МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ФІЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ ТА КОМП’ЮТЕРНО-
ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Посібник

Черкаси – 2011

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61я73-1
Д 50

Диференціальні рівняння: Посібник / Розробники: В. К. Григоренко, Д. М. Лила; Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького. – Черкаси: Вид. від. Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, 2011. − 232 с.

ISBN 978-966-353-198-4

Розробники

В. К. Григоренко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Д. М. Лила, кандидат фізико-математичних наук, в.о. доцента кафедри математики та методики навчання математики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Рекомендується в якості посібника для студентів спеціальності «Математика», а також інших спеціальностей (напрямів підготовки), де вивчається курс або деякі розділи диференціальних рівнянь

Рецензенти

А. О. Ковальчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

О. І. Двірний, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та інформаційних технологій Академії пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля

Затверджено Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол №8 від 27 березня 2007 р.)

ББК 22.161.61я73-1
УДК 517.91(075.8)

© Григоренко В. К., 2011
© Лила Д. М., 2011
© Черкаський національний університет, 2011

ISBN 978-966-353-198-4

Зміст

Пам'ятка студентові

У кожному параграфі посібника в короткому викладі подано теоретичні відомості, зразки розв'язання типових задач, орієнтовний перелік завдань для аудиторної, домашньої та розрахункових робіт, а також запитання для самоконтролю та посилання на літературу:

[1] Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.− М.: Высшая школа, 1967.
[2] Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II.− М.: Наука, 1967.
[3] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.− М.: Физматгиз, 1959.
[4] Шкіль М. І., Сотниченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння.− К.: Вища школа, 1992.

Кожен розділ закінчується тематикою доповідей, рефератів і курсових робіт із вказівкою основної літератури.

Задачі розрахункових робіт слід виконувати в окремому належним чином підписаному учнівському зошиті із зазначенням номера роботи та прізвища і ініціалів виконавця.

Для студентів денної форми навчання з кожної запропонованої задачі варто вибрати по два приклади, номери яких визначаються Вашим номером за списком академічної групи (у прямому і зворотному відліку).

Студенти заочної форми вибирають по одному прикладу із запропонованих задач згідно свого номера за списком.

Кожен приклад починайте з нової сторінки, обов'язково записуючи умову задачі. Розв'язування супроводжуйте необхідними короткими обґрунтуваннями. Наприкінці розв'язання чітко записуйте одержану відповідь.

При захисті роботи будьте готовими пояснювати її ключові моменти, тлумачити використані поняття і факти, а також за потребою наводити епізоди міркувань, які мають місце при розв'язуванні типових задач.

Бажаємо успіху!

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Література: [2], §1; [3], розд. I, §2.

Якщо в диференціальному рівнянні $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ можна подати у вигляді добутку двох множників, з яких один залежить тільки від x, а другий тільки від y, то рівняння матиме вигляд $f_1(x)F_1(y)dx + f_2(x)F_2(y)dy = 0$, і називається рівнянням з відокремлюваними змінними. Помноживши обидві його частини на функцію $\mu(x,y) = \dfrac{1}{F_1(y)f_2(x)}$, дістанемо рівняння $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \dfrac{F_2(y)}{F_1(y)}dy = 0$. Його загальний інтеграл $\int\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\dfrac{F_2(y)}{F_1(y)}dy = C.$

Ділячи на $F_1(y)f_2(x)$, відкидаємо розв'язки рівнянь $F_1(y) = 0, f_2(x) = 0$; через це втрачаємо деякі розв'язки вихідного рівняння.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння: $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$

►Помноживши на функцію $\mu(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1+x^2}}$, матимемо рівняння з відокремленими змінними: $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$; $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$ – його загальний інтеграл. При відокремленні змінних припускалося, що $y \neq \pm 1$. Загальний інтеграл не має розв'язків $y = 1$ та $y = -1$; їх втратили.◄

Практичні завдання

Знайти загальний розв'язок (інтеграл) рівнянь і вилучити частинний, якщо дано початкову умову:

1. $(1+y^2)dx + xydy = 0.$

2. $xydx + (x+1)dy = 0.$

3. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$

4. $2x\cdot\sqrt{1+y^2}dx + e^{-x^2}dy = 0, y(0) = 0.$

5. $\sec^2 x\cdot tgydx + \sec^2 y\cdot tgxdy = 0.$

6. $\sin x\cdot\sin ydx + \cos x\cdot\cos ydy = 0,$ $y(\pi/4) = \pi/4.$

7. $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5.$

8. $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1}dy = 0.$

9. $(1+y^4)(\cos x + \sin x)dx +$ $+ y\sqrt{\sin 2x}dy = 0, y(\pi/2) = 0.$

10. $(1+y^2)dx - \left(y + \sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy = 0.$

11. $x^2dx + y^3e^{x+y}dy = 0.$

12. $sinxdy - ylnydx = 0, y(\pi/2) = 1.$

13. $\frac{2-5y}{2x+5}dy+\sqrt{\frac{4y^2+9y+1}{9x^2+6x+2}}dx=0.$ **14.** $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$

15. $2x\sqrt{1-y^2}=y'\left(1+x^2\right).$

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння (відповідь подати у вигляді $\psi(x,y)=C$).

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$
2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$
3. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$
4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$
5. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$
6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0.$
7. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0.$
8. $y'y\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$
9. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0.$
10. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0.$
11. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$
12. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx.$
13. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$
14. $(e^x+8)dy-ye^xdx=0.$
15. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$
16. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx.$
17. $y\ln y+xy'=0.$
18. $(1+e^x)y'=ye^x.$
19. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0.$
20. $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx.$
21. $y(1+\ln y)+xy'=0.$
22. $(3+e^x)yy'=e^x.$
23. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0.$
24. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$
25. $\sqrt{5+y^2}dx+4\left(x^2y+y\right)dy=0.$
26. $(1+e^x)yy'=e^x.$
27. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0.$
28. $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$
29. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}y'=0.$
30. $20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx.$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
2. Що таке порядок диференціального рівняння; степінь диференціального рівняння?
3. Що називається розв’язком (інтегральною кривою) диференціального рівняння?
4. У чому полягає задача інтегрування диференціального рівняння?
5. Які основні форми задання рівняння першого порядку, розв’язуваного відносно похідної?
6. В якому вигляді можуть бути задані розв’язки?
7. У чому полягає задача Коші для рівняння першого порядку, розв’язаного

відносно похідної?

8. Що таке загальний розв'язок?
9. Як розв'язується задача Коші з допомогою формули загального розв'язку?
10. Що таке загальний інтеграл?
11. Що таке частинний розв'язок? Як він пов'язаний з формулою загального розв'язку?
12. Як інтегруються неповні диференціальні рівняння вигляду $y' = f(x)$, $y' = f(y)$?
13. Який загальний вигляд рівняння з відокремленими змінними; відокремлюваними змінними?
14. Як інтегруються рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними?
15. У якому випадку диференціальне рівняння вигляду $y' = f(x)\varphi(y)$ має розв'язки, які не містяться в загальному інтегралі? Як знайти такі розв'язки?
16. Скільки розв'язків може мати диференціальне рівняння?
17. Як одержати відповідь до рівняння у найпростішому вигляді?

2. Рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Література: [2], §1, п. 2 – 4; [3], розд. I, §2.

Рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$ заміною $z=ax+by+c$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними. Дійсно, тоді $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, а $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$. Повертаючись до рівняння, маємо: $\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$. Змінні відокремлюються, одержуємо: $dx - \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} = 0$.

Після інтегрування z замінюємо на $ax + by + c$. Записуємо остаточний вигляд загального інтеграла.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $y' = \cos(x - y - 1)$.

►Поклавши $x - y - 1 = z$, зводимо дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Дістанемо: $1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, $1 - \frac{dz}{dx} = \cos z$, $\frac{dz}{dx} = 1 - \cos z$.

Функції $z = 2k\pi$, $k \in Z$, є розв'язками цього рівняння. Інші його розв'язки задовольняють співвідношення: $\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx - C$. Звідси $-ctg\frac{z}{2} = x - C$, або $z = 2arcctg(C - x) + 2n\pi$, $n \in Z$. Отже, $x - y - 1 = 2arcctg(C - x) + 2n\pi$, $n \in Z$.

Остаточно $y = x - 1 + 2k\pi$, $k \in Z$; $y = x - 1 - 2arcctg(C - x) + 2n\pi$, $n \in Z$.◄

Практичні завдання

Знайти розв'язки рівнянь:

1. $y' = x + y + 1$.

2. $y' = \sqrt{y - x} + 1$.

3. $y' - \sin(x - y) = 0$.

4. $\frac{dy}{dx} - (ax + by + c)^2 = 0$.

5. $y' = (x + 8y + 3)^3$.

6. $y' = \cos(x - y)$.

7. $y' = 3x - 2y + 5$.

8. $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$.

9. $y' = ax + by + c$ (a, b, c – $const$).

10. $(x + y)^2\, y' = a^2$.

11. $y + xy' = a(1 + xy), y\left(\frac{1}{a}\right) = -a$.

12. $y' + y = 2x + 1$.

13. $y' - y = 2x - 3$.

14. $(x + 2y)\, y' = 1, y(0) = -1$.

15. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Розрахункові завдання

Задача 2. Проінтегрувати дані рівняння.

1. $y' = 2x + y + 1$.
2. $y' = \sqrt{2y - x} + 3$.
3. $y' - 2\sin(x - y + 1) = 0$.
4. $2\dfrac{dy}{dx} + (ax + by)^2 = 0$.
5. $y' = (x + 7y + 2)^3$.
6. $y' = \cos(x + y)$.
7. $y' = x - 8y + 3$.
8. $y'\sqrt{2 + x + y} = y + x$.
9. $y' = x + ay$.
10. $(x + y)^2\, y' = 4$.
11. $2(xy' + y) = axy$.
12. $y' + y = x - 33$.
13. $y' - y = 3x - 2$.
14. $(2x + y + 1)\ y' = 1$.
15. $y' = \sqrt{5x + 3y - 1}$.
16. $y' = \dfrac{2}{3}(x + 3y + 3)$.
17. $y' = 2\sqrt{x - y} + 1$.
18. $y' - tg(x - y) = 0$.
19. $\dfrac{dy}{dx} - (px + qy + r)^2 = 0$.
20. $y' = (3x + 2y + 7)^2$.
21. $y' = 2\cos(2x + y)$.
22. $y' = 4(3x - y + 8)$.
23. $y'\sqrt{2 + 2x + y} = 2x + y$.
24. $y' = mx + ny$.
25. $(2x - y)^2\, y' = 9$.
26. $-x\dfrac{dy}{dx} = y + a(2 - xy)$.
27. $2y' + 3y = x - 1$.
28. $y' - 2y = x + 13$.
29. $(4x + y)\,y' = 2$.
30. $y' = 2\sqrt{4x + 2y + 1}$.

Запитання для самоперевірки

1. Якою заміною рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
2. Який воно має вигляд після введення заміни $z = ax + by + c$?
3. Яка змінна в такому рівнянні є аргументом, а яка – невідомою функцією цього аргументу?
4. Як визначити нахил інтегральної кривої рівняння першого порядку в заданій точці (x_0, y_0) за виглядом рівняння?
5. Що таке поле напрямів, задане диференціальним рівнянням?
6. Що таке ізокліна?
7. Чи може інтегральна крива рівняння першого порядку, розв’язаного відносно похідної, мати злам?
8. Чи можуть інтегральні криві цього рівняння перетинатися між собою; дотикатися одна до одної?

3. Однорідні рівняння

Література: [2], §1, п. 3-5; [3], розд. I, §3.

Диференціальне рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ називається однорідним, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні функції одного й того ж степеня (або ж однорідною степеня нуль є права частина у рівнянні $y'=f(x,y)$).

Функція $f(x,y)$ називається однорідною степеня m (m – будь-яке дійсне число), якщо справедлива тотожність $f(tx,ty)\equiv t^m f(x,y)$ при будь-якому t.

Заміною $y=ux$ (або $x=zy$), $dy=xdu+udx$ (або $dx=zdy+ydz$) однорідне рівняння $y'=f(x,y)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними: $x\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)-u$. Якщо $u=u_0$ є коренем рівняння $\varphi(u)-u=0$, то розв'язком однорідного рівняння буде також $u=u_0$ або $y=u_0x$ (пряма, що проходить через початок координат).

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

►Дане рівняння однорідне (чисельник і знаменник правої частини є однорідними функціями степеня 2). Поклавши $y=ux$, дістанемо:

$x\dfrac{du}{dx}+u=u+u^2e^{-\frac{1}{u}}$, $\dfrac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\dfrac{dx}{x}$, $-e^{\frac{1}{u}}=\ln|x|-C$, $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C$.◄

Практичні завдання

Проінтегрувати дані рівняння:

1. $(x-y)dx+xdy=0$.

2. $(y-x)dx+(y+x)dy=0$.

3. $xy'=y(\ln y-\ln x)$.

4. $x^2dy=(y^2-xy+x^2)dx$.

5. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

6. $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$.

7. $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx-xdy=0$.

8. $(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$.

9. $xy'=y+x\cos^2\dfrac{y}{x}$.

10. $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$.

11. $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx-x^2e^{\frac{x}{y}}dy=0$.

12. $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\Big/\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

13. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$.

14. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

15. $y^2+x^2y'=xyy'$.

Розрахункові завдання

Задача 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$
3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$
4. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$
5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$
6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$
7. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$
8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$
9. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$
10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$
11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$
12. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$
14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$
15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$
16. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$
17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$
18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$
19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$
20. $y' = \frac{3\sqrt{2x^2 + y^2} + y}{x}.$
21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$
22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$
23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$
24. $y' = \frac{4\sqrt{2x^2 + y^2} + y}{x}.$
25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$
26. $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$
27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$
28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$
29. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$
30. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$

Запитання для самоперевірки

1. Яка функція $F(x, y)$ називається однорідною степеня k?
2. Яка функція є однорідною степеня нуль? Наведіть приклади.
3. Яке рівняння називається однорідним?
4. Яка особливість поля напрямів, що задається цим рівнянням?
5. Якою заміною розв’язується однорідне рівняння?
6. Як виразити y' через похідну нової функції?
7. Коли зручніше робити заміну $x = zy$, ніж $y = ux$?
8. Чи можна однорідну функцію нульового степеня вважати функцією відношення аргументів? Чому?
9. Що являють собою ізокліни однорідного рівняння?
10. Яку особливість має розміщення інтегральних кривих однорідного диференціального рівняння?
11. Як і чому застосовують для інтегрування однорідного рівняння першого порядку полярні координати?
12. Нехай $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні не є однорідною, але рівняння розв’язується підстановкою $y = ux$. Коли це можливо?

4. Рівняння, які зводяться до однорідних

Література: [2], §1, п. 3-5; [3], розд. I, §3.

А. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \qquad (1)$$

де a,b,c,a_1,b_1,c_1 – сталі, а $f(u)$ – неперервна функція аргументу u.

Якщо $c=c_1=0$, то рівняння (1) є однорідним і воно інтегрується так, як вказано в попередньому пункті.

Якщо хоча б одне з чисел c, c_1 відмінне від нуля, то розглядаємо два випадки.

1) Детермінант $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$.

Вводячи нові змінні u і v за формулами $x=u+\alpha, y=v+\beta$, де α, β – ще не визначені константи, приведемо рівняння (1) до вигляду $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv+a\alpha+b\beta+c}{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right)$. Вибираючи α і β як розв'язки системи лінійних рівнянь $\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0, \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \end{cases}$ $(\Delta\neq 0)$, одержуємо однорідне рівняння $\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$.

2) Детермінант $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$.

В цьому випадку $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, і, як випливає, рівняння (1) має вигляд $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$. Підстановка $z=ax+by$ приводить його відразу до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

►Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y+4=0. \end{cases}$ Детермінант цієї системи $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$. Система має єдиний розв'язок $x_0=-1, y_0=3$, тому робимо заміну $x=u-1$, $y=v+3$. Тепер наше рівняння набуде вигляду $(u+v)du+(u-v)dv=0$. Це однорідне рівняння, тому, покладаючи $v=ut$, одержуємо $(u+ut)du+(u-ut)(udt+tdu)=0$, звідки

$(1+2t-t^2)du+u(1-t)dt=0$.

Відокремлюємо змінні: $\dfrac{du}{u}+\dfrac{1-t}{1+2t-t^2}dt=0$. Інтегруючи, знайдемо: $\ln|u|+\dfrac{1}{2}\ln\left|1+2t-t^2\right|=\ln|C|$, або $u^2(1+2t-t^2)=C_1$, де $C_1=\pm C^2$. Повертаємось до змінних x, y: $(x+1)^2\left[1+2\dfrac{y-3}{x+1}-\dfrac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right]=C_1$, або $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C_2$ $\quad (C_2=C_1+14)$.◄

Б. Інколи рівняння можна привести до однорідного заміною змінної $y=z^\alpha$. Це має місце в тому випадку, коли в рівнянні всі доданки виявляються однакового виміру (степеня), якщо змінній x приписати вимір 1, змінній y – вимір α і похідній $\dfrac{dy}{dx}$ – вимір $\alpha-1$ (узагальнено однорідне рівняння).

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $ydx+(y^2-2x)dy=0$.

►Спочатку перепишемо це рівняння у вигляді $y+y^2\dfrac{dy}{dx}-2x\dfrac{dy}{dx}=0$. Щоб воно було однорідним, виміри всіх його членів повинні бути однакові, тобто $\alpha=2\alpha+\alpha-1=1+\alpha-1$. Звідси $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Запроваджуємо заміну $y=z^{\frac{1}{2}}$. Тоді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dz}{dx}$, і рівняння набуває вигляду $z^{\frac{1}{2}}dx+\dfrac{1}{2}(z-2x)z^{-\frac{1}{2}}dz=0$ або $2z+(z-2x)\dfrac{dz}{dx}=0$. Це вже однорідне рівняння, і заміна $z=tx$, $\dfrac{dz}{dx}=t+x\dfrac{dt}{dx}$ перетворює його в рівняння з відокремленими змінними: $\dfrac{t-2}{t^2}dt+\dfrac{dx}{x}=0$. Інтегруючи, знаходимо $\ln|t|+\dfrac{2}{t}+\ln|x|=\ln|C_1|$. Повертаючись до початкових змінних, $y^2e^{\frac{2x}{y^2}}=C$.◄

Практичні завдання

Розв'язати рівняння:

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y-1}{x-2y-1}$.

2. $(x-2y+5)dx+(2x-y+4)dy=0$.

3. $(x+y)dx+(x-y-2)dy=0$.

4. $8x+4y+1+(4x+2y+1)\,y'=0$.

5. $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

6. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}$.

7. $y' = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}$.

8. $2xy'(x-y^2) + y^3 = 0$.

9. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$.

10. $y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)dx + 2xdy = 0$.

11. $(x + y^3)dx + 3y^2(y^3 - x)dy = 0$.

12. $xydx + (y^4 - x^2)dy = 0$.

Розрахункові завдання

Задача 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.
2. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$.
3. $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$.
4. $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$.
5. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}$.
6. $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}$.
7. $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$.
8. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.
9. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$.
10. $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}$.
11. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}$.
12. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$.
13. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$.
14. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$.
15. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}$.
16. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$.
17. $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}$.
18. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$.
19. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$.
20. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.
21. $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}$.
22. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$.
23. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}$.
24. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}$.
25. $y' = \frac{x+y-4}{3x+3}$.
26. $y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}$.
27. $y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}$.
28. $y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}$.
29. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}$.
30. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$.

Запитання для самоперевірки

1. Рівняння якого вигляду зводяться до однорідних?
2. Які заміни змінних виконуються в кожному з випадків?
3. Коли заміна $x = u + \alpha, y = v + \beta$ недоречна? Як розв'язують рівняння в таких випадках?
4. Яке рівняння називається узагальнено однорідним?
5. Як обчислюється вимір кожного члена такого диференціального рівняння?
6. З яких міркувань знаходимо величину α для впровадження заміни $y = z^\alpha$?

7. Чому при введенні заміни $x = u + \alpha, y = v + \beta$ говорять про відшукання координат точки перетину прямих $ax + by + c = 0$ і $a_1x + b_1y + c_1 = 0$?
8. Як тлумачать геометрично зведення рівняння до однорідного?
9. Що таке загальний розв'язок у формі Коші?

5. Лінійні рівняння

Література: [2], §1, п. 4; [3], розд. I, §4.

Диференціальне рівняння першого порядку зветься лінійним, якщо шукана функція та її похідна містяться в рівнянні в першому степені (тобто "лінійно") і не перемножаються. Його канонічна форма

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \qquad (1)$$

Існує кілька методів інтегрування цього рівняння.

А. Варіація довільної сталої (метод Лагранжа).

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\frac{dy}{dx}+2xy=2xe^{-x^2}$.

►Беремо відповідне даному рівнянню лінійне однорідне (без правої частини) рівняння $\frac{dy}{dx}+2xy=0$. Змінні в ньому відокремлюються: $\frac{dy}{y}+2xdx=0$. Отже, $\ln|y|+x^2=\ln|C_1|$, $y=Ce^{-x^2}$. Це є загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Розглядаючи в ньому *C* як невідому функцію від *x*, добирають її так, щоб функція $y=C(x)e^{-x^2}$ була розв'язком лінійного неоднорідного (з правою частиною) рівняння. Для цього знаходимо $\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}$ і разом з $y=C(x)e^{-x^2}$ підставляємо у вихідне рівняння: $e^{-x^2}\frac{dC(x)}{dx}-2C(x)e^{-x^2}\cdot x+2C(x)xe^{-x^2}\equiv 2xe^{-x^2}$. Звідси $\frac{dC(x)}{dx}=2x$, $dC(x)=2xdx$, $C(x)=x^2+C_2$.

