frac{-8x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 3x + 8}{-4x^2 - 3x + 5}$$

$$26. \text{ a) } \frac{3x^5 - x^4 + x^2 + 5x - 3}{x - 2}$$

$$\text{б) } \frac{-6x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 4x^2 + x + 2}{-4x^2 - x + 2}$$

$$27. \text{ a) } \frac{9x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x - 4}{x - 2}$$

$$\text{б) } \frac{-8x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{-3x^2 - x + 4}$$

$$28. \text{ a) } \frac{2x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 3x}{x + 3}$$

$$\text{б) } \frac{-2x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 5x - 7}{-3x^2 - 4x + 3}$$

$$29. \text{ a) } \frac{9x^5 + 9x^4 - 6x^3 - 8x - 7}{x + 2}$$

$$\text{б) } \frac{2x^6 + 5x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 3x + 1}{-6x^2 - x + 5}$$

$$30. \text{ a) } \frac{-9x^5 + 6x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 9x}{x + 1}$$

$$\text{б) } \frac{x^6 + 9x^5 - 6x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x - 8}{-4x^2 + 4x + 5}$$

5.6. Використання визначеного інтегралу для знаходження площі плоскої фігури

Обчислити площу фігури, що обмежена заданими лініями:

- 1) $y = x^2 + 4x$ та $y = x + 4$
- 2) $x \cdot y = 6$ та $y = 7 - x$
- 3) $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$
- 4) $y = 2x - x^2$ та $x + y = 0$
- 5) $x^2 + y^2 = 2x$ та $y^2 = 2x$
- 6) $y = 3x^2 + 1$ та $y = 3x + 7$
- 7) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ та $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$
- 8) $3x^2 - 4y = 0$ та $2x - 4y + 1 = 0$
- 9) $y = \frac{4}{x^2}$ та $y = 7 - 3x$
- 10) $y = x^2 - 2x + 2$ та $y = 2 + 4x - x^2$
- 11) $4x - 3y^2 = 0$ та $4x + 2y - 1 = 0$
- 12) $y = x^3$ та $y = \sqrt{x}$
- 13) $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$
- 14) $y = x \cdot (x - 2)^2$ та $y = 0$
- 15) $3x^2 + 4y = 0$ та $2x + 4y + 1 = 0$
- 16) $y = \frac{16}{x^2}$ та $y = 17 - 2x$ (I чверть)
- 17) $y^2 = 4x^3$ та $y = 2x^2$
- 18) $xy = 10$ та $x^2 + y^2 = 49$ (I чверть)
- 19) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$
- 20) $y = x^2$ та $x + y = 2$
- 21) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$
- 22) $2x + 3y^2 = 0$ та $2x + 2y + 1 = 0$
- 23) $y = x^2$ та $y = x^3$
- 24) $y = x^2$ та $y = 2x - x^2$
- 25) $3x^2 - 2y = 0$ та $2x - 2y + 1 = 0$
- 26) $y = x^4$ та $y = x$
- 27) $y = \frac{5}{x}$ та $y = 6 - x$
- 28) $y = x^2$ та $y = \frac{x^3}{3}$
- 29) $y = \frac{x^2}{2}$ та $x^2 + y^2 = 8$
- 30) $4x + 3y^2 = 0$ та $3x + 2y + 1 = 0$

5.7. Знаходження наближеного значення визначеного інтегралу за допомогою чисельного методу

Знайти наближене значення визначеного інтегралу за допомогою:

- а) формули лівих прямокутників;
- б) формули середніх прямокутників;
- в) формули трапецій.

Інтервал інтегрування розбити на 10 рівних частин, обчислення виконувати з 4-ма цифрами після десятичної коми. Методом Ньютона-Лейбніца знайти точне значення інтегралу. Визначити похибку наближеного обчислення інтегралу за допомогою заданої формули:

- | | | | |
|-----|--|---|-----------------------------------|
| 1) | a) $\int_0^1 (x+1)^5 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{6}} \cos \frac{x}{6} dx$ | в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$ |
| 2) | a) $\int_0^2 \left(1-\frac{x}{4}\right)^4 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ | в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$ |
| 3) | a) $\int_1^0 \frac{(4x+1)^3}{3} dx$ | б) $\int_0^{12} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ | в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$ |
| 4) | a) $\int_2^3 (1-x)^4 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) dx$ | в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$ |
| 5) | a) $\int_0^{12} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}}$ | б) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx$ | в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+3} dx$ |
| 6) | a) $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$ | б) $\int_0^{\pi} \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx$ | в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+8} dx$ |
| 7) | a) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$ | б) $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$ | в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$ |
| 8) | a) $\int_0^3 (1+2x)^9 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$ | в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+36} dx$ |
| 9) | a) $\int_3^6 \left(2-\frac{x}{3}\right)^5 dx$ | б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$ | в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+4} dx$ |
| 10) | a) $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x+7}}$ | б) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ | в) $\int_{-2}^2 \sqrt{x^3+11} dx$ |

11)	a) $\int_8^{27} \frac{dx}{3\sqrt{x^2}}$	б) $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
12)	a) $\int_0^{-54} 3\sqrt{2-\frac{x}{9}} dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
13)	a) $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x} dx$	б) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) dx$	в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$
14)	a) $\int_1^{1,5} \left(4x - \frac{1}{2x} \right) dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$	в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$
15)	a) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^2}$	б) $\int_0^2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) dx$	в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+8} dx$
16)	a) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$	б) $\int_0^1 e^{2x} dx$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+8} dx$
17)	a) $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{3\sqrt{3x+1}} dx$	б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$	в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$
18)	a) $\int_1^e \frac{dx}{0,5x}$	б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+4} dx$

19)	a) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$	б) $\int_2^4 \frac{dx}{x}$	в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+36} dx$
20)	a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9+16x}} dx$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
21)	a) $\int_{-1}^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 dx$	б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	в) $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^3+11}}$
22)	a) $\int_{-1}^0 \frac{(3x-1)^4}{7} dx$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$
23)	a) $\int_1^{1,5} (1-2x)^7 dx$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{3x-2}$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
24)	a) $\int_1^6 (3x+1)^8 dx$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$	в) $\int_{-1}^9 \sqrt{3x^3-2} dx$
25)	a) $\int_{-2}^{14} \sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} dx$	б) $\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}}) dx$	в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+8} dx$
26)	a) $\int_{-4}^0 \sqrt{(4-3x)^3} dx$	б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$
27)	a) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{4+x}$	б) $\int_3^9 \frac{dx}{10x}$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
28)	a) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3} dx}{x}$	б) $\int_0^9 (1+e^{\frac{x}{9}}) dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
29)	a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$	б) $\int_0^1 e^{3x} dx$	в) $\int_3^7 \sqrt{x^3+27} dx$
30)	a) $\int_1^2 (2+x)^3 dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$	в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$

6. ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Загальна мета виконання домашніх завдань – систематичне закріплення теоретичного матеріалу, використання математичних понять і формул для розв’язання типових задач, підготовка до заліків та іспитів. Кожна робота присвячена вивченню певної теми, що передбачена навчальною програмою дисципліни. Кожне домашнє завдання виконується студентом самостійно, згідно з варіантом. Після виконання домашнього завдання вручну, тобто за допомогою паперу та ручки, слід перевірити правильність розв’язання кожної задачі за допомогою системи комп’ютерної алгебри Maple та роздрукувати отримане рішення. Усі домашні завдання виконуються на стандартних аркушах формату А4 та здаються на перевірку через тиждень після відповідного практичного заняття.

Якщо в умові задачі присутній номер варіанта N, то в індивідуальному завданні замість номера N слід поставити відповідне число.

Домашнє завдання № 1

МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ З НИМИ

1.1 Визначити множини коренів рівнянь:

- 1) $2x + 3 = 0$; 2) $5x - (x + 3) = 5$; 3) $x^2 - 2x = 0$;
4) $x^2 + 3x + 6 = 0$; 5) $\sqrt{x-3} = 2$; 6) $(x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$.

1.2 Визначіть множини всіх цілих чисел, що задовольняють нерівності:

- 1) $x > 3$; 2) $x^2 < 5$; 3) $2x^2 - 5x - 7 \geq 0$.

1.3 Нехай А – множина всіх коренів рівняння $x^5 + 3x^4 + x^3 - 1 = 0$. Які з чисел 1;

-1 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ є елементами множини А?

1.4 Запишіть всі підмножини чисел:

- 1) $A = \{1; 2; 3\}$; 2) $C = \{c; d; p\}$; 3) $B = \{\emptyset\}$; 4) $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$.

1.5 Дано множини $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 8\}$. Знайдіть:

- 1) $A \cap B$; 2) $A \cup C$; 3) $A \cup B \cup C$; 4) $A \cup \emptyset$
5) $A \cap \emptyset$; 6) $A \cap B \cap C$ 7) $A \cup B \cap C$; 8) $B \cap C$.

1.6 Нехай С – множина всіх коренів рівняння $2x^6 + x^3 + x = 0$. Знайти перетин цієї множини з множинами: $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{0, 1, -1\}$, $D := \{-2, -1, 1\}$.

1.7 Знайдіть $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus B$, $B \setminus A$ для множин А, В, С, заданих у вправі 1.5.

1.8 Знайдіть всі елементи множин

- 1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2x = 3\}$; 2) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 < 5\}$.

1.9 Серед перерахованих множин вкажіть скінченні і нескінченні:

- 1) множина додатних чисел;
2) множина коренів рівняння $(x-2)(x-3)(x+5) = 0$
3) множина банків вашого міста;
4) множина розв’язків нерівності: $3x - 2 > x + 3$;
5) множина цілих чисел, що діляться на 3.

1.10 Під час опитування в одному американському місті з'ясувалось, що із 800 опитаних мешканців 430 читають газету «САН», 220 – газету «Старт», 180 чоловік читають обидві газети. Скільки чоловік із числа опитаних не читають жодної газети?

1.11 Екзамен з математики складали 250 абітурієнтів, оцінку нижче «5» отримали 180 чоловік, а витримали цей іспит 210 абітурієнтів. Скільки абітурієнтів отримали оцінки «3» і «4»?

Домашнє завдання № 2

ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКЦІЮ. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Задача 1. Записати вказану числову множину X в одному з наступних форматів: $|x-a| < \delta$, $|x-a| \leq \delta$, $|x-a| > \delta$ або $|x-a| \geq \delta$

- | | |
|--|--|
| 1. (2; 4). | 1. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. |
| 2. $(-1; 5)$. | 2. $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. |
| 3. (2,3; 3,7). | 3. $(-\infty; 1,5) \cup (2,3; +\infty)$. |
| 4. [1,8; 2,1]. | 4. $(-\infty; -1,5] \cup [2; +\infty)$. |
| 5. $(-3,2; 2,3)$. | 5. $(-\infty; -3) \cup (-1,5; +\infty)$. |
| 6. $(-2,9; -1,7)$. | 6. $(-\infty; -3,5] \cup [-2,8; +\infty)$. |
| 7. $[-3,5; -1,8]$. | 7. $(-\infty; 3,5] \cup [4,2; +\infty)$. |
| 8. $[-2,7; 3,2]$. | 8. $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. |
| 9. $[-5; -2]$. | 9. $(-\infty; -1) \cup (2,5; +\infty)$. |
| 10. $(-7; 2)$. | 10. $(-\infty; -1,2] \cup [1,21; +\infty)$. |
| 11. $(1; 9) \setminus \{5\}$. | 11. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. |
| 12. $(2; 4) \setminus \{3\}$. | 12. $\mathbb{R} \setminus \{7\}$. |
| 13. $(-5,2; 5,2) \setminus \{0\}$. | 13. $\mathbb{R} \setminus \{-3,5\}$. |
| 14. $[-7; -1] \setminus \{-4\}$. | 14. $\mathbb{R} \setminus [3; 5]$. |
| 15. $[-3; 4] \setminus \{0,5\}$. | 15. $\mathbb{R} \setminus [-1; 2]$. |
| 16. $(-2,2; 1,8) \setminus \{-0,2\}$. | 16. $\mathbb{R} \setminus (-5; -2)$. |
| 17. $[-5; -1,7]$. | 17. $\mathbb{R} \setminus [-2,2; -1]$. |
| 18. $(-2; 3)$. | 18. $\mathbb{R} \setminus (2,1; 3,5)$. |
| 19. $(-4,5; 1)$. | 19. $\mathbb{R} \setminus [1,7; 3,8]$. |
| 20. $(2,5; 7,3)$. | 20. $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$. |
| 21. $(1,6; 2,8)$. | 21. $(-\infty; 4) \cup (4,8; +\infty)$. |
| 22. $[-1,5; 2]$. | 22. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. |
| 23. $(-7; -6)$. | 23. $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$. |
| 24. $[1,6; 2,1]$. | 24. $\mathbb{R} \setminus [-1,6; 1,2]$. |
| 25. $(3,8; 4,25)$. | 25. $\mathbb{R} \setminus (3,8; 4,5)$. |

Задача 2. До основних елементарних функцій відносять наступні функції:

1. Степенева функція виду $y = x^\alpha$.

В залежності від значення показника степеня α можливі наступні випадки:

- | | | | |
|----------------------------|----------------|----------------------------|------------|
| 1.1. При $\alpha=0$ | $y = x^0 = 1;$ | 1.2. При $\alpha=1$ | $y = x;$ |
| 1.3. При $\alpha=2$ | $y = x^2;$ | 1.4. При $\alpha=3$ | $y = x^3;$ |

- 1.5. При $\alpha = \frac{1}{2}$ $y = x^{\frac{1}{2}}$; 1.6. При $\alpha = \frac{1}{3}$ $y = x^{\frac{1}{3}}$;
 1.7. При $\alpha = \frac{1}{3}$ $y = x^{\frac{1}{3}}$; 1.8. При $\alpha = -1$ $y = \frac{1}{x}$;
 1.9. При $\alpha = -2$ $y = \frac{1}{x^2}$; 1.10. При $\alpha = -3$ $y = \frac{1}{x^3}$;
 1.11. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 1.12. При $\alpha = -\frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

2. Показникова функція виду $y = a^x$, $a > 0$; $a \neq 1$.

В залежності від значення основи степеня a можливі наступні випадки:

- 2.1. При $a > 1$ $y = a^x$; 2.2. При $0 < a < 1$ $y = a^x$.

