ORCID: 0000-0002-2819-5829

В.В. Атамась

кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та математичного аналізу,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна,
atamas_v@ukr.net

ORCID: 0000-0002-3476-6747

В.С. Денисенко

кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри моделювання економіки і бізнесу,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна,
den_vik@ukr.net

ORCID: 0000-0002-1029-1871

В.О. Денисенко

кандидат економічних наук, старший викладач кафедри економіки та
міжнародних економічних відносин,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна,
vikaonline@ukr.net

УДК 519.865, 519.866 PACS 02.30.Hq, 02.30.Ik, 02.30.Yy,
DOI: 10.31651/2076-5851-2018-1-99-112 02.30.Oz, 02.10.Yn

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОЇ ДИФУЗІЙНОЇ МОДЕЛІ ПРОДАЖУ ТОВАРУ З ВИКОРИСТАННЯМ РЕКЛАМИ*

В роботі здійснено якісний аналіз нелінійної динамічної дифузійної моделі продажу товару з використанням ефекту реклами. За допомогою першого методу Ляпунова досліджено стійкість положення рівноваги системи рівнянь збуреного руху (стійкість за лінійним наближенням). Побудовано область асимптотичної стійкості. За допомогою другого методу Ляпунова встановлено асимптотичну стійкість особливої точки в критичному випадку. Показано, що межа області асимптотичної стійкості є безпечною та присутня м'яка втрата стійкості. Доведено існування стійкого граничного циклу (біфуркація Хопфа). Факт існування циклу також був встановлений на основі теореми Пуанкаре-Бендіксона. За допомогою нормальної форми Пуанкаре визначено параметри автоколивань та граничного циклу.

Ключові слова: дифузійна модель інновацій, асимптотична стійкість за Ляпуновим, граничний цикл, біфуркація Хопфа.

1. Вступ

Інтенсивного розвитку теорія дифузії інновацій набула після 1969 року, коли F. M. Bass [1] розробив першу дифузійну модель інновацій для знаходження відповіді на запитання про кількість клієнтів, які оберуть (куплять) новий товар (інноваційний продукт) за час t. У маркетингу дифузійні моделі традиційно використовуються для аналізу динаміки життєвого циклу нового продукту, для прогнозування попиту на новий продукт, а також для прийняття рішень стосовно початку виробництва та стратегії просування нового інноваційного товару [2].

* Статтю написано згідно з прикладною держбюджетною темою "Якісний аналіз диференціальних рівнянь в абстрактних просторах із застосуванням в моделюванні фізичних процесів" (номер державної реєстрації 0116U004691).

В подальших роботах вчених S. B. Robinson and C. Lakhani [3], D. Horsky and L. S. Simon [4], Kalish [5], G. Feichtinger [6], F. M. Bass, D. Jain and T. Krishnan (1994) [7], Nicoleta Sirghi, Mihaela Neamtu (2013) [8] ця модель була узагальнена завдяки введенню до неї таких параметрів як ціна, ефект реклами, ефект запізнення реклами, тощо. Зазначимо, що більшість сучасних дифузійних моделей описуються нелінійними динамічними системами [2].

Класичним визначенням дифузії інновацій стало визначення, запропоноване Е. Роджерсом: «дифузія інновації – це процес, за допомогою якого інновація проходить по комунікаційним каналам в часі і в просторі серед учасників соціальної системи» [9]. Іншими словами, дифузія інновацій або нових товарів – це комунікаційний процес, завдяки якому нововведення приймаються ринком. Відповідно до теорії дифузії, будь-яка інновація поширюється в суспільстві за певною передбачуваною моделлю.

Предметом дифузійної моделі є уявлення про рівень поширення інновації серед даної множини потенційних споживачів з точки зору математичної залежності від часу, що пройшов з моменту введення інновацій.

Актуальною задачею для розроблених нелінійних динамічних дифузійних моделей інновацій є проведення їх якісного аналізу: дослідження стійкості, наявності граничних циклів, хаотичної динаміки тощо. Зазначимо, що дослідження стійкості положення рівноваги різноманітних динамічних систем в критичних випадках є окремою самостійною задачею [10]–[11].

Метою даної роботи є проведення якісного аналізу однієї нелінійної дифузійної моделі продажу товарів з використанням реклами [12]. Враховуючи результати роботи [12], можна стверджувати, що актуальною задачею залишається дослідження динаміки нелінійної системи в околі границі області асимптотичної стійкості та визначення параметрів автоколивань та граничного циклу.

2. Постановка задачі

Розглянемо неперервну модель інтенсивного продажу певного виду товару, який схильний до впливу рекламування марки виробника. Розглянемо фірму, яка виробляє і на ринку продає продукцію під власною маркою. Подібний товар виробляють також інші фірми і продають їх під власною маркою. Те, наскільки дана фірма втримається на ринку, залежить від якості пропонованого товару, на яку впливає попит, а також реклама даного продукту і марки. Передбачається, що виробник проводить рекламну компанію, інтенсивність якої прямо пропорційна обсягу продукції, що продається. Будемо розглядати випадок повторних продажів недорогого фірмового продукту, який часто купується споживачами.

Розглядається населення, що складається з потенційних клієнтів і покупців продукту або послуги. Для простоти ми припускаємо, що потенційний покупець буде купувати продукт спонтанно. Припускаємо також, що контакти людей однорідні, так що шанси на контакт між будь-якими двома особами однакові. На рух індивідуума від стану «потенційного покупця» до стану «покупця» впливає інтенсивність контактів потенційного клієнта з попередніми покупцями. Передбачається, що існує «успішна комунікація» між потенційним клієнтом і фактичним користувачем, який дає додатковий стимул для покупки товару. Через деякий час, проте, деякі користувачі перестануть купувати продукт і стануть пасивними.

При побудові моделі будемо в основному слідувати роботі [12]. Позначимо через $N_1(t)$ число потенційних покупців даної марки (бренду). Це всі ті покупці, які на деякому відрізку часу не використовували продукт даної фірми, але є учасниками ринку. Далі, через $N_2(t)$ позначимо загальне число користувачів даної марки за час *t*.