Таким чином, $y=\left(C_2+x^2\right)e^{-x^2}=C_2e^{-x^2}+x^2e^{-x^2}$ є загальним розв'язком даного рівняння.◄

Б. Рівняння (1) може бути проінтегроване також так: покладемо $y=u(x)\cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – невідомі функції від x, одна з яких може бути вибрана довільно, наприклад, $v(x)$. Тоді (див. приклад 1) $u'v+uv'+2xuv=2xe^{-x^2}$, $u'v+u(v'+2xv)=2xe^{-x^2}$.

Визначаємо $v(x)$ з умови $v'+2xv=0$ (v вибрано довільно!). Маємо: $\frac{dv}{v}+2xdx=0$, $v=e^{-x^2}$ (в якості v можна брати будь-який ненульовий частинний розв'язок).

Тепер, коли $v(x)$ визначено, а $u(v'+2xv)=0$, залишається знайти $u(x)$ з рівняння $u'e^{-x^2}=2xe^{-x^2}$. Відокремлюючи змінні, одержуємо $u=x^2+C$.

Пам'ятаючи, що $y=u\cdot v$, записуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$y = Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}$.

Практичні завдання

Розв’язати дані рівняння. Розв’язати, де це вказано, задачу Коші:

1. $y' + 2y = e^{-x}$.

2. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

3. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

4. $y' - ytgx = \sec x$, $y(0) = 0$.

5. $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

6. $y' + y = \cos x$.

7. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3$, $y(0) = -2$.

8. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.

9. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

10. $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

11. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

12. $x^2dy - 2xydx = 3dx$.

13. $(y^2 - 6x)\,y' + 2y = 0$, $y(0) = -1$.

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^2}$.

15. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$.

Розрахункові завдання

Задача 5. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$.

2. $y' - y\text{ctg}x = 2x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$.

4. $y' + ytgx = \cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$.

6. $y' - \dfrac{1}{x+1} = e^x(x + 1)$, $y(0) = 1$.

7. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

10. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.

12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x$, $y(1) = e$.

13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.

15. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\dfrac{5}{6}$.

16. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

17. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.

18. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

20. $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$.

21. $y' + \frac{xy}{2\left(1-x^2\right)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.

22. $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.

23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x + 1)^2$, $y(0) = 1$.

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$, $y(0) = 1$.

25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.

27. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.

28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

29. $y' - 3x^2y = \frac{x^2\left(1+x^3\right)}{3}$, $y(0) = 0$.

30. $y' - y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$.

Задача 6. Розв’язати задачу Коші.

1. $y^2dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}}\right)dy = 0$, $y(e) = 2$.

2. $\left(y^4e^y + 2x\right)y' = y$, $y(0) = 1$.

3. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$, $y(1) = e$.

4. $2\left(4y^2 + 4y - x\right)y' = 1$, $y(0) = 0$.

5. $\left(\cos 2y\cos^2 y - x\right)y' = \sin y\cos y$,
$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$.

6. $\left(x\cos^2 y - y^2\right)y' = y\cos^2 y$,
$y(\pi) = \frac{\pi}{4}$.

7. $\left(104y^3 - x\right)y' = 4y$, $y(8) = 1$.

8. $dx + \left(xy - y^3\right)dy = 0$, $y(-1) = 0$.

9. $\left(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x\right)y' = y$,
$y(16) = \frac{\pi}{4}$.

10. $8\left(4y^3 + xy - y\right)y' = 1$, $y(0) = 0$.

11. $\left(2\ln y - \ln^2 y\right)dy = ydx - xdy$,
$y(4) = e^2$.

12. $2\left(x + y^4\right)y' = y$, $y(-2) = -1$.

13. $y^3(y - 1)dx + 3xy^2(y - 1)dy = (y+2)dy$,
$y\left(\frac{1}{4}\right) = 2$.

14. $2y^2dx + \left(x + e^{\frac{1}{y}}\right)dy = 0$, $y(e) = 1$.

15. $\left(xy + \sqrt{y}\right)dy + y^2dx = 0$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$.

16. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y +$
$+ 2x)dy$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

17. $\left(y^2 + 2y - x\right)y' = 1$, $y(2) = 0$.

18. $2y\sqrt{y}dx = \left(6x\sqrt{y} + 7\right)dy$, $y(-4)=1$.

19. $dx = \left(\sin y + 3\cos y + 3x\right)dy$,
$y\left(e^{\pi/2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

20. $\left(\cos^2 y\cos 2y - x\right)y' = \sin 2y$,
$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}\pi$.

21. $chydx = \left(1 + xshy\right)dy$, $y(1) = \ln 2$.

22. $\left(13y^3 - x\right)y' = 4y$, $y(5) = 1$.

23. $y^2(y^2+4)dx+2xy(y^2+4)dy=2dy,$ $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=2.$

24. $\left(x+\ln^2 y-\ln y\right)y'=\frac{y}{2}$, $y(2)=1.$

25. $\left(2xy+\sqrt{y}\right)dy+2y^2dx=0,$ $y\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$

26. $ydx+\left(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y\right)dy=$ $=0,\ y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

27. $2\left(y^3-y+xy\right)dy=dx,\ y(-2)=0.$

28. $\left(2y+xtgy-y^2tgy\right)dy=dx,$ $y(0)=\pi.$

29. $4y^2dx+\left(e^{\frac{1}{2y}}+x\right)dy=0,\ y(e)=\frac{1}{2}.$

30. $dx+\left(2x+\sin 2y-2\cos^2 y\right)dy=0,$ $y(-1)=0.$

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку?
2. Чим відрізняються лінійні однорідні рівняння від лінійних неоднорідних?
3. Який вигляд має загальний розв’язок однорідного лінійного рівняння?
4. Як пов’язані загальний розв’язок неоднорідного рівняння із загальним розв'язком відповідного йому однорідного?
5. В чому суть методу варіації сталої?
6. Який ще метод застосовують при розв’язуванні лінійних рівнянь? В чому його суть?
7. Чи вірно, що варіюючи сталу C, вважаючи її залежною від x, одержимо загальний розв’язок рівняння, який міститиме доданок у формі загального розв’язку однорідного рівняння, що матиме вже числову константу C_1?
8. Які властивості лінійного диференціального рівняння першого порядку?
9. Які властивості розв’язків однорідного лінійного рівняння?
10. Чи можна, знаючи один ненульовий частинний розв’язок лінійного однорідного рівняння, побудувати його загальний розв’язок?
11. Якщо диференціальне рівняння не є лінійним по відношенню до y, то чи може воно бути лінійним по відношенню до x? Наведіть приклади.

6. Рівняння, які зводяться до лінійних

Література: [2], §1, п. 4; [3], розд. І, §4.

А. Рівняння Бернуллі.

Рівняння Бернуллі має вигляд $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$, де $n \neq 0;1$ (при $n = 0$ і $n = 1$ це рівняння є лінійним). З допомогою заміни змінної $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння і інтегрується як лінійне.

Приклад 1. Розв'язати рівняння Бернуллі: $3y' + y = \frac{1}{y^2}$.

►Помножимо обидві частини рівняння на y^2: $3y^2y' + y^3 = 1$. Покладемо $y^3 = z$, тоді $3y^2y' = \frac{dz}{dx}$. Після підстановки останнє рівняння перетвориться в лінійне $\frac{dz}{dx} + z = 1$, загальний розв'язок якого $z = 1 + Ce^{-x}$. Звідси одержуємо загальний інтеграл даного рівняння $y^3 = 1 + Ce^{-x}$.◄

Зауваження. Рівняння Бернуллі може бути проінтегроване також методом варіації сталої чи з допомогою підстановки $y(x)=u(x)v(x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння Бернуллі: $xy' + y = y^2 \ln x$.

►Застосуємо метод варіації сталої. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $xy' + y = 0$ має вигляд $y = \frac{C}{x}$. Варіюємо сталу: $C'(x) = C^2(x)\frac{\ln x}{x^2}$. В останньому рівнянні відокремлюємо змінні і інтегруємо: $\frac{1}{C(x)} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$; $C(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}$. Загальний розв'язок вихідного рівняння матиме тепер вигляд $y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$.◄

Б. Деякі нелінійні рівняння першого порядку з допомогою вдало знайденої заміни змінних зводяться до лінійних рівнянь чи рівнянь Бернуллі. Так, домноживши обидві частини рівняння $\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)e^{ny}$ на $-ne^{-ny}$ і поклавши $e^{-ny} = z$, одержимо вже лінійне рівняння відносно z. Маємо: $-ne^{-ny}\frac{dy}{dx} - nP(x)e^{-ny} = -nQ(x)$, $\frac{dz}{dx} - nP(x)z = -nQ(x)$.

До лінійних рівнянь заміною $z = f(y)$ зводяться і рівняння вигляду $f'(y)\dfrac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x)$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$.

►Запишемо дане рівняння у вигляді $y' + 2\sin\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{y}{2} + x\cdot 2\cos^2\dfrac{y}{2} = 0$. Ділячи обидві частини рівняння на $2\cos^2\dfrac{y}{2}$, одержуємо $\dfrac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}} + tg\dfrac{y}{2} + x = 0$.

Заміна $tg\dfrac{y}{2} = z$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}}$ приводить до лінійного рівняння $\dfrac{dz}{dx} + z = -x$, загальний розв’язок якого $z = 1 - x + Ce^{-x}$. Замінюючи *z* його виразом через *y*, матимемо загальний інтеграл даного рівняння $tg\dfrac{y}{2} = 1 - x + Ce^{-x}$.◄

Практичні завдання

а) Розв’язати дані рівняння Бернуллі:

1. $y' + 2xy = 2xy^2$.

2. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$.

3. $\left(x^3 + e^y\right)y' = 3x^2$.

4. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$.

5. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x$.

6. $2y'\ln x + \dfrac{y}{x} = y^{-1}\cos x$.

7. $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x$.

8. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

9. $y' - y\cos x = y^2\cos x$.

б) Звести дані рівняння до лінійних чи рівнянь Бернуллі і розв’язати їх:

10. $y' - tgy = e^x\dfrac{1}{\cos y}$.

11. $y' = y\left(e^x + \ln y\right)$.

12. $y'\cos y + \sin y = x + 1$.

13. $y'y + 1 = (x - 1)e^{\frac{-y^2}{2}}$.

14. $y' + x\sin 2y = 2xe^{-x^2}\cos^2 y$.

Розрахункові завдання

Задача 7. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$.

2. $xy' + y = 2y^2\ln x,\ y(1) = \dfrac{1}{2}$.

3. $2(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 2$.

4. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2,\ y(0) = 1$.

5. $xy' - y = -y^2\left(\ln x + 2\right)\ln x,\ y(1) = 1$.

6. $3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3$.

7. $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$

8. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x),$
$y(0) = 1.$

9. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$

10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$

11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$

13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1},$
$y(0) = 1.$

14. $3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3.$

15. $y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}.$

16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3,$
$y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

17. $y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}.$

18. $xy' + y = y^2\ln x, y(1) = 1.$

19. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1},$
$y(0) = 2.$

20. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1.$

21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3,$
$y(1) = \sqrt{2}.$

22. $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2.$

23. $y' + xy = (x - 1)e^xy^2, y(0) = 1.$

24. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1},$
$y(0) = 1.$

25. $y' - y = xy^2, y(0) = 1.$

26. $2(xy' + y) = y^2\ln x, y(1) = 2.$

27. $y' + y = xy^2, y(0) = 1.$

28. $y' + 2ycthx = y^2chx, y(1) = \frac{1}{sh1}.$

29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^xy^2, y(0) = 2.$

30. $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4\sin x, y(0) = 1.$

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд має рівняння Бернуллі?
2. Як його звести до лінійного?
3. Чи можна проінтегрувати рівняння Бернуллі тими ж методами, за допомогою яких розв’язують лінійні рівняння, не впроваджуючи заміну змінної?
4. При якій умові $y = 0$ буде розв’язком рівняння Бернуллі?
5. Як і які нелінійні диференціальні рівняння вдається зводити до лінійних?
6. В чому суть методу варіації сталої?
7. Які типи рівнянь зводяться до лінійних?

7. Рівняння в повних диференціалах

Література: [1], розд. I, §11; [3], розд. II, §3, п. 1.

Якщо ліва частина рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ є повним диференціалом якоїсь функції $U(x,y)$, тобто $\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy\equiv M(x,y)dx+N(x,y)dy$, то таке рівняння називається рівнянням у повних диференціалах. Воно буде таким тоді і тільки тоді, коли $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Якщо ця умова виконана, залишається лише знайти функцію $U(x,y)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$.

►Маємо $\frac{\partial M}{\partial y}=-6xy$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-6xy$. Отже, згадана вище умова виконана. Функцію $U(x,y)$ шукаємо серед функцій $U(x,y)=\int(x^3-3xy^2)dx+\varphi(y)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція змінної y. Її потрібно дібрати так, щоб виконувалась рівність $\frac{\partial U}{\partial y}=y^3-3x^2y$. Через те, що $U(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)$, матимемо: $-3x^2y+\varphi'(y)\equiv y^3-3x^2y$. Звідси $\varphi'(y)=y^3$, $\varphi(y)=\frac{y^4}{4}+C_1$, і, отже, $U(x,y)\equiv\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+C_1$. Загальний інтеграл рівняння буде $x^4-6x^2y^2+y^4=C$ (адже $dU=0$ за умовою).◄

Практичні завдання

Проінтегрувати рівняння в повних диференціалах:

1. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

2. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$.

3. $\left(3x^2tgy-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$.

4. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$.

5. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

6. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0.$

7. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

8. $\left(xe^y+e^x\right)dy+\left(e^y+ye^x\right)dx=0.$

9. $\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0.$

10. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0.$

11. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0.$

12. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0.$

13. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

14. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0.$

15. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy.$

Розрахункові завдання

Задача 8. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

1. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0.$
2. $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0.$
3. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0.$
4. $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0.$
5. $(y^2+y\sec^2 x)dx+(2xy+tgx)dy=0.$
6. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$
7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$.
8. $\left(\sin 2x-2\cos(x+y)\right)dx-2\cos(x+y)dy=0.$

9. $\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0.$

10. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0.$

11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0.$

12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

13. $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0.$

14. $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0.$

15. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0.$

16. $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0.$

17. $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0.$

18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0.$

19. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0.$

20. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0.$

21. $xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+tg^2y)dy=0.$

22. $(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0.$

23. $\left(\cos(x+y^2)+\sin x\right)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0.$

24. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$

25. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

26. $\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0.$

27. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0.$

28. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0.$

29. $(3x^3+6x^2y+3xy^2)dx+(2x^3+3x^2y)dy=0.$

30. $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0.$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, що рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах.
2. Чому дорівнюють в такому випадку множники $M(x,y)$ та $N(x,y)$ при диференціалах dx та dy відповідно?
3. Чому із однієї умови $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ не можна визначити U?
4. Як використовуємо другу умову, тобто $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$?
5. Який вигляд має загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах?
6. Який зміст виразів $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C$, $\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C$, $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = 0$, $\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = 0$?
7. Якими мають бути x_0 та y_0 в попередніх записах?

8. Рівняння, які зводяться до рівнянь в повних диференціалах

Література: [1], розд. I, §12,13; [3], розд. II, §3.

Коли вираз $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ не є повним диференціалом, то його можна перетворити в такий, помноживши на вдало підібрану функцію $\mu(x,y)$: $dU = \mu Mdx + \mu Ndy$. Така функція μ називається інтегрувальним множником. Із означення інтегрувального множника маємо: $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$ або $N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$. Звідси

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1}$$

А. Якщо $\mu = \mu(x)$, то $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ і рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{2}$$

Для існування інтегрувального множника, який не залежить від y, необхідно і достатньо, щоб права частина (2) була функцією тільки від x. В такому випадку $\ln\mu$ знайдеться квадратурою (інтегруванням).

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

►Тут $M = x + y^2$, $N = -2xy$. Маємо: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$, отже, $\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x}$, $\ln\mu = -2\ln|x|$, $\mu = \frac{1}{x^2}$ (обмежуємося частинним розв'язком). Рівняння $\frac{x + y^2}{x^2}dx - 2\frac{xy}{x^2}dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах. Його ліву частину можна подати у вигляді $\frac{dx}{x} - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0$, звідки $d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$; загальний інтеграл рівняння тепер запишеться так: $x = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.◄

Б. Аналогічно, якщо $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ є функцією лише від y, то інтегрувальним множником вихідного диференціального рівняння буде $\mu = \mu(y)$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння: $2xy\ln y dx + \left(x^2 + y^2 \cdot \sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$.

►Тут $M = 2xy\ln y$, $N = x^2 + y^2 \cdot \sqrt{y^2+1}$. Маємо: $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy\ln y} = -\dfrac{1}{y}$, отже, $\dfrac{d\ln\mu}{dy} = -\dfrac{1}{y}$, $\mu = \dfrac{1}{y}$. Рівняння $\dfrac{2xy\ln y}{y}dx + \dfrac{x^2 + y^2 \cdot \sqrt{y^2+1}}{y}dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах. Його можна записати у вигляді $d(x^2\ln y) + y\cdot\sqrt{y^2+1}\,dy = 0$, звідки $x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$.◄

Практичні завдання

а) Проінтегрувати рівняння:

1. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

2. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

3. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

4. $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

5. $(x^4\ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

6. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos ydy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

7. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$, $\mu = \varphi(y)$.

б) Проінтегрувати рівняння, знаючи що вони мають $\mu = \varphi(x)$ або $\mu = \varphi(y)$:

8. $(x^2y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0$.

9. $y' + ay = e^{mx}$.

10. $\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{x^2}\right)dy = 0$.

11. $(y^2e^x + y)dx - xdy = 0$.

12. $x(3y + 2x)dy + 3(x + y)^2dx = 0$.

Розрахункові завдання

Задача 9. Розв’язати рівняння підбором інтегрувального множника $\mu = \varphi(x)$ або $\mu = \varphi(y)$.

1. $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.
2. $(1 + x^2y)dx + x^2(x + y)dy = 0$.
3. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$.
4. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$.
5. $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0$.
6. $(2xy + ax)dx + dy = 0$.
7. $\left(\dfrac{y}{x} - 3x\right)dx - \left(\dfrac{4y}{x} - 1\right)dy = 0$.
8. $\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)dy = \dfrac{y}{x^3}dx$.

9. $\left(1+\dfrac{3y^2}{x^2}\right)dx=\dfrac{2y}{x}dy$.

10. $e^{y-x}dx+(xe^{y-x}-2ye^{-x})dy=0$.

11. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x^2}$.

12. $(xy^2+y)dx-xdy=0$.

13. $(2xy+y^2)dx+(2x^2+3xy+$
$+4y^2)dy=0$.

14. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$.

15. $dx+(x+e^{-y}y^2)dy=0$.

16. $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$.

17. $(\ln y+x)\,y'=1$.

18. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$.

19. $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}$.

20. $yx^y dx+x^{y+1}\ln xdy=0$.

21. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$.

22. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0$.

23. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0$.

24. $ydx-(4x^2y+x)dy=0$.

25. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$.

26. $x+y-2+(1-x)y'=0$.

27. $x\ln x\dfrac{dy}{dx}-y=x(\ln x-1)$.

28. $(2x-4y^2)dy+ydx=0$.

29. $y'\sin x-y=2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

30. $(y-y^3)dx+(2xy^2-x-y^2)dy=0$.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається інтегрувальним множником?
2. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування інтегрувального множника, залежного від однієї змінної.
3. Як подається повний диференціал функції, яка залежить від двох змінних?
4. Чи можна розв’язувати за допомогою підбору інтегрувального множника рівняння, які розглядалися в попередніх розділах? Наведіть приклади.
5. Чи вірно, що диференціальне рівняння має безліч інтегрувальних множників? Чому?
6. При якій умові існує інтегрувальний множник, залежний від даної функції змінних *x* і *y*?
7. Який вигляд має загальний інтеграл диференціального рівняння в повних диференціалах?

9. Теорема існування і єдиності розв'язку. Особливі точки. Особливі розв'язки

Література: [1], розд. II, §1-3, розд. V, §4, розд. I, §1; [3], розд. III, §1-3, 4, розд. II, §2, 1; [4].

А. Маємо рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2}$$

Теорема Коші (існування і єдиності розв'язку).

Якщо функція $f(x,y)$ на прямокутнику (Δ): $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ задовольняє умови:

1) $f(x,y)$ – неперервна функція на (Δ) (згідно теореми Вейєрштрасса $\exists\, M>0$ $\forall (x,y) \in (\Delta)$ $(|f(x,y)| \le M)$);

2) по y функція $f(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця: $\exists\, L>0$ $\forall (x,y_1)$ $\forall (x,y_2)$ $((x,y_1),(x,y_2) \in (\Delta) \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|)$,

то на $[x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = \min\,(a, b/M, 1/L)$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (1)–(2).

Функція $f(x,y)$ задовольняє умову Ліпшиця, якщо $\frac{\partial f}{\partial y}$ обмежена (чому?).

Приклад 1. Знайти область існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння: $y' = y\sin x + e^x$.

►Права частина рівняння $f(x,y) = y\sin x + e^x$ є неперервною функцією на всій площині XOY, а $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |\sin x| \le 1$, тому в будь-якому прямокутнику площини виконуються умови теореми Коші. Тому через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива розглядуваного рівняння.◄

Метод Пікара доведення цієї теореми (метод послідовних наближень) дає і спосіб побудови розв'язку диференціального рівняння. Спочатку диференціальне рівняння (1) з початковою умовою (2) замінюється рівносильним інтегральним рівнянням $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. Після цього будується послідовність функцій $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, де $y_0(x) = y_0$ і

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \tag{3}$$

при $n \ge 0$, і доводиться, що ця послідовність на $[x_0 - h, x_0 + h]$ рівномірно збігається до розв'язку $y(x)$ даного рівняння. Інших же розв'язків це рівняння не має.