3. Логарифмічна функція виду $y = \log_a x$, $a > 0$; $a \neq 1$.

В залежності від значення основи степеня a можливі наступні випадки:

- 3.1. При $a > 1$ $y = \log_a x$; 3.2. При $0 < a < 1$ $y = \log_a x$.

4. Тригонометричні функції:

- 4.1. $y = \sin x$; 4.2. $y = \cos x$
 4.3. $y = \operatorname{tg} x$; 4.4. $y = \operatorname{ctg} x$

5. Обернені тригонометричні функції:

- 5.1. $y = \arcsin x$; 5.2. $y = \arccos x$
 5.3. $y = \operatorname{arctg} x$; 5.4. $y = \operatorname{arcctg} x$

Побудувати графіки вказаних вище основних елементарних функцій та описати їх властивості за наступною схемою:

- область визначення функції;
- область значень функції;
- парність функції;
- періодичність функції;
- корені (нулі) функції;
- інтервали монотонності;
- екстремуми функції;
- асимптоти функції.

Задача 3. Використовуючи графіки основних елементарних функцій та користуючись правилами перетворення графіків, побудувати графіки вказаних елементарних функцій. (Побудову графіків проводити детально, по кроках, на окремих малюнках показувати старий та новий графіки на кожному кроці).

- $y = (x+3)^2 - 5$
- $y = \sqrt{x-2} + 3$
- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
- $y = \frac{5}{x-1} + 3$
- $y = (x-5)^3 + 2$
- $y = \sqrt[3]{x-4} - 2$
- $y = 2^{x+1} - 5$
- $y = \frac{8}{x^2-1} - 1$
- $y = (x-1)^3 + \frac{2}{3}x^2$
- $y = x - \sqrt{x+3} + 1$
- $y = \frac{x+2}{x+1}$
- $y = 3\cos^2(x+1)$

13) $y = 4 - (x-3)^2 + 2x$

14) $y = x - \sqrt{x} + \frac{1}{3}x^2$

15) $y = \frac{3x}{x^2 + 2x + 1}$

16) $y = 3\sin(2x-3)$

17) $y = e^{\cos x}$

18) $y = 2x - x^2$

19) $y = \frac{x+2}{3x^2+1}$

20) $y = 3\sin^2 x - 1$

21) $y = 2^{\frac{1}{x}}$

22) $y = -\frac{1}{\sqrt{x}} + 2x$

23) $y = \frac{2}{3x+2}$

24) $y = 3 |\sin(x-2)|$

25) $y = x^3 - 3x^2$

26) $y = x^2 + \frac{2}{x}$

27) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

28) $y = 16x \cdot (x-1)^3$

29) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

30) $y = (2+x^2) \cdot e^{-x^2}$

Задача 4. Побудувати графіки заданих функцій та обчислити вказані вирази, або розв'язати рівняння.

1. $y = e^{-x}$; $y = \ln x$; $\ln e$; $\ln(e^{-1})$; $\ln(e^2)$; $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$; $\ln 0,5$; $\ln 10$.

2. $y = e^{x-2}$; $y = \ln(-x)$; $\ln 1$; $\ln(1/e)$; $\ln(1/e^2)$; $\ln e^3$; $\ln 0,9$; $\ln 9$.

3. $y = e^{x+1}$; $y = \ln|x|$; $\ln(e^{1+\sqrt{2}})$; $\ln(1/e^4)$; $\ln e^5$; $\ln(\sqrt{e})$; $\ln 0,8$; $\ln 8$.

4. $y = e^{1-x}$; $y = (\ln x)^2$; $\ln e^{10}$; $\ln(1/\sqrt{e})$; $\ln\sqrt[3]{e^2}$; $\ln 0,7$; $\ln 7$.

5. $y = e^{2x}$; $y = \ln(x-1)$; $\ln e^2$; $\ln(1/\sqrt[3]{e})$; $\ln\left(\frac{1}{e^{-5}}\right)$; $\ln 0,5$; $\ln 5$.

6. $y = e^{x/2}$; $y = \ln(ex)$; $e^{\ln 20}$; $e^{-\ln 5}$; $e^{-2\ln(1/2)}$; $e^{0,5}$; $e^{1,5}$.

7. $y = e^{-2x}$; $y = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$; $e^{-\ln 3}$; $e^{\frac{1}{2}\ln 7}$; $\sqrt{e^{-\ln 8}}$; $\ln 7$; $\ln 0,7$.

8. $y = \sqrt[3]{e^x}$; $y = \ln(2x)$; $e^{-\ln 0,5}$; $e^{\frac{1}{3}\ln 8}$; $\sqrt[3]{e^{-\ln 3}}$; $\ln 3$; $\ln 0,3$.

9. $y = \sqrt{1/e^x}$; $y = \ln(e^2 x)$; $e^{-2\ln 0,25}$; $e^{\frac{1}{2}\ln 4}$; $\sqrt[4]{e^{-2\ln 4}}$; $\ln 4$; $\ln 0,4$.

10. $y = -e^x$; $y = \ln^2 x$; $(1/e)^{-2\ln 5}$; $\frac{1}{e^{-\ln 2}}$; $\sqrt{e^{-\ln 9}}$; $\ln 10$; $\ln 0,1$.

11. $y = e^{-x} + 1$; $y = |\ln x|$; $\ln\sqrt{1/e}$; $\ln(e/e^{-0,5})$; $\sqrt{\ln e^2}$; $e^{0,5}$; e^2 .

12. $y = 1 - e^x$; $y = \sqrt{\ln x}$; $\ln\left(\sqrt[3]{1/e^2}\right)$; $\ln\left[\left(\sqrt[3]{e}\right)^{-1}\right]$; $\sqrt{\ln e^4}$; $\ln 4$; $\ln 0,4$.

13. $y = 1 - e^{-x}$; $y = \sqrt[3]{\ln x}$; $e^a = 1$; e^{-2a} ; $e^a = 5$; e^{-2a} ; $e^a = 0$; $\ln 0,4$.

14. $y = e^{2x} + 2$; $y = 1/\ln x$; $e^{a^2-4} = 1$; $e^{-|a+1|} = e$; $\ln 3$; $\ln 0,3$.

15. $y = e^{2x} - 3$; $y = 2\ln|x|$; $e^{4-\ln^2 a} = 1$; $\ln\left[e^{-2\ln e^2}\right]$; \sqrt{e} ; e^3 .

16. $y = e^{-2x} - 1$; $y = \ln(x+5)$; $e^{4+\ln^2 a} = e^8$; $\left[e^{-3\ln e^{-1}}\right]^{1/3}$.

17. $y = 1 - e^{-2x}$; $y = \ln(x-e)$; $\ln[e(a^2-3)] = 2$; \sqrt{e} ; $1/\sqrt{e}$.

18. $y = e^{-|x|}$; $y = \ln\sqrt{x}$; $\ln\left(\sqrt[3]{1/e^5}\right)$; $\sqrt{e^{-\ln(e^{-2})}}$; $1/e$.

$$19. y = \frac{1}{e^x + 1}; y = \frac{-1}{\ln x}; e^{1+\ln^2 a} = \ln e; \sqrt{e}; 1/e.$$

$$20. y = \frac{1}{e^{-x} + 1}; y = 5 + \ln x; e^{-2a} = \sqrt{1/e}; \ln[(a+1)e^2] = 1.$$

$$21. y = e^{-2x}; e^{-a} - 1 = 2; 1 - \ln a = 5.$$

$$22. y = |1 - e^x|; e^{2a} - e^a - 2 = 0.$$

$$23. y = e^{-|x|}; e^{3a} - 8 = 0; e^{2a} + e^{-2a} = 2.$$

$$24. y = e^{|\ln x|}; e^{2a} - 4 = 0; \ln^2 a - |\ln a| = 0.$$

$$25. y = \frac{1}{|\ln x|}; \ln^3 a - |\ln a| = 0.$$

Задача 5. Побудувати графіки заданих функцій за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple. На графіку відобразити рівняння функції, назву графіку, назви осей координат, задати по 8-10 поділок по кожній з осей.

1. $y = \frac{1}{x-2};$	$y = \frac{1}{x^3};$	$y = -\sqrt{x-1}.$
2. $y = x^2 - 2x + 5;$	$y = \frac{1}{\sqrt{x}};$	$y = -\sqrt{x+2}.$
3. $y = \operatorname{tg} x ;$	$y = \frac{1}{x+1};$	$y = 2 + \sqrt{x-1}.$
4. $y = \operatorname{tg}^2 x;$	$y = \frac{x+2}{x+1};$	$y = 1 - \sqrt{x-1}.$
5. $y = x^2 + x + 1;$	$y = \frac{x-1}{x-2};$	$y = \operatorname{arctg} x.$
6. $y = \frac{1}{1+x^2};$	$y = \frac{x+1}{x-1};$	$y = \arcsin x.$
7. $y = x - 1 - x^2;$	$y = -1 + \frac{2}{x-3};$	$y = 2 \operatorname{arctg} x.$
8. $y = \frac{x+1}{x-2};$	$y = -\operatorname{arctg} x;$	$y = 2 \sin x.$
9. $y = \frac{2x+1}{x-1};$	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$	$y = \sin(x-1).$
10. $y = \frac{2}{1-x};$	$y = \frac{1}{x^2+4};$	$y = 4 \operatorname{arctg} x.$
11. $y = \frac{1}{2x+1};$	$y = \operatorname{tg}(x-1);$	$y = 3 \sin^2 x.$
12. $y = \frac{x}{x-3};$	$y = 2 \cos(x+1);$	$y = x^2 - 2x - 3 .$
13. $y = x^2 + 2x + 2;$	$y = \frac{3}{2-x};$	$y = 1 - \operatorname{arctg} x.$
14. $y = \frac{x}{x+2};$	$y = 2 \cos^2 x;$	$y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x.$
15. $y = \arcsin x;$	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$	$y = 2x - x^2.$
16. $y = 4 - x^2;$	$y = -\frac{1}{\sqrt{x}};$	$y = 2 \arcsin x.$
17. $y = 1 - x^2 ;$	$y = \frac{-2}{x-3};$	$y = \arccos x.$
18. $y = \frac{x+2}{x-2};$	$y = 2 \sin(x-2);$	$y = -\frac{1}{x^3}.$
19. $y = 2^{\sqrt{x}};$	$y = \frac{2}{x-3};$	$y = \pi + \operatorname{arctg} x.$
20. $y = 2^{-\sqrt{x}};$	$y = e^x + e^{-x};$	$y = -2 \sin x.$
21. $y = \frac{x-1}{x+3};$	$y = e^{\cos x};$	$y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$
22. $y = \left \frac{x+2}{x+1}\right ;$	$y = e^{\sin x};$	$y = 3 \sin(2x).$
23. $y = \operatorname{arctg} x ;$	$y = e^x;$	$y = 3 \sin x .$
24. $y = \ln(e x);$	$y = e^{-x};$	$y = 1 - \arccos x.$
25. $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x;$	$y = e^{1-2x};$	$y = \frac{2x-1}{x+2}.$

Домашнє завдання № 3
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Задача 1. Знайти границі заданих функцій та побудувати графік:

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$; | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$. |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$; | $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$. |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$; | $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4x}$. |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$; | $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x - 1) \arcsin x$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$; | $\lim_{x \rightarrow 0} x e^x \ln(1 - x)$. |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$; | $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 + 3x}$. |
| 7. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin x}{x}$; | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^3 - 3x}$. |
| 8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x}$; | $\lim_{x \rightarrow e} e^{1 - \ln x}$. |
| 9. $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin x}{x}$; | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\cos x}$. |
| 10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{x}$; | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x - 1}$. |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{x}$; | $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 6x + 10 x$. |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + 1}$; | $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \cdot \operatorname{arctg} x$. |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$; | $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg} x$. |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$; | $\lim_{x \rightarrow 1 - e} x \ln(1 - x)$. |
| 15. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$; | $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \arccos x$. |
| 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$; | $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x - \cos x}$. |
| 17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$; | $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \ln(\operatorname{arctg}(2x))$. |
| 18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$; | $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \ln \left[-\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(2x) \right]$. |
| 19. $\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \operatorname{arctg} x$; | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x}$. |
| 20. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \arccos x$; | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x}$. |
| 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x + 2}$; | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x}$. |
| 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{\ln(2 - x)}$; | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x \cdot x - 1 }$. |
| 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{x+1} - e}$; | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$. |
| 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+2}}$; | $\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \ln x}{1 + x \cdot (x - 1)}$. |
| 25. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \arcsin x$; | $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{x^2 + x}$. |

Задача 2. Знайти границі заданих функцій та побудувати графік:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 2x)$.
7. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{x - 2\pi}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{\sin x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin^2 x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{(x - \pi)^2}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{x - \pi}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x + \frac{\pi}{2}}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{x - 2\pi}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - 5x}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$.

Задача 3. Знайти границі заданих функцій та побудувати графік:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/\ln x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x + 1}}{1 - 5x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{x^2+1}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{1 + 7x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - 2^{-x}}{2^x + 5}$.
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 2^{-x}}{2^x + 5}$.
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^x$.
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{-x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^{2x}$.
16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^{5-x}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x+8}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{6-3x}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{x-7}$.
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x-7}$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1+2x}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1-2x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-x}$.

Задача 4. Знайти границі заданих функцій та побудувати графік:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 - x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2 + x^3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{2/3x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 - \cos x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 - x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x+2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2 + 5x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{2x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^x - 1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 2x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x + \sqrt[3]{x}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{\sin 3x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 4}$$

Домашнє завдання № 4

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ТОЧКИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ

Задача 1. Знайти границі заданих функцій та побудувати графік:

$$1. \lim_{x \rightarrow \pm 0} 3^{\frac{1}{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} \frac{1}{x+2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \operatorname{arctg} x$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pm 0} 5^{\frac{1}{x^2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{|x|}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x-1|}{x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - e^x)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} 5^{\frac{1}{x+2}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pm 0} 5^{\frac{1}{x}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pm 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \pm 0} e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \operatorname{arctg} x$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2 - e^x)$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|2x|}{|x+1|}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} 3^{\frac{1}{x-2}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2|x|}{x-1}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \pm 0} e^{\frac{2}{x}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{x^2 - 4}$$

Задача 2. Знайти точки розриву заданих функцій. Обчислити односторонні границі заданих функцій в точках розриву та встановити характер точок розриву. Побудувати графік функції.