Кількість потенційних клієнтів, які за час t купують обрану марку і, таким чином, стають її новими користувачами, прямо пропорційна кількості користувачів марки $N_2(t)$ та кількості потенційних замовників $N_1(t)$ у момент часу t. Коефіцієнт прямої пропорції позначимо через $a = a(t)$ і називатимемо контактним ступенем. Зазвичай він залежить від часу і на нього можна вплинути за допомогою рекламування марки. Спад кількості користувачів марки за час t прямо пропорційний кількості користувачів $N_2(t)$.

Також припустимо, що поточні клієнти переключаються на конкуруючий бренд з коефіцієнтом швидкості μ. На розмір цього параметра буде впливати зростання долі ринку конкурентів та інші пов'язані бренди або фірми, які торгують аналогічними товарами. Оскільки люди можуть повернутися до нашого бренду, вони залишаються в групі потенційних клієнтів. З часом, через різні причини частина з них залишає ринок (перестає використовувати товар даного типу), позначимо цей показник через $\sigma > 0$. Користувачі цієї марки за час t, таким чином, зменшуються з коефіцієнтом пропорційності $\psi = \sigma + \mu$. Ці припущення моделі можна записати у вигляді рівняння:

$$\dot{N}_2(t) = a(t)N_1(t)N_2(t) - \psi N_2(t).$$

Далі припустимо, що завдяки росту доходів населення зростає і кількість нових потенційних клієнтів марки зі сталою швидкістю $k > 0$. Ті, хто стали постійними користувачами обраної марки, представляють зменшення потенційних клієнтів, а також ті, що перестали бути користувачами марки і купили марку конкурентів, представляють приріст потенційних клієнтів. Коротко це можна записати у вигляді рівняння:

$$\dot{N}_1(t) = k - a(t)N_1(t)N_2(t) + \mu N_2(t).$$

Припустимо, що контактний ступінь – це зростаюча функція рекламних витрат. Завдяки цим витратам зростає кількість користувачів марки, тому витрати на рекламу можна вважати прямо пропорційними кількості користувачів марки. Отже, будемо вважати, що $a(t) = \rho N_2(t)$, де $\rho > 0$ – константа пропорційності.

Таким чином, отримаємо динамічну модель економічної системи у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь виду

$$\begin{aligned} &\dot{N}_1(t) = k - \rho N_1(t)N_2{}^2(t) + \mu N_2(t), \quad N_1(0) \geq 0, \\ &\dot{N}_2(t) = \rho N_1(t)N_2{}^2(t) - \psi N_2(t), \quad N_2(0) \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для проведення якісного аналізу системи (1) необхідно провести деякі заміни змінних:

$$x_1 = (\rho k / \psi\sigma)N_1,\ x_2 = (\sigma / k)N_2,\ \tau = \psi t. \tag{2}$$

Використовуючи заміни (2) система (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha\left[1 - x_1x_2^2 + \beta\left(x_2 - 1\right)\right], \\ \dot{x}_2 = x_1x_2^2 - x_2, \end{cases} \tag{3}$$

де $\alpha = \rho k^2 / \psi\sigma^2 > 0,\ \beta = \mu / \psi \geq 0,\ \beta < 1,$ а початкові умови матимуть вигляд:

$$x_1(0) = \frac{\rho k}{\psi\sigma}N_1(0), \quad x_2(0) = \frac{\sigma}{k}N_2(0).$$

Метою нашого дослідження є якісний аналіз розв'язків нелінійної динамічної системи (3).

3. Дослідження стійкості положення рівноваги за лінійним наближенням

Розглянемо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь (3).

Система рівнянь

$$\begin{cases} 1 - x_1^* x_2^{*2} + \beta\left(x_2^* - 1\right) = 0 \\ x_1^* x_2^{*2} - x_2^* = 0 \end{cases}$$

визначає єдине положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$.

Введемо змінні збуренного руху $z_1 = x_1 - 1, z_2 = x_2 - 1$. Тоді в нових змінних система (3) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha\left[1 - (1+z_1)(1+z_2)^2 + \beta z_2\right] = \alpha\left[1 - \left(1 + 2z_2 + z_2^2 + z_1 + 2z_1z_2 + z_1z_2^2\right) + \beta z_2\right] = \\ &= \alpha\left[-z_1 + (\beta-2)z_2 - z_2^2 - 2z_1z_2 - z_1z_2^2\right] = -\alpha z_1 + \alpha(\beta-2)z_2 - \alpha\left(z_2^2 + 2z_1z_2 + z_1z_2^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= (1+z_2)\left[(1+z_1)(1+z_2) - 1\right] = (1+z_2)(z_1 + z_2 + z_1z_2) = z_1 + z_2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2 + z_1z_2^2 = \\ &= z_1 + z_2 + 2z_1z_2 + z_2^2 + z_1z_2^2. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду функцію $g(z_1, z_2) = 2z_1z_2 + z_2^2 + z_1z_2^2$, тоді система матиме вигляд

$$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + \alpha(\beta-2)z_2 - \alpha g(z_1, z_2),$$

$$\dot{z}_2 = z_1 + z_2 + g(z_1, z_2).$$

Нехай

$$z = (z_1, z_2)^T, \; A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha(\beta-2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{z} = Az + g(z)b, \tag{4}$$

$$g(z) = g(z_1, z_2), \qquad b = (-\alpha, 1)^T.$$

Розглянемо характеристичне рівняння для матриці A:

$$\lambda^2 - trA \cdot \lambda + detA = 0. \tag{5}$$

Достатні умови асимптотичної стійкості положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$ випливають з критерію Рауса-Гурвіца [13]

$$trA < 0, \qquad detA > 0$$

і зводяться до виконання таких нерівностей

$$\alpha > 1, \qquad 0 < \beta < 1.$$

Область асимптотичної стійкості представлена на рис.1 .

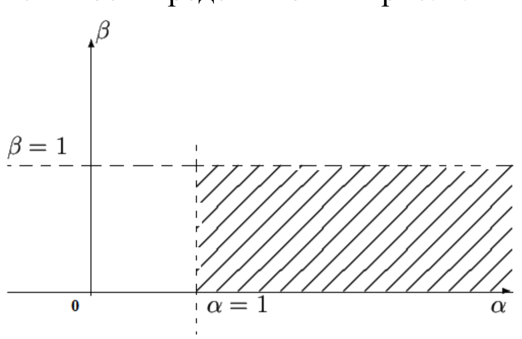

Рис. 1. Область асимптотичної стійкості в просторі параметрів (α, β).