Приклад 2. Знайти перші два наближення до розв'язку диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$, що задовольняє початкову умову $y(1)=0$.

►Рівність (3) для даного рівняння набуває вигляду $y_{n+1}(x)=\int_1^x (t^2 + y^2{}_n(t))dt$. Перепишемо цю рівність, розклавши t^2 по степенях $(t - 1)$: $y_{n+1}(x) = =\int_1^x ((t-1)^2 + 2(t-1)+1+y^2{}_n\ (t))dt$. Оскільки $y_0(t)=0$, то $y_1(x)=\int_1^x ((t-1)^2 + 2(t-1)+1)dt = (x\text{-}1)^3/3 +(x\text{-}1)^2 + (x\text{-}1)$.

Друге наближення: $y_2(x)=\int_1^x ((t-1)^2 + 2(t-1)+1+y_1{}^2(t))dt = (x–1)^3/3 +(x–1)^2 + +(x–1)+\int_1^x ((t-1)^3/3+(t-1)^2 + (t-1))^2 dt=(x–1)^3/3+(x–1)^2+(x–1)+ +\int_1^x ((t-1)^6/9+2(t-1)^5/3+5(t-1)^4/3+2(t-1)^3 + (t-1)^2)dt=2(x–1)^3/3+(x– –1)^2+(x–1) + (x–1)^7/63+(x–1)^6/9+(x–1)^5/3+(x–1)^4/2$.◄

Теорема Коші була доведена спочатку з допомогою степеневих рядів. При цьому на функцію $f(x,y)$ накладалися більш жорсткі умови, зокрема вимагалося, щоб вона в деякому околі точки (x_0, y_0) розкладалася в ряд по степенях $x–x_0$ і $y–y_0$. Це гарантує існування розв'язку також у вигляді збіжного степеневого ряду: $y= y_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$.

Приклад 3. Знайти перші п'ять членів розкладу в ряд по степенях $x–1$ для розв'язку рівняння $y'=x^2+y^2$, що задовольняє початкову умову $y(1)=0$.

►Підставляючи значення $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ в дане рівняння, знаходимо, що $y'(1)=1$. Диференціюючи обидві частини даного рівняння по x і враховуючи, що y – функція від x, одержуємо: $y''= 2x+2yy'$ і, оскільки, $x_0=1$, $y_0=0$, $y'(1)=1$, то $y''(1)=2\cdot1+2\cdot0\cdot1=2$. Потім, диференціюючи знову по x, одержимо, що $y'''=2+2\cdot(y')^2+2y\cdot y''$. Звідси знаходимо, що $y'''(1)=2+2\cdot1^2+2\cdot0\cdot2=4$. Далі одержуємо $y^{(4)}= 6y'y''+2yy'''$, звідки $y^{(4)}(1)=12$. Маємо, таким чином, згідно формули Тейлора розклад розв'язку y по степенях $x–1$:

$$y=(x–1)+(x–1)^2+2(x–1)^3/3+ (x–1)^4/2+\ldots .$$◄

Практичні завдання

1. Знайти значення $y(0,3)$, де y – розв'язок рівняння $y'= x+y^2$, що задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

2. Знайти перші п'ять членів розкладів у степеневий ряд для розв'язків диференціальних рівнянь: **а)** $y'=x+y^2$, $y(0)=1$; **б)** $y'= ye^x$, $y(0)=0,1$.

3. $y'= y^2+xy+x^2$. Знайти методом послідовних наближень друге наближення для розв'язку, що задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

4. $y' = xy^2 - 1$. Знайти при $x=1$ значення того розв'язку даного рівняння, який задовольняє початкову умову $y(0)=0$. Обмежитись третім наближенням. Обчислення вести з двома десятковими знаками.

5. Знайти п'ять перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язків рівнянь при вказаних початкових умовах :

а) $y' = y^3 - x$, $y(0)=1$; **б)** $y' = x^2y^2 - 1$, $y(0)=1$;
в) $y' = x^2 - y^2$, $y(0)=0$; **г)** $y' = (1-x^2)/y + 1$, $y(0)=1$;
д) $y' = xy/(1+x+y)$, $y(0)=0$; **е)** $y' = e^y + xy$, $y(0)=0$;
є) $y' = \sin y - \sin x$, $y(0)=0$.

Б. Якщо не виконуються умови теореми Коші, то диференціальне рівняння може мати або **особливі точки** (якщо функція $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) не має ні скінченної , ні нескінченної границі), або особливі розв'язки на ГМТ , де $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$.

Класифікацію особливих точок проведемо для рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+ky}$, де $a,b,c,k \in R$, $ak - bc \neq 0$, а точка (0,0) особлива.

Якщо розглядати x і y як функції параметра t, то дане рівняння запишеться у вигляді системи: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ax+by, \\ \frac{dx}{dt} = cx+ky. \end{cases}$

Особлива точка (0,0) є стійкою, коли при $t \to \infty$ будь-яка точка на інтегральній кривій прямує до початку координат, і нестійкою – в протилежному випадку.

1. Нехай $(b-c)^2 + 4ak > 0$ і $ak - bc < 0$. Тоді особлива точка буде стійким *вузлом* при $b+c < 0$ і нестійким – при $b+c > 0$.
2. Нехай $(b-c)^2 + 4ak = 0$. Особлива точка буде стійким *виродженим вузлом* при $b+c < 0$ і нестійким – при $b+c > 0$ (вузол вироджений, коли усі інтегральні криві системи входять в цю точку з одним і тим же напрямом).
3. Нехай $(b-c)^2 + 4ak > 0$ і $ak - bc > 0$. У цьому випадку точка (0,0) – *сідло*.
4. Нехай $(b-c)^2 + 4ak < 0$ і $b+c=0$. Тоді маємо *центр*.
5. Нехай $(b-c)^2 + 4ak < 0$ і $b+c \neq 0$, тоді особлива точка (0,0) буде стійким *фокусом* при $b+c < 0$ і нестійким – при $b+c > 0$.

Приклад 4. Дослідити характер особливої точки (0,0) диференціального рівняння: $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$.

►$a=1$; $b=1$; $c=-1$; $k=1$. $(b-c)^2 + 4ak = (1+1)^2 + 4\cdot1\cdot1 = 8 > 0$, $ak - bc = 1\cdot1 - 1\cdot(-1) = 2 > 0$. Отже, точка (0,0) – сідло.◄

Практичні завдання

Дослідити характер особливих точок рівнянь:

6. $y' = -\frac{x}{y}$, $M(0,0)$. **7.** $y' = \frac{y+1}{x+1}$, $M(-1,-1)$. **8.** $y' = \frac{2y}{x}$, $M(0,0)$.

9. $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $M(0,0)$. **10.** $y' = \frac{-y}{x}$, $M(0,0)$. **11.** $y' = \frac{y}{x+y}$, $M(0,0)$.

В. Особливі розв'язки рівняння $y' = f(x,y)$.

Правило для знаходження особливого розв'язку:

1. Знайти ГМТ, на якому $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$. Ця множина точок є крива, задана рівнянням $\varphi(x,y)=0$.
2. Перевірити, чи є знайдене ГМТ розв'язком диференціального рівняння.
3. Перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній точці здобутих таким способом розв'язків.

Якщо умови 1–3 виконуються, то вони є достатніми для того, щоб функція $\varphi(x,y)=0$ була особливим розв'язком рівняння (1).

Приклад 5. Знайти особливі розв'язки рівняння: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$.

►Тут $f(x,y) = \sqrt{y}$ є функція неперервна в будь-якій замкненій області верхньої півплощини, тобто, де $y \geq 0$. Проте, $f_y' = 1/(2\sqrt{y})$ стає необмеженою при $y \to 0$ і $y > 0$. Тому лінія $y=0$ може бути особливим розв'язком диференціального рівняння.

Функція $y=0$ є розв'язком диференціального рівняння (перевіряємо безпосередньою підстановкою у рівняння).

Загальний розв'язок рівняння: $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$, $x \geq -C$, де С – стала. Зрозуміло, що через кожну точку осі OX (розв'язку $y=0$) проходять дві інтегральні криві рівняння, а саме – лінія $y=0$ і крива з сім'ї загального розв'язку (дійсно, єдиність порушується, бо із загального розв'язку отримати розв'язок $y=0$ при числовому значенні сталої C, включаючи її невласні значення $\pm\infty$, не можна).◄

Практичні завдання

Знайти особливі розв'язки (якщо вони існують) даних рівнянь:

12. $y' = \sqrt[3]{y}$. **13.** $y' = \sqrt{y} + 1$. **14.** $y' = 2\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$.

15. $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 1$. **16.** $y' = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{\frac{1}{3}}$. **17.** $y' = y^{\frac{2}{3}} \cdot (y^2 - 1)$.

18. $y'=(\sqrt[5]{y}+\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[15]{y})\cdot\dfrac{5}{8}$.

Г. Особливі розв'язки рівняння *F*(*x, y, y'*)=0 .

а) *Невідомий загальний інтеграл рівняння F*(*x,y, y'*)=0.

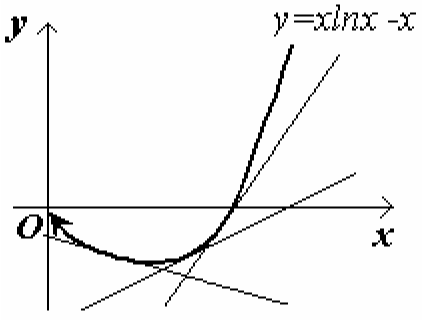
Правило знаходження особливих розв'язків:

1. Утворити систему: $\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ F'_p(x,y,p)=0, p=y'. \end{cases}$ Розв'язок цієї системи $\varphi(x,y)=0$ – *p*-дискримінантна крива.
2. Перевірити, чи буде дискримінантна крива інтегральною кривою рівняння.
3. Перевірити, чи порушується властивість єдиності в кожній із точок цієї інтегральної кривої.

Якщо ці умови виконуються, то розв'язок $\varphi(x,y)=0$ рівняння є особливим.

Приклад 6. Знайти особливий розв'язок рівняння: $y-xy'+e^{y'}=0$.

► $\begin{cases} y-xp+e^p=0, \\ -x+e^p=0. \end{cases}$ Дискримінантна крива: $y=x\ln x-x$. Підстановка в рівняння показує, що це є розв'язок. Загальний же розв'язок цього рівняння $y=Cx-e^C$.



Таким чином, через кожну точку дискримінантної кривої проходить дві інтегральні криві – сама ця крива і крива з сім'ї загального розв'язку.◄

б) *Відомий загальний інтеграл рівняння F*(*x,y, y'*)=0.

Нехай $\Phi(x,y,C)=0$ – загальний інтеграл рівняння $F(x,y,y')=0$.

Обвідною сім'ї кривих називається крива, яка в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих даної сім'ї (звідси слідує: якщо обвідна є інтегральною кривою, то вона є особливим розв'язком).

Правило для знаходження обвідної сім'ї $\Phi(x,y,C)=0$:

1. З системи рівнянь $\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$ знаходимо *C*-дискримінантну криву $\psi(x,y)=0$.
2. З кривої $\psi(x,y)=0$ вилучаємо ті точки, в яких Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють 0. Та частина дискримінантної кривої, що залишилась, і є обвідною сім'ї кривих.

Приклад 7. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння, якщо задано його загальний інтеграл: $y-C^3x^2+2C^2x-C=0$.

►Складемо систему для дискримінантної кривої:

$\begin{cases} y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0, \\ 4Cx - 3C^2x^2 - 1 = 0. \end{cases}$ Маємо звідси дві дискримінантні криві: $y=0$, $y = \dfrac{4}{27x}$.

Оскільки $\Phi'_y=1$, то вздовж цих кривих $\Phi'_y \neq 0$, тому обидві C-дискримінантні криві є особливими розв'язками диференціального рівняння, загальний інтеграл якого задано в умові задачі.◄

Практичні завдання

Знайти особливі розв'язки диференціальних рівнянь, якщо відомі їх загальні інтеграли:

19. $8(y')^3= 27y$; $y^2=(x+C)^3$. **20.** $(y'+1)^3= 27(x+y)^2$; $x+y= (x+C)^3$.

21. $y^2((y')^2+1)= 1$; $(x+C)^2+y^2=1$. **22.** $(y')^2 - 4y^3=0$; $y(x+C)^2=1$.

23. $(y')^2= 4y^3(1 - y)$; $y(1+(x - C)^2)=1$.

Розрахункові завдання

Задача 10. Знайти три перші, відмінні від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє дану початкову умову.

1. $y'=y^2-x$, $y(0)=11$. 2. $y'=y+xe^y$, $y(0)=0$. 3. $y'=2x + \cos y$, $y(0)=0$.
4. $y'=x^2+y^3$, $y(1)=1$. 5. $y'= x+1/y$, $y(0)=1$. 6. $y'= y^2+x^3$, $y(0)=1/2$.
7. $y'=x^2y^2 -1$, $y(0)=1$. 8. $y'=e^y+xy$, $y(0)=0$. 9. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$.
10. $y'=x+e^{cos\,y}$, $y(0)=0$. 11. $y'=x-y^2$, $y(0)=0$. 12. $y'=y^2-3x^2-1$, $y(0)=1$.
13. $y'=y+e^y$, $y(0)=1$. 14. $y'=x^3-y^3$, $y(0)=1$. 15. $y'=2x-\cos y$, $y(0)=0$.
16. $y'=x^2 - y^3$, $y(1)=1$. 17. $y'= y^3-2x^2$, $y(0)=1$. 18. $y'= y - xe^y$, $y(0)=0$.
19. $y'=2x-cos\, y$, $y(0)=0$. 20. $y'= x^2-y^3$, $y(1)=1$ 21. $y'= x-1/y$, $y(0)=1$.
22. $y'= y^2-x^3$, $y(0)=1/2$. 23. $y'= x^3y^2+1$, $y(0)=1$. 24. $y'= e^y-xy$, $y(0)=0$.
25. $y'= x^2-y^2$, $y(0)=1$. 26. $y'= x-e^{\cos y}$, $y(0)=0$. 27. $y'= x+y^2$, $y(0)=0$.
28. $y'=y^2+3x^2-1$, $y(0)=1$. 29. $y'= y-e^y$, $y(0)=1$. 30. $y'= x^3+y^3$, $y(0)=1$.

Задача 11. Дослідити характер особливих точок рівнянь, навести ескіз розміщення інтегральних кривих на площині XOY.

1. $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}$. 2. $y' = \dfrac{x-4y}{2y-3x}$. 3. $y' = \dfrac{y-2x}{y}$. 4. $y' = \dfrac{x+4y}{2x+3y}$.

5. $y' = \dfrac{x-2y}{3x-4y}$. 6. $y' = \dfrac{2x-y}{x-y}$. 7. $y' = \dfrac{y-2x}{2y-3x}$. 8. $y' = \dfrac{4y-2x}{x+y}$.

9. $y' = \dfrac{y}{x}$. 10. $y' = \dfrac{4x-y}{3x-2y}$. 11. $y' = \dfrac{2y-x}{3x+y}$. 12. $y' = \dfrac{2x-y}{3x-4y}$.

13. $y' = \dfrac{x+4y}{2y+3x}$. 14. $y' = \dfrac{y+2x}{y}$. 15. $y' = \dfrac{y-4x}{2x+3y}$. 16. $y' = \dfrac{x+2y}{3x-4y}$.

17. $y'=\dfrac{2x+y}{x-y}$. 18. $y'=\dfrac{y+2x}{2y-3x}$. 19. $y'=\dfrac{4y+2x}{x+y}$. 20. $y'=\dfrac{4x+y}{3x-2y}$.

21. $y'=\dfrac{x-2y}{3x+4y}$. 22. $y'=\dfrac{2x-y}{x+y}$. 23. $y'=\dfrac{y-2x}{2y+3x}$. 24. $y'=\dfrac{4y-2x}{x-y}$.

25. $y'=\dfrac{3x+y}{3x+4y}$. 26. $y'=\dfrac{2x-3y}{2y-3x}$. 27. $y'=\dfrac{3x+4y}{2x-3y}$. 28. $y'=\dfrac{3x-2y}{3x-4y}$.

29. $y'=\dfrac{3x-2y}{x+y}$. 30. $y'=\dfrac{3x-y}{4x-3y}$.

Задача 12. Знайти особливі розв’язки рівнянь, виходячи з їх загальних інтегралів.

1. $y=Ce^x+\dfrac{4}{C}$. 2. $y=\dfrac{4}{(x-C)^2}$. 3. $y=a\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{x+C}{a}\right)$.
4. $y=x^2/2+Cx+C^2$. 5. $C^2x^2-2Cy+4=0$. 6. $(x-C)^2+(y-C)^2=1$.
7. $y^2=x(x-C)^2$. 8. $y=\sin(x+C)$. 9. $y=C(x-C)^2$.
10. $(y-C)^2=(x-C)^3$. 11. $e^x(y-C)=C$. 12. $(x-C)^2+y^2-aC=0$.
13. $y=Cx-\sqrt{1+C^2}$. 14. $y=C(x-2C)^2$. 15. $y=C^3x^2+2C^2x-C$.
16. $y=Cx+C^2+\dfrac{x^2}{2}$. 17. $y(C-x)=x^2$. 18. $y(C-x)=C^2$.
19. $(x-C)^2+y^2=1$. 20. $y=Ce^x+1/C$. 21. $x^2+C(x-3y)+C^2=0$.
22. $y=Cx+\sqrt{a^2C^2+b^2}$. 23. $y=Cx^2-C^2$. 24. $y=C(x-C)^2$.
25. $\mathrm{C}y=(x-C)^2$. 26. $xy=Cy-C^2$. 27. $xC^2-2yC+4x=0$.
28. $xC^2+2\mathrm{C}x-y=0$. 29. $y^2(C-1)=(2-C)^2$. 30. $C^2-Cy+e^x=0$.

Запитання для самоперевірки

1. За якої умови задача Коші для рівняння першого порядку має розв’язок?
2. За якої умови цей розв’язок буде єдиним?
3. Якими властивостями повинна володіти функція $f(x,y)$ в прямокутнику (Δ): $x_0-a\le x\le x_0+a$, $y_0-b\le y\le y_0+b$ для того, щоб через точку $M(x_0,y_0)$ проходила одна і тільки одна інтегральна крива рівняння $y'=f(x,y)$?
4. В чому полягає умова Ліпшиця?
5. Яким рівнянням замінюють диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ і початкову умову $y\big|_{x=x_0}=y_0$ для побудови послідовних наближень розв’язку?
6. Як записується формула для знаходження послідовних наближень (метод Пікара)?
7. Який розв’язок рівняння називається особливим?
8. Як він може бути пов’язаний з формулою загального розв’язку?
9. Як знайти криві, підозрілі на особливі розв’язки, за самим диференціальним рівнянням?
10. В якому випадку можна наперед стверджувати, що дане рівняння не має

особливих розв’язків?

11. Яка крива називається обвідною сім’ї плоских кривих?
12. Чому обвідна сім’ї інтегральних кривих буде особливим розв’язком?
13. Як можна виявити криві, підозрілі на особливі розв’язки, в процесі інтегрування даного диференціального рівняння?
14. З якої системи рівнянь може бути знайдений особливий розв’язок рівняння $F(x,y,y')=0$?
15. Що таке особлива точка диференціального рівняння?
16. Який характер поведінки інтегральних кривих в околі відомих вам особливих точок рівняння з однорідною дробово-лінійною правою частиною?

10. Елементи геометричної теорії диференціальних рівнянь

Література: [1–3].

Розглядатимемо нормальну форму диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, тобто

$$y' = f(x, y). \qquad (1)$$

1) Під областю визначення рівняння (1) будемо розуміти об'єднання областей задання функцій f і $1/f$ (якщо функція $f(x, y)$ не означена в деякій точці (x_0, y_0), але існує її скінченна границя при $x \to x_0, y \to y_0$, то ми доозначуємо функцію $f(x, y)$ в даній точці за неперервністю).

2) Беручи до уваги геометричний зміст похідної, з рівняння (1) одержуємо $tg\alpha = f(x, y)$, і, отже, напрям дотичних до інтегральних кривих задається самим диференціальним рівнянням (поле напрямів). Вивчаючи поле напрямів, одержуємо деяке уявлення про інтегральні криві цього рівняння (наприклад, області зростання і спадання). При цьому особливий інтерес являють ізокліни – лінії, у всіх точках яких напрям поля один і той же.

3) У найпростіших випадках вдається за аналітичним виглядом правої частини рівняння (1) знайти лінії екстремумів і лінії точок перегину (лінії, у всіх точках яких інтегральні криві мають екстремум або перегин). На них відповідно $f(x, y) = 0$, $f'_x + f'_y \cdot f = 0$.

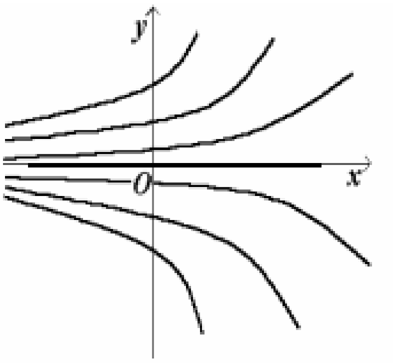
Ізокліни разом з лініями екстремумів і точок перегину дають можливість побудувати схематично графіки інтегральних кривих даного рівняння. Це особливо важливо тоді, коли: 1) рівняння не може бути проінтегроване в квадратурах; 2) інтеграли не подаються через елементарні функції; 3) важко побудувати інтегральні криві за загальним інтегралом рівняння.