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & 1 < x. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & 1 < x. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ -1, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 3, \\ x, & x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 5, & x \in [0; 3], \\ 0, & x \notin [0; 3] \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x \leq 4, \\ -1, & x > 4. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{9}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-e^{-5x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} x(2-x), & x \in [0; 2], \\ 2, & x \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x < 2, \\ x^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Домашнє завдання № 5

ЧИСЕЛЬНЕ РІШЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Задача 1. Для заданої функції $y=f(x)$ графічним способом відокремити корені, тобто вказати інтервали, на яких знаходиться рівно один корень функції. За допомогою метода поділу відрізка навпіл знайти всі корені рівняння $f(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 0,001$. Побудувати графік функції $y=f(x)$.

Номер варіанту	Вираз для функції $y=f(x)$
1.	$y(x) = x^3 + x + 1$
2.	$y(x) = x^3 + x + 3$
3.	$y(x) = x^3 + 2x + 2$
4.	$y(x) = x^3 + 3x + 1$
5.	$y(x) = x^3 + x + 1,5$
6.	$y(x) = x^3 + x + 2,5$
7.	$y(x) = x^3 + 3x + 1,5$
8.	$y(x) = x^3 + 5x + 1$
9.	$y(x) = x^3 + 4x + 1$
10.	$y(x) = x^3 + 4x + 5$
11.	$y(x) = x^3 + x + 7$
12.	$y(x) = x^3 + x - 1$
13.	$y(x) = x^3 + 2x - 1$
14.	$y(x) = x^3 + 3x - 2$
15.	$y(x) = x^3 + x + 6$
16.	$y(x) = x^3 + x + 5$
17.	$y(x) = x^3 + 2x - 4$
18.	$y(x) = x^3 + 3x + 7$
19.	$y(x) = x^3 + x - 10$
20.	$y(x) = x^3 + x - 8$
21.	$y(x) = x^3 + 5x - 7$
22.	$y(x) = x^3 + 5x - 11$
23.	$y(x) = x^3 + 3x - 7$
24.	$y(x) = x^3 + 3x - 5$
25.	$y(x) = x^3 + x - 3$

Задача 2. Для заданої функції $y=f(x)$ графічним способом визначити кількість коренів, вказати інтервали, на яких знаходяться корені функції. За допомогою метода поділу відрізка навпіл знайти всі корені рівняння $f(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 0,00001$. Для проведення розрахунків використовувати систему комп'ютерної алгебри *Maple*. Побудувати графік функції $y=f(x)$.

Номер варіанту	Вираз для функції $f(x)$
1	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 139x^2 + 438x + 2160$
2	$f(x) = x^4 - 11x^3 - 126x^2 + 344x + 1088$
3	$f(x) = x^4 - 7x^3 - 21x^2 + 367x + 440$
4	$f(x) = x^4 - 14x^3 - 43x^2 + 644x - 588$
5	$f(x) = x^4 - 17x^3 + 2x^2 + 644x - 1176$
6	$f(x) = x^4 - 18x^3 - 19x^2 + 1152x - 2880$
7	$f(x) = x^4 - 25x^3 + 32x^2 + 1648x - 5760$
8	$f(x) = x^4 - 26x^3 + 89x^2 + 1340x - 6300$
9	$f(x) = x^4 - 26x^3 + 124x^2 + 936x - 5760$
10	$f(x) = x^4 - 25x^3 + 125x^2 + 625x - 3750$
11	$f(x) = x^4 + x^3 - 94x^2 + 56x + 960$
12	$f(x) = x^4 + x^3 - 102x^2 + 40x + 1600$
13	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 103x^2 - 195x + 1350$
14	$f(x) = x^4 - 97x^2 - 84x + 540$
15	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 73x^2 + 88x + 420$
16	$f(x) = x^4 - 8x^3 - 55x^2 + 54x + 120$
17	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 22x^2 + 288x - 288$
18	$f(x) = x^4 - 14x^3 - x^2 + 350x - 600$
19	$f(x) = x^4 - 17x^3 + 25x^2 + 441x - 1170$
20	$f(x) = x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 328x - 672$
21	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 112x^2 + 160x + 768$
22	$f(x) = x^4 + x^3 - 113x^2 + 75x + 1188$
23	$f(x) = x^4 + x^3 - 121x^2 + 59x + 1980$
24	$f(x) = x^4 - 79x^2 + 66x + 432$
25	$f(x) = x^4 - x^3 - 76x^2 + 4x + 288$
26	$f(x) = x^4 - 5x^3 - 90x^2 + 200x + 704$
27	$f(x) = x^4 - 8x^3 - 85x^2 + 404x + 480$
28	$f(x) = x^4 - 15x^3 - 22x^2 + 540x - 504$
29	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 28x^2 + 384x - 576$
30	$f(x) = x^4 - 12x^3 - 27x^2 + 378x - 648$

Домашнє завдання № 6

ТЕХНІКА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ

$$1. y = 5 + 7x - \frac{3}{5}x^3.$$

$$2. y = 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}.$$

$$3. y = \sqrt[3]{ax} - \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4. y = \frac{5x^3}{\sqrt{x}} - a^2.$$

$$5. y = \frac{7-x+5x^3\sqrt{x}}{e^2} - 7.$$

$$6. y = \pi^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \sqrt[4]{bx^5}.$$

$$7. y = \frac{x}{x^2 - 5x + 2}.$$

$$8. y = \frac{kx+b}{4x^3-a}.$$

$$9. y = \frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} - a_1 \cdot b_2.$$

$$10. y = \frac{2x-3}{1+5x} - \sqrt{a^5}.$$

$$11. y = 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{x}.$$

$$12. y = \frac{1}{\pi} - x\sqrt[3]{x^4} - \frac{x}{x+2}.$$

$$13. y = \frac{2x^2-x+1}{x^2+a^2}.$$

$$14. y = \frac{a+x^2}{b-x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

$$15. y = -\frac{5\sqrt{x^7} - 1/x}{b^2}.$$

$$16. y = \frac{a-bx}{c+dx+a}.$$

$$17. y = \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x}.$$

$$18. y = \sqrt[4]{x^5} \left(\frac{a}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[5]{x^4} \right).$$

$$19. y = \frac{2x-3}{x^2-5x-7}.$$

$$20. y = e^2 - \frac{1-8x}{7x+5}.$$

$$21. y = \cos 5 - \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{a^4x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$22. y = \ln 2 - \frac{x - \sqrt{x+1}}{2x+3}.$$

$$23. y = \frac{e^a - x^2}{5 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

$$24. y = \frac{a_2x - b_2}{ax^2 + bx + c} - a_2c.$$

$$25. y = \sqrt[5]{x^4} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x+1}{x} \right).$$

Задача 1. Знайти похідні першого порядку заданої функції $y=f(x)$

Задача 2. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ заданої функції $y=f(x)$

1. $y = x \cdot e^x$.
2. $y = \frac{e^x}{x}$.
3. $y = x \ln x$.
4. $y = \frac{\ln x}{x}$.
5. $y = x \cos x$.
6. $y = \frac{x}{\cos x}$.
7. $y = x \cdot 5^x$.
8. $y = \frac{5^x}{x^2}$.
9. $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$.
10. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$.
11. $y = (1 - 2x) \operatorname{tg} x$.
12. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + a}$.
13. $y = \frac{e^a - be^x}{e^x + 7}$.
14. $y = \frac{\ln x + 1}{x + \ln x}$.
15. $y = x \operatorname{arctg} x$.
16. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.
17. $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos x - \sin x + a}$.
18. $y = e^x \cdot \ln x$.
19. $y = e^x \cdot \operatorname{ctg} x$.
20. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt[3]{x}}$.
21. $y = 7^x [\operatorname{tg} x - \sqrt{bx}]$.
22. $y = x \operatorname{arcsin} x$.
23. $y = \frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$.
24. $y = (x^2 - 1) \operatorname{arccos} x$.
25. $y = \frac{x^2 - 1}{\operatorname{arccos} x}$.

Задача 3. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ заданої функції $y=f(x)$

1. $y = \sqrt{3 + 5x} - \frac{x}{\sqrt{x - 3}}$.
2. $y = (x - 3)^{10} - \frac{5}{(1 - 2x)^7}$.
3. $y = \sqrt{\frac{1}{(3x + a)^5}}$.
4. $y = \frac{1}{2x + 5} - \frac{1}{(5 - 2x)^3}$.
5. $y = \frac{e^{2a} + a^{ax} - e^{-x}}{x + 1}$.
6. $y = \sqrt{\frac{x\sqrt{a}}{(5x - 3)^4}}$.
7. $y = \frac{\ln x}{\sin 5x}$.
8. $y = e^{-3x} (\sin 2x - \cos 2x)$.
9. $y = \sqrt{e^{-x} \left(\frac{x}{x + a} - 5^a \right)}$.
10. $y = x \cos(3x + 1)$.
11. $y = \frac{\sin(1 - 5x)}{x}$.
12. $y = x(\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} b)$.
13. $y = \frac{\operatorname{ctg}(4x - 2)}{\sqrt{x}}$.
14. $y = (bx - c)^7 - \frac{a}{(x + 3)^4}$.
15. $y = \sqrt[3]{(1 - 7x)^4} + \frac{7}{(2x + 1)^5}$.
16. $y = (1 - 5x) - \sqrt[3]{\frac{7a}{(5x - 1)^{80}}}$.
17. $y = \ln 2x [2^x - 2^{-x} + \ln b]$.
18. $y = \sin x + \cos 2x - \sin 3x + \frac{1}{a}$.
19. $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos x - \sin x}$.
20. $y = e^{2x} \cdot \cos 3x$.
21. $y = e^{-bx} \cdot \sin(ax + c)$.
22. $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{(5x - 16)^3}}$.
23. $y = 5^{-x} \cdot \ln x - \ln b$.
24. $y = x \operatorname{arctg} 5x$.
25. $y = \frac{\operatorname{arcsin} 4x}{x + \cos a}$.

Задача 4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ заданої функції $y=f(x)$

1. $y = \sin^2(1 - 5x)$.

2. $y = \cos^3(1 + 2x)$.

3. $y = \frac{1}{\sin(2x + 3)}$.

4. $y = \frac{1}{\cos^2(3x - 2)}$.

5. $y = \sqrt{\sin 5x}$.

6. $y = \sqrt[3]{\cos^4 5x}$.

7. $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 7x}}$.

8. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 5x}}$.

9. $y = \sqrt{1 + \sin^2 7x}$.

10. $y = \sin^2 \frac{x}{x+1}$.

11. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

12. $y = xe^{-x^2}$.

13. $y = \frac{e^{-5x^2}}{x}$.

14. $y = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$.

15. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

16. $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

17. $y = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

18. $y = \sqrt{5x + \sqrt{x+1}}$.

19. $y = \operatorname{tg}^2(3x - 2)$.

20. $y = \operatorname{tg}^3\left(\frac{1}{x}\right)$.

21. $y = e^{-\sin^2 3x}$.

22. $y = x \ln(1 + x^2)$.

23. $y = x \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

24. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{x}\right)$.

25. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \cos^2 5x}}$.

Домашнє завдання № 7

ДИФЕРЕНЦІУВАННЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Задача 1. Використовуючи логарифмування ($y = e^{\ln y}$) знайти похідну $\frac{dy}{dx}$

$$1. y = \frac{(x-2)^3(3x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$2. y = \sqrt{\frac{x+3}{(2x-5)^3(x-7)^5}}.$$

$$3. y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-5)^3}{\sqrt[3]{x+2}}}.$$

$$4. y = \sqrt[5]{\frac{(x+3)(x-5)^3}{1+x^2}}.$$

$$5. y = x^x.$$

$$6. y = x^{\sqrt{x}}.$$

$$7. y = (\sqrt{x})^x.$$

$$8. y = (1+x^2)^x.$$

$$9. y = (\ln x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$10. y = (\ln x)^x.$$

$$11. y = x^{5x}.$$

$$12. y = x^{2\sqrt{x}}.$$

$$13. y = (1+x^2)^x.$$

$$14. y = (1+x)^x.$$

$$15. y = (\sqrt[3]{x})^x.$$

$$16. y = (\sqrt[5]{x})^x.$$

$$17. y = x^{\ln x}.$$

$$18. y = x^{1/x}.$$

$$19. y = (\sqrt[3]{x})^{2x}.$$

$$20. y = x^{x-1}.$$

$$21. y = (x+1)^{2x}.$$

$$22. y = x^x.$$

$$23. y = x^{3x}.$$

$$24. y = (\sqrt[3]{x})^{2x}.$$

$$25. y = \left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

Задача 2. Знайти похідну третього порядку (для непарних варіантів) або другого порядку (для парних варіантів)

1. $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + \frac{1}{x}$.

2. $y = \sin^2 5x$.

3. $y = \sqrt{x} - \frac{5}{1-3x}$.

4. $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$.

5. $y = (x-7)^3 + 7\sqrt[4]{(6+5x)^7}$.

6. $y = x \cos^2(1-3x)$.

7. $y = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$.

8. $y = xe^{-x^2}$.

9. $y = xe^{-2x}$.

10. $y = \ln \frac{x-2}{x+2}$.

11. $y = \ln(2+5x)$.

12. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$.

13. $y = e^{-x^2}$.

14. $y = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$.

15. $y = e^{-\frac{(x-a)^2}{25}}$.

16. $y = x\sqrt{x^2-1}$.

17. $y = (x-1) \cdot e^{2x}$.

18. $y = \sin^2(1+x^2)$.

19. $y = x \cdot \ln x$.

20. $y = \ln\left[(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 1}\right]$.

21. $y = \cos 7x - \frac{1}{x+2}$.

22. $y = \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{x+1}$.

23. $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$.

24. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

25. $y = \operatorname{tg} x$.