Fig. 1. Region asymptotic stability in the parameter space (α, β).

При $\alpha = 1$ характеристичне рівняння (5) має пару чисто уявних коренів. Таким чином, при $\alpha = 1$ положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$ втрачає стійкість і можлива поява періодичного розв'язку (біфуркація Хопфа). Принципово важливим питанням є дослідження стійкості положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$ в критичному випадку $\alpha = 1$. Це задача нелінійного аналізу (нелінійної динаміки) і буде розглянута далі.

Розглянемо динаміку системи поблизу границі області асимптотичної стійкості $(\alpha \approx 1)$ і введемо позначення $2\varepsilon = 1 - \alpha$. Припустимо, що $(1-2\varepsilon)(1-\beta) > \varepsilon^2$, тоді рівняння (5) матиме два комплексні корені $\lambda = \varepsilon + i\omega$ і $\overline{\lambda} = \varepsilon - i\omega$, де $\omega = ((1-2\varepsilon)(1-\beta) - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ і в залежності від ε матимемо різну якісну картину.

4. Зведення моделі до нормальної форми А. Пуанкаре

Для дослідження стійкості положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$ в критичному випадку $\alpha = 1$ необхідно здійснити деякі перетворення рівняння збуреного руху, щоб мати можливість ефективно застосувати другий метод Ляпунова дослідження стійкості.

Спершу проведемо лінійні перетворення системи (4) і знайдемо комплексну форму рівнянь збуреного руху.

В системі (4) зробимо лінійну заміну змінних $z = T\xi$, $\xi \in R^2$, $T \in R^{2\times 2}$, $det T \neq 0$, тоді

$$\dot{\xi} = T^{-1}AT\xi + g(T\xi)T^{-1}b. \tag{6}$$

Нехай $A' = T^{-1}AT$, матрицю T виберемо так, щоб A' мала дійсну комплексну форму [14]

$$A' = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\omega \\ \omega & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon - 1 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\omega} & \dfrac{\varepsilon - 1}{\omega} \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\omega} & \dfrac{\varepsilon - 1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\alpha + \varepsilon - 1}{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1 - 2\varepsilon + \varepsilon - 1}{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-\varepsilon}{\omega} \end{pmatrix},$$

$$T\xi = \begin{pmatrix} \varepsilon - 1 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon - 1)\xi_1 - \omega\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Введемо комплексну змінну $\eta = \xi_1 + i\xi_2$, $\xi_1 = \dfrac{\eta + \overline{\eta}}{2}$, $\xi_2 = \dfrac{\eta - \overline{\eta}}{2i}$, тоді

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon\xi_1 - \omega\xi_2 + g(T\xi),$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 + \varepsilon\xi_2 - \frac{\varepsilon}{\omega} g(T\xi),$$

$$\dot{\eta} = \lambda\eta + \left(1 - \frac{\varepsilon i}{\omega}\right) g(T\xi) = \lambda\eta + \frac{i}{\omega}(-i\omega - \varepsilon) g(T\xi) = \lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega} g(T\xi),$$

$$\dot{\eta} = \lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega} g(T\xi), \tag{7}$$

$$= 2\left[(\varepsilon - 1)\left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right) - \omega\frac{\eta - \overline{\eta}}{2i}\right]\left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right) + \left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right)^2 \left[(\varepsilon - 1)\left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right) - \omega\left(\frac{\eta - \overline{\eta}}{2i}\right)\right] = (-\alpha)\left(\frac{\eta + \overline{\eta}}{2}\right)^2 -$$

$$- \frac{\omega}{2i}(\eta^2 - \overline{\eta}^2) + \frac{1}{8}(\eta^2 + 2\eta\overline{\eta} + \overline{\eta}^2)\left[\left(\varepsilon - \frac{\omega}{i} - 1\right)\eta + \left(\varepsilon + \frac{\omega}{i} - 1\right)\overline{\eta}\right] =$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{4} - \frac{\omega}{2i}\right)\eta^2 - \frac{\alpha}{2}\eta\overline{\eta} + \left(-\frac{\alpha}{4} + \frac{\omega}{2i}\right)\overline{\eta}^2 + \frac{1}{8}(\eta^2 + 2\eta\overline{\eta} + \overline{\eta}^2)\left[(\lambda - 1)\eta + (\overline{\lambda} - 1)\overline{\eta}\right] =$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{4} + \frac{\omega i}{2}\right)\eta^2 + \left(\frac{-\alpha}{2}\right)\eta\overline{\eta} + \left(-\frac{\alpha}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)\overline{\eta}^2 + \frac{1}{8}[(\lambda - 1)\eta^3 + (2\lambda + \overline{\lambda} - 3)\eta^2\overline{\eta} +$$

$$+ (2\overline{\lambda} + \lambda - 3)\eta\overline{\eta}^2 + (\overline{\lambda} - 1)\overline{\eta}^3].$$

Введемо позначення

$$a_{11} = -\frac{\alpha}{2},$$

$$a_{21} = \overline{a}_{12} = \frac{2\lambda + \overline{\lambda} - 3}{8},$$

$$a_{20} = \overline{a}_{02} = -\frac{\alpha}{4} + \frac{i\omega}{2} = \frac{2\varepsilon - 1}{4} + \frac{i\omega}{2} = \frac{\varepsilon + i\omega}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4},$$

$$a_{30} = \overline{a}_{03} = \frac{1}{8}(\lambda - 1).$$

Тоді система рівнянь збуреного руху (6) еквівалентна іншому диференціальному рівнянню в комплексній формі

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{20}\eta^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + \overline{a}_{20}\overline{\eta}^2\right) - \frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{30}\eta^3 + a_{21}\eta^2\overline{\eta} + \overline{a}_{21}\eta\overline{\eta}^2 + \overline{a}_{30}\overline{\eta}^3\right). \tag{8}$$

Далі здійснимо перетворення рівняння (8) до нормальної форми Пуанкаре [14], сутність якого полягає в знаходженні нелінійної заміни змінних:

$$\eta_1 = \eta + p_{20}\eta^2 + p_{11}\eta\overline{\eta} + p_{02}\overline{\eta}^2 + p_{30}\eta^3 + p_{21}\eta^2\overline{\eta} + p_{12}\eta\overline{\eta}^2 + p_{03}\overline{\eta}^3, \tag{9}$$

$$p_{ij} \in C, \qquad i + j = 2{,}3,$$

яка зводить вихідне рівняння (8) до найбільш простого вигляду.