Приклад 1. Вивчити поле напрямів, задане диференціальним рівнянням $\frac{dy}{dx} = y$, проінтегрувати його і побудувати сім'ю інтегральних кривих.

►Прямі вигляду $y = k$ – ізокліни. Ізокліна $y = 0$ є інтегральною кривою.

У верхній півплощині ($y' = y > 0$) інтегральні криві зростають, у нижній – спадають. Лінії екстремумів немає ($y' = 0$ при $y = 0$, але $y = 0$ – інтегральна крива, тому порушувалася б єдиність розв'язку).

Досліджуємо напрям увігнутості інтегральних кривих. Диференціюючи обидві частини рівняння, одержуємо $y'' = y'$ (бо $y'' = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot y' = 0 + y' = y'$) або, беручи до уваги вихідне рівняння, $y'' = y$. Звідси ясно, що у верхній півплощині інтегральні криві увігнуті, а у нижній – опуклі. Ліній точок перегину немає.



Інтегруємо рівняння: $\frac{dy}{y} = dx \quad (y = 0\,?)$, $\ln|y| = x + \ln|C_1|$, $|y| = |C_1|e^x$, $y = \pm C_1 e^x$, звідки маємо загальний розв'язок $y = Ce^x \quad (C = \pm C_1)$.

З останньої формули видно, що усі зазначені вище властивості інтегральних кривих мають місце, і інтегральні криві не можуть перетинати вісь *Ox*. Сама вісь *Ox* є розв'язком вихідного рівняння, і причому частинним (чому?). Вона являє собою горизонтальну асимптоту усіх інших інтегральних кривих рівняння.◄

Приклад 2. Дано рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Дослідити його інтегральні криві, не проводячи інтегрування рівняння, а потім проінтегрувати рівняння, знайшовши усі розв'язки. Порівняти їх поведінку з результатами, одержаними після попереднього аналізу.

►Права частина рівняння задана на всій площині (x, y), окрім осі Oy ($x = 0$). В точках осі Oy треба розглядати перевернуте рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$, яке задане скрізь. Таким чином, вихідне рівняння задане на всій площині (x, y).

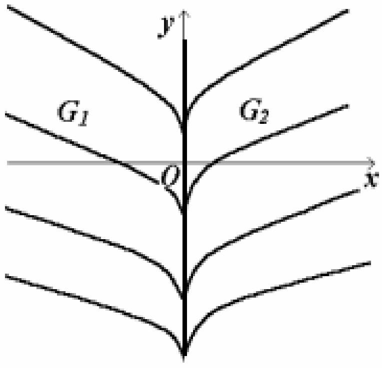
Оскільки права частина рівняння визначена і неперервна при всіх x, які не дорівнюють нулю, то в кожній з областей $G_1: \quad -\infty < x < 0, \quad |y| < +\infty$; $G_2: \quad 0 < x < +\infty, \quad |y| < +\infty$ мають місце існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

В точках осі Oy гарантується лише існування, але не єдиність розв'язку задачі Коші (чому?).

Ізоклінами рівняння є прямі $x = k$, де k − довільне число. При цьому ізокліна $x = 0$ ($y' = \infty$) є розв'язком перевернутого рівняння.

У лівій півплощині усі інтегральні криві спадають, у правій півплощині – зростають (чому?). Ліній екстремумів немає.

Усі інтегральні криві рівняння в кожній із областей їх задання опуклі, бо $y'' < 0$ при $x \neq 0$. Тому ліній точок перегину немає.



Оскільки $y' \to 0$ при $|x| \to +\infty$, то напрям дотичних до інтегральних кривих при $|x| \to +\infty$ наближається до напряму осі абсцис.

Інтегруючи рівняння, одержуємо $y = x^{\frac{2}{3}} + C$. До цього розв'язку (в кожній з областей G_1 і G_2) треба приєднати розв'язок $x = 0$ (особливий) перевернутого рівняння.

Тепер уже з аналітичного вигляду сім’ї інтегральних кривих ясно, що вони симетричні відносно осі Oy і володіють властивістю $y \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$, тобто необмежено зростають при $|x| \to +\infty$.◄

Практичні завдання

Визначити область задання рівняння, область існування розв’язку задачі Коші, область існування і єдиності, вказати особливі точки і особливі лінії; вивчити поле напрямів (знайти ізокліни, побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, визначити напрям поля в точках, які лежать на осях координат, вказати області зростання і спадання розв’язків, знайти лінії екстремумів, встановити напрям увігнутості і знайти лінії точок перегину, зробити малюнок); зробити схематичний ескіз сім’ї інтегральних кривих; проінтегрувати рівняння, знайшовши всі розв’язки; вивчити поведінку інтегральних кривих в околі особливих точок і особливих ліній, на межі області задання рівняння і на нескінченності за аналітичним виглядом сім’ї інтегральних кривих; зробити малюнок:

1. $y' = 0$.
2. $y' = 1$.
3. $y' = -2x$.
4. $y' = -x^2$.
5. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
6. $y' = e^{-x^2}$.
7. $y' = 2\sqrt{y}$.
8. $y' = 1 + y^2$.
9. $y' = \frac{1}{y}$.
10. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.
11. $y' = \frac{y}{2x}$.
12. $y' = \frac{2xy}{1-x^2}$.

Розрахункові завдання

Задача 13. Визначити область задання рівняння, область існування розв’язку задачі Коші, область існування і єдиності, вказати особливі точки і особливі лінії; вивчити поле напрямів (знайти ізокліни, побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, визначити напрям поля в точках, які лежать на осях координат, вказати області зростання і спадання розв’язків, знайти лінії екстремумів, встановити напрям увігнутості і знайти лінії точок перегину, зробити малюнок); зробити схематичний ескіз сім’ї інтегральних кривих; проінтегрувати рівняння, знайшовши всі розв’язки; вивчити поведінку інтегральних кривих в околі особливих точок і особливих ліній, на межі області задання рівняння і на нескінченності за аналітичним виглядом сім’ї інтегральних кривих; зробити малюнок.

1. $y' = a$.
2. $y' = ax$.
3. $y' = ax^2$.
4. $y' = |x|$.
5. $y' = 1/|x|$.
6. $y' = 1/\sqrt{x}$.
7. $y' = |x|/x$.
8. $y' = 2\sqrt{x}$.
9. $y' = 2\sqrt{|x|}$.
10. $y' = x/\sqrt{x^2 - 1}$.
11. $y' = x/\sqrt{1 - x^2}$.
12. $y' = ay$.
13. $y' = ay^2$.
14. $y' = -y^3/2$.
15. $y' = a^2 - y^2$.
16. $y' = y^4$.
17. $y' = |y|$.
18. $y' = |y|/y$.
19. $y' = 1/|y|$.
20. $y' = 2\sqrt{y - 1}$.

21. $y' = -\sqrt{2-y}$. 22. $y' = -3y^{\frac{2}{3}}$. 23. $y' = y/x$. 24. $y' = x/y$.

25. $y' = y\ln y$. 26. $y' = y^{\frac{3}{2}}$. 27. $y' = -\,y/x$. 28. $y' = -x/y$.

29. $y' + 2xy = 1$. 30. $y' = -\,2y/x$.

Запитання для самоперевірки

1. Як знаходять область задання диференціального рівняння першого порядку, розв’язаного відносно похідної?
2. Чому при аналізі розв’язків доводиться інколи розглядати перевернуте рівняння?
3. Що таке поле напрямів?
4. Що таке ізокліна?
5. Яка особливість нульової ізокліни?
6. Що таке лінія екстремумів?
7. Що таке лінія точок перегину?
8. На якому етапі якісного дослідження диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ використовують вираз $f'_x + f'_y \cdot f$, і що він собою являє?
9. Чому рівняння ліній екстремумів і ліній точок перегину слід перевіряти на предмет належності до інтегральних кривих?
10. Як визначити, чи є дана інтегральна крива асимптотою інших, чи має спільні точки з ними?
11. Що означає геометрично той факт, що в якійсь частині площини (x,y) $y' \to \infty$ або $y' \to 0$?
12. Як можна за виглядом рівняння перевірити симетричність інтегральних кривих відносно координатних осей, прямої $y = x$?

11. Рівняння, не розв'язані відносно похідної

Література: [1–3].

А. Якщо рівняння вигляду $F(x,y,y')=0$ можна розв'язати відносно y', то одержиться одне або декілька рівнянь вигляду $y'=f(x,y)$. Треба розв'язати кожне з них. Загальний інтеграл вихідного рівняння виразиться, таким чином, сукупністю інтегралів (через кожну точку області, в якій y' набуває дійсних значень, проходить і відповідна кількість інтегральних ліній).

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $yy'^2+(x-y)y'-x=0$.

►Розв'яжемо це рівняння відносно y': $y'=\dfrac{y-x\pm\sqrt{(x-y)^2+4xy}}{2y}$; $y'=1$, $y'=-\dfrac{x}{y}$, звідки $y=x+C$, $y^2+x^2=C^2$.◄

Б. Рівняння Лагранжа і Клеро.

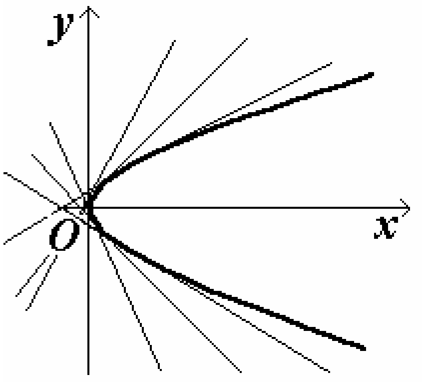
Рівняння Лагранжа має вигляд $y=x\varphi(y')+\psi(y')$. Покладаючи $y'=p$, диференціюючи по x, приводимо це рівняння до лінійного відносно x як функції p. Знаходячи розв'язок цього останнього рівняння $x=r(p,C)$, одержуємо загальний розв'язок вихідного рівняння в параметричній формі: $x=r(p,C)$ $\quad y=r(p,C)\varphi(p)+\psi(p)$ ($p-$ параметр).

Крім цього, рівняння Лагранжа може мати ще особливі розв'язки вигляду $y=\varphi(c)x+\psi(c)$, де c – корінь рівняння $c=\varphi(c)$.

Рівняння Клеро має вигляд $y=xy'+\psi(y')$. Метод розв'язання такий же, як і для рівняння Лагранжа. Загальний розв'язок рівняння Клеро має вигляд $y=xC+\psi(C)$ (сім'я прямих).

Особливий розв'язок рівняння Клеро одержується виключенням p з рівнянь $y=xp+\psi(p)$, $x+\psi'(p)=0$ (див. п.9).

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння: $y=xy'+\dfrac{1}{2y'}$.



►Покладаючи $y'=p$, одержуємо $y=xp+\dfrac{1}{2p}$. Диференціюючи останнє рівняння, знайдемо $p'\left(x-\dfrac{1}{2p^2}\right)=0$. Звідси, прирівнюючи до нуля перший множник, маємо $p=C$, і загальний розв'язок вихідного рівняння є $y=Cx+\dfrac{1}{2C}$. Прирівнюючи до нуля другий множник, будемо мати $x = \dfrac{1}{2p^2}$. Виключаючи p з цього рівняння і з рівняння $y = xp + \dfrac{1}{2p}$, одержимо $y^2 = 2x$ − особливий розв'язок (обвідна сім'ї прямих загального розв'язку).◄

В. Якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ може бути приведене до вигляду $y = \varphi(x, y')$ чи $x = \varphi(y, y')$, то в деяких випадках вдається знайти в квадратурах його загальний розв'язок або загальний розв'язок в параметричній формі, використовуючи, так само як і у випадку рівняння Лагранжа, параметричне подання рівняння з послідуючим диференціюванням.

Для інтегрування рівнянь вигляду $F(x, y') = 0$ та $F(y, y') = 0$ у випадку їх нерозв'язності відносно y' і x та y' і y відповідно та можливості параметричного подання $x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ чи $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ використовують при знаходженні загального розв'язку в параметричній формі основне співвідношення $dy = y'dx$.

Рівняння вигляду $F(y') = 0$ має загальний інтеграл $F\left(\dfrac{y - C}{x}\right) = 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$.

►Покладемо $y = \cos^3 t$, $y' = p = \sin^3 t$, $dx = \dfrac{dy}{p} = \dfrac{-3\cos^2 t \sin t dt}{\sin^3 t} = -3\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$. Звідси $x = \int\left(3 - \dfrac{3}{\sin^2 t}\right)dt = 3t + 3ctgt + C$; загальний розв'язок $x = 3t + 3ctgt + C$, $y = \cos^3 t$.◄

Практичні завдання

Проінтегрувати дані рівняння:

1. $y = 2xy' + \ln y'$.
2. $y = x(1 + y') + y'^2$.
3. $y = 2xy' + \sin y'$.
4. $y = xy'^2 - 1/y'$.
5. $x = \ln y' + \sin y'$.
6. $y = xy' + a/y'^2$.
7. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.
8. $y = xy' + y'^2$.
9. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.
10. $x = y/y' + 1/y'^2$.
11. $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$.
12. $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$.

Розрахункові завдання

Задача 14. Знайти особливі і загальні розв'язки рівнянь.

1. $y^2(y'-1) = (2-y')^2$.
2. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.
3. $4y'^2 - 9x = 0$.
4. $4y'^2(x-2) = 1$.
5. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$.
6. $y'^2 + 2xy' - y = 0$.
7. $x\,y'^2 - 2xy' + 1 = 0$.
8. $4x\,y'^2 + 4yy' - 1 = 0$.
9. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$.

10. $y'^2-2xy'+2x^2-y=0$.
11. $xy'^2-2yy'+4x=0$.
12. $y'^2-4xy'+4x^2-y^2=0$.
13. $y'^2-y^3=0$.
14. $((x-y)^2-1)y'^2-$
$-2y'+(x-y)^2-1=0$.
15. $y'^2-4yy'=0$.
16. $y'^3-2y'^2-4yy'+8y=0$.
17. $y'^2-4xyy'+8y^2=0$.
18. $x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3$.
19. $y'^2+xy=y^2+xy'$.
20. $xy'^2-2yy'+x=0$.
21. $y'^2+x=2y$.
22. $y'^2-2xy'=8x^2$.
23. $xy'(xy'+y)=2y^2$.
24. $xy'^2=y(2y'-1)$.
25. $y'^3+(x+2)e^y=0$.
26. $(xy'+3y)^2=7x$.
27. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$.
28. $y'(2y-y')=y^2\sin^2x$.
29. $y'^2=4y^3(1-y)$.
30. $yy'^3+x=1$.

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має загальне рівняння першого порядку? Коли воно називається рівнянням n-го степеня?
2. Як інтегруються рівняння n-го степеня?
3. Який вигляд має загальний інтеграл рівняння $F(y')=0$?
4. Як інтегрується рівняння, яке не містить шуканої функції?
5. Як інтегрується рівняння, яке не містить незалежної змінної?
6. Який вигляд має рівняння Лагранжа? Як знайти його загальний розв’язок в параметричній формі? Які криві можуть бути його особливими розв’язками?
7. Який вигляд має рівняння Клеро? Чим воно відрізняється від рівняння Лагранжа? Як записати його загальний розв’язок за виглядом рівняння? Як знайти його особливий розв’язок?

12. Диференціальні рівняння сім'ї кривих. Ізогональні траєкторії

Література: [3], розд. III , §5; [4].

А. Нехай дано рівняння однопараметричної сім'ї плоских кривих $y=\varphi(x,C)$ (C – параметр). Диференціюючи його по x, знайдемо $y'=\varphi'_x(x,C)$. Виключаючи параметр C з цих рівнянь, одержуємо диференціальне рівняння $F(x,y,y')=0$, яке виражає властивість, яка є спільною для всіх кривих даної сім'ї. Воно і буде шуканим диференціальним рівнянням досліджуваної сім'ї кривих.

Якщо однопараметрична сім'я кривих визначається рівнянням $\Phi(x,y,C)=0$, то диференціальне рівняння цієї сім'ї одержуємо, виключаючи параметр C з рівнянь $\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0.\end{cases}$

Аналогічно, диференціальне рівняння n-параметричної сім'ї ліній одержуємо n-кратним диференціюванням по x співвідношення $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ з послідуючим виключенням параметрів.

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї гіпербол $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

►Диференціюючи це рівняння по x, матимемо $\dfrac{2x}{a^2}-2yy'=0$, або $\dfrac{x}{a^2}=yy'$. Помножимо обидві частини на x, тоді $\dfrac{x^2}{a^2}=xyy'$. Підставляючи вираз для $\dfrac{x^2}{a^2}$ в рівняння сім'ї, знайдемо її диференціальне рівняння: $xyy'-y^2=1$.◄

Б. Крива, яка утворює в кожній своїй точці постійний кут α з однією із кривих сім'ї $\Phi(x,y,a)=0$, що проходить через цю точку, називається ізогональною траєкторією даної сім'ї; якщо, зокрема, $\alpha=\pi/2$, то – ортогональною траєкторією. Диференціальне рівняння ізогональних траєкторій можна знайти, замінивши в диференціальному рівнянні даної сім'ї (див. А) y' на $\dfrac{y'-tg\alpha}{1+y'tg\alpha}$.

Якщо сім'ю плоских кривих задано рівнянням в полярних координатах $\Phi(\rho,\varphi,a)=0$, то побудувавши її диференціальне рівняння, досить замінити в ньому ρ' на $\dfrac{\rho\rho'+\rho^2tg\alpha}{\rho-\rho'tg\alpha}$, і матимемо диференціальне рівняння ізогональних траєкторій даної сім'ї.

Практичні завдання

а) Скласти диференціальні рівняння таких сімей ліній:

1. $y = a/x$.
2. $x^2 - y^2 = ax$.
3. $y = ae^{\frac{x}{a}}$.
4. $y = Cx - C - C^2$.
5. $y = e^x(ax+b)$.
6. $y^2 = 2Cx + C^2$.
7. $y = ax^2 + bx + c$.
8. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.
9. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.
10. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
11. $y = a\sin(x+a)$.

б) Знайти ортогональні траєкторії для даних сімей кривих:

12. $x^2 + y^2 = 2ay$.
13. $y^2 + 2ax = 0, \quad a > 0$.
14. $x^2 - y^2 = a^2$.
15. $x^2 + y^2/2 = a^2$.
16. $\rho = a(1+\cos\varphi)$.
17. $\rho^2 = a\cos 2\varphi$.
18. $\cos y = ae^{-x}$.
19. $y = ax^n$, a–параметр.
20. $y = ae^{\sigma x}$, $\sigma = const$.

Розрахункові завдання

Задача 15. Скласти диференціальні рівняння даних сімей кривих.

1. $(x+1)y = x^2 + x\ln Cx$.
2. $x = Cy + \ln^2 y$.
3. $y = Cx^2 e^{-\frac{3}{x}}$.
4. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$.
5. $x + y = tg(y - C)$.
6. $x^3 y^2 + 7x = C$.
7. $4x + y - 3 = 2tg(2x + C)$.
8. $-e^{-y} = \ln C(x-2)$.
9. $3xy = C - 4x^{3/2}$.
10. $x^2\sin^2 y = 2\sin^3 y + C$.
11. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.
12. $e^y = x^2\ln Cx$.
13. $x^2(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2}) = C$.
14. $y = x(Ce^{-x} - 1)$.
15. $y^2 = (x^2 + C)e^{2x}$.
16. $x(y^2 - 1)^2 = y^3 - 3y + C$.
17. $y = C\cos x + \sin x$.
18. $4Cxy = C^2 x^4 - 1$.
19. $3y^2 = 2\sin x + C\sin^{-2} x$.
20. $y^3 = (C - x^3)\sin^3 x$.
21. $y(xy - 1) = Cx$.
22. $x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$.
23. $y^2 + \sqrt{x^4 + y^2} = C$.
24. $xy(\ln^2 x + C) = 1$.
25. $(2x + 3y - 7)^2 = Ce^{x+2y}$.
26. $y^2 = C\ln^2 x + 2\ln x$.
27. $xe^y = e^x + C$.
28. $\ln(x^2 + y^2) + arctg\frac{y}{x} = C$.
29. $\sin(y - 2x) - 2\cos(y - 2x) = Ce^{x+2y}$.
30. $\sin\frac{y}{x} = -\ln Cx$.

Задача 16. Знайти ортогональні траєкторії сімей ліній.

1. $xy = a$.
2. $x^2 + y^2 = a$.
3. $y = ax^2$.
4. $x^2/a + y^2/4 = 1$.
5. $y^2 = 2p(x + p/2)$.
6. $(2a - x)y^2 = x^3$.
7. $(a - x)^2 + y^2 = 4$.
8. $y^2 + x^2 = 2ax$.
9. $(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
10. $x^2 - y^2 = a$.
11. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.
12. $x(y^2 + x^2) = a(x^2 - y^2)$.
13. $(y^2 + x^2)^2 = a^2 xy$.
14. $\rho^2 = \ln tg\varphi + C$.
15. $y^2 = 2p(x - a)$.
16. $y = kx$.
17. $x^k + y^k = a^k$.
18. $x^2 - y^2/3 = a^2$.

19. $y^2 = 4(x-a)$. 20. $y^3 + x^3 = 2Cx$. 21. $y = 2 - kx$.

Знайти ізогональні траєкторії сімей ліній ($\alpha = 45^\circ$).

22. $x - y = x^3 + a^2$. 23. $xy = a$. 24. $y^2 + x^2 = 2ax$.

25. $y^2 = 4ax$. 26. $y = ax$. 27. $x^2 + y^2 = a^2$.

Знайти ізогональні траєкторії сімей ліній (кут перетину α).

28. $\rho^2 = a^2 / \cos 2\varphi$. 29. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. 30. $\rho = a\cos\varphi$.