Задача 3. Показати, що функція $y=f(x)$ задовольняє наведеному диференціальному рівнянню

$$y'' + 9y = 0.$$

1. $y = \cos 3x.$

6. $y = -7 \sin 3x.$

2. $y = \sin 3x.$

7. $y = \cos 3x + \sin 3x.$

3. $y = \cos(3x + 5).$

8. $y = A \cos(3x + a).$

4. $y = \sin(1 - 3x).$

9. $y = a \cos 3x + b \sin 3x.$

5. $y = 4 \cos 3x.$

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

10. $y = e^{-x}.$

11. $y = xe^{-x}.$

12. $y = (x - 5)e^{-x}.$

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

13. $y = e^x \cdot \cos x.$

16. $y = 7e^x \sin x.$

14. $y = e^x \cdot \sin x.$

17. $y = e^x \cos(x + 1).$

15. $y = 5e^x \cos x.$

$$y^{(4)} - y = 5x.$$

18. $y = -5x + 2e^x.$

20. $y = -5x + 7 \cos x.$

19. $y = -5x - e^{-x}.$

21. $y = -5x - \sin x.$

$$y^{(4)} - 81y = 0.$$

22. $y = 5 \cos 3x.$

24. $y = \frac{1}{2} e^{-3x}.$

23. $y = -\sin 3x.$

25. $y = -e^{3x}.$

Задача 4. Обчислити наближене значення за допомогою диференціалу. Порівняти наближене значення з «точним», отриманим за допомогою калькулятора (6-8 десятичних знаків):

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{3,84}$. | 9. $\sqrt{5+2,20^2}$. | 17. $\sqrt{2,05^2+2,05+3}$. |
| 2. $\sqrt[3]{8,06}$. | 10. $2,04^6$. | 18. $\sin(0,22)$. |
| 3. $1,07^5$. | 11. $\sqrt{3,04^2+3,04+4}$. | 19. $\sin(-0,12)$. |
| 4. $\sqrt{1+1,94^3}$. | 12. $\sqrt{1,96^2+1,96+3}$. | 20. $e^{-0,14}$. |
| 5. $\sqrt{1+2,12^3}$. | 13. $1,02^{10}$. | 21. $e^{-0,24}$. |
| 6. $\sqrt[3]{4+1,94^2}$. | 14. $0,92^8$. | 22. $e^{0,08}$. |
| 7. $\sqrt[3]{4+2,24^2}$. | 15. $0,92^{15}$. | 23. $e^{0,16}$. |
| 8. $\sqrt{5+1,88^2}$. | 16. $\sqrt[5]{1,12^3}$. | 24. $\ln(0,92)$. |
| | | 25. $\ln(1,25)$. |

Задача 5. Використовуючи диференціал отримати наближені формули для наступних виразів при $|x| \ll 1$:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|---|
| 1. $\sqrt{1+x}$. | 9. $(1+x)^{10}$. | 17. $\text{arctg}(1+bx)$. |
| 2. $\text{arctg}(1+x)$. | 10. $(1+x)^\alpha$. | 18. $\arccos x$. |
| 3. $\sin 5x$. | 11. $(1+ax)^5$. | 19. $\arcsin(0,5+x)$. |
| 4. $\sqrt{1+5x}$. | 12. $(1+bx)^\alpha$. | 20. $\text{arctg}(x-1)$. |
| 5. $\sqrt{1+\sin 3x}$. | 13. $\frac{1}{\sqrt[3]{1-5x}}$. | 21. $\arcsin(0,5+bx)$. |
| 6. $\sqrt[3]{1+x}$. | 14. $\ln(1+7x)$. | 22. e^{-bx} . |
| 7. $\sqrt[3]{1+ax}$. | 15. $\ln(1+bx)$. | 23. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3}$. |
| 8. $\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$. | 16. $\sin bx$. | 24. $1 + (1-x)^{-1} + (1-x)^{-2}$. |
| | | 25. $5 \cdot (1+x)^{-4}$. |

Домашнє завдання № 8

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Задача 1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої L в точці $M_0(x_0, y_0) \in L$. Знайти дотичний і нормальний вектори до кривої в точці M_0 . Зробити малюнок. :

$$L: f(x; y) = 0; M_0(x_0, y_0).$$

Вказівка: скористуватися правилом диференціювання неявної функції.

1. $x^2 + y^2 = 4$, $M_0(\sqrt{3}; 1)$
2. $x^2 + y^2 = 9$, $M_0(-2\sqrt{2}; 1)$
3. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(3; 4)$
4. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(-3; 4)$
5. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(-3; -4)$
6. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(4; 3)$
7. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(4; -3)$
8. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(5; 0)$
9. $x^2 + y^2 = 25$, $M_0(0; -5)$
10. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$, $M_0(3; 2)$
11. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$, $M_0(-3; 2)$
12. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$, $M_0(3; -2)$
13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2$, $M_0(3\sqrt{2}; 0)$
14. $x^2 - y^2 = 1$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$
15. $x^2 - y^2 = 1$, $M_0(-\sqrt{2}; 1)$
16. $x^2 - y^2 = 1$, $M_0(\sqrt{2}; -1)$
17. $x^2 - y^2 = 1$, $M_0(-\sqrt{2}; -1)$
18. $y^2 - x^2 = 1$, $M_0(1; \sqrt{2})$
19. $y^2 - x^2 = 1$, $M_0(-1; \sqrt{2})$
20. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $M_0(\sqrt{3}; \frac{1}{2})$
21. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $M_0(-\sqrt{3}; \frac{1}{2})$
22. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $M_0(\sqrt{3}; -\frac{1}{2})$
23. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, $M_0(2; 1)$
24. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, $M_0(-2; 1)$
25. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, $M_0(2; -1)$

Задача 2. Дослідити задану функцію $y = f(x)$ на глобальний екстремум на відрізьку $[a; b]$. Знайти найменше та найбільше значення функції і точки, в яких ці значення досягаються.

1. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$, $[0; 5]$
2. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$, $[-5; -1]$
3. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$, $[-3; 4,5]$
4. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$, $[-1; 3]$
5. $y = x^2 + \frac{2}{x+1} + 2x - 5$, $[1; 7]$
6. $y = x^2 + \frac{2}{x+1} + 2x - 5$, $[-0,2; 5]$
7. $y = x^2 + \frac{2}{x+1} + 2x - 5$, $[-0,9; 2]$
8. $y = x^2 + \frac{2}{x+1} + 2x - 5$, $[-3; -1,2]$
9. $y = \sqrt{x} - x$, $[0; 1]$
10. $y = \sqrt{x} - x$, $[0; 4]$
11. $y = \sqrt{x} - x + 2$, $[0,1; 2]$
12. $y = \sqrt{x} - x + 2$, $[0,5; 3]$
13. $y = \sqrt[3]{x} - x$, $[-0,1; 1]$
14. $y = \sqrt[3]{x} - x$, $[-1; 1]$

$$15. y = \sqrt[3]{x} - x + 1, [-1; 8]$$

$$16. y = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x} - 7, [1; 4]$$

$$17. y = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x} - 7, [0,2; 4]$$

$$18. y = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x} + 1, [-3; -1]$$

$$19. y = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x} - 1, [-3; -0,3]$$

$$20. y = \sqrt{x+1} - x, [-1; 0,5]$$

$$21. y = \sqrt{x+1} - x, [-1; 3]$$

$$22. y = \sqrt[3]{x+1} - x, [-3; 0]$$

$$23. y = \sqrt[3]{x+1} - x, [-2; 7]$$

$$24. y = \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x} - 3, [1; 3]$$

$$25. y = \frac{x^3}{3} + \frac{16}{x} + 1, [-4; -1]$$

Домашнє завдання № 9

ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКА

Задача 1. Провести повне дослідження функції $y = f(x)$, сформувати таблицю поведінки функції та побудувати графік функції.

$$1. y = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

$$7. y = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

$$2. y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$$

$$8. y = -x^3 + 9x.$$

$$3. y = x^3 - 3x.$$

$$9. y = x^3 - x^2 - 2x.$$

$$4. y = x^3 - x^2 - x - 3.$$

$$10. y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

$$5. y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x.$$

$$11. y = x^3 - 3x^2 - 9x.$$

$$6. y = x^3 - 3x^2 - 9x.$$

$$12. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x.$$

$$13. y = x^3 - 12x.$$

$$19. y = x^3 + 9x^2 + 15x.$$

$$14. y = x^3 - 9x.$$

$$20. y = 6x - x^3 + 5.$$

$$15. y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x.$$

$$21. y = x^3 - 12x + 11.$$

$$16. y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x.$$

$$22. y = x^3 - 9x + 8.$$

$$17. y = x^3 - 3x + 2.$$

$$23. y = x^3 - 3x - 5.$$

$$18. y = x^3 - 9x^2 + 15x.$$

$$24. y = 3x - x^3 - 2.$$

$$25. y = x^3 - 6x + 5.$$

Задача 2. Провести повне дослідження функції $y = f(x)$, сформувати таблицю поведінки функції та побудувати графік функції.

1. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.	10. $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$.
2. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.	11. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.
3. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.	12. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x}$.
4. $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x}$.	13. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.
5. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.	14. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$.
6. $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x}$.	15. $y = \frac{x^2 - 10x + 26}{x - 5}$.
7. $y = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.	16. $y = \frac{x^2 + 10x + 27}{x + 5}$.
8. $y = \frac{x^2 + 6x + 11}{x + 3}$.	17. $y = \frac{x^2 - 10x + 20}{x - 5}$.
9. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$.	
18. $y = \frac{x^2 + 10x + 20}{x + 5}$.	23. $y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 1}$.
19. $y = \frac{1 - x - x^2}{x}$.	24. $y = \frac{x^2 + x - 2}{2x - 1}$.
20. $y = \frac{1 + x - x^2}{x}$.	25. $y = \frac{1 - x^2 - x}{2x + 1}$.
21. $y = \frac{x^2 - x + 2}{2x - 1}$.	26. $y = \frac{1 - x^2 + x}{2x - 1}$.
22. $y = \frac{x^2 + x + 2}{2x + 1}$.	

Задача 3. Провести повне дослідження функції $y = f(x)$, сформулювати таблицю поведінки функції та побудувати графік функції.

1. $y = \sqrt{x} - x$.	11. $y = \sqrt[3]{x^2} + x$.	18. $y = -x + \arctg x$.
2. $y = 2\sqrt{x} - x$.	12. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x$.	19. $y = \frac{\ln x }{ x }$.
3. $y = 3\sqrt{x} - x$.	13. $y = \frac{\ln x}{x}$.	20. $y = -x + \arctg 2x$.
4. $y = \sqrt[3]{x} - x$.	14. $y = \frac{\ln x }{x}$.	21. $y = \frac{\ln x}{x^2}$.
5. $y = \sqrt[3]{x} + x$.	15. $y = \frac{\ln x^2}{ x }$.	22. $y = \frac{\ln x }{x^2}$.
6. $y = \sqrt{x} - x + 2$.	16. $y = \frac{2 \ln x}{x}$.	23. $y = \sqrt{x+1} - x - 1$.
7. $y = 2\sqrt{x} - x + 1$.	17. $y = x + \arctg x$.	24. $y = \sqrt{x+1} - x + 1$.
8. $y = 4\sqrt{x} - x$.		25. $y = \sqrt[3]{x+1} - x + 1$.
9. $y = 4\sqrt{x} - x$.		
10. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.		

Задача 4. Провести повне дослідження функції $y = f(x)$, сформувати таблицю поведінки функції та побудувати графік функції.

- | | | |
|--------------------------|--|------------------------------------|
| 1. $y = xe^{-x}$. | 11. $y = (x - 3)e^x$. | 18. $y = xe^{-x^2}$. |
| 2. $y = xe^x$. | 12. $y = (x + 3)e^{-x}$. | 19. $y = -xe^{-x^2}$. |
| 3. $y = (x - 1)e^{-x}$. | 13. $y = e^{-x^2 - 4x}$. | 20. $y = xe^{-2x^2}$. |
| 4. $y = (x - 1)e^x$. | 14. $y = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{50}}$. | 21. $y = e^{-x^2 + 6x}$. |
| 5. $y = xe^{4x}$. | 15. $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. | 22. $y = e^{-x^2 - 6x}$. |
| 6. $y = xe^{-2x}$. | 16. $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. | 23. $y = x \cdot e^{- x }$. |
| 7. $y = (x - 2)e^{-x}$. | 17. $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. | 24. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. |
| 8. $y = (x + 1)e^x$. | | 25. $y = (x - 1) \cdot e^{- x }$. |
| 9. $y = (1 - x)e^x$. | | |
| 10. $y = -xe^{-2x}$. | | |

Домашнє завдання № 10

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Задача 1. Розкласти по формулі Тейлора функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0 до членів n -го порядку включно.

- $y = e^{2x}$, $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $y = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $y = \sqrt{e^x}$, $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$, $n = 6$.
- $y = \sin 3x$, $x_0 = 0$, $n = 7$.
- $y = \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$.
- $y = \cos^2 x$, $x_0 = 0$, $n = 7$.
- $y = \sin^2 x$, $x_0 = 0$, $n = 8$.
- $y = \ln(1 - x)$, $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $y = \ln(1 + 3x)$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

11. $y = \ln(1 - 2x)$, $x_0 = 0$, $n = 6$.
12. $y = \ln(2 + x)$, $x_0 = -1$, $n = 5$.
13. $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = -0,5$, $n = 5$.
14. $y = e^x$, $x_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
15. $y = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.
16. $y = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 6$.
17. $y = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.
18. $y = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
19. $y = \cos x$, $x_0 = \pi$, $n = 7$.
20. $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$, $n = 2$.
21. $y = \frac{1}{2-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.
22. $y = \frac{1}{2-x}$, $x_0 = 1$, $n = 5$.
23. $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2$, $x_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
24. $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2$, $x_0 = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
25. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.
26. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. За допомогою формули Тейлора вважаючи, що $|x| \ll 1$, записати формулу для наближеного обчислення заданого виразу. В наближеній формулі обмежитись трьома ненульовими доданками.