Відзначимо, що перетворення (9) зворотне в досить малому околі точки $\eta = 0$ і обернене перетворення має вигляд

$$\eta = \eta_1 - p_{20}\eta_1^2 - p_{11}\eta_1\overline{\eta}_1 - p_{02}\overline{\eta}_1^2 - p_{30}\eta_1^3 - p_{21}\eta_1^2\overline{\eta}_1 - p_{12}\eta\overline{\eta}^2 - p_{03}\overline{\eta}_1^3 + O\left(|\eta_1|^5\right) \quad .(10)$$

Підставивши формулу (9) в рівняння (8), отримаємо

$$\dot{\eta}_1 = \dot{\eta} + 2p_{20}\eta\dot{\eta} + p_{11}\dot{\eta}\overline{\eta} + p_{11}\eta\dot{\overline{\eta}} + 2p_{02}\eta\dot{\overline{\eta}} + 3p_{30}\eta^2\dot{\eta} + 2p_{21}\eta\overline{\eta}\dot{\eta} + p_{21}\eta^2\dot{\overline{\eta}} +$$
$$+ p_{12}\dot{\eta}\overline{\eta}^2 + 2p_{12}\eta\overline{\eta}\dot{\overline{\eta}} + 3p_{03}\overline{\eta}^2\dot{\overline{\eta}} = \lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{20}\eta^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + \overline{a}_{21}\overline{\eta}^2\right) -$$
$$-\frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{30}\eta^3 + a_{21}\eta^2\overline{\eta} + \overline{a}_{21}\eta\overline{\eta}^2 + \overline{a}_{30}\overline{\eta}^3\right) + 2p_{20}\eta\left(\lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{20}\eta^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + \overline{a}_{20}\overline{\eta}^2\right)\right) +$$
$$+ p_{11}\overline{\eta}\left(\lambda\eta - \frac{i\lambda}{\omega}\left(a_{20}\eta^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + \overline{a}_{20}\overline{\eta}^2\right)\right) + p_{11}\eta\left(\overline{\lambda}\,\overline{\eta} + \frac{i\overline{\lambda}}{\omega}\left(\overline{a}_{20}\overline{\eta}^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + a_{20}\eta^2\right)\right) +$$
$$+ 2p_{02}\overline{\eta}\left(\overline{\lambda}\,\overline{\eta} + \frac{i\overline{\lambda}}{\omega}\left(\overline{a}_{20}\overline{\eta}^2 + a_{11}\eta\overline{\eta} + a_{20}\eta^2\right)\right) +$$
$$+ 3p_{30}\eta^2\lambda\eta + 2p_{21}\lambda\eta^2\overline{\eta} + p_{21}\overline{\lambda}\,\eta^2\overline{\eta} + p_{12}\lambda\eta\overline{\eta}^2 +$$
$$+ 2p_{12}\overline{\lambda}\,\eta\overline{\eta}^2 + 3p_{03}\overline{\lambda}\,\overline{\eta}^3 = \lambda\eta + \left[-\frac{i\lambda}{\omega}a_{20} + 2\lambda p_{20}\right]\eta^2 + \left[-\frac{i\lambda}{\omega}a_{11} + \lambda p_{11} + \overline{\lambda}p_{11}\right]\eta\overline{\eta} +$$
$$+\left[-\frac{i\lambda}{\omega}\overline{a}_{20} + 2\overline{\lambda}p_{02}\right]\overline{\eta}^2 + \left[-\frac{i\lambda}{\omega}a_{30} - 2\frac{i\lambda}{\omega}p_{20}a_{20} + \frac{i\overline{\lambda}}{\omega}p_{11}a_{20} + 3p_{30}\lambda\right]\eta^3 +$$
$$+\left[-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21} - 2\frac{i\lambda}{\omega}p_{20}a_{11} - \frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{20}p_{02} + \frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{11}p_{11} + 2p_{21}\lambda + \overline{\lambda}p_{21}\right]\eta^2\overline{\eta} +$$
$$+\left[-\frac{i\lambda}{\omega}\overline{a}_{21} - 2\frac{i\lambda}{\omega}p_{20}\overline{a}_{20} - \frac{i\lambda}{\omega}a_{11}p_{11} + 2\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}p_{02}a_{11} + p_{11}\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}\overline{a}_{20} + p_{12}\lambda + 2p_{12}\overline{\lambda}\right]\eta\overline{\eta}^2 +$$
$$+\left[-\frac{i\lambda}{\omega}\overline{a}_{30} - \frac{i\lambda}{\omega}p_{11}\overline{a}_{20} + 2\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}p_{02}\overline{a}_{20} + 3p_{03}\overline{\lambda}\right]\overline{\eta}^3. \qquad (11)$$

Підставимо формулу (10) в (11), тоді в правій частині отримаємо деякий многочлен від двох змінних η_1 і $\overline{\eta_1}$. Параметри перетворення p_{20}, p_{11} і p_{02} підберемо так, щоб зробити нулями коефіцієнти при квадратних одночленах η_1^2, $\eta_1\overline{\eta_1}$ і $\overline{\eta}_1^2$, тобто:

$$-\frac{i\lambda}{\omega}a_{20} + \lambda p_{20} = 0, \qquad -\frac{i\lambda}{\omega}a_{11} + \overline{\lambda}p_{11} = 0, \qquad -\frac{i\lambda}{\omega}\overline{a}_{20} + \overline{\lambda}p_{02} = 0,$$

звідки отримаємо

$$p_{20} = \frac{ia_{20}}{\omega}, \qquad p_{11} = \frac{i\lambda^2}{\omega|\lambda|^2}a_{11}, \qquad p_{02} = \frac{i\lambda^2}{\omega|\lambda|^2}\overline{a}_{20}. \qquad (12)$$