Запитання для самоперевірки

1. Чим відрізняються співвідношення, якими подаються одно-, дво- і *n*-параметричні сім'ї кривих?
2. Як скласти диференціальне рівняння такої сім'ї, якщо вона однопараметрична? *n*-параметрична?
3. Як довести, що $\dfrac{d\Phi(x,y)}{dx} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} y'$?
4. До якої задачі є оберненою задача по відшуканню диференціального рівняння сім'ї кривих ?
5. Чим відрізняється процедура складання диференціальних рівнянь сім'ї кривих у випадку задання її у вигляді $y = \varphi(x, a)$ та $\Phi(x, y, a) = 0$?
6. Що таке ізогональна (ортогональна) траєкторія сім'ї кривих?
7. Як одержати диференціальне рівняння ізогональних (ортогональних) траєкторій даної однопараметричної сім'ї кривих за диференціальним рівнянням цієї сім'ї у випадку декартових і у випадку полярних координат?

13. Геометричні задачі

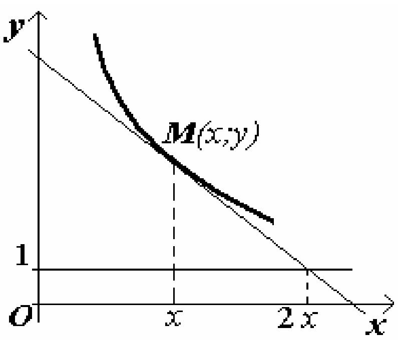
Література: [даний посібник].

Щоб розв'язати геометричну задачу, яка приводить до диференціального рівняння, треба:

1) побудувати малюнок; 2) позначити шукану криву через $y = f(x)$ (якщо задача розв'язується в прямокутних координатах), розмежувати умови, які мають місце в довільній точці кривої, та ті, які виконуються для окремих точок (початкові умови); 3) виразити всі згадувані в задачі величини через x, y і y' . Тепер для задачі можна буде побудувати її модель – диференціальне рівняння , з якого треба знайти невідому функцію $y = f(x)$; 4) знайти загальний розв'язок чи інтеграл одержаного рівняння і вилучити з нього за допомогою початкових умов рівняння шуканої кривої.

А. Задачі на знаходження кривих за властивостями дотичних і нормалей до них.

Приклад 1. Крива $y=f(x)$ проходить через точку (1;2). Кожна дотична до неї перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву.



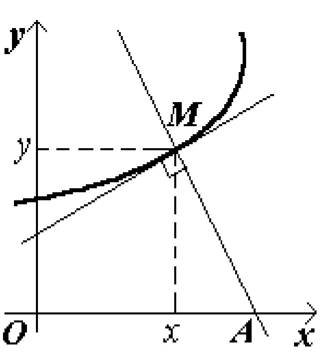
►Нехай $M(x;y)$ – довільна точка на даній кривій (див. мал.). Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці M , буде таким: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, де X, Y – координати довільної точки прямої.

З тієї умови, що дотична перетинає $y=1$ в точці з абсцисою $2x$, одержимо диференціальне рівняння $1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x)$; $x\frac{dy}{dx} = 1 - y$. Відокремивши змінні і проінтегрувавши це рівняння, знаходимо: $y - 1 = \frac{C}{x}$.

Крива проходить через точку (1;2), тому $C = 1$. Отже, $y = 1 + \frac{1}{x}$ – шукана крива.◄

Приклад 2. Знайти криві, в яких нормаль стала (дорівнює a). Визначити з них ту криву, що проходить через точку $M_0(0;1)$.

►Рівняння нормалі в точці M $(x;y)$ (див. мал.) $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$. При $Y=0$: $-y = -\frac{1}{y'}(X_A - x)$ або $yy' = X_A - x$. Довжина відрізка MA нормалі:

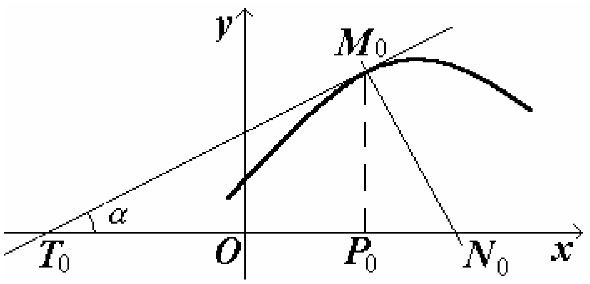


$MA^2=(X_A-x)^2+y^2$, і, згідно з умовою, $a^2=(X_A-x)^2+y^2$. Тоді $\sqrt{a^2-y^2}=\pm y'y$; $y'=\pm\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$; $\pm\dfrac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx$; $\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C$.

З початкової умови (x=0 при y=1) маємо $C=\mp\sqrt{a^2-1}$, а рівняння шуканої кривої : $(x\pm\sqrt{a^2-1})^2+y^2=a^2$.◄

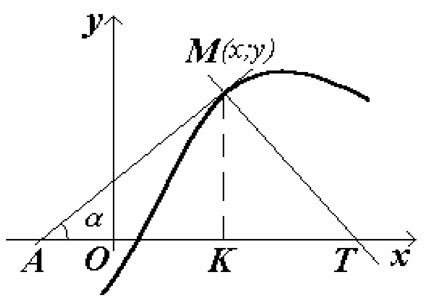
Б. Задачі на піддотичні і піднормалі.

Піддотичною (піднормаллю) кривої в її точці M_0 (див. мал.) називається проекція T_0P_0 (N_0P_0) на вісь Ox напрямленого відрізка $T_0M_0(N_0M_0)$ дотичної (нормалі) до цієї кривої в точці M_0.



Приклад 3. Знайти лінію, для якої сума нормалі і піднормалі пропорційна абсцисі точки дотику.

►Піднормаль $TK=-yy'$. Зрозуміло, що $MT=\sqrt{KM^2+KT^2}=$ $=\sqrt{y^2+(yy')^2}=|y|\sqrt{1+(y')^2}$.



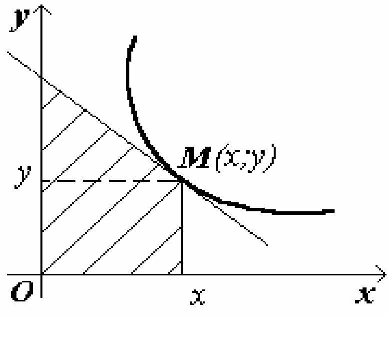
Отже, виходячи з умови задачі, маємо диференціальне рівняння $|y|\sqrt{1+(y')^2}-yy'=kx$, або після розв'язання відносно похідної − однорідне рівняння $y'=\dfrac{y^2-k^2x^2}{2kxy}$.

$y=Ux, y'=U'x+U.$ $U'x+U=\dfrac{U^2x^2-k^2x^2}{2kxUx}$, $U'x+U=\dfrac{U^2-k^2}{2kU}$, $U'x=\dfrac{U^2-k^2-2kU^2}{2kU}$, $\dfrac{2kU}{(1-2k)U^2-k^2}dU=\dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи та повертаючись до початкових змінних, одержимо рівняння шуканої кривої $y^2=Cx^{\frac{1}{k}}+\dfrac{k^2x^2}{1-2k}$.◄

В. Задачі на площі фігур та довжини дуг кривих.

Приклад 4. Площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою біжучої точки M кривої і дотичною до кривої в цій точці, є стала величина a^2. Знайти криву.

►Відрізок, що відтинає дотична на осі Oy, дорівнює $|y-xy'|$. Площа трапеції, зображеної



на малюнку, $\frac{y - xy' + y}{2} x = a^2$. Звідси маємо диференціальне рівняння: $y'x^2 - 2xy + 2a^2 = 0$. Це лінійне рівняння. Його загальний розв’язок $y = Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}$ ($C-$ довільна стала).◄

Якщо за умовою задачі до розгляду треба ввести площу криволінійної трапеції, обмеженої змінною дугою шуканої кривої, чи довжину цієї дуги, то користуються їх поданням через визначений інтеграл із змінною верхньою межею: $\int_{x_0}^{x} |y| dx$ і $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2} dx$ відповідно (в декартових координатах). Тоді до диференціального рівняння переходять після диференціювання співвідношення, що відповідає умові.

Практичні завдання

1. Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці в m разів більший за кутовий коефіцієнт прямої, що сполучає цю точку з початком координат.

2. Знайти криву, всі нормалі якої проходять через точку (2;-3).

3. Знайти криву, яка має таку властивість: величина перпендикуляра, опущеного з початку координат на дотичну, дорівнює абсцисі точки дотику.

4. Знайти криву, для якої має місце така властивість: довільна дотична перетинається з віссю ординат у точці, яка однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

5. Знайти всі криві, для яких піддотична дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

6. Нормаль MQ перетинає вісь Ox в точці Q. Довести, що коли абсциса точки Q вдвічі більша за абсцису точки M, то крива – рівнобічна гіпербола.

7. Знайти лінії, в яких піднормаль в будь-якій точці так відноситься до суми абсциси і ординати, як ордината цієї точки до її абсциси.

8. Знайти криві, в яких нормаль співпадає з радіус-вектором точки дотику.

9. Знайти криву, якщо трикутник, утворений нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною і нормаллю.

10. Знайти криві, які мають таку властивість: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, паралельні осям координат, до перетину з цими осями, то площа одержаного прямокутника поділиться кривою у відношенні 1:2.

Розрахункові завдання

Задача 17. Розв'язати геометричні задачі за допомогою диференціальних рівнянь.

I. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0 і має таку властивість: у довільній точці M нормальний вектор $\overrightarrow{MN}$ завдовжки a з кінцем N на осі Oy утворює гострий кут з додатнім напрямом цієї осі.

1. $M_0(15;1)$, $a = 25$. 2. $M_0(12;1)$, $a = 20$. 3. $M_0(9;3)$, $a = 15$.

4. $M_0(3;5)$, $a = 5$. 5. $M_0(6;4)$, $a = 10$.

II. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0, а відрізок її нормалі між осями координат ділиться точкою лінії у відношенні $a:b$.

6. $M_0(1;1)$, $a:b=1:2$. 7. $M_0(-2;3)$, $a:b=1:3$. 8. $M_0(0;1)$, $a:b = 2:3$.

9. $M_0(1;0)$, $a:b = 3: 2$. 10. $M_0(2;-1)$, $a:b = 3:1$.

III. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0, якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю Ox у відношенні $a:b$ (від осі Oy).

11. $M_0(2;-1)$, $a:b = 1:1$. 12. $M_0(1;2)$, $a:b = 2:1$. 13. $M_0(1;-1)$, $a:b = 3:1$.

14. $M_0(2;1)$, $a:b = 1: 2$. 15. $M_0(1;-1)$, $a:b = 1: 3$.

IV. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0, якщо відрізок її дотичної між осями координат ділиться в точці дотику у відношенні $a:b$ (від осі Oy).

16. $M_0(1;2)$, $a:b = 1:1$. 17. $M_0(2;1)$, $a:b = 1:2$. 18. $M_0(1;3)$, $a:b = 2:1$.

19. $M_0(2;-3)$, $a:b = 3:1$. 20. $M_0(3;-1)$, $a:b = 3:2$.

V. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0 і має таку властивість: у довільній її точці M проекція на вісь Ox дотичного вектора $\overrightarrow{MN}$ з кінцем на осі Ox обернено пропорційна абсцисі точки M. Коефіцієнт пропорційності a.

21. $M_0(1; e)$, $a = -1/2$. 22. $M_0(2; 1/e)$, $a = -2$. 23. $M_0(-1; \sqrt{e})$, $a = -1$.

24. $M_0(2; 1/e)$, $a = 2$. 25. $M_0(1; 1/e^2)$, $a = 1/4$.

VI. Знайти лінію, яка проходить через точку M_0 і має ту властивість, що в довільній її точці M проекція на вісь Oy дотичного ветора $\overrightarrow{MN}$ з кінцем N на осі Oy дорівнює a.

26. $M_0(1;2)$, $a = -1$. 27. $M_0(1;4)$, $a = 2$. 28. $M_0(1;5)$, $a = -2$.

29. $M_0(1;3)$, $a = -4$. 30. $M_0(1;6)$, $a = 3$.

Задача 18. Розв'язати геометричні задачі за допомогою диференціальних рівнянь.

1. Знайти криві, для яких проекція на вісь абсцис відрізка дотичної, що міститься між точкою дотику і віссю абсцис, дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику.

2. Знайти криві, для яких відношення відрізка осі абсцис, що відтинається перпендикуляром до дотичної, проведеним у точку дотику, до радіус-вектора точки дотику є величина стала, яка дорівнює k.
3. Знайти криві, в яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, яка вдвоє менша від абсциси точки дотику.
4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M(1;1)$ і має таку властивість: відстань від початку координат до будь-якої її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.
5. Знайти криву, яка проходить через точку A з координатами (2;4), знаючи, що абсциса точки перетину дотичної в довільній точці кривої з віссю Ox дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.
6. Знайти криву, знаючи, що ордината точки перетину нормалі в довільній точці з віссю ординат дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.
7. Знайти криві, для яких відрізок нормалі дорівнює відстані точки дотику від початку координат.
8. Знайти криві, відрізок дотичної до яких між осями координат поділяється точкою дотику пополам.
9. Знайти криві, нормалі до яких проходять через початок координат.
10. Знайти криву, в якої довжина нормалі пропорційна квадрату ординати точки дотику.
11. Знайти криві, в яких піддотична пропорційна абсцисі точки дотику.
12. Знайти криву, в якої сума довжин дотичної і піддотичної в будь-якій точці пропорційна добутку координат точки дотику.
13. Знайти криву, якщо піднормаль для будь-якої точки кривої є середнім арифметичним координат точки дотику.
14. Знайти криву, якщо піддотична для будь-якої точки кривої є середнім арифметичним координат точки дотику.
15. Знайти всі криві, для яких піддотична є сталою величиною.
16. Знайти криву, в якої піднормаль дорівнює різниці радіус-вектора і абсциси точки дотику.
17. Знайдіть лінію, дотичні до якої відтинають на осях координат відрізки, сума яких дорівнює $2a$.
18. Знайти криву, в кожній точці якої піднормаль є середнім арифметичним квадратів координат цієї точки.
19. Знайти криву, яка проходить через точку (1;2), якщо її піддотична вдвічі більша від абсциси точки дотику.
20. Знайти криві, в яких піднормаль є сталою величиною. Вилучити з них ту криву, яка проходить через точку (0;1).
21. Площа, обмежена кривою, віссю Ox та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати. Знайти ту з інтегральних кривих, яка проходить через початок координат.
22. Знайти криву, для якої площа Q фігури, обмеженої кривою, віссю Ox і двома абсцисами x=0 і $x=a$ є даною функцією від $y : Q = a^2 \ln \frac{y}{a}$.

23. Знайти криву, яка проходить через точки $O(0;0)$, $A(1;1)$ і обмежує криволінійну трапецію з основою $[0;x]$, площа якої пропорційна y^4.
24. Визначити криві, для яких площа прямокутника, побудованого на відрізках, які відтинаються дотичною в довільній точці кривої на осях координат, у 4 рази більша площі прямокутника, побудованого на відрізках перпендикулярів, опущених з даної точки кривої на осі координат.
25. Знайти криву $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0, f(0)=0$), яка обмежує криволінійну трапецію з основою $[0;x]$, площа якої пропорційна $(n+1)$-му степеню $f(x)$. Відомо, що $f(1)=1$.
26. Знайти криву, для якої трикутник, утворений нормаллю з осями координат, був би рівновеликий трикутнику, утвореному з віссю Ox дотичною і нормаллю.
27. Знайти криву, для якої сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є величиною сталою, яка дорівнює b.
28. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є величиною сталою, яка дорівнює a^2.
29. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною і радіус-вектором точки дотику, стала і дорівнює a^2.
30. Знайти криву, для якої площа фігури між кривою, віссю абсцис та ординатою, пропорційна довжині дуги цієї кривої.

Запитання для самоперевірки

1. Який геометричний зміст похідної? Як обчислити кутові коефіцієнти дотичної і нормалі до графіка функції $y=f(x)$ у даній точці?
2. Як знайти довжини відрізків, що відтинаються дотичною на координатних осях ?
3. Як знайти довжини відрізків, що відтинаються нормаллю на координатних осях?
4. Як знайти довжини відрізків дотичної і нормалі між точкою дотику і віссю абсцис?
5. Як знайти відстань від початку координат до дотичної і нормалі?
6. Що таке піддотична? Що таке піднормаль? Як їх знайти?
7. Як обчислюється площа фігури, обмеженої даною кривою, довжина дуги даної кривої (різні способи задання кривої)?

14. Фізичні задачі

Література: [даний посібник].

Щоб розв’язати фізичну задачу за допомогою диференціального рівняння, необхідно поетапно реалізувати таку схему:

1. *Підготовчий етап*:
   a) встановити величини, які змінюються в даному процесі, та відшукати фізичні закони, що пов’язують їх;
   b) вибрати незалежну змінну та її функцію, яку треба буде знайти;
   c) виходячи з умови задачі, визначити початкові і (або) крайові умови.

2. *Формалізація задачі.*

Використовуючи ідею лінеарізації – заміни розглядуваних функцій на малих проміжках зміни аргументу лінійними функціями і вважаючи швидкість зміни величин, які описують процес, постійною:

a) одержати наближену рівність, поділити на приріст аргументу і перейти до границі ;
b) або ж скласти диференціальне рівняння відразу в диференціальній формі, замінюючи приріст аргументу на його диференціал, а приріст функції − диференціалом функції.

3. *Розв’язування математичної задачі всередині побудованої моделі.*

Знайти загальний розв’язок або загальний інтеграл диференціального рівняння і за початковими (крайовими) умовами вилучити з нього частинний.

4. *Інтерпретація результату.*

Дослідити одержаний розв’язок, тобто:

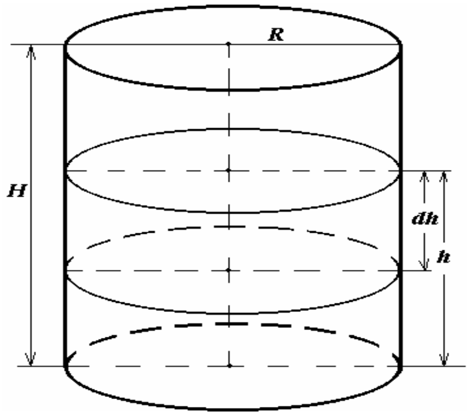
a) перевірити розмірність;
b) вибрати оптимальний результат для циклу подібних задач.

Приклад 1. У дні циліндричного резервуара висотою H і радіусом основи R, наповненого водою, зроблено невеликий круглий отвір площею S (див. мал.). Знайти закон зміни рівня води h в резервуарі в залежності від часу та час, за який витече вся вода. Коефіцієнт витікання k.

►1. Нехай t – незалежна змінна, $h(t)$ – залежна змінна, функція від часу, яку і треба знайти. Початкові умови: при $t=0$ $h(t)=H$. Швидкість витікання води з отвору обчислюється за законом Торрічеллі: $v = k\sqrt{2gh}$, де $g = 9{,}8$ м/c^2 – прискорення вільного падіння.

2. а) $v(t) = k\sqrt{2gh(t)}$.

$$v(t+\Delta t) = k\sqrt{2gh(t+\Delta t)} = k\sqrt{2g(h(t)+\Delta h)} =$$



$= k\sqrt{2gh(t)\left(1+\dfrac{\Delta h}{h(t)}\right)}$, тобто $v(t+\Delta t) = k\sqrt{2gh(t)}\cdot\sqrt{1+\dfrac{\Delta h}{h(t)}}$ (тут $\Delta h < 0$).

$$v_{сер} = \frac{v(t)+v(t+\Delta t)}{2} = k\sqrt{2gh(t)} + o\left(k\sqrt{2gh(t)}\right) = k\sqrt{2gh(t)} + \alpha\text{, де } \lim_{\Delta t\to 0}\alpha = 0.$$

Прирівняємо величини звільненого об'єму в резервуарі і об'єму води, що вилилась в циліндричну трубку через отвір: $-\pi R^2\Delta h = (k\sqrt{2gh(t)}+\alpha)S\Delta t$. Ділимо на Δt і переходимо до границі, коли $\Delta t \to 0$; маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $-\pi R^2\dfrac{dh}{dt} = k\sqrt{2gh}S$.

b) Зробимо "миттєвий знімок" процесу витікання води протягом нескінченно малого проміжка часу *dt*, якому відповідає нескінченно мала зміна висоти рівня води *dh*. Прирівнюючи, як і в попередньому випадку, два вирази для одного і того ж об'єму, зразу одержимо диференціальне рівняння в диференціальній формі $-\pi R^2 dh = k\sqrt{2gh}Sdt$.

3. Відокремивши змінні, інтегруємо дане диференціальне рівняння. Маємо: $-\dfrac{dh}{\sqrt{h}} = \dfrac{kS\sqrt{2g}}{\pi R^2}dt$; $-2\sqrt{h} = \dfrac{kS\sqrt{2g}}{\pi R^2}t + C$.

Використовуючи початкові умови, знаходимо сталу інтегрування: $-2\sqrt{H} = C$. Отже , $h = (\sqrt{H} - \dfrac{\sqrt{2g}kS}{2\pi R^2}t)^2$ – закон зміни рівня води.

Час повного витікання знайдемо, поклавши h=0: $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\cdot\dfrac{\pi R^2}{Sk}$.

4. Дослідимо розмірність правої частини рівності для визначення часу: $T = L^2\sqrt{L}/(L^2\sqrt{L/T^2})$.◄

Практичні завдання

1. Використовуючи закон еволюційного зростання (спадання), – швидкість зміни даної величини пропорційна самій величині, розв'язати такі задачі:

а) За 30 днів розпалося 50 % початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1 % радіоактивної речовини від її початкової кількості?