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $(1+x)^{10}$. | 10. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. | 16. $\sqrt{e^x}$. |
| 2. $(1+x)^{20}$. | 11. $\frac{1}{\sqrt{1+bx}}$. | 17. $\sqrt{\frac{1}{e^x}}$. |
| 3. $(1+bx)^{10}$. | 12. $\frac{1}{(1+x)^2}$. | 18. $\sin(bx)$. |
| 4. $\sqrt{1+x}$. | 13. $\frac{1}{(1+x)^5}$. | 19. $\cos(bx)$. |
| 5. $\sqrt{1+bx}$. | 14. $\frac{1}{(1+bx)^{10}}$. | 20. $1 - \cos x$. |
| 6. $\sqrt[3]{1+x}$. | 15. $\sqrt{2-e^x}$. | 21. $\sqrt{1+\sin x}$. |
| 7. $\sqrt[3]{1+bx}$. | | 22. $\cos^2 x$. |
| 8. $\frac{1}{1+x}$. | | 23. e^{+x^2} . |
| 9. $\frac{1}{1-x}$. | | 24. e^{-x^2} . |
| | | 25. xe^{-x} . |

Задача 3. За допомогою формули Тейлора знайти вказані границі функцій.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^4}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sqrt[3]{x}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^4}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^3}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^3}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^3}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{x^2}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-2x} - 2 + x}{x^2}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (x - \ln(1+x))$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} (x - \ln(1+x))$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} [e^x - e^{-x} - 2x]$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \right]$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \right]$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^3}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$.

Домашнє завдання № 11

ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ ТА МЕТОДИ ЇХ ЗАДАННЯ

Задача 1. Функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана аналітично, тобто за допомогою математичної формули. Виконати наступні дії:

- а) знайти область визначення і область значення заданої функції і побудувати сімейство ліній рівня цієї функції;
- б) побудувати тривимірний графік заданої функції;
- в) побудувати таблицю значень функції розміром 5 x 5 елементів;
- г) по отриманій таблиці за допомогою методу лінійної інтерполяції побудувати уточнену таблицю функції розміром 9 x 9 елементів. Отримані проміжні значення порівняти з точними значеннями, що обраховуються за допомогою формули функції.

1. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
2. $z = \ln(x^2 + y^2)$
3. $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 9}$.
4. $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 5)$
5. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$
6. $z = \sqrt{2x^2 + 4y^2 - 8}$.
7. $z = \frac{1}{xy}$.
8. $z = \sqrt{xy}$.
9. $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.
10. $z = \ln\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1\right)$.
11. $z = e^{-(x-2y)^2}$.
12. $z = \sqrt{2 + y - x^2}$.
13. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.
14. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.
15. $z = \operatorname{ctg}(x^2 + y^2)$
16. $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x - y}\right)$.
17. $z = x^y$.
18. $z = e^{-x/y}$.
19. $z = \ln(x - 2y + 5)$
20. $z = \sqrt{x + 2y + 1}$.
21. $z = \frac{1}{3x^2 + 4y^2}$.
22. $z = \frac{1}{2x^2 - y^2}$.
23. $z = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$.
24. $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 9}$.
25. $z = \ln[(x + 5)(2y + 3)]$

Задача 2. Функція $z = f(x, y)$ задана за допомогою таблиці. Побудувати тривимірний графік функції за допомогою MS Excel. Знайти проміжний рядок і стовпець таблиці значень функції відповідно до свого номера варіанту за допомогою методу лінійної інтерполяції і вчислити значення функції в заданій точці.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	8	12	16	20	24	28	32
2	2	8	12	14	18	22	26	30	34	38
3	4	12	16	20	24	28	32	36	40	42
4	8	14	20	28	32	36	38	42	46	50
5	12	18	24	32	40	44	48	50	56	62
6	16	22	28	36	44	56	58	62	64	68
7	20	26	32	38	48	58	62	66	70	76
8	24	30	36	42	50	62	66	74	80	82
9	28	34	40	46	56	64	70	80	84	96
10	32	38	42	50	62	68	76	82	96	100

Номер варіанту	Проміжне значення
1	$z = f(x=1.5; y=2.5)$
2	$z = f(x=1.5; y=4.5)$
3	$z = f(x=1.5; y=7.5)$
4	$z = f(x=1.5; y=9.5)$
5	$z = f(x=2.5; y=2.5)$
6	$z = f(x=2.5; y=4.5)$
7	$z = f(x=3.5; y=2.5)$
8	$z = f(x=4.5; y=5.5)$
9	$z = f(x=5.5; y=6.5)$
10	$z = f(x=6.5; y=7.5)$
11	$z = f(x=7.5; y=8.5)$
12	$z = f(x=8.5; y=1.5)$
13	$z = f(x=9.5; y=2.5)$
14	$z = f(x=8.5; y=7.5)$
15	$z = f(x=7.5; y=6.5)$
16	$z = f(x=6.5; y=3.5)$
17	$z = f(x=5.5; y=5.5)$
18	$z = f(x=4.5; y=2.5)$
19	$z = f(x=3.5; y=1.5)$
20	$z = f(x=2.5; y=6.5)$
21	$z = f(x=1.5; y=8.5)$
22	$z = f(x=2.5; y=9.5)$
23	$z = f(x=3.5; y=8.5)$
24	$z = f(x=4.5; y=7.5)$
25	$z = f(x=5.5; y=2.5)$

Задача 3. Знайти всі частинні похідні першого і другого порядку:

1. $u = x^3 - 2x^2y - y^2 + 1; \quad u = x^2 + xy^2z^3 - z.$

2. $u = \frac{x}{y} - x + 2y; \quad u = \frac{1}{xyz}.$

3. $u = \frac{1}{x^2y^3} + y^2 - x; \quad u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

4. $u = e^{x^2+y^2}; \quad u = ze^{x-y}.$

5. $u = \frac{x}{x+y}; \quad u = x^2y^3z - 3y + 5z.$

6. $u = y \ln(x-y); \quad u = x^2y^3z^4 - x + 3y.$

7. $u = x^3 - 2xy^2 + y^2 - 2x + 5y; \quad u = y \ln(x+z).$

8. $u = xe^{x-5y}; \quad u = x^4y^3z^2 - 4y + 7z.$

9. $u = \ln(2x^2 + y^2); \quad u = x^2 + y^3 - z^4 + 2xz - 4x + 5y.$

10. $u = y^3 - 2xy^2 - 5x + y; \quad u = e^{xyz}.$

11. $u = x^2 - 5y + \frac{x}{y^2}; \quad u = \sin(x^2 + y - 5z)$

$$12. u = 2x^3 - \frac{y^2}{5} - xy + x - y; \quad u = \arctg(x + 2y + 3z)$$

$$13. u = \sqrt{xy} - x^2 + 2y^3 - 7y; \quad u = z \cdot e^{x-5y}$$

$$14. u = ye^{y+2x}; \quad u = x^2 + y^3 - z^4 - xz + 5x - 7y$$

$$15. u = \frac{1}{\sqrt{xy^3}}; \quad u = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 3xz + 4y$$

$$16. u = x^2 - 4xy - 3y^2 - 5x + y + 1; \quad u = \ln(x - 2y + z)$$

$$17. u = y\sqrt{x} - 5x + 10y + 8; \quad u = z \cdot \ln(x + y)$$

$$18. u = x^3\sqrt{y}; \quad u = \frac{\ln z}{xy} - 4x + 7z$$

$$19. u = x^3 - y^3 - 3x + 2y + 9; \quad u = y \cdot \ln(x + y)$$

$$20. u = 2\sqrt{x+5y} - x^2 + 8y; \quad u = xe^{-yz}$$

$$21. u = \frac{x}{y^2z^2} - z^3 - x^2 - 2xy$$

$$22. u = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

$$23. u = xe^{x^2-y^2}$$

$$24. u = ye^{-x/y^2}$$

$$25. u = \frac{x}{y+z} - x^3 + 2y^2 + 5zx$$

Задача 4. Знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4}$:

$$1. u = x_1^2 - x_2^3 + x_3^3 - x_4^2 \sqrt{x_3}$$

$$2. u = x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$3. u = \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$$4. u = x_1^3 - x_2^2 + x_3 + \frac{1}{x_4}$$

$$5. u = x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$$

$$6. u = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

$$7. u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

$$8. u = \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$$9. u = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$$10. u = (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)$$

$$11. u = x_1 - \frac{1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3 x_4}$$

$$12. u = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

$$13. u = x_1^3 - x_2^3 + x_2 x_3 x_4$$

$$14. u = \sqrt{x_3^2 - x_4^2}$$

$$15. u = \ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

$$16. u = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$17. u = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

$$18. u = (x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$$

$$19. u = x_2^{x_3} \cdot x_3^{x_4}$$

$$20. u = \sqrt{x_1^2 + x_3 x_4^2}$$

$$21. u = \sqrt[3]{1 + x_1^2 + x_2^3 + x_3 x_4}$$

$$22. u = \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2 x_4}$$

$$23. u = x_3^4 - x_4^3$$

$$24. u = x_1^2 + x_2^2 + x_3 x_4 - x_1 x_4$$

$$25. u = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4}}$$

Домашнє завдання № 12

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Задача 1. Обчислити наближене значення за допомогою диференціалу. Порівняти наближене значення з «точним», отриманим за допомогою калькулятора (6-8 десятинних знаків):

- | | |
|--|--|
| 1. $\sqrt{(2,06)^3 + (0,94)^3} \approx ?$. | 15. $\sqrt[3]{(2,02)^3 + (1,92)^2 + (2,04)^2} \approx ?$. |
| 2. $\sqrt{(1,94)^2 + (2,06)^2 + (0,96)^2} \approx ?$. | 16. $e^{-2+(0,92)^2+(1,04)^2} \approx ?$. |
| 3. $\sqrt{(0,94)^2 + (2,06)^2 + 4} \approx ?$. | 17. $\operatorname{arctg} \frac{(1,08)^2}{0,98} \approx ?$. |
| 4. $\ln[(0,96)^2 + (0,08)^3] \approx ?$. | 18. $\sqrt{(1,94)^2 + (1,04)^2 + 4} \approx ?$. |
| 5. $\sqrt{(0,97)^3 + (2,06)^2 + (1,96)^2} \approx ?$. | 19. $\ln[1 + (0,14)^3 + (0,08)^2] \approx ?$. |
| 6. $\ln[2 - (1,06)^2 + 0,03] \approx ?$. | 20. $e^{(0,18)^2+(0,09)^2} \approx ?$. |
| 7. $e^{-1+\sqrt{(0,98)^2+(0,15)^4}} \approx ?$. | 21. $\sqrt{(1,94)^3 + (1,04)^2} \approx ?$. |
| 8. $e^{0,07^2+(1,08)^3} \approx ?$. | 22. $\ln[(2,06)^3 + (0,08)^2 - 8] \approx ?$. |
| 9. $\operatorname{arctg} \left(\frac{(0,96)^2}{1,05} \right) \approx ?$. | 23. $\operatorname{arctg} \frac{(0,96)^2}{1,06} \approx ?$. |
| 10. $\sqrt{(0,92)^2 + (1,97)^3} \approx ?$. | 24. $e^{(0,12)^2+(0,13)^3} \approx ?$. |
| 11. $\ln[5 - (1,96)^2 + (0,21)^3] \approx ?$. | 25. $\sqrt{(2,92)^2 + (4,12)^2} \approx ?$. |
| 12. $\sqrt[3]{(2,04)^4 + (2,96)^2 + 2} \approx ?$. | |
| 13. $\ln[(1,92)^2 + (0,88)^3 - 4] \approx ?$. | |
| 14. $\sqrt[3]{(1,88)^2 + (2,06)^2 + 2} \approx ?$. | |

Задача 2. Використовуючи правило диференціювання зложеної функції знайти похідну $\frac{du}{dt}$ заданої функції $u = f(x, y)$, якщо задані функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$.

$$u = y^x$$

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x = t^2, y = \sqrt{t}$. | 6. $x = \ln t, y = e^{-3t}$. |
| 2. $x = \ln t, y = t^2$. | 7. $x = \ln(t+1), y = t^3$. |
| 3. $x = 1-t, y = t$. | 8. $x = 1+3t, y = 2t$. |
| 4. $x = \sqrt{t}, y = e^t$. | 9. $x = 2 \ln t, y = \sqrt[3]{t}$. |
| 5. $x = t^2, y = e^{t^2}$. | 10. $x = \frac{1}{t}, y = e^{-t}$. |

$$u = e^{5x-2y}$$

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 11. $x = t, y = 1 - 2t.$ | 19. $x = t^2, y = -t^2.$ |
| 12. $x = 1 + 5t, y = t^2.$ | 20. $x = 1 + 5t, y = 7t.$ |
| 13. $x = 8t, y = -4t.$ | 21. $x = \sqrt{t}, y = t^2 - 1.$ |
| 14. $x = \sqrt{t}, y = 5t.$ | 22. $x = \ln t, y = -5t.$ |
| 15. $x = \sqrt[3]{t}, y = 1 + 2t.$ | 23. $x = \ln t, y = t^2.$ |
| 16. $x = \ln t, y = \frac{1}{2}t.$ | 24. $x = 5t, y = \frac{1}{t}.$ |
| 17. $x = t, y = \ln t.$ | 25. $x = \frac{1}{t}, y = \ln t.$ |
| 18. $x = 2 \ln t, y = -4t.$ | |

Задача 3. Знайти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до заданої поверхні σ в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Зробити схематичний малюнок.

$$\sigma: z = x^2 + y^2$$

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. $M_0(1; 1; 2).$ | 4. $M_0(1; -1; 2).$ |
| 2. $M_0(1; 2; 5).$ | 5. $M_0(-1; 1; 2).$ |
| 3. $M_0(2; 1; 5).$ | |

$$\sigma: z = x^2 - y^2$$

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 6. $M_0(0; 0; 0).$ | 9. $M_0(1; 0; 1).$ |
| 7. $M_0(1; 1; 0).$ | 10. $M_0(2; 1; 3).$ |
| 8. $M_0(0; 1; -1).$ | |

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 11. $M_0(0; 0; 2).$ | 14. $M_0(1; 1; \sqrt{2}).$ |
| 12. $M_0(0; 0; -2).$ | 15. $M_0(1; 1; -\sqrt{2}).$ |
| 13. $M_0(\sqrt{2}; 1; 1).$ | |

$$\sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

- | | |
|-----------------------------|----------------------|
| 16. $M_0(1; 1; \sqrt{2}).$ | 19. $M_0(3; 4; -5).$ |
| 17. $M_0(1; 1; -\sqrt{2}).$ | 20. $M_0(4; 3; 5).$ |
| 18. $M_0(3; 4; 5).$ | |

$$\sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

- | | |
|--|---|
| 21. $M_0(3; 0; 0).$ | 24. $M_0\left(\frac{3}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$ |
| 22. $M_0\left(0; \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$ | 25. $M_0(0; 0; -1).$ |
| 23. $M_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{2}{\sqrt{2}}; 0\right).$ | |