Після цього вдалим вибором коефіцієнтів p_{30}, p_{12} і p_{03} перетворення (9) виключимо кубічні одночлени η_1^3, $\eta_1\overline{\eta}_1^2$, $\overline{\eta}_1^3$ з правої частини рівняння (11). Тоді диференціальне рівняння (8), яке перетворене до нової змінної η_1, матиме вигляд

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda\eta_1 + \Gamma(\varepsilon)\eta_1|\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5), \qquad (13)$$

де

$$\Gamma(\varepsilon) \;=-2\lambda p_{20}p_{11}+\lambda p_{11}(-p_{20}-\overline{p}_{11})+\overline{\lambda}p_{02}(-2\overline{p}_{02})-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21}-2\frac{i\lambda}{\omega}p_{20}a_{11}-$$
$$-\frac{i\lambda}{\omega}p_{11}a_{20}+2\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{20}p_{02}+\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{11}p_{11}+p_{21}(\lambda+\overline{\lambda})=-3\lambda p_{11}p_{20}-\lambda\,|\,p_{11}\,|^2-$$
$$-2\overline{\lambda}\,|\,p_{12}\,|^2-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21}-2\frac{i\lambda}{\omega}p_{20}a_{11}-\frac{i\lambda}{\omega}p_{11}a_{20}+2\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{20}p_{02}+\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{11}p_{11}+2\varepsilon p_{21}.$$

Підставляючи в цей вираз формулу (12) отримаємо

$$\Gamma(\varepsilon)=-3\lambda\frac{ia_{20}}{\omega}\frac{i\lambda^2}{\omega|\,\lambda\,|^2}a_{11}-\lambda\frac{|\,a_{11}\,|^2}{\omega^2}-2\overline{\lambda}\frac{|\,a_{20}\,|^2}{\omega^2}-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21}-2\frac{i\lambda}{\omega}\frac{ia_{20}}{\omega}a_{11}-\frac{i\lambda}{\omega}\frac{i\lambda^2}{\omega|\,\lambda\,|^2}a_{11}a_{20}+$$
$$+2\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{20}\frac{i\lambda^2}{\omega|\,\lambda\,|^2}\overline{a}_{20}+\frac{i\overline{\lambda}}{\omega}a_{11}\frac{i\lambda^2}{\omega|\,\lambda\,|^2}a_{11}+2\varepsilon p_{21}=3\frac{\lambda^3}{\omega^2\,|\,\lambda\,|^2}a_{11}a_{20}-\frac{\lambda}{\omega^2}|\,a_{11}\,|^2-2\overline{\lambda}\frac{|\,a_{20}\,|^2}{\omega^2}-$$

$$-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21}+\frac{2\lambda}{\omega^2}a_{20}a_{11}+\frac{\lambda^3}{\omega^2\,|\,\lambda\,|^2}a_{11}a_{20}-\frac{2\lambda}{\omega^2}|\,a_{20}\,|^2-\frac{\lambda}{\omega^2}a_{11}^2+2\varepsilon p_{21}=4\frac{\lambda^3}{\omega^2\,|\,\lambda\,|^2}a_{11}a_{20}-$$
$$-2\frac{\lambda\,|\,a_{11}\,|^2}{\omega^2}-\frac{4\varepsilon}{\omega^2}|\,a_{20}\,|^2-\frac{i\lambda}{\omega}a_{21}+\frac{2\lambda}{\omega^2}a_{11}a_{20}+2\varepsilon p_{21}.$$

Функцію $\Gamma(\varepsilon)$ можна представити у вигляді $\Gamma(\varepsilon)=\Gamma(0)+\varepsilon\Gamma_1(\varepsilon)+2\varepsilon p_{21}$, де $\Gamma_1(\varepsilon)$ – деяка регулярна в околі $\varepsilon=0$ функція від ε. Виберемо $p_{21}=-\frac{1}{2}\Gamma_1(\varepsilon)$, тоді $\Gamma(\varepsilon)=\Gamma(0)=\gamma$ і

$$\gamma\;=\Gamma(0)=4\left(\frac{(i\omega)^3}{\omega^4}\right)\left(-\frac{\alpha}{4}\right)\left(\frac{i\omega}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2i\omega}{\omega^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)-\left(\frac{i\omega i}{\omega}\right)\left(\frac{i\omega-3}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{2i\omega}{\omega^2}\right)\left(\frac{i\omega}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=-\alpha+\frac{i\alpha}{2\omega}-\frac{i\alpha^2}{2\omega}+\frac{i\omega-3}{8}+\frac{\alpha}{2}+\frac{i\alpha}{4\omega}=-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{8}+$$
$$+\left(\frac{3\alpha}{4\omega}-\frac{\alpha^2}{2\omega}+\frac{\omega}{8}\right)i.$$

Таким чином, нормальна форма диференціального рівняння (8) матиме вигляд:

$$\frac{d\eta_1}{dt}=\lambda\eta_1+\gamma\eta_1\,|\,\eta_1\,|^2+O(|\,\eta_1\,|^5). \tag{14}$$

Ця нормальна форма дозволить провести якісний аналіз динамічної дифузійної моделі.

5. Аналіз стійкості за Ляпуновим положення рівноваги в критичному випадку

Розглянемо нормальну форму (14). Важливість цього рівняння полягає в тому, що воно дозволяє встановити ряд якісних особливостей динаміки розглянутої математичної моделі економічної системи.

Проведемо аналіз стійкості за Ляпуновим положення рівноваги $x_1^*=x_2^*=1$ в критичному випадку $\alpha=1$.