б) Культурі з 100 бактерій дано можливість розмножуватись при сприятливих умовах. Через 12 годин виявилось, що культура містить 500 бактерій. Скільки буде бактерій через 2 доби після початку експерименту?

2. Використовуючи закон Торрічеллі для швидкості витікання води через невеликий отвір, розміщений на глибині *h*, – $v = k\sqrt{2gh}$, де $k = 0{,}6$, $g = 9{,}8$ м/с^2, розв'язати такі задачі:

а) Циліндричний бак поставлено вертикально. Він має невеликий отвір у дні. Половина води з бака витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

б) Порівняти час повного витікання води з горизонтального циліндра та лійкоподібного резервуара через однакові отвори у дні, якщо висоти і об’єми резервуарів однакові.

3. На основі другого закону динаміки Ньютона розв’язати такі задачі:

а) Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу двигун вимкнули, і через 40 с швидкість човна зменшилась до 2 м/с. Вважаючи силу опору, що діє на човен з боку води, пропорційною швидкості руху човна, визначити швидкість човна через 2 хв. після вимикання двигуна.

б) Парашутист стрибнув з висоти 1,5 км, а розкрив парашут на висоті 0,5 км. Який час він падав до розкриття парашута, якщо гранична швидкість в повітрі 50 м/с, а опір повітря пропорційний квадрату швидкості рухомого тіла?

4. а) Вважаючи швидкість охолодження тіла в середовищі пропорційною різниці температур тіла і середовища, розв’язати дану задачу.

Охоронець заповідника виявив тушу убитого дикого кабана. Її огляд показав, що постріл браконьєра був точним і кабана було убито наповал. Для доказу вини затриманого браконьєра треба уточнити час, коли було вбито тварину. Як для цього слід діяти на місці охоронця, якщо в момент виявлення злочину температура туші кабана становила 31 ^{o}C , а через годину після цього – 29 ^{o}C? Нормальна температура тіла живої тварини 37 ^{o}C, а температура повітря того дня становила 21 ^{o}C.

б) На основі закону Фур’є, згідно з яким кількість тепла Q, випромінюваного за одицю часу тілом, що знаходиться в незмінному тепловомі стані, тампература T якого в кожній точці є функцією тільки однієї координати x, знаходиться за формулою $Q=-kF(x)\dfrac{dT}{dx}=const$ (де $F(x)$ – площа перерізу, перпендикулярного напрямку поширення тепла, k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу) , розв’язати дану задачу.

Цегляна стіна ($k=0{,}0015$) має товщину 30 см. Знайти залежність температури як функцію відстані від зовнішнього ($t=0$ ^{o}C) краю стіни, якщо внутрішня поверхня стіни весь час залишається під температурою $t=20$ ^{o}C. Знайти також кількість тепла, яке 1 м^2 віддає зовні протягом доби.

5. Маючи на увазі зв’язок між силою струму i та електрорушійною силою ε в колі, що має опір R і індуктивність L (R і L – постійні), —

$\varepsilon = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, розв’язати такі задачі:

а) На клемах підтримується напруга 300 В, а опір кола становить 150 Ом. Коефіцієнт індуктивності $L=30$ Гн. Який закон зміни сили струму в колі? За який час з моменту замикання кола сила струму становитиме 99 % свого граничного значення?

б) Різниця потенціалів на затискачах котушки рівномірно падає від $\varepsilon_0 = 2$ В до $\varepsilon_1 = 1$ В за 10 с. Яким буде струм в котушці наприкінці десятої секунди, якщо на початку досліду він становив $16\frac{2}{3}$ А? Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт індуктивності 0,1 Гн.

Розрахункові завдання

Задача 19. Розв’язати фізичні задачі за допомогою диференціальних рівнянь.

I. Знайти залежність активності радіоактивної речовини (маса радіоактивних атомів препарату) від часу, якщо відомо, що протягом a діб вона зменшилась в n разів.

1. a=4, n=2. 2. a=8, n=2. 3. a=160, n=5.
4. a=360, n=3/2. 5. a=700, n=4/3.

II. Встановити закон зміни рівня води, що витікає з даного резервуара висотою H і об’ємом V через круглий отвір площею S у його дні. Коефіцієнт витікання дорівнює 0,6. Обчислити час повного витікання.

6. Конічний резервуар вершиною вниз, $H = 1$ м, $V = 1$ м^3, $S = 10^{-4}$ м^2.
7. Конічний резервуар вершиною вгору, $H = 1{,}5$ м, $V = 1{,}9$ м^3, $S = 10^{-5}$ м^2.
8. Горизонтальний циліндричний резервуар, $H = 1$ м, $V = 1{,}9$ м^3, $S = 10^{-5}$ м^2.
9. Горизонтальний півциліндр, $H = 1$ м, $V = 1{,}9$ м^3, $S = 10^{-4}$ м^2.
10. Резервуар – півсфера, $H = 1$ м, $V = 1{,}9$ м^3, $S = 10^{-5}$ м^2.

III. На тіло масою m, яке рухається прямолінійно діють дві сили F_1 і F_2 (F_1 залежить від часу і прикладена до тіла в напрямі руху, F_2 – сила опору середовища, яка залежить від швидкості руху тіла). Знайти залежність швидкості тіла від часу, якщо в момент часу t=0 його швидкість дорівнює v_0. Коефіцієнт пропорційності для F_1 дорівнює k_1, а для F_2 – k_2.

11. $F_1 \sim t, F_2 \sim v$. 12. $F_1 \sim t^2, F_2 \sim v$. 13. $F_1 \sim 1/t, F_2 \sim v$.
14. $F_1 \sim t^3, F_2 \sim v$. 15. $F_1 \sim e^t, F_2 \sim v$. 16. $F_1 \sim e^{-t}, F_2 \sim v$.

IV. Тіло з початковою температурою T_0 поміщають в середовище з початковою температурою T_1 для охолодження. Температура середовища T_c залежить від часу за даним законом. Якою буде залежність $T(t)$ для охолоджуваного тіла?

17. $T_c = const$. 18. $T_c = T_1 - kt$. 19. $T_c = T_1 e^{-kt}$. 20. $T_c = T_1 - kt^2$.

V. Дане тіло, що має коефіцієнт теплопровідності k, знаходиться в стаціонарному тепловому стані, причому температура на внутрішній поверхні постійно дорівнює t_1, а на зовнішній $t_2 (t_2 < t_1)$. Знайти температуру тіла на відстані x від його зовнішньої поверхні та кількість тепла, яку віддає 1 м^2 поверхні тіла за час τ.

21. Куля з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім R_2.

22. Циліндр з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім R_2.

23. Трикутна пластинка товщиною d.

24. Кругла пластинка товщиною d.

25. Еліптична пластинка товщиною d.

VI. На затискачах котушки з опором R і індуктивністю L підтримується напруга U. Встановити закон зміни сили струму в колі. За який час з моменту замикання кола струм у ньому досягне ω % від свого граничного значення?

26. $U = 220$ В, $R = 500$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн, $\omega = 50$ %.

27. $U = 360$ В, $R = 50$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн, $\omega = 80$ %.

28. $U = 380$ В, $R = 100$ Ом, $L = 0{,}01$ Гн, $\omega = 90$ %.

29. $U = 42$ В, $R = 100$ Ом, $L = 0{,}01$ Гн, $\omega = 95$ %.

30. $U = 100$ В, $R = 1$ кОм, $L = 0{,}01$ Гн, $\omega = 99$ %.

Запитання для самоперевірки

1. Як виникають диференціальні рівняння при математичному моделюванні реальних процесів?
2. В чому полягає ідея лінеаризації при складанні диференціальних рівнянь до фізичних задач?
3. Як можна отримати диференціальне рівняння в диференціальній формі?
4. Який механічний зміст похідної?
5. Якою залежністю описується процес еволюційного зростання (спадання) фізичної величини?
6. Якою залежністю описується процес охолодження тіла? Коли треба сипати цукор в чай (відразу, чи перед вживанням), якщо ви зможете його випити тільки згодом і хочете, щоб чай зберіг якнайбільшу температуру?
7. В чому полягає закон Торрічеллі для швидкості витікання рідини з посудини?
8. Рівняння якого типу описує рух тіла під дією пропорційної часу сили у в’язкому середовищі?
9. Чому струм у колі з опором і індуктивністю встановлюється не відразу після замикання кола, а згодом? Як це пояснює загальний розв’язок відповідного диференціального рівняння?

Теми доповідей, рефератів, курсових робіт

1. Однорідні рівняння першого порядку в полярних координатах. [19, 25, 7, 17, 11, 1, 8]
2. Рівняння першого порядку, які зводяться до однорідних. [19, 25, 7, 17, 11, 1, 8]
3. Існування розв'язків диференціального рівняння першого порядку (теореми Арцела і Пеано). [19, 25, 4, 30, 34]
4. Існування і єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку (теорема Осгуда). [22, 13]
5. Диференціальні рівняння першого порядку, які зводяться до лінійних. [19, 25, 13, 7]
6. Інтегруючий множник. Загальна теорія і знаходження інтегруючого множника в окремих випадках. [25, 19, 7, 13, 4]
7. Теорема Коші про неперервну залежність розв'язків диференціального рівняння від параметрів і початкових даних. [22, 34]
8. Теорема Банаха, існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку. [22, 30, 34]
9. Нерівність Гронуолла і її застосування. [4, 9, 13, 31]
10. Класифікація Пуанкаре особливих точок диференціальних рівнянь з однорідною дробово-лінійною частиною. [13, 32, 19, 25, 16]
11. Рівняння Ріккаті. [25, 34, 13]
12. Рівняння Якобі. [25, 13]
13. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку. [25, 19, 13, 30]
14. Задачі на евольвенти. [24, 29 т. I]
15. Диференціальні рівняння в задачах геометрії. [25, 32, 24, 34]
16. Диференціальні рівняння в задачах фізики. [25, 32, 24, 34]
17. Історія виникнення і розвитку диференціальних рівнянь першого порядку. [25, 19]
18. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. [25, 19, 34, 32, 17, 11]
19. Типові диференціальні моделі задач на знаходження плоских кривих у полярній системі координат. [19]
20. Схема дослідження функцій, заданих диференціальним рівнянням першого порядку. [19]
21. Моделювання властивостей функцій диференціальними рівняннями. [19]
22. Особливі точки диференціальних рівнянь першого порядку. [25, 19, 26]

Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи рівнянь

15. Рівняння, що дозволяють знизити їх порядок

Література: [3], розділ IV, §1-4; [1], розділ III, §1, 2.

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ або, якщо воно розв'язане відносно $y^{(n)}$, –

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (1)$$

Задача знаходження розв'язку $y = \phi(x)$ рівняння (1), який задовольняє початковим умовам

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

називається задачею Коші для рівняння (1).

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку (1) називається множина всіх його розв'язків, що визначаються формулою $y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка містить n довільних сталих.

А. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Після n-кратного інтегрування одержуємо загальний розв'язок.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' = \sin x + \cos x$.

►Інтегруючи послідовно дане рівняння, маємо: $y'' = -\cos x + \sin x + C_1$, $y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$, $y = \cos x - \sin x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.◄

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $e^{y''} + y'' = x$.

►Це рівняння вигляду $F(x, y'') = 0$. Тут розв'язання відносно y'' в елементарних функціях неможливе. Введемо параметр $t = y''$ і одержимо параметричне рівняння: $x = e^t + t$, $y'' = t$. Звідси $dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt = (te^t + t)dt$,

$y' = \int (te^t + t)dt = (t-1)e^t + \dfrac{t^2}{2} + C_1$; $dy = y'dx = \int \left[(t-1)e^t + \dfrac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)dt$,

$$y = \int y'dx + C_2 = \int \left\{(t-1)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + t - 1 + C_1\right)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right\}dt + C_2, \qquad \text{або}$$

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1\right)e^t + \frac{t^2}{6} + C_1 t + C_2.$$

Остання формула разом з виразом для x: $x = e^t + t$, дає параметричне подання загального розв'язку даного рівняння.◄

Б. Рівняння вигляду $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}\right) = 0$**.**

У випадку розв'язуваності відносно $y^{(n)}$ вводимо нову функцію $z = y^{(n-1)}$ і приводимо дане рівняння до вигляду $z' = f(z)$.

В протилежному ж випадку маємо вирази для $y^{(n)}$ і $y^{(n-1)}$ через параметр t: $y^{(n)} = \phi(t)$, $y^{(n-1)} = \psi(t)$. Тоді $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, або $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{\psi'(t)dt}{\phi(t)}$, звідки $x = \int \dfrac{\psi'(t)dt}{\phi(t)} + C_1$.

Далі знаходимо послідовно: $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int \dfrac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\phi(t)} + C_2$, $y^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx$, …, $y = \int y'dx + C_n$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' - y''^2 = 0$.

► $y'' = z$, тоді $y''' = \dfrac{dz}{dx}$. Отже, $\dfrac{dz}{dx} = z^2$, $\dfrac{dz}{z^2} = dx$, $-\dfrac{1}{z} = x + C_1$. Але $z = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, тому $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{x + C_1}$, а це вже рівняння типу А.◄

В. Рівняння вигляду $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$**.**

Введення нової змінної $z = y^{(n-2)}$ приводить це рівняння до рівняння другого порядку $F(z'', z) = 0$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння: $a^2y^{IV} = y''$.

►Покладаючи $y'' = z$, приходимо до рівняння $a^2z'' = z$. Помножимо його на $2z'dx$: $2a^2z'z''dx = 2zz'dx$ або $2a^2z'dz' = 2zdz$.

Інтегруючи, знаходимо: $a^2z'^2 = z^2 + C_1$, звідки $\dfrac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = \pm\dfrac{dx}{a}$. Друге інтегрування дає: $\ln\left|z + \sqrt{z^2 + C_1}\right| = \pm\dfrac{x}{a} + \ln|C_2|$, або $z + \sqrt{z^2 + C_1} = C_3e^{\pm\frac{x}{a}}$.

Розв'язуємо останнє рівняння відносно z і, підставляючи замість z y'' та інтегруючи двічі, знаходимо $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}} + Cx + D$.◄

Практичні завдання

Зінтегрувати диференціальні рівняння та відшукати частинні розв'язки там, де задані початкові умови:

1. $y''' = 0$, при $x_0 = 0$ $y_0 = 1$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 2$.

2. $y''=e^x\cos x$, при $x_0=0$ $y_0=0$, $y_0'=1{,}5$.

3. $y''=\sin x/x$. **4.** $y'''-y''^3=0$. **5.** $y''=\sqrt{1+y'}$. **6.** $y''(1+y')e^{y'}=1$.

7. $y'''+y'=0$. **8.** $yy''=1$. **9.** $y''y^3=1$. **10.** $3\sqrt{y}y''=1$.

11. $y''-a\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}=0$. **12.** $y''^2+3y''y'-y'^2=0$.

Г. Рівняння не містить явно шуканої функції і її похідних до $k-1$-го порядку включно:

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0. \qquad (3)$$

Порядок такого рівняння можна знизити на k одиниць заміною $y^{(k)}(x)=p(x)$. Тоді рівняння (3) набуде вигляду $F\left(x,p,p',...,p^{(n-k)}\right)=0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння: $xy^{V}-y^{IV}=0$.

►Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до третього порядку включно. Тому, покладаючи $y^{IV}=p$, одержуємо $x\dfrac{dp}{dx}-p=0$, звідки $p=C_1x$, $y^{IV}=C_1x$.

Послідовно інтегруючи, знайдемо: $y'''=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2$, $y''=C_1\dfrac{x^3}{6}+C_2x+C_3$, $y'=C_1\dfrac{x^4}{24}+C_2\dfrac{x^2}{2}+C_3x+C_4$, $y=C_1\dfrac{x^5}{120}+C_2\dfrac{x^3}{6}+C_3\dfrac{x^2}{2}+C_4x+C_5$, або $y=\overline{C}_1x^5+\overline{C}_2x^3+\overline{C}_3x^2+C_4x+C_5$, де $\overline{C_1}=\dfrac{C_1}{120}$, $\overline{C_2}=\dfrac{C_2}{6}$, $\overline{C_3}=\dfrac{C_3}{2}$.◄

Д. Рівняння не містить явно незалежної змінної:

$$F\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0. \qquad (4)$$

Підстановка $y'=p$ дозволяє знизити порядок рівняння на одиницю. При цьому p розглядається як нова невідома функція від y: $p=p(y)$. Всі похідні y', y'', … , $y^{(n)}$ виражаються через похідні від нової невідомої функції p по y:

$$y'=\frac{dy}{dx}=p, \qquad y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}, \qquad y'''=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ і т. д.}$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $y''+y'^2=2e^{-y}$.

►Рівняння не містить незалежної змінної x. Покладаючи $y'=p,\ y''=p\dfrac{dp}{dy}$, одержуємо рівняння $p\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$. Підстановкою $p^2 = z$ воно зводиться до лінійного рівняння $\dfrac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}$, загальний розв'язок якого $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$.

Замінюючи z на $p^2=(y')^2$, одержуємо $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}$. Відокремлюючи змінні і інтегруючи, будемо мати $x + C_2 = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1}$, звідки $e^y + \overline{C_1} = (x+ +C_2)^2$, де $\overline{C_1} = C_1/4$.◄

Е. **Рівняння** $F(x,y, y',...,y^{(n)})=0$, **однорідне відносно своїх аргументів** $y,\ y',\ y'',..., y^{(n)}$, тобто $F(x, ty, ty',..., ty^{(n)})= t^kF(x, y, y',..., y^{(n)})$.

Порядок такого рівняння може бути знижений на одиницю підстановкою $y = e^{\int zdx}$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція від x.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

►Рівняння – однорідне другого степеня відносно $y,\ y',\ y''$. Підстановка $y = e^{\int zdx}$ дає рівняння $x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$, або $x^2z' + 2xz - 1= 0$ – лінійне рівняння першого порядку (враховано, що $y' = \left(e^{\int zdx}\right)' = e^{\int zdx}\cdot z$, $y'' = (y')' = \left(e^{\int zdx}\cdot z\right)' = z^2e^{\int zdx} + e^{\int zdx}\cdot z' = e^{\int zdx}(z^2 + z')$). Розв'язуємо його: $z = \dfrac{C_1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$. Звідси $y = e^{\int\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx + \overline{C_2}}$, або $y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$.◄

Є. Рівняння, записане в диференціалах, $F(x, y, dx, dy, d^2y,..., d^{(n)}y)=0$, в якому функція F однорідна відносно своїх аргументів $x, y, dx, dy, d^2y,..., d^{(n)}y$, якщо вважати x і dx – першого виміру, а y, dy, d^2y і т. д. – виміру m. Тоді $\dfrac{dy}{dx}$ буде мати вимір $m - 1$, $\dfrac{d^2y}{d^2x}$ – вимір $m - 2$ і т. д. (**узагальнено однорідне рівняння**).

Для зниження порядку застосовується підстановка $x=e^t$, $y= ue^{mt}$. В результаті одержується диференціальне рівняння в змінних u і t, яке не містить явно t, тобто допускає зниженя порядку на одиницю (випадок Д).

Приклад 8. Розв'язати рівняння: $x^3y'' = (y - xy')^2$.

►Прирівнюємо виміри обох членів рівняння: $3 + (m-2) = 2m$, звідки $m = 1$. Зробимо підстановку $x = e^t$, $y = ue^t$. Оскільки

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\left(\frac{du}{dt}+u\right)\cdot e^t}{e^t}=\dfrac{du}{dt}+u,$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}=\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{du}{dt}\right)\Big/e^t=$

$=e^{-t}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{du}{dt}\right)$, то дане рівняння після скорочення на множник e^{2t} набуде вигляду $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{du}{dt}=\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2$.

Поклавши $\dfrac{du}{dt}=p$, $\dfrac{d^2u}{dt^2}=p\dfrac{dp}{du}$, одержимо $p\dfrac{dp}{du}+p=p^2$. Звідси p=0 або $\dfrac{dp}{du}$+ 1= p. Інтегруючи друге рівняння, знайдемо $p = 1 + C_1e^u$, або $\dfrac{du}{dt}=1+C_1e^u$.

Загальний розв'язок цього рівняння такий: $u=\ln\dfrac{e^t}{C_2-C_1e^t}$.

Повертаючись до змінних x, y, одержуємо загальний розв'язок даного рівняння: $y=x\ln\dfrac{x}{-C_1x+C_2}$.

Випадок $p = 0$ дає $u = C$ або $y = Cx$ – частинний розв'язок, який можна вилучити із загального при $C_1 = -e^{-c}$, $C_2 = 0$.◄

Ж. Рівняння вигляду $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$, **для яких ліва частина є похідною** по x від деякого диференціального виразу (n-1)-го порядку, тобто $F(x, y, y',..., y^{(n)})=\dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y',..., y^{(n-1)})=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'+...+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}$.

Понизити порядок рівняння на одиницю в цьому випадку дуже просто: $\Phi(x, y, y',..., y^{(n-1)}) = C_1$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння: $y''-xy'-y=0$.

►Ліва частина є, очевидно, точною похідною по x від диференціального виразу $y'-xy$; отже, маємо перший інтеграл $y' - xy = C_1$. Одержали лінійне рівняння 1-го порядку. Його загальний розв'язок можна одержати в квадратурах: $y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx+C_2\right)$.◄

Практичні завдання

а) Проінтегрувати рівняння чи розв'язати задачу Коші:

13. $xy'''-y''=0$. **14.** $yy''+1=y'^2$.

15. $y'^2+2yy''=0$. **16.** $xy''=y'+x\sin(y'/x)$.