Задача 4. Знайти локальні екстремуми заданих функцій. Зробити малюнок, використовуючи лінії рівня.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $u = -2x^2 + xy - 4y^2 - x - 2y.$ | 6. $u = 2x^2 + xy + 3y^2 - 5x - 2y.$ |
| 2. $u = -3x^2 - 2y^2 + xy - x + y + 1.$ | 7. $u = x^3 + y^3 - xy.$ |
| 3. $u = x^2 - xy - 5y^2 - 2x + y.$ | 8. $u = x^3 + y^3 - 6xy.$ |
| 4. $u = e^{-x^2 - 2x - 2y^2}.$ | 9. $u = -x^3 - y^3 + 3xy.$ |
| 5. $u = e^{2x^2 - y^2 - 4x}.$ | 10. $u = x^3 + y^3 + 3xy.$ |
| | 11. $u = 2x^2 - xy + 4y^2 - 3x + 2.$ |
-
- | | |
|---|---|
| 12. $u = e^{-x^2 - y^2 - 4x + 2y}.$ | 19. $u = ye^{x^2 - 2y^2}.$ |
| 13. $u = \ln(x^2 + 2x + 2 + y).$ | 20. $u = 2x^2 - 4xy - 2y^2.$ |
| 14. $u = \frac{1}{x^2 + y^2 + 5}.$ | 21. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z.$ |
| 15. $u = \frac{1}{x^2 - 2x + y^2 + 5}.$ | 22. $u = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2.$ |
| 16. $u = x^2 + xy + y^2 + 2x - 4y.$ | 23. $u = e^{-x^2 - 2y^2 + 4y}.$ |
| 17. $u = \ln(4 - x^2 - y^2).$ | 24. $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - 6y + 10}.$ |
| 18. $u = xe^{-2x^2 + y^2}.$ | 25. $u = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy.$ |

Задача 5. Знайти вектор градієнта $grad U$ заданої функції U в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Обчислити в цій точці частинну похідну по заданому напрямку вектора $e = M_0A$.

$$U = x \cdot y - x^2 + 3z^2, M_0(1; 1; 2).$$

- | | | |
|------------------|-------------------|------------------|
| 1. A (3; -1; 1). | 3. A (-1; -1; 1). | 5. A (-1; 3; 3). |
| 2. A (3; 3; 3). | 4. A (-1; 3; 1). | |

$$U = x \cdot z - y^2 + x - 5, M_0(1; 2; 1).$$

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| 6. A (4; 0; 2). | 9. A (3; 0; 0). | 12. A (-2; 2; 5). |
| 7. A (-1; 4; 0). | 10. A (3; 4; 0). | 13. A (4; 2; -3). |
| 8. A (-1; 4; 2). | 11. A (-1; 0; 2). | 14. A (4; 2; -3). |

$$U = x^2 + y^2 + 2z^2 - x \cdot y \cdot z, M_0(1; 1; 2).$$

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| 15. A (4; 1; -2). | 17. A (3; 3; 1). | 19. A (3; -1; 3). |
| 16. A (-2; 0; 6). | 18. A (-1; -1; 3). | 20. A (-1; 3; 1). |
| 21. A (0; 1; 2). | 23. A (4; 5; 2). | 25. A (-3; 4; 2). |
| 22. A (0; 0; 0). | 24. A (1; 7; 4). | |

Домашнє завдання № 13

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Задача 1. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

1. $\int \frac{1-5x^3}{x^4} dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{x} - 3x \cdot \sqrt[3]{x} + x^5}{x^2} dx.$

3. $\int x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x} dx.$

4. $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$

5. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+2}{\sqrt{x}} \right) dx.$

6. $\int \left(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^3 dx.$

7. $\int \left(5x^3 - \frac{\sin 5}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx.$

8. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x^4} - x \right) dx.$

9. $\int \left(\frac{\sqrt{x^3} - 2x^2 + 3x^4}{x} \right) dx.$

10. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx.$

21. $\int \frac{\left(b \cdot x + \frac{a}{x} \right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx.$

22. $\int \frac{(2x+b)^3}{x^3} dx.$

23. $\int \frac{(1-b\sqrt[3]{x})^3}{x^2} dx.$

11. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 dx.$

12. $\int \left(x \cdot \sin a - \frac{4\sqrt{x}}{x^2} \right) dx.$

13. $\int \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt[3]{x} \right)^2 dx.$

14. $\int \frac{x^3 - 3\sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

15. $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{b \cdot x} dx.$

16. $\int \frac{x^4 - 2x - \sqrt{x}}{x^2} dx.$

17. $\int \frac{\left(\sqrt{b \cdot x} - \frac{x}{b} \right)^2}{x} dx.$

18. $\int \frac{(x-1)^3}{x \cdot \sqrt{x}} dx.$

19. $\int \frac{(2x+a)^3}{x^2} dx.$

20. $\int \frac{\left(x - \frac{a}{x} \right)^2}{\sqrt{x}} dx.$

24. $\int \frac{(2 - a\sqrt{x^3})^2}{x^2} dx.$

25. $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x}}{x} dx.$

Задача 2. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 2^x \cdot 5^x dx$. | 15. $\int \frac{2^x + 3^x}{2^{x+1}} dx$. |
| 2. $\int 3^x (5 - 7^{-x}) dx$. | 16. $\int \frac{3^{-x} + 2^{x+3}}{5^x} dx$. |
| 3. $\int 5^{-x} (4 - 3^{x+1}) dx$. | 17. $\int 4^x (7 + 2^{-x}) dx$. |
| 4. $\int 7^{-x} (\sqrt{7^{2x}} - 5^{x-1}) dx$. | 18. $\int 3^{-x} (4 - 5^{x+2}) dx$. |
| 5. $\int e^{-x} (2^x - 3 \cdot e^{x+3}) dx$. | 19. $\int \left(3^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{-x}{2}} \right)^2 dx$. |
| 6. $\int (4 \cdot e^x \cdot 5^x - \pi^{2x}) dx$. | 20. $\int e^x (2^{x+1} - 5 \cdot e^{3-x}) dx$. |
| 7. $\int 3^{-x} (7 + 2^{x+1}) dx$. | 21. $\int \pi^{2x} \left(\frac{1}{2^x} - 3^{x+1} \right) dx$. |
| 8. $\int (e^x - 2 \cdot e^{-x}) dx$. | 22. $\int \frac{1}{3^x} (e^{x+1} + 2 \cdot e^{-x}) dx$. |
| 9. $\int (e^x + e^{2x})^2 dx$. | 23. $\int (e^{-x} - e^x)^2 dx$. |
| 10. $\int \pi^x \cdot e^{x+1} dx$. | 24. $\int (e^x - 2)^2 dx$. |
| 11. $\int e^x \cdot \sqrt{2^x} dx$. | 25. $\int (e^x + 2^{-x})^2 dx$. |
| 12. $\int 5^x \cdot 3^{1-x} dx$. | |
| 13. $\int (5^x - 5^{-x})^2 dx$. | |
| 14. $\int (5^{x+1} + 5^{x-1}) dx$. | |

Задача 3. Знайти інтеграли методом безпосереднього інтегрування. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int \left(5 \cdot \cos x - \frac{7}{\sin^2 x} \right) dx$. | 13. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$ |
| 2. $\int \left(3 \cdot \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx$. | 14. $\int (3 \cdot \cos x - 4 \cdot \sin x) dx$. |
| 3. $\int \frac{\sin^2 x - 3 \cdot \sin x - \frac{5}{\sin x}}{\sin x} dx$. | 15. $\int \frac{\cos^2 x + 5 \cdot \cos x}{\cos x} dx$. |
| 4. $\int \frac{5 \cdot \sin 2x - 5 \cdot \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$. | 16. $\int \frac{\cos^2 2x - \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$. |
| 5. $\int \frac{\cos 2x - 5 \cdot \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$. | 17. $\int \frac{\cos^2 2x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx$. |
| 6. $\int \frac{1 + 5 \cdot \cos^3 x}{\cos^2 2x + \sin^2 x} dx$. | 18. $\int \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{7}{\cos^2 x} \right) dx$. |
| 7. $\int \frac{1 - 3 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$. | 19. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$. |
| 8. $\int \frac{2 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$. | 20. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$. |
| 9. $\int \left(5 \cdot \sin x - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx$. | 21. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 2x} dx$. |
| 10. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$. | 22. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. |
| 11. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x} dx$. | 23. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. |
| 12. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$. | 24. $\int \frac{5 \cdot \sin 2x}{\cos^3 x} dx$. |
| | 25. $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx$. |

Задача 4. Знайти інтеграли від раціональних функцій методом безпосереднього інтегрування. При необхідності слід використовувати операцію ділення многочленів. Отриману відповідь перевірити інтегруванням за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{5}{9+x^2} \right) dx.$ | 14. $\int \frac{2x^2-2}{2x^2-1} dx.$ |
| 2. $\int \left(\frac{7}{3-x^2} - \frac{4}{5+x^2} \right) dx.$ | 15. $\int \frac{2x^2-2}{x^4-4} dx.$ |
| 3. $\int \frac{3x^2+1}{x^2+25} dx.$ | 16. $\int \frac{dx}{3x^2-2}.$ |
| 4. $\int \frac{x^2-3+2x^2+6}{x^4-9} dx.$ | 17. $\int \frac{dx}{5-3x^2}.$ |
| 5. $\int \frac{dx}{3x^2+2}.$ | 18. $\int \left(\frac{5}{x^2-3} - \frac{7}{x^2+3} \right) dx.$ |
| 6. $\int \frac{dx}{1-7x^2}.$ | 19. $\int \frac{3x^2+1}{5x^2-1} dx.$ |
| 7. $\int \frac{x^3}{x^2+9} dx.$ | 20. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+2} \right) dx.$ |
| 8. $\int \frac{dx}{3+7x^2}.$ | 21. $\int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^2-2} \right) dx.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{2x^2-3}.$ | 22. $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2-1)} dx.$ |
| 10. $\int \frac{x^2+1}{x^2+5} dx.$ | 23. $\int \left(\frac{3}{x^2-5} + \frac{2}{x^2+3} \right) dx.$ |
| 11. $\int \frac{x^2+1}{x^2-5} dx.$ | 24. $\int \frac{dx}{4x^2+1}.$ |
| 12. $\int \frac{x^2+1}{2x^2+1} dx.$ | 25. $\int \frac{dx}{4x^2-1}.$ |
| 13. $\int \frac{x^2+2}{2x^2-1} dx.$ | |

Задача 5. Знайти інтеграли методом заміни змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{dx}{3\sqrt{9-x^2}}.$ | 14. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx.$ |
| 2. $\int \frac{7 dx}{\sqrt{x^2+9}}.$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$ |
| 3. $\int \frac{5 dx}{\sqrt{x^2-9}}.$ | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}.$ |
| 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$ | 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$ |
| 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}.$ | 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}.$ |
| 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}.$ | 19. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2-3} dx.$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}.$ | 20. $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x^2+6} dx.$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}.$ | 21. $\int \frac{x^2+\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} dx.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$ | 22. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}-x^2}{x^2+9} dx.$ |
| 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}.$ | 23. $\int (x^2-5)^{\frac{1}{2}} dx.$ |
| 11. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx.$ | 24. $\int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} dx.$ |
| 12. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-3}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx.$ | 25. $\int (3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$ |
| 13. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{3x^2-27}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+8}} \right) dx.$ | |

Задача 6. Знайти інтеграли методом заміни змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{x-5}$. | 14. $\int \sqrt[3]{(x+2)^5} dx$. |
| 2. $\int \frac{x-3}{x+3} dx$. | 15. $\int \sqrt{\frac{7}{(x-2)^2}} dx$. |
| 3. $\int \frac{x}{5-x} dx$. | 16. $\int \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{(x+1)^2}}} dx$. |
| 4. $\int \frac{x}{x^2-3} dx$. | 17. $\int \sqrt{\frac{5}{\sqrt{(x-2)^2}}} dx$. |
| 5. $\int \frac{dx}{3x+1}$. | 18. $\int \sqrt[3]{(x+a)^5} dx$. |
| 6. $\int \frac{dx}{5-7x}$. | 19. $\int \frac{x}{(x-3)^5} dx$. |
| 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}}$. | 20. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$. |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$. | 21. $\int \frac{1-2x}{x+1} dx$. |
| 9. $\int \frac{2x+1}{1-5x} dx$. | 22. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{x+1}} dx$. |
| 10. $\int (x-a)^4 dx$. | 23. $\int \frac{x}{(x-2)^2} dx$. |
| 11. $\int \sqrt[3]{(x+3)^4} dx$. | 24. $\int \frac{x+1}{2x+1} dx$. |
| 12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}$. | 25. $\int \frac{1-5x}{3x+2} dx$. |
| 13. $\int \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt{2x+2}}$. | |

Задача 7. Знайти інтеграли методом заміни змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int (\cos 2x - 3 \sin 5x) dx$. | 15. $\int (\cos 3x + \sin 3x)^2 dx$. |
| 2. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. | 16. $\int (\cos 2x - \sin 2x)^2 dx$. |
| 3. $\int \frac{dx}{1 - \sin^2 5x}$. | 17. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$. |
| 4. $\int \operatorname{tg}^2 2x dx$. | 18. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}$. |
| 5. $\int \left(e^{5x} - 3e^{-x} + 4e^{\frac{x}{2}} \right) dx$. | 19. $\int \cos(1-5x) dx$. |
| 6. $\int (e^{4x} - 2e^{-3x})^2 dx$. | 20. $\int \sin^2 x dx$. |
| 7. $\int \sin(2x+3) dx$. | 21. $\int \cos^2 x dx$. |
| 8. $\int \frac{2^{3x} - 3^x}{3^{2x}} dx$. | 22. $\int \left(\cos \frac{x}{3} - 5 \sin \frac{x}{2} \right) dx$. |
| 9. $\int \frac{(e^{-x} + 5)^2}{e^x} dx$. | 23. $\int \cos x \cdot (1 - 5 \cdot \cos x) dx$. |
| 10. $\int (\sqrt[3]{e^x} - x \cdot e^2) dx$. | 24. $\int \frac{5^{2x} - 3^{-x}}{2^x} dx$. |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}}}$. | 25. $\int \frac{5^{2x+1} - 5^{2-2x}}{4^x} dx$. |
| 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{6e^{5x+1}}}$. | 26. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}} dx$. |
| 13. $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$. | 27. $\int \frac{e^{x+1} + e^{1-x}}{e^x} dx$. |
| 14. $\int (\cos x - \sin x)^2 dx$. | |