При $\alpha = 1$ питання про стійкість положення рівноваги системи рівнянь збуреного руху (5) не можна вирішити на основі лінійного наближення. Цей випадок відноситься до особливих або критичних випадків в теорії стійкості. Оскільки лінійна заміна змінних (9) і (10) не змінює суті задачі про стійкість, то для дослідження положення рівноваги системи (5) досить досліджувати стійкість точки $\eta_1 = 0$ рівняння (14). В цьому випадку $\varepsilon = 0$ і рівняння (14) матиме вигляд

$$\frac{d\eta_1}{dt} = i\omega\eta_1 + \gamma\eta_1 |\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5). \tag{15}$$

Для дослідження стійкості особливої точки $\eta_1 = 0$ застосуємо прямий метод Ляпунова, вибравши в якості функції Ляпунова функцію $\upsilon(\eta_1) = |\eta_1|^2$, яка є додатно-визначеною. Обчислимо повну похідну цієї функції в силу рівняння (15)

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(15)} = \frac{d}{dt}\left(|\eta_1|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\eta_1\overline{\eta_1}\right) = \frac{d\eta_1}{dt}\overline{\eta} + \eta_1\frac{d\overline{\eta_1}}{dt} = \left(i\omega\eta_1 + \gamma\eta_1|\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5)\right)\overline{\eta_1} +$$
$$+ \eta_1\left(-i\omega\overline{\eta_1} + \overline{\gamma\eta_1}|\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5)\right) = (\gamma + \overline{\gamma})|\eta_1|^4 + O\left(|\eta_1|^6\right) = 2Re\gamma|\eta_1|^4 + O\left(|\eta_1|^6\right).$$

За означенням, існують постійні $r > 0$ і $\delta > 0$ такі, що при всіх $|\eta_1| < \delta$, $\left|O(|\eta_1|^6)\right| \le r|\eta_1|^6$, тоді

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(15)} \le 2Re\gamma|\eta_1|^4 + r|\eta_1|^6 .$$

Так як $Re\gamma < 0$, то в околі

$$U = \left\{\eta_1 \in C \,\middle|\, |\eta_1|^2 < \frac{|Re\gamma|}{r}\right\}$$

особливої точки $\eta_1 = 0$ повна похідна $\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(15)}$ задовольняє оцінку $\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(15)} \le Re\gamma|\eta_1|^4 < 0$ і є від'ємно-визначеною функцією. В силу другої теореми Ляпунова, точка $\eta_1 = 0$ є асимптотично стійкою за Ляпуновим. Асимптотична стійкість особливої точки $z_1 = z_2 = 0$ означає, що межа області асимптотичної стійкості $\alpha = 1$, $\beta \ne 1$ є безпечною і в цьому випадку говорять про м'яку втрату стійкості. М'яка втрата стійкості проявляється в тому, що в динамічній системі, положення рівноваги втрачає стійкість і виникає стійкий граничний цикл (біфуркація Хопфа).

Таким чином, існування граничного циклу при малих значеннях ε є безпосереднім наслідком теорії Хопфа. Однак, в даному випадку двовимірної системи факт існування циклу може бути встановлений і на основі теореми Пуанкаре-Бендіксона [15]. Для цього використовуємо функцію Ляпунова $\upsilon(\eta_1) = |\eta_1|^2$, яка на комплексній площині визначає топографічну систему ліній рівня цієї функції.

Повна похідна функції $\upsilon(\eta_1)$ вздовж розв'язків (14) має вигляд

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(14)} = \dot{\eta}_1\overline{\eta}_1 + \dot{\overline{\eta}}_1\eta_1 = \overline{\eta}_1\left(\lambda\eta_1 + \gamma\eta_1 |\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5)\right) + \eta_1\left(\overline{\lambda}\,\overline{\eta}_1 + \overline{\gamma\eta_1} |\eta_1|^2 + O(|\eta_1|^5)\right) =$$
$$= 2Re\lambda |\eta_1|^2 + 2Re\gamma |\eta_1|^4 + O(|\eta_1|^6).$$

Відмітимо, що існує $\delta > 0$ таке, що при $|\eta_1| < \delta$ виконується нерівність $\left|O(|\eta_1|^6)\right| \le |Re\gamma|\,|\eta_1|^4$, тому в околі U_δ точки $\eta_1 = 0$ виконуються оцінки

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(14)} \le 2\varepsilon |\eta_1|^2 + 2Re\gamma |\eta_1|^4 + |Re\gamma|\,|\eta_1|^4 = \left(2\varepsilon + Re\gamma |\eta_1|^2\right)|\eta_1|^2,$$

$$\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(14)} \ge 2\varepsilon |\eta_1|^2 + 2Re\gamma |\eta_1|^4 - |Re\gamma|\,|\eta_1|^4 = 2\varepsilon |\eta_1|^2 + 3Re\gamma |\eta_1|^4 = \left(2\varepsilon + 3Re\gamma |\eta_1|^2\right)|\eta_1|^2.$$

Розглянемо кільцеву область $\Omega = \left\{\eta_1 \in C \,\middle|\, \frac{\varepsilon}{2|Re\gamma|} < |\eta_1|^2 < \frac{3\varepsilon}{|Re\gamma|}\right\}$.

При достатньо малих ε $\left(3\varepsilon < |Re\gamma|\delta\right)$ $\Omega \subset U_\delta$. На зовнішній границі області Ω $|\eta_1|^2 = \frac{3\varepsilon}{|Re\gamma|}$ і $\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(14)} \le (2\varepsilon - 3\varepsilon)|\eta_1|^2 = -\varepsilon |\eta_1|^2 < 0$, а на внутрішній границі кільця $|\eta_1|^2 = \frac{\varepsilon}{2|Re\gamma|}$ і $\left.\frac{d\upsilon}{dt}\right|_{(14)} \ge 2\varepsilon |\eta_1|^2 + 3Re\gamma |\eta_1|^2 \frac{\varepsilon}{2|Re\gamma|} = \frac{\varepsilon}{2}|\eta_1|^2 > 0$, тому кільце є додатно-інваріантною множиною, а отже всередині цього кільця існує граничний цикл.

Таким чином, нами доведено існування стійкого граничного циклу (стійкий періодичний розв'язок). Рекламна стратегія, заснована на тому, що інвестування реклами прямо пропорційно обсягу продажів, може призвести до періодичних коливань обсягу продажів продукції представленої марки. Цей результат можна інтерпретувати в такий спосіб: якщо кількість осіб, які використовують цю продукцію на даному відрізку часу незначна, фірма має незначний прибуток і не може собі дозволити серйозну рекламну компанію. Проте, на ринку досить потенційних покупців, тому навіть невеликі інвестиції в рекламу призведуть до збільшення обсягу продажів фірми. Так як зростає обсяг продажів, зростають і витрати на рекламу. Це зростання, проте, з часом перевищує зростання обсягу продажів, тому що кількість потенційних замовників (клієнтів) після того, як стають користувачами продукції, зменшується. Реклама перестає бути ефективною. Також відбувається природне зменшення користувачів і те, що нових користувачів в цій фазі циклу прибуває мало, призводить до зменшення обсягу продажів. Таким чином, цей процес може повторюватися циклічно.

6. Визначення параметрів автоколивань та граничного циклу

Нормальна форма А. Пуанкаре диференціальних рівнянь збуреного руху (15) дозволяє не тільки отримати важливі висновки про стійкість, але і привести наближені формули для розрахунку виду автоколивань при $\alpha \approx 1$.

З цією метою розглянемо укорочене рівняння (14)

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda\eta_1 + \gamma\eta_1 |\eta_1|^2, \qquad (16)$$

яке отримане з вихідного перетворенням членів порядку $|\eta_1|^5$. Це рівняння можна проінтегрувати шляхом переходу в полярні координати. Нехай $\eta_1(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, тоді $\frac{d\rho}{dt}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \lambda\rho e^{i\theta} + \gamma\rho^3 e^{i\theta}$. Відокремлюючи дійсну і уявну частини отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \varepsilon\rho + Re\gamma\rho^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega + Im\gamma\rho^2. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) інтегрується в явному вигляді, оскільки її перше рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Однак, краще здійснити якісне дослідження системи (17).

При $\varepsilon < 0$ дифференціальне рівняння $\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon\rho + Re\gamma\rho^3$ має асимптотично стійку особливу точку $\rho = 0$, що відповідає асимптотичній стійкості положення рівноваги $x_1^* = x_2^* = 1$ вихідної системи (3) при $0 < \alpha < 1$. При $\varepsilon > 0$ особлива точка $\rho = 0$ втрачає стійкість і з'являється особлива точка $\rho_0 = \left(\frac{\varepsilon}{|Re\gamma|}\right)^{\frac{1}{2}}$ (нагадаємо, що розглядається випадок $\rho > 0$).

Якщо ввести варіацію $\delta\rho = \rho - \rho_0$, то

$$\frac{d\delta\rho}{dt} = \varepsilon(\delta\rho + \rho_0) + Re\gamma(\delta\rho + \rho_0)^3 = (\varepsilon + 3\rho_0^2 Re\gamma)\delta\rho + o(\delta\rho).$$

Оскільки $\varepsilon + 3\rho_0^2 Re\gamma = -2\varepsilon < 0$, то особлива точка $\rho = \rho_0$ асимптотично стійка. Ця особлива точка відповідає граничному циклу у вихідній системі (3). Підставляючи $\rho(t) = \rho_0 = \left(\frac{\varepsilon}{|Re\gamma|}\right)^{\frac{1}{2}}$ в друге рівняння системи (17) отримаємо $\frac{d\theta}{dt} = \omega + Im\gamma\frac{\varepsilon}{|Re\gamma|}$, звідки, покладаючи $\theta(0) = 0$, отримаємо $\theta(t) = \left(\omega + \frac{\varepsilon Im\gamma}{|Re\gamma|}\right)t = \omega^* t$.

Таким чином, в змінній $\eta_1(t)$ граничний цикл має наближене представлення

$$\eta_1 = \left(\frac{\varepsilon}{|Re\gamma|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\omega + \frac{\varepsilon Im\gamma}{|Re\gamma|}\right)t}. \tag{18}$$

Період цього циклу визначається за наближеною формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega + \frac{\varepsilon Im\gamma}{|Re\gamma|}}. \tag{19}$$

Можна представити граничний цикл і в вихідних змінних x_1 та x_2:

$$x_1(t) \approx 1 + (\varepsilon - 1) Re\eta - \omega Im\eta$$

$$x_2(t) \approx 1 + Re\eta,$$

де

$$\eta(t) \approx \rho_0 e^{i\omega^* t} - \frac{ia_{20}}{\omega}\rho_0^2 e^{2i\omega^* t} - \frac{i\lambda^2}{\omega|\lambda|^2} a_{11}\rho_0^2 - \frac{i\lambda^2}{\omega|\lambda|^2}\bar{a}_{20}\rho_0^2 e^{-2i\omega^* t} =$$
$$= \rho_0 e^{i\omega^* t} - \rho_0^2\left[\frac{ia_{20}}{\omega}\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2i\omega^* t} + \frac{\alpha i\lambda^2}{2\omega|\lambda|^2} - \frac{i\lambda^2}{\omega|\lambda|^2}\left(\frac{\bar{\lambda}}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2i\omega^* t}\right], \quad \omega^* = \frac{2\pi}{T}. \tag{20}$$

Отже, нами отримано наближені формули для визначення параметрів автоколивань та граничного циклу.

7. Висновки

В роботі був здійснений якісний аналіз нелінійної динамічної дифузійної моделі продажу товару з використанням ефекту реклами.

За допомогою першого методу Ляпунова досліджено стійкість положення рівноваги системи рівнянь збуреного руху (стійкість за лінійним наближенням). Побудовано область асимптотичної стійкості в просторі параметрів (α,β). Перед дослідженням стійкості положення рівноваги в критичному випадку система попередньо була зведена до нормальної форми Пуанкаре.

За допомогою другого методу Ляпунова встановлено асимптотичну стійкість особливої точки в критичному випадку. Показано, що межа області асимптотичної стійкості $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ є безпечною та присутня м'яка втрата стійкості. М'яка втрата стійкості проявляється в тому, що в динамічній системі, положення рівноваги втрачає стійкість і виникає стійкий граничний цикл (біфуркація Хопфа). Факт існування циклу також був встановлений на основі теореми Пуанкаре-Бендіксона. За допомогою нормальної форми Пуанкаре визначено наближено параметри автоколивань та граничного циклу.

В подальшому передбачається здійснити дослідження деяких дифузійних моделей інновацій з врахуванням запізнення та елементів нечіткої логіки.

Подяки

Автори висловлюють вдячність доктору фізико-математичних наук, провідному науковому співробітнику В.І. Слиньку за постійну увагу до роботи та обговорення отриманих результатів.