Задача 8. Знайти інтеграли методом заміни змінної з використанням операції "підведення під знак диференціала". Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int e^{x^2} \cdot x \, dx$. | 14. $\int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 10}$. |
| 2. $\int e^{-x^2} \cdot x \, dx$. | 15. $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$. |
| 3. $\int e^{5x^2} \cdot x \, dx$. | 16. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$. |
| 4. $\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \, dx$. | 17. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. |
| 5. $\int e^{x^2+3} \cdot x \, dx$. | 18. $\int \operatorname{tg} x \, dx$. |
| 6. $\int e^{1-3x^2} \cdot x \, dx$. | 19. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$. |
| 7. $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \, dx$. | 20. $\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x} \, dx$. |
| 8. $\int x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} \, dx$. | 21. $\int e^{-x^3} \cdot x^2 \, dx$. |
| 9. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$. | 22. $\int \frac{e^x \, dx}{e^{2x} - 4}$. |
| 10. $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 10}$. | 23. $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 1)}$. |
| 11. $\int \frac{e^x \, dx}{e^x + 5}$. | 24. $\int x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 3)^2} \, dx$. |
| 12. $\int e^x \cdot \sqrt{3e^x - 7} \, dx$. | 25. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx$. |
| 13. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^{2x} - 5}}$. | |

Задача 9. Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій методом невизначених коефіцієнтів або методом заміни змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 5}$. | 2. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$. |
| 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$. | 15. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 3)}$. |
| 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}}$. | 16. $\int \frac{x^2 + 1}{x \cdot (x^2 + 3)} \, dx$. |
| 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$. | 17. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$. |
| 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$. | 18. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$. |
| 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}$. | 19. $\int \frac{x^3}{x^3 - 1} \, dx$. |
| 8. $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 2x + 5}$. | 20. $\int \frac{x^4}{x^3 + 1} \, dx$. |
| 9. $\int \frac{(x-1) \, dx}{x^2 - 2x + 5}$. | 21. $\int \frac{x^3}{x^3 + 8} \, dx$. |
| 10. $\int \frac{1-x}{x^2 - x + 1} \, dx$. | 22. $\int \frac{1-2x}{x^2 - 6x + 10} \, dx$. |
| 11. $\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$. | 23. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2 + 6x - 5}} \, dx$. |
| 12. $\int \frac{dx}{x \cdot (x+1)^2}$. | 24. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot (x+1)}$. |
| 13. $\int \frac{3x+1}{(x-2)^2 \cdot (x+1)} \, dx$. | 25. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 1)}$. |
| 14. $\int \frac{x^4 + 7}{x^2 + 4} \, dx$. | |

Задача 10. Знайти інтеграли методом інтегрування по частинах. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int x \cdot e^{2x} dx$. | 3. $\int (2x + 5) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$. |
| 2. $\int (x - 1) \cdot e^{-x} dx$. | 4. $\int x^2 \cdot e^x dx$. |
| 5. $\int x \cdot 3^x dx$. | 16. $\int x \cdot \cos \frac{x}{3} dx$. |
| 6. $\int x \cdot \ln x dx$. | 17. $\int x \cdot \sin 5x dx$. |
| 7. $\int x \cdot \ln 5x dx$. | 18. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$. |
| 8. $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$. | 19. $\int x \cdot 5^x dx$. |
| 9. $\int (\ln x - 2 \ln^2 x) dx$. | 20. $\int \frac{x}{2^x} dx$. |
| 10. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. | 21. $\int x^2 \sqrt{e^x} dx$. |
| 11. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$. | 22. $\int x \cdot e^{-3x} dx$. |
| 12. $\int x \cdot \cos x dx$. | 23. $\int x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$. |
| 13. $\int x \cdot \sin x dx$. | 24. $\int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$. |
| 14. $\int x \cdot \cos 3x dx$. | 25. $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx$. |
| 15. $\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$. | |

Задача 11. Знайти інтеграли методом заміни змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int \cos^3 x dx$. | 7. $\int \sin x \cdot \cos^4 x dx$. |
| 2. $\int \sin^3 x dx$. | 8. $\int \cos 2x \cdot \sin^3 2x dx$. |
| 3. $\int \cos^3 \frac{x}{2} dx$. | 9. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$. |
| 4. $\int \sin^3 \frac{x}{5} dx$. | 10. $\int \sin x \cdot \sqrt{\sin x} dx$. |
| 5. $\int \cos^5 2x dx$. | 11. $\int \sin^2 x dx$. |
| 6. $\int \cos^7 x dx$. | 12. $\int \cos^2 x dx$. |
| 13. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$. | 20. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$. |
| 14. $\int \cos^2 \frac{x}{3} dx$. | 21. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$. |
| 15. $\int \sin^4 x dx$. | 22. $\int \cos^5 x \cdot \sin x dx$. |
| 16. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$. | 23. $\int \sin x \cdot \cos^4 \frac{x}{2} dx$. |
| 17. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. | 24. $\int \cos^6 x dx$. |
| 18. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. | 25. $\int \cos^6 \frac{x}{2} dx$. |
| 19. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$. | |

Домашнє завдання № 14
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Задача 1. Обчислити визначений інтеграл за допомогою формули Ньютона-Лейбниці. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

$$1. \int_{-1}^2 x^4 dx.$$

$$2. \int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2 dx.$$

$$3. \int_{-2}^{10} \sqrt[3]{x-2} dx.$$

$$4. \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$5. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx.$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{8}}^0 \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

$$7. \int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx.$$

$$8. \int_{0.5}^1 e^{-2x+1} dx.$$

$$9. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$10. \int_1^4 \frac{x}{5-x} dx$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y dy.$$

$$12. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$13. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}.$$

$$14. \int_{0.5}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$15. \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 t dt.$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$17. \int_0^{\pi} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 dx.$$

$$18. \int_{-1}^{-0.5} \frac{x^2 - 1}{x^4} dx.$$

$$19. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}.$$

$$21. \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin^2 t dt.$$

$$22. \int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx.$$

$$23. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

$$24. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$25. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 + 1}{x^4} dx.$$

$$20. \int_0^2 \frac{x}{x^2-3} dx$$

Задача 2. Знайти визначені інтеграли, використовуючи вказану заміну змінної. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

1. $\int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} dx, /x^2 = t/.$
2. $\int_0^{0,5} x^3 \cdot e^{-x^4} dx, /x^4 = t/.$
3. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \cdot e^{-x^2} dx, /x^2 = t/.$
4. $\int_2^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x-1}}, /2x-1 = t^2 /.$
5. $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 1)}, / \ln x = t /.$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x}, / \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t /.$
7. $\int_1^6 \frac{dx}{x + \sqrt{3x-2}}, /3x-2 = t^2 /.$
8. $\int_4^9 e^{-2\sqrt{x}} dx, /x = t^2 /.$
9. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx, /x = 2 \sin t /.$
10. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx, /x = \frac{1}{\cos t} /.$
11. $\int_{\ln 1}^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, /e^x = t /.$
12. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5+4x}}, /5+4x = t^2 /.$
13. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}, / \ln x = t /.$
14. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, /x = 3 \sin t /.$
15. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, / \sqrt{x} = t /.$
16. $\int_1^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}} dx, / \sqrt{x} = t /.$
17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 3\cos x}, / \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t /.$
18. $\int_0^4 \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx, / \sqrt{x} = t /.$
19. $\int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2} dx, /x^2 = t /.$
20. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 25}, /x^2 = t /.$
21. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, / \frac{1}{x} = t /.$
22. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^3 x}}, / \ln x = t /.$
23. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2+1}}, / \frac{1}{x} = t /.$
24. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x}}, /e^x = t /.$
25. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, /x = \sin t /.$

Задача 3. Знайти визначені інтеграли методом інтегрування по частинах. Отриману відповідь перевірити за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

$$\begin{array}{lll}
1. \int_0^1 x^4 \cdot e^{-x} dx. & 8. \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx. & 15. \int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{2} dx. \\
2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}. & 9. \int_0^{\pi} x \cdot \sin \frac{x}{3} dx. & 16. \int_0^1 x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} x \right) dx. \\
3. \int_1^e x \cdot \ln x dx. & 10. \int_{-1}^0 x \cdot e^{-x} dx. & 17. \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx. \\
4. \int_1^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln x dx. & 11. \int_1^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln x dx. & 18. \int_{-1}^0 x \cdot \cos(\pi x) dx. \\
5. \int_1^{\sqrt{e}} \ln x dx. & 12. \int_{-2}^0 x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx. & 19. \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx. \\
6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx. & 13. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}. & 20. \int_{-e}^{-1} x \cdot \ln|x| dx. \\
7. \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx. & 14. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx. & 21. \int_0^1 x \cdot 2^x dx.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
22. \int_{-1}^0 x \cdot e^{2x} dx. & 24. \int_1^{e^3} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx. \\
23. \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot e^{-2x} dx. & 25. \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \cos \frac{x}{2} dx.
\end{array}$$

Задача 4. Обчислити площу плоскої фігури D, яка обмежена заданими лініями.

$$\begin{array}{lll}
1. D: \begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 4. \end{cases} & 7. D: \begin{cases} y = \sin^2 x, y = 0, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 13. D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} 2x, \\ y = 1, x = 0. \end{cases} \\
2. D: \begin{cases} y = \sqrt{x}, y = 0, \\ x = 1, x = 4. \end{cases} & 8. D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = x. \end{cases} & 14. D: \begin{cases} y = \operatorname{ctg} x, y = 1, \\ x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\
3. D: \begin{cases} y = \frac{1}{x}, y = 0, \\ x = 1, x = 2. \end{cases} & 9. D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = x^4. \end{cases} & 15. D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x, y = -1, \\ x = 0. \end{cases} \\
4. D: \begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ x + y = -4. \end{cases} & 10. D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases} & 16. D: \begin{cases} y = \operatorname{arctg} x, \\ y = \frac{\pi}{4}, x = 0. \end{cases} \\
5. D: \begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = 1, x = \ln 3. \end{cases} & 11. D: \begin{cases} y = x^2, y = -x^2, \\ x = 1. \end{cases} & 17. D: \begin{cases} y \leq \cos^2 x, \\ y \geq 0, x \geq 0, \\ x \leq \pi. \end{cases} \\
6. D: \begin{cases} y = \cos x, y = 0, \\ x \geq -\frac{\pi}{2}, x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} & 12. D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x, y = 1, \\ x = 0. \end{cases} & 18. D: \begin{cases} y = \operatorname{tg} x, y = \sqrt{3}, \\ x = 0. \end{cases}
\end{array}$$

$$19.D: \begin{cases} y = \frac{5}{1+x^2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$22.D: \begin{cases} y = x^3, \\ y = 2\sqrt{x}. \end{cases}$$

$$25.D: \begin{cases} y = \ln x, \\ y = -\ln x, \\ x = e. \end{cases}$$

$$20.D: \begin{cases} y = \cos^2 x, \\ y = -\cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$23.D: \begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x. \end{cases}$$

$$21.D: \begin{cases} y = 9x, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

$$24.D: \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x. \end{cases}$$

Задача 5. Обчислити площу плоскої фігури D, яка обмежена заданими лініями.

1) $y = x^2 + 4x$ та $y = x + 4$

2) $x \cdot y = 6$ та $y = 7 - x$

3) $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$

4) $y = 2x - x^2$ та $x + y = 0$

5) $x^2 + y^2 = 2x$ та $y^2 = 2x$

6) $y = 3x^2 + 1$ та $y = 3x + 7$

7) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ та $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$

8) $3x^2 - 4y = 0$ та $2x - 4y + 1 = 0$

9) $y = \frac{4}{x^2}$ та $y = 7 - 3x$

10) $y = x^2 - 2x + 2$ та $y = 2 + 4x - x^2$

11) $4x - 3y^2 = 0$ та $4x + 2y - 1 = 0$

12) $y = x^3$ та $y = \sqrt{x}$

13) $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$

14) $y = x \cdot (x - 2)^2$ та $y = 0$

15) $3x^2 + 4y = 0$ та $2x + 4y + 1 = 0$

16) $y = \frac{16}{x^2}$ та $y = 17 - 2x$ (I чверть)

17) $y^2 = 4x^3$ та $y = 2x^2$

18) $xy = 10$ та $x^2 + y^2 = 49$ (I чверть)

19) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$

20) $y = x^2$ та $x + y = 2$

21) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$

22) $2x + 3y^2 = 0$ та $2x + 2y + 1 = 0$

23) $y = x^2$ та $y = x^3$

24) $y = x^2$ та $y = 2x - x^2$

25) $3x^2 - 2y = 0$ та $2x - 2y + 1 = 0$

26) $y = x^4$ та $y = x$

27) $y = \frac{5}{x}$ та $y = 6 - x$

28) $y = x^2$ та $y = \frac{x^3}{3}$

29) $y = \frac{x^2}{2}$ та $x^2 + y^2 = 8$

30) $4x + 3y^2 = 0$ та $3x + 2y + 1 = 0$

Домашнє завдання № 15

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Задача 1. Знайти наближене значення визначеного інтегралу за допомогою:

- а) формули лівих прямокутників;
- б) формули середніх прямокутників;
- в) формули трапецій.

Інтервал інтегрування розбити на 10 рівних частин, обчислення виконувати з 4-ма цифрами після десятинної коми. Методом Ньютона-Лейбниці знайти точне значення інтегралу. Визначити похибку наближеного обчислення інтегралу за допомогою заданої формули.

- | | | | |
|----|--|---|-----------------------------------|
| 1) | а) $\int_0^1 (x+1)^5 dx$ | б) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{x}{6} dx$ | в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$ |
| 2) | а) $\int_0^2 \left(1-\frac{x}{4}\right)^4 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ | в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$ |
| 3) | а) $\int_1^0 \frac{(4x+1)^3}{3} dx$ | б) $\int_0^{12} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ | в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$ |
| 4) | а) $\int_2^3 (1-x)^4 dx$ | б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) dx$ | в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$ |
| 5) | а) $\int_0^{12} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}}$ | б) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx$ | в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+3} dx$ |
| 6) | а) $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$ | б) $\int_0^{\pi} \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx$ | в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+8} dx$ |
| 7) | а) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$ | б) $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$ | в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$ |

8)	a) $\int_0^3 (1+2x)^9 dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$	в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+36} dx$
9)	a) $\int_3^6 \left(2-\frac{x}{3}\right)^5 dx$	б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+4} dx$
10)	a) $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x+7}}$	б) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$	в) $\int_{-2}^2 \sqrt{x^3+11} dx$
11)	a) $\int_8^{27} \frac{dx}{3\sqrt{x^2}}$	б) $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
12)	a) $\int_0^{-54} 3\sqrt{2-\frac{x}{9}} dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
13)	a) $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x} dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) dx$	в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$
14)	a) $\int_1^{1,5} \left(4x - \frac{1}{2x}\right) dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$	в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$
15)	a) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^2}$	б) $\int_0^2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) dx$	в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+8} dx$

- 16) a) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$ б) $\int_0^1 e^{2x} dx$ в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+8} dx$
- 17) a) $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$
- 18) a) $\int_1^e \frac{dx}{0.5x}$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+4} dx$
- 19) a) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$ б) $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+36} dx$
- 20) a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9+16x}} dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
- 21) a) $\int_{-1}^1 \left(1+\frac{x}{2}\right)^3 dx$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ в) $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^3+11}}$
- 22) a) $\int_{-1}^0 \frac{(3x-1)^4}{7} dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ в) $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3+2} dx$
- 23) a) $\int_1^{1.5} (1-2x)^7 dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{3x-2}$ в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
- 24) a) $\int_1^6 (3x+1)^8 dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$ в) $\int_{-1}^9 \sqrt{3x^3-2} dx$
- 25) a) $\int_{-2}^{14} \sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} dx$ б) $\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}}) dx$ в) $\int_1^{11} \sqrt{x^3+8} dx$
- 26) a) $\int_{-4}^0 \sqrt{(4-3x)^3} dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ в) $\int_{-3}^7 \sqrt{x^3+32} dx$

27)	a) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{4+x}$	б) $\int_3^9 \frac{dx}{10x}$	в) $\int_{-2}^8 \sqrt{x^3+16} dx$
28)	a) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3} dx}{x}$	б) $\int_0^9 (1+e^{\frac{x}{9}}) dx$	в) $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9} dx$
29)	a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$	б) $\int_0^1 e^{3x} dx$	в) $\int_3^7 \sqrt{x^3+27} dx$
30)	a) $\int_1^2 (2+x)^3 dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$	в) $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5} dx$

Задача 2. Знайти наближене значення визначеного інтегралу за допомогою:

- формули прямокутників;
- формули трапецій;
- формули Сімпсона.

Інтервал інтегрування розбити на 10 рівних частин. Методом Ньютона-Лейбніца знайти точне значення інтегралу. Визначити похибку наближеного обчислення інтегралу за допомогою заданої формули.

1. $\int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx.$	10. $\int_1^2 \sqrt{2x^2+3} dx.$	19. $\int_0^1 \sqrt{2x^2+3} dx.$
2. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx.$	11. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	20. $\int_1^2 \sqrt{2x^2+3} dx.$
3. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$	12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	21. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx.$
4. $\int_0^1 \sqrt{1+2x^2} dx.$	13. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	22. $\int_1^2 \sqrt{4+x^2} dx$
5. $\int_1^2 \sqrt{1+x^2} dx.$	14. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$	23. $\int_{1,5}^{2,5} \sqrt{4+x^2} dx.$
6. $\int_1^2 \sqrt{1+2x^2} dx.$	15. $\int_0^1 \sqrt{3x^2+2} dx.$	24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$
7. $\int_{0,5}^1 \sqrt{1+x^2} dx.$	16. $\int_1^2 \sqrt{3x^2+2} dx.$	25. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$
8. $\int_1^{1,5} \sqrt{1+x^2} dx.$	17. $\int_{1,5}^{2,5} \sqrt{3x^2+2} dx.$	
9. $\int_0^1 \sqrt{2x^2+3} dx.$	18. $\int_{0,5}^{1,5} \sqrt{2x^2+3} dx.$	

7. ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ

Тема 1. Границі і неперервність функцій

1. Поняття ε -околу точки x_0 . Границя функції в точці. Геометричний зміст. Однобічні границі. Зв'язок однобічних границь і границь функції в точці.
2. Границя функції при $x \rightarrow \infty$. Геометричний зміст. Поняття нескінченно великої функції. Горизонтальна і похила асимптоти функції і їх знаходження.
3. Основні теореми про границі функції. Перша та друга чудові границі та їх узагальнення.
4. Поняття нескінченно малої функції. Порівняння нескінченно малих. Поняття еквівалентних нескінченно малих. Властивості еквівалентних нескінченно малих. Головна частина суми нескінченно малих різних порядків.
5. Застосування нескінченно малих для обчислення границь і для наближеного обчислення значення функції. Найважливіші еквівалентності.
6. Два визначення неперервної в точці функції. Їх геометричний сенс. Поняття неперервної на відрізку функції.
7. Точки розриву функції і їх класифікація.
8. Основні теореми про неперервні функції. Неперервність елементарних функцій. Теорема Вейерштраса. Теорема Больцано-Коши.
9. Метод ділення відрізка навпіл для чисельного знаходження коренів довільної функції.

Тема 2. Диференціальне числення

1. Визначення похідної і її геометричний і механічний сенс.
2. Обчислення похідної складної функції.
3. Обчислення похідної оберненої функції.
4. Правила диференціювання добутку і частки.
5. Основні формули диференціювання.
6. Диференціювання неявно заданої функції.
7. Логарифмічне диференціювання і його застосування для знаходження похідних.
8. Похідні вищих порядків функції одного аргументу. Механічний сенс похідної другого порядку.
9. Знаходження похідних вищих порядків неявно заданої функції.
10. Диференціал функції і його геометричний сенс.
11. Диференціал суми, добутку і частки функцій, що диференціюються. Диференціал зложеної функції.
12. Таблиця диференціалів основних елементарних функцій.
13. Застосування диференціала для наближених обчислень. Обчислення проміжних значень функції в таблиці.
14. Теореми Ролля, Коши і Лагранжа. Геометричний сенс цих теорем.
15. Застосування похідної для побудови дотичної і нормалі до кривої.
16. Застосування похідної для обчислення межі функції. Правило Лопіталя.
17. Застосування похідної для знаходження інтервалів монотонності функції.
18. Застосування похідної для знаходження максимуму і мінімуму функції.

19. Застосування похідної для знаходження інтервалів опуклості і угнутості функції.
20. Застосування похідної для знаходження вертикальних і похилих асимптот функції.
21. Формула Тейлора для многочлена.
22. Формула Тейлора для довільної функції. Формула Маклорена як окремий випадок формули Тейлора.
23. Застосування формули Тейлора для обчислення границі функції.

Тема 3. Інтегральне числення

1. Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Операція інтегрування.
2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування.
3. Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної.
4. Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування по частинах.
5. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на лінійні і квадратичні множники.
6. Представлення дробово-раціональної функції у вигляді суми простих раціональних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів.
7. Інтегрування простих раціональних дробів.
8. Загальне правило інтегрування раціональних функцій. Інтеграли, що "беруться" і не "беруться".
9. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум. Геометричний сенс визначеного інтегралу.
10. Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів.
11. Основні властивості визначених інтегралів. Особливості інтегрування визначених інтегралів методом заміни змінною.
12. Інтегрування визначених інтегралів по частинах.
13. Чисельне обчислення визначених інтегралів. Метод прямокутників. Оцінка похибки інтегрування. Чисельне обчислення визначених інтегралів. Метод трапецій. Оцінка похибки інтегрування.
14. Чисельне обчислення визначених інтегралів. Метод Сімпсона. Оцінка похибки інтегрування.
15. Метод автоматичного вибору кроку інтегрування при чисельному обчисленні визначених інтегралів.
16. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площі плоских фігур.
17. Поняття невластного інтеграла. Невласні інтеграли 1-го і 2-го роду.

8. ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДО ІСПИТУ

1. Знайти похідну $f'(x)$ заданої функції:

$$1. f(x) = 7x - 3\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{5x^3}{\sqrt{x}}$$

$$2. f(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \sin 2x + \frac{\sqrt{x}}{x^2}$$

3. $f(x) = x^2 - 2x - \sin 3x + \frac{\ln x}{\sin x}$
4. $f(x) = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 - \ln 5x + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{5}{x^2} - \sin^3 x + \frac{x^2+1}{x^2-1}$
6. $f(x) = 5x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} x$
7. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - 5x - \operatorname{tg} 2x + \frac{\ln x}{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x+1} + \cos 5x - \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = e^x - \frac{8}{x^2} + \frac{x^4}{4} - x \arccos x$
10. $f(x) = \frac{1}{x^3} + 5x^6 - \cos \frac{x}{2} + \frac{x^2}{\ln x}$
11. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - 4 \cos 5x + \frac{\sin x}{x^3}$
12. $f(x) = \sqrt[6]{x^5} + \frac{4}{x^8} - \operatorname{arctg} 2x + \frac{\sin x}{\ln x}$
13. $f(x) = \sqrt{x^5} + \frac{7}{x^7} - 12 \operatorname{arctg} 5x + \arccos x \cdot \ln x$
14. $f(x) = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\operatorname{tg} x}{2} + e^{8x} + x^2 \operatorname{tg} x$
15. $f(x) = 7 \cos x - 4x^{12} - \sin 7x + \sqrt[7]{x} \cdot \ln x$

2. Знайти невизначений інтеграл:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + \sqrt{x}) dx$
2. $\int \left(\frac{2}{x^2} + 5 \cos x - \frac{4}{x^2+1} \right) dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$
4. $\int \left(5 \cos x + 3x^2 + \frac{4}{x^2+9} \right) dx$
5. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$
6. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$
7. $\int \left(5 \sin x + \frac{1+x^2}{x^4} \right) dx$

$$8. \int \left(\cos 12x - \frac{12}{\cos^2 x} + \frac{12}{1+x^2} \right) dx$$

$$9. \int \frac{1-5x^3}{x^4} dx$$

$$10. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$11. \int x \cdot \sqrt[3]{3x} dx$$

$$12. \int (2 - \sqrt{x})^2 dx$$

$$13. \int \frac{(x-1)^2}{x \cdot \sqrt{x}} dx$$

$$14. \int \frac{\left(5x + \frac{3}{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$15. \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + x \cdot \sqrt[3]{x}}{x} dx$$

3.1. Обчислити заданий визначений інтеграл чисельним методом лівих прямокутників. Інтервал інтегрування розбивати на 10 рівних часток. Знайти похибку обчислення інтеграла.

$$1. \int_2^{12} x^2 dx$$

$$2. \int_0^{10} x^3 dx$$

$$3. \int_1^{11} \frac{dx}{x^2}$$

$$4. \int_5^{15} \frac{dx}{x^3}$$

$$5. \int_0^{10} (1+x^2) dx$$

3.2. Обчислити заданий визначений інтеграл чисельним методом правих прямокутників. Інтервал інтегрування розбивати на 10 рівних часток. Знайти похибку обчислення інтеграла.

$$1. \int_2^{12} x^2 dx$$

$$2. \int_0^{10} x^3 dx$$

$$3. \int_0^{10} \frac{dx}{x^2}$$

$$4. \int_0^{10} \frac{dx}{x^3}$$

$$5. \int_0^{10} (1+x^2) dx$$

3.3. Обчислити заданий визначений інтеграл чисельним методом середніх прямокутників. Інтервал інтегрування розбивати на 10 рівних часток. Знайти похибку обчислення інтеграла.

1. $\int_2^{12} x^2 dx$

2. $\int_0^{10} x^3 dx$

3. $\int_0^{10} \frac{dx}{x^2}$

4. $\int_0^{10} \frac{dx}{x^3}$

5. $\int_0^{10} (1+x^2) dx$

Правила диференціювання

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$, зокрема $(c \cdot v)' = c \cdot v'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, зокрема $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, якщо $y = f(u)$ і $x = \varphi(y)$;

Таблиця основних похідних

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
3	a^x	$a^x \cdot \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\ln x$	$1/x$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$1a. \int dx = x + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$3a. \int e^x = e^x + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$7. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Додаток В

*Зразок титульної сторінки
для оформлення домашньої або контрольної роботи*

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІКИ І МЕНЕДЖМЕНТУ**

Кафедра інформаційних технологій та економічної кібернетики

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2
з дисципліни «Вища математика»

Варіант № 12

Виконав
Студент гр. ЗІТ-91
Ткаченко В. С.

Перевірив
доцент кафедри ІТЕК
Гук В. І.

Черкаси, 2011

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Вимоги до вивчення навчальної дисципліни	3
2. Об'єм навчального навантаження під час вивчення дисципліни.....	4
3. Навчальна програма курсу	4
3.1. Тематика та зміст лекцій.....	4
3.2. Тематика та зміст практичних занять	7
3.3. Тематика та зміст самостійної роботи студентів.....	10
3.4. Тематика та зміст індивідуальної роботи студентів	11
3.5. Форми контролю та система оцінювання знань студентів.....	11
4. Література	13
5. Контрольні завдання	14
5.1. Диференціювання функції.....	Ошибка! Закладка не определена.
5.2. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку	17
5.3. Повне дослідження функції та побудова графіку.....	18
5.4. Знаходження невизначених інтегралів	19
5.5. Знаходження невизначених інтегралів від дробово-раціональних функцій	23
5.6. Використання визначеного інтегралу для знаходження площі плоскої фігури	25
5.7. Знаходження наближеного значення визначеного інтегралу за допомогою чисельного методу	25
6. Індивідуальна робота студентів	29
7. Питання до іспиту	74
8. Типові задачі до іспиту	75
Додатки	79

Підписано до друку 25.06.10. Формат 60x84/16.
Гарнітура Times New Roman. Наклад 100 прим.

Надруковано в редакційно-видавничому відділі
Східноєвропейського університету економіки і менеджменту,
вул. Нечуя-Левицького, 16, Черкаси, 18036.