Список використаної літератури:

1. Bass F.M. A new product growth for model consumer durables / F.M. Bass // Management Science. – 1969. – 15(5) . – P. 215–227.
2. Radas S. Diffusion models in marketing: how to incorporate the effect of external influence / S. Radas //Privredna kretanja i ekonomska politika. – 2006 . –15(105). – P. 30–51.
3. Robinson B. Dynamic Price Models for New Product Planning / B. Robinson, C. Lakhani // Management Science. – 1975. – N 10. – P. 1113–1122.
4. Horsky D. Advertising and the diffusion of new products / D. Horsky, L.S. Simon // Marketing Science. – 1983. – Vol. 2, N1. – P.18 – 28.
5. Kalish S. A New Product Adoption Model with Pricing, Advertising, and Uncertainty / S. Kalish // Management Science. 1985. – N 31, P.1569–1585.

6. Feichtinger G. Optimal Pricing in a Diffusion Model with Nonlinear Price-Dependent Market Potential / G. Feichtinger. – 1981, Working Paper No. 43, Operations Research Department, Technische Universitat Wien.
7. Bass F.M. Why the Bass model fits without decision variables / F.M. Bass, D. Jain, T. Krishnan // Marketing Science. – 1994 . – N 13, P.204–223.
8. Nicoleta Sirghi. Deterministic and stochastic advertising diffusion model with delay / Nicoleta Sirghi, Mihaela Neamtu // Wseas Transactions on Systems and Control. 2013. – Vol. 8, N 4, P. 141–150.
9. Rogers E. M. Diffusion of innovations (5th ed.) / E. M. Rogers. – New York, 2003 . – 289 p.
10. Babenko S.V. Stability of motion of nonlinear systems with impulse action in critical cases (in Russian) / S.V. Babenko, V.I. Slyn'ko // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2008. — N 6, P. 46 – 52.
11. Dvirnyi A.I. On stability of critical equilibrium states of some classes of complex impulsive systems / A.I. Dvirnyi, V.I. Slyn'ko // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. – Vol. 53, N 1, P. 20–32.
12. Feichtinger G. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model / G. Feichtinger // Journal of Economic Behavior and Organization. – 1992. – N 17, P. 401–411.
13. Demidovich B. P. Lectures on the Mathematical Stability Theory (in Russian) / B. P. Demidovich. – Nauka, Moscow, 1967. – 267 p.
14. Arnold V.I. Henri Poincaré: Selected Works in Three Volumes. V. 1. / V.I. Arnold.– Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
15. Hasselblatt B. A first Course in Dynamics / B. Hasselblatt, A. Katok – Cambridge University Press, 2003. – 294 p.

References:

1. Bass F.M. (1969). A new product growth for model consumer durables. *Management Science*,15(5), 215–227.
2. Radas S. (2006). Diffusion models in marketing: how to incorporate the effect of external influence.*Privredna kretanja i ekonomska politika*, 15(105), 30–51.
3. Robinson B., Lakhani C. (1975). Dynamic Price Models for New Product Planning. *Management Science*, 10, 1113–1122.
4. Horsky D., Simon L.S. (1983). Advertising and the diffusion of new products. *Marketing Science*, 2, 1–18.
5. Kalish S. (1985). A New Product Adoption Model with Pricing, Advertising, and Uncertainty. *Management Science*, 31,1569–1585.
6. Feichtinger G. (1981). Optimal Pricing in a Diffusion Model with Nonlinear Price-Dependent Market Potential. Working Paper No. 43, Operations Research Department, Technische Universitat Wien, December.
7. Bass F.M., Jain D., Krishnan T. (1994). Why the Bass model fits without decision variables. *Marketing Science*, 13, 204–223.
8. Nicoleta Sirghi, Mihaela Neamtu (2013). Deterministic and stochastic advertising diffusion model with delay. *Wseas Transactions On Systems and Control*, 8 (4), P. 141–150.
9. Rogers E. M. (2003). Diffusion of innovations (5th ed.), New York.
10. Babenko S.V., Slyn’ko V.I. (2008). Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях. *Доп. НАН України*, 6, 46 – 52.
11. Dvirnyi A.I., Slyn’ko V.I. (2014). On stability of critical equilibrium states of some classes of complex impulsive systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 53 (1), 20–32.

12. Feichtinger G. (1992). Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *Journal of Economic Behavior and Organization,* 17, 401–411.
13. Демидович Б.П. (1967). Лекции по математической теории устойчивости, М.: Наука, 1967, 472 с.
14. Arnold V.I. Henri Poincaré: Selected Works in Three Volumes. V. 1. / V.I. Arnold.– Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
15. Hasselblatt B., Katok A. (2003). A first Course in Dynamics. Cambridge University Press.

V.V. Atamas'
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, head of the department of algebra and mathematical analysis,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
atamas_v@ukr.net

V.S. Denysenko
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, assistant professor of economics and business modeling department,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
den_vik@ukr.net

V.O. Denysenko
Candidate of Economic Sciences, Senior Lecturer of the Department of Economics and International Economic Relations,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
vikaonline@ukr.net

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE NONLINEAR ADVERTISING DIFFUSION MODEL

Summary. *In this paper a qualitative analysis of the nonlinear dynamic advertising diffusion model has been carried out. Using the first Lyapunov method, the asymptotic stability of the equilibrium position of the system of equations of perturbed motion (stability by linear approximation) has been investigated and sufficient asymptotic stability conditions in terms of algebraic inequalities has been obtained based on Routh-Hurwitz conditions. The region of asymptotic stability has been constructed. To investigate stability of equilibrium position in a critical case we first transform our initial nonlinear system of differential equations to a normal form of Poincare. Then using the second Lyapunov method (quadratic positive definite Lyapunov function), the asymptotic stability of a singular point in the critical case is established. It is shown that the boundary of the asymptotic stability region is safe and there is a soft loss of stability. The existence of a stable limit cycle (Hopf bifurcation) is proved. Basing on the Poincare-Bendixon theorem, the existence of the limit cycle (stable periodic solution) has been established. Using the Poincare normal form, the parameters of self-oscillations and the formula for limit cycle and its period have been approximately determined.*

Keywords: diffusion of innovation model, Lyapunov asymptotic stability, limit cycle, Hopf bifurcation

Одержано редакцією 23.09.2018
Прийнято до друку 26.12.2018