17. $(x^2+1)y''-2xy'=0$, **18.** $y''y^3+1=0$, при $x_0 = 0$ $y_0 = 1$, $y'_0 = 3$.   при $x_0 = 1$ $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$.

б) Знизити порядок даних рівнянь, користуючись їх однорідністю, і розв'язати їх:

19. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.   **20.** $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.
21. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.   **22.** $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.
23. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.   **24.** $y'' + y'/x + y/x^2 = y'^2/y$.

в) Розв'язати рівняння, попередньо перетворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були точними похідними:

25. $yy''' + 3y'y'' = 0$.   **26.** $y'y''' = 2y''^2$.   **27.** $y'' = xy' + y + 1$.
28. $yy'' + y^2 = 1$.   **29.** $yy'' = y'(y' + 1)$.

Розрахункові завдання

Задача 20. Знайти розв'язок задачі Коші.

1. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.   2. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
3. $y''+2\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.   4. $y'' = 32\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.
5. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.   6. $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
7. $4y^3y''=16y^4-1$, $y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.   8. $4y^3y''=y^4-16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
9. $y''+8\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.   10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.   12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1)=3$.
13. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.   14. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
15. $y''+18\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.   16. $y''-8\sin^3 y\cos y=0$, $y(1)=\pi/2$, $y'(1)=2$.
17. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.   18. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.
19. $y''+32\sin y\cos^3 y= 0$, $y(0)=0$, $y'(0)= 4$.   20. $y'' = 50\sin y\cos^3 y$, $y(1)=\pi/2$, $y'(1) = 5$.
21. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.   22. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
23. $y^3y'' = 4(y^4-1)$, $y(0)=\sqrt{2}$, $y'(0)= \sqrt{2}$.   24. $y''+50\sin y\cos^3 y= 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.
25. $y'' = 8y^3$, $y(0) =1$, $y'(0) =2$.   26. $y''y^3 +4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
27. $y'' = 2\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) =1$.   28. $y''y^3=y-16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
29. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.   30. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

Задача 21. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $xy''' + y'' = 1$.   2. $2xy''' = y''$.
3. $xy''' + y'' = x +1$.   4. $y''\,tgx - y' + 1/sinx = 0$.
5. $x^2y'' + xy' =1$.   6. $y'''\,ctg(2x) + 2y'' = 0$.
7. $x^3y''' + x^2y'' = 1$.   8. $y'''\,tgx = 2y''$.
9. $y'''cth2x = 2y''$.   10. $x^4y'' + x^3y' = 1$.
11. $xy''' + 2y'' = 0$.   12. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.
13. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.   14. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$.
15. $xy''' + y'' + x = 0$.   16. $thxy^{IV} = y'''$.

17. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.

18. $y'''tgx = y'' + 1$.

19. $y'''tg5x = 5y''$.

20. $y'''th7x = 7y''$.

21. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$.

22. $cthxy'' - y' + \dfrac{1}{chx} = 0$.

23. $(x+1)y''' + y'' = x + 1$.

24. $(1 + \sin x)y''' = \cos xy''$.

25. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.

26. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

27. $cthxy'' + y' = chx$.

28. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.

29. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$.

30. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Задача 22. Знизити порядок рівнянь і розв’язати їх.

1. $y''(3 + yy'^2) = y'^4$.
2. $y''^2 - y'y''' = \left(y'/x\right)^2$.
3. $yy' + 2x^2 y'' = xy'^2$.
4. $y'^2 + 2xyy'' = 0$.
5. $2xy^2(xy'' + y') + 1 = 0$.
6. $x(y'' + y'^2) = y'^2 + y'$.
7. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = y'^4$.
8. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1$.
9. $y'' + 2yy'^2 = (2x + 1/x)y'$.
10. $y'y''' = y''^2 + y'^2 y''$.
11. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.
12. $y''^4 = y'^5 - yy'^3 y''$.
13. $2yy''' = y'$.
14. $y'''y'^2 = 1$.
15. $y^2 y''' = y'^3$.
16. $x^2 yy'' + 1 = (1 - y)xy'$.
17. $yy'y''' + 2y'^2 y'' = 3yy''^2$.
18. $(y'y''' - 3y''^2)y = y'^5$.
19. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = yy'^2 y'' + 2y'^4$.
20. $x^2(y^2 y''' - y'^3) = 2y^2 y' - 3xyy'^2$.
21. $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$.
22. $xy'' = 2yy' - y'$.
23. $xy'' - y' = x^2 yy'$.
24. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.
25. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.
26. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.
27. $x^2 yy'' + y'^2 = 0$.
28. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.
29. $xyy'' = y'(y + y')$.
30. $y^2/x^2 + y'^2 = 3xy'' + 2yy'/x$.

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд диференціального рівняння n-го порядку?
2. Який вигляд загального розв’язку рівняння n-го порядку?
3. За яких умов справедлива теорема про існування та єдиність розв’язку такого рівняння?
4. Як ставиться задача Коші для рівняння n-го порядку, розв’язаного відносно $y^{(n)}$?
5. Яке її геометричне трактування для диференціального рівняння другого порядку?
6. Чим зумовлене існування двох підходів до розв’язування рівнянь вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$? У чому їх суть?

7. Як понизити порядок диференціального рівняння $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$? Який алгоритм одержання загального розв'язку цього рівняння у випадку параметричного задання $y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t)$?
8. Як понизити порядок рівняння $z'' = f(z)$? Як і якого вигляду рівняння зводяться саме до такого рівняння?
9. Яка підстановка дозволяє понизити порядок диференціальних рівнянь, які не містять явно шуканої функції або незалежної змінної? Коли нова невідома функція *p* вважається функцією від *x*, а коли – від *y*?
10. Як понизити порядок диференціального рівняння *n*-го порядку на одиницю, якщо воно однорідне відносно $y, y', ..., y^{(n)}$?
11. Як запишуться вирази для y' та y'', якщо $y = e^{\int z(x)dx}$?
12. Для зниження порядку однорідного відносно $x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^n y$ рівняння (1) застосували підстановку $x = e^t, y = ue^{mt}$. Чим тут виступають величини *m*, *t*, *u*?
13. Як у випадку введення підстановки $x = e^t, y = ue^{mt}$ запишуться вирази для y', y''?
14. Що таке проміжний інтеграл? Як знайти перший інтеграл для рівняння, ліва частина якого є повною похідною деякого диференціального виразу?

16. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами

Література: [1], розд. VII , §1-3; [3], розд. VI , §1.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{1}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні постійні.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (1) діємо так:

1) складаємо характеристичне рівняння для рівняння (1):

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2}$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корені рівняння (2), причому серед них можуть бути і кратні;

2) записуємо відповідну фундаментальну систему розв'язків (ФСР) рівняння (1) (сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$;

3) записуємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1) у формі

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{3}$$

де C_i – довільні сталі.

Далі перелічимо можливі випадки коренів характеристичного рівняння (2) та відповідні їм фундаментальні системи розв'язків рівняння (1):

а) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – дійсні і різні.

Тоді ФСР має вигляд $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, і загальним розв'язком рівняння (1) буде $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$;

б) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – дійсні, але серед них є кратні (нехай, наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \bar{\lambda}$, тобто $\bar{\lambda}$ є k-кратним коренем рівняння (2), а всі інші n-k коренів різні).

ФСР у цьому випадку має вигляд $e^{\bar{\lambda} x}, xe^{\bar{\lambda} x}, x^2 e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, x^{k-1} e^{\bar{\lambda} x}, e^{\lambda_{k+1} x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$;

в) серед коренів характеристичного рівняння є комплексні. Нехай, $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = \gamma + i\delta, \lambda_4 = \gamma - i\delta$, а решта коренів дійсні (комплексні корені тут попарно спряжені, бо коефіцієнти a_i рівняння (1) дійсні).

ФСР у цьому випадку буде мати вигляд $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\gamma x}\cos\delta x, e^{\gamma x}\sin\delta x, e^{\lambda_5 x}, e^{\lambda_6 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$;

г) у випадку, якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ є k-кратним коренем рівняння (2) ($k < \frac{n}{2}$), то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ також буде k-кратним коренем, і ФСР буде мати вигляд $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\lambda_{2k+1} x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

►Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Знайдемо його корені: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Оскільки вони дійсні і різні, то загальний розв’язок матиме вигляд $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$.◄

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y''' + 2y'' + y' = 0$.

► $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$. Корені дійсні, причому один з них, а саме $\lambda = -1$, двократний, тому загальний розв’язок рівняння має вигляд $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3$.◄

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

► $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$. Маємо корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 - 3i, \lambda_3 = -2 + 3i$. Загальний розв’язок: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x$.◄

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

► $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ або $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$. Звідси знаходимо такі корені: $\lambda = 2$ і $\lambda = \pm i$ – пара двократних уявних коренів. Загальний розв’язок є таким: $y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$.◄

Практичні завдання

Проінтегрувати дані рівняння і, де вказано, розв’язати задачу Коші:

1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$.

2. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, y'(0) = 10$.

3. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

4. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

5. $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$.

6. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.

7. $y^V + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$.

8. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

9. $2y''' - 3y'' + y' = 0$.

10. $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

11. $y^{IV} - y = 0$.

12. $y^{VI} + 3y^{IV} = 0$.

Розрахункові завдання

Задача 23. Знайти загальні розв’язки лінійних однорідних рівнянь, а також частинні там, де задано початкові умови.

1. $y^{IV} - a^4 y = 0$.
2. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.
3. $y''' - 2y'' = 0$.
4. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$.
5. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$.
6. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$.
7. $y''' - 3y'' + 9y' = 0$.
8. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0$.

9. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.

10. $y'' - 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 7$.

11. $y''' - 4y' = 0$.

12. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$.

13. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

14. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$.

15. $y^{IV} - 8y' = 0$.

16. $y^{IV} + 9y'' = 0$.

17. $y^{IV} - 3y''' = 0$.

18. $y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.

19. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$.

20. $y^{IV} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$.

21. $y^{IV} + 5y'' + 6y = 0$.

22. $y^{IV} + a^4 y = 0$.

23. $y^{IV} - y''' = 0$.

24. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$.

25. $y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0$.

26. $y^{V} - 2y^{IV} + y''' = 0$.

27. $y^{VI} - 9y'' = 0$.

28. $y^{VI} + 2y^{V} = 0$.

29. $y^{VI} - 4y^{V} + 13y^{IV} = 0$.

30. $y^{VI} - 5y^{V} + 4y^{IV} = 0$.

Запитання для самоперевірки

1. Яке диференціальне рівняння *n*-го порядку називається лінійним?
2. Яке диференціальне рівняння *n*-го порядку називається лінійним однорідним ?
3. Яке диференціальне рівняння називається лінійним однорідним з сталими коефіцієнтами?
4. Який тривіальний розв’язок має лінійне однорідне рівняння?
5. Які розв’язки однорідного лінійного рівняння називаються лінійно незалежними?
6. Що таке фундаментальна система розв’язків однорідного рівняння?
7. Що таке характеристичне рівняння?
8. Як пов’язані корені характеристичного рівняння з ФСР?
9. Які частинні розв’зки лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами відповідають *k* однаковим дійсним кореням його харак- теристичного рівняння?
10. Чому комплексні корені характеристичного рівняння для рівняння з сталими дійсними коефіцієнтами “ходять парами” (є взаємно спряженими)?
11. Як пояснити появу тригонометричної частини ФСР для лінійного однорідного рівняння, серед коренів характеристичного рівняння якого є комплексні спряжені?
12. Що таке детермінант Вронського?
13. Які властивості детермінанта Вронського?
14. Чи вірно, що для будь-якого лінійного однорідного рівняння завжди можна написати множину частинних розв`язків, яка складатиметься з таких функцій, які не перетворять детермінант Вронського в нуль на проміжку, де коефіцієнти рівняння неперервні?
15. Як побудувати однорідне лінійне рівняння за його фундаментальною системою розв’язків?

17. Лінійні неоднорідні рівняння з сталими коефіцієнтами та спеціальними правими частинами

Література:[1], розд.VII, §1-3; [3], розд. VI, §1.

А. Нехай дано диференціальне рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і якогось частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Таким чином, з огляду на п.16, задача інтегрування рівняння (1) зводиться до відшукання частинного розв'язку цього рівняння. Для правих частин спеціального вигляду частинний розв'язок знаходиться без квадратур за допомогою методу підбору.

Таблиця виглядів частинних розв'язків для спеціальних правих частин

№	Права частина рівняння	Корені характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв'язку
1.	$P_m(x)$ (многочлен степеня m)	1) Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_m(x)$ (многочлен степеня m з невизнач. коеф.)
		2) Число 0 – корінь характеристичного рівняння кратності s	$x^s \widetilde{P}_m(x)$
2.	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1) α не є коренем характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2) α є коренем характеристичного рівняння кратності s	$x^s \widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
3.	$P_n(x)\cos\beta x +$ $+ Q_m(x)\sin\beta x$	1) Числа $\pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x,$ $k = \max(n,m)$
		2) Числа $\pm i\beta$ є коренями характеристичного рівняння кратності s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+ \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x),$ $k = \max(n,m)$
4.	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +$ $+ Q_m(x)\sin\beta x]$	1) Числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння	$e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+ \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x),$ $k = \max(n,m)$
		2) Числа $\alpha \pm i\beta$ є коренями характеристичного рівняння кратності s	$x^s e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+ \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x),$ $k = \max(n,m)$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

►Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_{з.о.}$ буде таким: $y_{з.о.} = C_1e^x + C_2cosx + C_3\sin x$.

Оскільки число 0 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок даного рівняння $y_{ч.н.}$ треба шукати у вигляді $y_{ч.н.} = A_1x^2 + A_2x + A_3$, (див. табл.), де A_1, A_2, A_3 – невизначені коефіцієнти. Підставляючи вираз для $y_{ч.н.}$ у дане рівняння, одержуємо $-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x$, звідки $\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$ Розв'язуючи дану систему, знайдемо $A_1 = -1, A_2 = -3, A_3 = -1$.

Отже, $y_{ч.н.} = -x^2 - 3x - 1$, і загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - x^2 - 3x - 1$.◄

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$.

►Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, тому $y_{з.о.} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x}$.

Оскільки число $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ є простим коренем характеристичного рівняння, то $y_{ч.н.}$ треба шукати у вигляді $y_{ч.н.} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$. Тоді

$$y'_{ч.н.} = e^{-x}[(A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x],$$

$$y''_{ч.н.} = e^{-x}[(-2A - 3Ax + 4B - 4Bx)\cos 2x + (-2B - 3Bx - 4A + 4Ax)\sin 2x].$$

Підставляючи вирази для $y_{ч.н.}$ і його похідних у вихідне рівняння і скорочуючи на e^{-x}, будемо мати: $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x$, звідки $A = 0, B = \frac{1}{4}$, і, значить, $y_{ч.н.} = \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$, а загальним розв'язком даного рівняння буде $y(x) = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$.◄

Б. При знаходженні частинних розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь зручно користуватися ще такою теоремою.

Теорема (**принцип суперпозиції**). Якщо $y_k(x)$ є розв'язком рівняння $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, то функція $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ є розв'язком рівняння $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$.

►Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, тому $y_{з.о.} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

Для знаходження частинного розв'язку $y_{ч.н.}$ знайдемо частинні розв'язки двох рівняннь: $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$ і $y'' - 6y' + 9y = -16e^{3x}$.

Перше з них має частинний розв'язок вигляду $y_1 = Ae^x$. Підставляючи вираз для y_1 у це рівняння, знайдемо A=1, тому $y_1 = e^x$.

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у формі $y_2 = Bx^2e^{3x}$. Знаходимо: $y_2 = -8x^2e^{3x}$.

Виходячи з принципу суперпозиції розв'язків, частинний розв'язок $y_{ч.н.}$ вихідного рівняння буде дорівнювати сумі частинних розв'язків y_1 і y_2: $y_{ч.н.} = y_1 + y_2 = e^x - 8x^2e^{3x}$.

Загальний розв'язок вихідного рівняння $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^x - 8x^2e^{3x}$.◄

Практичні завдання

Розв'язати рівняння:

1. $y'' + 2y' + y = -2$.

2. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

3. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

4. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

5. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

6. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$.

7. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x$.

8. $y'' + y = 4x\cos x$.

9. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$.

10. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

11. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$.

12. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$.

13. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$.

14. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

15. $y^V + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.

Розрахункові завдання

Задача 24. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
3. $y''' - y' = x^2 + x$.
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
5. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$.
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$.
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.
8. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$.
9. $3y^{IV} + y'' = 6x - 1$.
10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
13. $7y''' - y'' = 12x$.
14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.

17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.

18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.

20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.

21. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.

22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.

23. $y''' - y'' = 6x + 5$.

24. $y^{IV} + y''' = x$.

25. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.

26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.

27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.

28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.

29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.

30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

Задача 25. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.

2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}$.

3. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}$.

4. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^{x}$.

5. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$.

6. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.

7. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$.

8. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (10 - 16x)e^{-x}$.

9. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$.

10. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$.

11. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}$.

12. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$.

13. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}$.

14. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$.

15. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.

16. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^{x}$.

17. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^{x}$.

18. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^{x}$.

19. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$.

20. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^{x}$.

21. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.

22. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.

23. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{x}$.

24. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^{x}$.

25. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^{x}$.

26. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.

27. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^{x}$.

28. $y''' + y'' - 9y' + 9y = (12 - 6x)e^{x}$.

29. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^{x}$.

30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$.

Задача 26. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

1. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.

2. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

3. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.

5. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.

6. $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x)$.

7. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x)$.

8. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

9. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-3\sin x + 4\cos x)$.

10. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

11. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$.

12. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$.

13. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$.

14. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

15. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.

16. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.

18. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

19. $y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x)$.

20. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x)$.

21. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.

23. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.

24. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.

25. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

26. $y'' + 2y' = 10e^{x}(\sin x + \cos x)$.

27. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.

28. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

29. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

30. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

Задача 27. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y'' - 2y' = 2ch2x$.

2. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$.

3. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}$.

4. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$.

5. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x$.

6. $y''' - 25y' = 25(\cos 5x + \sin 5x) - 50e^{5x}$.

7. $y'' - 3y' = 2ch3x$.

8. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$.

9. $y'' + 2y' = 2sh2x$.

10. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$.

11. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$.

12. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.

13. $y'' + 4y' = 16sh4x$.

14. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}$.

15. $y'' - y' = 16ch4x$.

16. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.

17. $y'' - 5y' = 50ch5x$.

18. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$.

19. $y'' + 5y' = 50sh5x$.

20. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.

21. $y''' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$.

22. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.

23. $y'' + y' = 2shx$.

24. $y''' - 9y' = -9e^{3x} - 9\cos 3x + 18\sin 3x$.

25. $y'' - y' = 2chx$.

26. $y''' - 6y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.

27. $y''' - 81y' = 81\sin 9x + 162e^{9x}$.

28. $y'' + 25y = -10\sin 5x + 20\cos 5x + 50e^{5x}$.

29. $y'' + 3y' = 2sh3x$.

30. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд лінійного неоднорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами?
2. З яких доданків складається загальний розв'язок такого рівняння?
3. В чому полягає принцип суперпозиції розв'язків?
4. Для яких правих частин лінійного неоднорідного рівняння можна підібрати частинний розв'язок?
5. Які частинні випадки має це правило?
6. Що є орієнтиром для зміни загального вигляду частинного розв'язку для рівнянь з однаковими правими частинами?
7. Що таке кратність кореня рівняння?
8. Що таке простий корінь рівняння?
9. Як знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння?

18. Метод варіації сталих

Література: [3], розд. V, §3.

Лінійне неоднорідне рівняння

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

з будь-якою правою частиною *f*(*x*) розв'язується методом варіації сталих (методом Лагранжа).

Нехай знайдено розв'язок $y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n$ лінійного однорідного рівняння з тією ж лівою частиною. Тоді розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді $y = C_1(x) y_1 + ... + C_n(x) y_n$. Функції $C_i(x)$ визначаються із системи

$$\begin{cases} C_1' y_1 + ... + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + ... + C_n' y_n' = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ C_1' y_1^{(n-2)} + ... + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ a_0 (C_1' y_1^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)}) = f(x). \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

►Відповідне однорідне рівняння буде $y'' + y = 0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має уявні корені $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$, і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Загальний розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ − невідомі функції від x . Для їх знаходження складемо систему $\begin{cases} \cos x \cdot C_1'(x) + \sin x \cdot C_2'(x) = 0, \\ -\sin x \cdot C_1'(x) + \cos x \cdot C_2'(x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$

Розв'язуємо цю систему відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$: $C_1'(x) = -tgx, C_2'(x) = 1$. Інтегруванням знаходимо $C_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{C_1}, C_2(x) = x + \overline{C_2}$.

Підставляючи вирази для $C_1(x)$ і $C_2(x)$, одержуємо загальний розв'язок даного рівняння $y = \overline{C_1} \cos x + \overline{C_2} \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ (тут $\cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ − частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння).◄

Практичні завдання

Проінтегрувати методом варіації сталих дані рівняння. Розв'язати, де задано початкові умови, задачу Коші:

1. $y'' + y = 1/\sin x$. **2.** $y'' - y' = 1/(e^x + 1)$.

3. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.

4. $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

5. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

6. $y'' - y = \dfrac{(2-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}$.

7. $xy'' + (2x-1)y' = -4x^2$.

8. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

9. $y^{IV} + y'' = 2\cos x, y(0) = -2,$
$y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0$.

10. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

11. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

12. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

13. $y'' + y' tgx = \cos x ctgx$.

14. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + \sin 2x + x^2$.

15. $x^2 y'' - 2y = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

Розрахункові завдання

Задача 28. Знайти розв’язок задачі Коші.

1. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0$.
2. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, y'(0) = 3(1-\ln 2)$.
3. $y'' + 4y = 8ctg2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$.
4. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$.
5. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.
6. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 6\ln 2$.
7. $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0$.
8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.
9. $y'' + y = 4ctgx, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.
10. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 10\ln 3$.
11. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}, \quad y(0) = y'(0) = 0$.

12. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$

13. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

14. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$

15. $y'' + 4y = 4ctg 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, y'(0) = 14\ln 2.$

17. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

18. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$

19. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0.$

20. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$

21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} ctg \frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2}.$

22. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 5\ln 3.$

23. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^{x}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

24. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$

25. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0.$

26. $y'' + y = \frac{e^{x}}{2 + e^{x}}, \quad y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9.$

27. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

28. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

29. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{x}}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

30. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2.$

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд лінійного неоднорідного рівняння?
2. Якщо відома ФСР для відповідного однорідного рівняння, то як можна одержати загальний розв’язок неоднорідного рівняння?
3. Як отримати n рівнянь для знаходження C_i' за методом Лагранжа?
4. Скількома квадратурами розв’язується лінійне рівняння методом варіації сталих?
5. Чи можна описаним методом розв’язати лінійні неоднорідні рівняння із змінними коефіцієнтами?
6. Які принципові відмінності у застосуванні методу Лагранжа при інтегруванні диференціальних рівнянь першого порядку та рівнянь вищих порядків?
7. Як виглядає система рівнянь для відшукання C_i' у випадку лінійного рівняння другого порядку? третього порядку?
8. Чи буде загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння містити частину, яка збігатиметься за виглядом із загальним розв’язком відповідного однорідного рівняння? Чим виступатиме інша частина такого загального розв’язку?

19. Геометричні та фізичні задачі

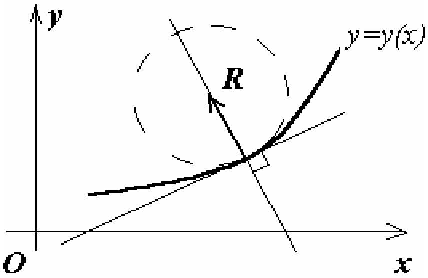
Література: [даний посібник].

Диференціальне рівняння, одержане в результаті дослідження якогось явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища чи процесу. Розглядатимемо, як і раніше, лише такі моделі, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, однією із характерних особливостей яких є те, що функції в цих рівняннях залежать тільки від однієї змінної.

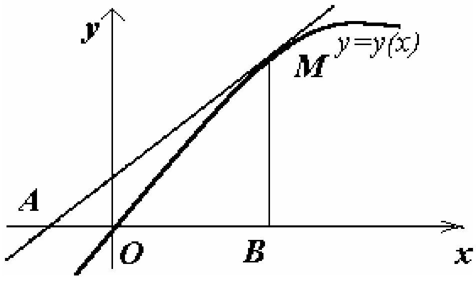
В процесі побудови звичайних диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається, тому, вважаючи схему конструювання моделі відомою (див. пп.13, 14), покажемо на прикладах розв'язання деяких геометричних та фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь другого порядку.

Приклад 1. Знайти плоскі криві, які мають постійний радіус кривини.

►Нехай $y=y(x)$ − рівняння шуканої кривої. Її радіус кривини $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$. За умовою задачі $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=a$, або $by''=\left(1+y'^2\right)^{3/2}$, де $b=\pm a$.



Це рівняння другого порядку $F(y'',y')=0$, яке дозволяє знизити порядок підстановкою $y'=z$: $b\frac{dz}{dx}=(1+z^2)^{3/2}$. Звідси $\frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}}=kdx$, $k=\frac{1}{b}$. Поклавши $z=tgt$, інтегруємо це рівняння з відокремленими змінними: $sint=kx+C_1$, або, повернувшись до змінної z: $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=kx+C_1$. Розв'язавши відносно z, маємо: $z=y'=\pm\frac{kx+C_1}{\sqrt{1-(kx+C_1)^2}}$. Інтегруючи вдруге, одержуємо: $y+C_1=\pm\frac{1}{k}\sqrt{1-(kx-C_1)^2}$, або $(x+\overline{C_1})^2+(y+\overline{C}_2)^2=a^2$ − сім'я кіл радіусом a з довільним положенням на площині.◄



Приклад 2. Знайти криву, яка проходить через початок координат і має таку властивість: площа трикутника, утвореного дотичною до кривої в деякій точці, ординатою цієї точки і віссю Ox, пропорційна з коефіцієнтом пропорційності k площі криволінійної трапеції, утвореної кривою, віссю Ox і ординатою цієї точки.

►Рівняння кривої буде $y=y(x)$. За умовою задачі $S_{\Delta ABM}=kS_{OBM}$, де k − коефіцієнт пропорційності. Катет *AB* прямокутного трикутника *ABM* є піддотичною шуканої кривої в точці $M(x;y)$, тому $AB=|y/y'|$, а значить, $\mathrm{S}_{\Delta_{ABM}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{y}{y'}\right|\cdot|y|$.

Площа криволінійної трапеції *OMB* − інтеграл від функції $y(x)$: $S_{OMB}=\int\limits_0^x |y|dx$.

Математична модель задачі матиме вигляд $\frac{y^2}{2y'}=\pm k\int\limits_0^x ydx$, або після диференціювання (для заміни даного рівняння диференціальним) – $\frac{2yy'^2-y^2y''}{2y'^2}=\pm ky.$

Після скорочення на *y* (*y*=0 – тривіальний випадок) одержимо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної: $2y'^2-y\ y''=\pm 2ky'^2$. Поклавши $y'=p(y)$, перепишемо його в змінних *y*, *p* так: $p'y=2(1\mp k)p$ (на *p* скоротили , бо *p*=0 дає пряму *y*=const, що не задовольняє умову).

Відокремлюємо змінні і інтегруємо: $\frac{dp}{p}=2(1\mp k)\frac{dy}{y}$, $p=C_1y^{2(1\mp k)}$.

Пам'ятаючи, що $p=y'$, інтегруємо ще один раз. Маємо: $y^{\pm 2k-1}=(\pm 2k-1)(C_1x+C_2)$ або $y^{\pm 2k-1}=\overline{C}_1x+\overline{C}_2$.

Оскільки при *x*=0 *y*=0, то $\overline{C}_2=0$, і частинний інтеграл рівняння такий: $y^{\pm 2k-1}=Cx$.◄

Приклад 3. Тіло масою *m* ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який надав йому початкову швидкість v_0. Знайти відстань, яку тіло здатне пройти до повної зупинки, якщо на нього діє сила тертя, пропорційна масі тіла .

►Запишемо в проекціях на напрям руху тіла вираз другого закону динаміки Ньютона: $m\frac{d^2s}{dt^2}=-km$, де *s* − пройдений тілом за час *t* шлях, *k* – коефіцієнт пропорційності .

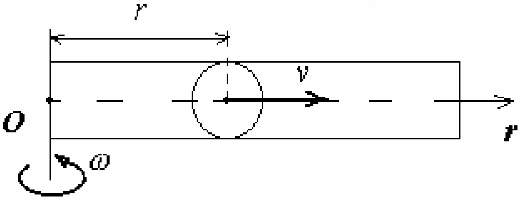
Безпосереднім інтегруванням знаходимо $\frac{ds}{dt}=-kt+C_1$. Врахувавши, що $\frac{ds}{dt}=v(t)$, з початкових умов знаходимо сталу інтегрування C_1: $v_0=-k\cdot 0+C_1$, $C_1=v_0$.

Інтегруючи повторно, маємо: $s=C_2+v_0t-\frac{1}{2}kt^2$. Пам'ятаючи, що $s(0)=0$, уточнюємо закон руху: $s=v_0t-\frac{1}{2}kt^2$.

Щоб визначити шлях, пройдений тілом до зупинки, знайдемо з рівняння швидкості час, який віповідатиме моменту зупинки: $0 = v_0 - kt$, $t = \frac{v_0}{k}$.

Таким чином, повний шлях, пройдений тілом у даному русі, обчислюється як $s = v_0\frac{v_0}{k} - \frac{k}{2}\left(\frac{v_0}{k}\right)^2$ або $s = \frac{v_0^{\;2}}{2k}$.◄

Приклад 4. Трубка обертається навколо вертикальної осі з сталою кутовою швидкістю ω. В трубці є кулька, що ковзає по ній без тертя. Знайти закон руху кульки, якщо в початковий момент вона знаходиться на осі обертання і має швидкість v_0 вздовж трубки.



►В системі відліку, пов’язаній з рухомою трубкою, на кульку діє відцентрова сила інерції $m\omega^2 r$, де m – маса кульки, ω – кутова швидкість обертання трубки, r – відстань кульки від осі. На основі другого закону динаміки диференціальне рівняння руху кульки по трубці запишеться так: $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$, а початкові умови як $r(0)=0$, $\frac{dr}{dt}\Big|_{t=0} = v(0) = v_0$.

Домножаючи рівняння на $2\frac{dr}{dt}$, одержуємо $2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2(2r\frac{dr}{dt})$, $\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = \omega^2\frac{d}{dt}(r^2)$. Інтегруємо, маємо: $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \omega^2 r^2 + C_1$, де $C_1 = v_0^{\;2} - \omega^2\cdot 0 = v_0^{\;2}$.

Отже, $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^{\;2}}$, $\frac{dr}{\sqrt{\omega^2 r^2 + v^2{}_0}} = dt$, $\frac{dr}{\sqrt{r^2 + (v_0/\omega)^2}} = \omega\, dt$, $ln(r + \sqrt{r^2 + (v_0/\omega)^2}) = \omega t + C_2$.

З початкових умов $C_2 = ln\,\frac{v_0}{\omega}$, а тому закон руху кульки по трубці буде таким: $r = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega}sh(\omega t)$.◄

Приклад 5. На вільному кінці закріпленої горизонтально пружини жорсткістю k міститься тіло масою m. Система знаходитться в стані рвноваги. Тілу в напрямі розтягнення пружини надали швидкості v_0. Через яку частину періоду коливань потенціальна енергія системи вперше стане втричі більшою за кінетичну?

►Запишемо для тіла другий закон Ньютона в проекціях на вісь X (напрям руху): $ma = F_{пр.}$, де $F_{пр.}$ – сила пружності, яка діє на тіло з боку пружини, a – прискорення тіла. Якщо відхилення тіла від положення рівноваги в довільний момент часу t дорівнює x, то за законом Гука $F_{пр.} = -kx$. Прискорення тіла за означенням дорівнює другій похідній координати по часу: $a = x''$. Тепер рівняння руху тіла можна записати у вигляді $mx'' + kx = 0$.

Як відомо, розв'язком такого лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами є гармонічна функція $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, де x_m – амплітуда коливань, ω – циклічна частота ($\omega = \sqrt{k/m}$), φ_0 – початкова фаза коливань.

При коливаннях тіла на пружині система володіє запасом потенціальної енергії пружної деформації $W_p = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$ і кінетичної енергії $W_k = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mx_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. В шуканий момент часу t $W_p / W_k = 3$. Підставляючи сюди вирази для потенціальної і кінетичної енергії і враховуючи, що $\omega^2 = 4\pi^2 / T^2 = k/m$, одержуємо $tg^2(\omega t + \varphi_0) = 3$, або $\dfrac{2\pi}{T} t + \varphi_0 = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$.

З початкових умов маємо: $x_m \sin\varphi_0 = 0$ і $x_m \omega \cos\varphi_0 = v_0$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $\varphi_0 = 0$ і $x_m = v_0 / \omega$. Відношення енергій вперше стане дорівнювати 3 при n=0, звідки остаточно маємо $t = T/6$.◄

Практичні завдання

Розв'язати дані задачі за допомогою диференціальних рівнянь:

1. Знайти плоскі криві, у яких радіус кривини пропорційний довжині нормалі.

2. Знайти плоскі криві, у яких радіус кривини пропорційний кубу нормалі.

3. Знайти закон руху матеріальної точки масою *m* по прямій *OA* під дією відштовхуючої сили, обернено пропорційної третьому степеню відстані точки *x*=*OM* від нерухомого центра *O*.

4. Тіло масою *m* падає з деякої висоти зі швидкістю *v*. При падінні тіло зазнає опору, пропорційного квадрату швидкості. Знайти закон руху падаючого тіла.

5. Знайти час, необхідний для того, щоб упасти на Землю з висоти 400000 км (наближене значення відстані від Місяця до центра Землі), якщо ця висота відраховується від центра Землі, і якщо радіус Землі наближено дорівнює 6400 км.

6. Знайти криву, форму якої набуває закріплений на кінцях і вільно звисаючий однорідний важкий ланцюг під дією сили тяжіння.

7. Ланцюг довжиною 6 м зісковзує зі столу без тертя. Якщо рух починається з того моменту, коли 1 м ланцюга звисає, то за який час зісковзне увесь ланцюг?

8. Знайти криві, в яких радіус кривини дорівнює відрізку нормалі, що міститься між двома даними паралельними прямими.

9. Знайти інтегральну криву рівняння $yy'' + y'^2 = 1$, яка проходить через точку (0;1) і дотикається в цій точці до прямої x+y=1.

10. Знайти рівняння кривої, яка дотикається до осі абсцис у початку координат, якщо її кривина в будь-якій точці дорівнює cos$x$ $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$.

11. Знайти закон руху і визначити період коливань математичного маятника довжиною l при малих відхиленнях.

12. Тіло здійснює 90 коливань за хвилину. Амплітуда коливань зменшується вдвічі за 15 с. Знайти диференціальне рівняння руху.

Розрахункові завдання

Задача 29. Розв’язати дані задачі за допомогою диференціальних рівнянь.

1. Знайти лінію, для якої проекція радіуса кривини на вісь Oy є постійною величиною, що дорівнює a.
2. Знайти лінію, довжина дуги якої, що відраховується від деякої точки, пропорційна кутовому коефіцієнту дотичної в кінцевій точці дуги.
3. Яка лінія володіє тією властивістю, що радіус кривини в будь-якій її точці пропорційний довжині нормалі? Вважати коефіцієнт пропорційності $k=-1$.
4. Дивись умову задачі 3. $k = 1$.
5. Дивись умову задачі 3. $k = -2$.
6. Дивись умову задачі 3. $k = 2$.
7. Знайти інтегральну криву рівняння $y''+9y=0$, яка проходить через точку $M(\pi;-1)$ і дотикається в цій точці до прямої $y+1=x-\pi$.
8. Знайти інтегральну криву рівняння $y''+ky=0$, яка проходить через точку $M(x_0;y_0)$ і дотикається в цій точці до прямої $y-y_0=a(x-x_0)$.
9. Знайти інтегральну криву рівняння $yy'y''=y'^3+y''^2$, яка дотикається у початку координат до прямої $x+y=0$.
10. Знайти рівняння кривих, в яких радіус кривини в будь-якій точці дорівнює довжині відрізка нормалі, що знаходиться між цією точкою і віссю абсцис, якщо крива опукла.
11. Дивись умову задачі 10, але крива увігнута.
12. Знайти рівняння кривих, в яких радіус кривини в будь-якій точці вдвічі більший від довжини відрізка нормалі, що знаходиться між цією точкою і віссю абсцис, якщо відомо, що крива опукла.
13. Дивись умову задачі 12, але крива увігнута.
14. Знайти інтегральну криву, знаючи, що радіус її кривини пропорційний квадрату абсциси (коефіцієнт пропорційності $1/a$) та справедливі умови: $y(a)=-a/3, y'(a)=0$.
15. Знайти криві, в яких радіус кривини обернено пропорційний косинусу кута між дотичною і віссю абсцис.
16. Знайти сім’ю кривих, для якої відношення радіуса кривини до довжини нормалі дорівнює 2. Виділити ту криву, для якої $y(0)=y'(0)=1$.
17. Матеріальна точка масою m рухається по прямій до центра, що притягує

її з силою $\frac{mk^2}{r^3}$, де r – відстань точки від центра. Знайти час, за який точка досягне центра, якщо рух починається із стану спокою при $r=a$.

18. Дивись умову задачі 17, але сила відштовхуюча і дорівнює k^2mr. Показати, що точка, необмежено наближаючись до центра, ніколи його не досягне. Початкові умови: $r(0)=a$, $v(0)=ka$.
19. Знайти швидкість падіння тіла на Землю з нескінченної висоти під дією сили тяжіння Землі, обернено пропорційної квадрату відстані точки від центра Землі.
20. Знайти закон руху тіла, що вільно падає без початкової швидкості, припускаючи, що опір повітря пропорційний квадрату швидкості, і що швидкість має своєю границею величину 75 м/с.
21. Матеріальну точку кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0. Припускаючи, що опір повітря дорівнює kv^2, знайти швидкість падіння точки на Землю.
22. Знайти закон прямолінійного руху матеріальної точки масою m, якщо відомо, що робота сили, яка діє на точку, пропорційна часу, який пройшов з моменту початку руху.
23. Тіло масою 2 кг, кинуте вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с, зазнає опору повітря $0{,}04v$ (v − швидкість руху тіла). Знайти час, за який тіло досягне найвищого положення.
24. Розв’язати задачу прикладу 4 даного пункту в припущенні, що кулька прикріплена до осі обертання пружиною, коефіцієнт жорсткості якої k, а довжина в недеформованому стані дорівнює a.
25. Знайти закон прямолінійного руху матеріальної точки, на яку діє сила опору середовища, пропорційна швидкості руху.
26. Дивись задачу 25, але сила опору пропорційна квадрату швидкості руху.
27. Дивись задачу 25, але діє пружна сила.
28. Дивись задачу 25, але крім сили опору діє постійна сила F, прикладена до точки в напрямі її руху.
29. Дивись задачу 25, але крім сили опору діє пропорційна зміщенню сила пружності, прикладена до точки в напрямі, протилежному її зміщенню.
30. На тіло вагою 10 Н діє пружна сила, яка намагається повернути його у стан стійкої рівноваги. Сила пропорційна зміщенню і дорівнює 2 Н при зміщенні в 1 м. Опір середовища пропорційний швидкості. Амплітуда після трьох коливань зменшується в 10 разів. Знайти період коливань.

Запитання для самоперевірки

1. Яке диференціальне рівняння називають звичайним?
2. Який загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку; n-го порядку?
3. Як ставиться задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?

4. Що таке кривина плоскої кривої?
5. Що таке радіус кривини плоскої кривої?
6. Чому дорівнює кривина кола; параболи $y = x^2$ у початку координат?
7. Як обчислюється радіус кривини кривої в декартових координатах; полярних координатах?
8. Чим визначається напрям увігнутості кривої?
9. Що таке закон руху матеріальної точки?
10. Як записується другий закон динаміки Ньютона у векторній формі?
11. Скількома диференціальними рівняннями описується рух матеріальної точки на площині; в просторі; по прямій?
12. Яким рівнянням другого порядку моделюються вільні гармонічні коливання? Напишіть його загальний розв'язок.
13. Яким рівнянням моделюються коливання тягарця на пружині в середовищі з опором?
14. Як виникають затухаючі гармонічні коливання? Чому дорівнюють амплітуда і частота цих коливань?
15. Яке явище називають резонансом?
16. Який вигляд має диференціальне рівняння коливань маятника при малих відхиленнях від положення рівноваги?

20. Лінійні рівняння із змінними коефіцієнтами

Література: [3], розд. V, §2, §3; розд. VI, §2, п.1, п. 3, §1, п. 4.

А. Рівняння Ейлера.

Лінійне рівняння вигляду

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=0\,, \qquad (1)$$

де всі a_i постійні, називається рівнянням Ейлера. Ці рівняння заміною незалежної змінної $x=e^t$ приводяться до лінійного однорідного рівняння з постійними коефіцієнтами

$$b_0y_t^{(n)}+b_1y_t^{(n-1)}+...+b_{n-1}y_t'+b_ny(t)=0\,. \qquad (2)$$

Зауваження 1. Рівняння вигляду $a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=0$ також називаються рівняннями Ейлера і зводяться до лінійних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами заміною $ax+b=e^t$.

Зауваження 2. Частинні розв'язки рівняння (1) можна відразу шукати у вигляді $y=x^k$, при цьому для k ми одержуємо рівняння, яке співпадає з характеристичним рівнянням для рівняння (2).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера: $x^2y''+2xy'-6y=0$.

►*Перший спосіб.* Робимо в рівнянні підстановку $x=e^t$. Тоді

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-t}}{e^t}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

і рівняння набуде вигляду $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0$.

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1=-3,\ \ \lambda_2=2$, і загальний розв'язок останнього рівняння буде $y=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$. Оскільки ж $x=e^t$, то $y=\frac{C_1}{x^3}+C_2x^2$.

Другий спосіб. Будемо шукати розв'язок даного рівняння у вигляді $y=x^k$, де k – невідоме число. Знаходимо $y'=kx^{k-1},\ \ y''=k(k-1)x^{k-2}$. Підставляючи в рівняння, одержуємо $x^2k(k-1)x^{k-2}+2xkx^{k-1}-6x^k=0$, або $x^k\left[k(k-1)+2k-6\right]=0$. Але, оскільки $x^k\neq0$, то $k(k-1)+2k-6=0$, або $k^2+k-6=0$, звідки $k_1=-3,\ \ k_2=2$, а фундаментальна система розв'язків – $y_1=x^{-3},\ \ y_2=x^2$, і загальний розв'язок, як і раніше, буде $y=C_1x^{-3}+C_2x^2$.◄

Неоднорідні рівняння Ейлера вигляду $\sum_{k=0}^{n}a_kx^ky^{(k)}=x^\alpha P_m(\ln x)$, де $P_m(x)$ – многочлен степеня m, можна також розв'язувати методом підбору по аналогії з розв'язанням неоднорідного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами і з правою частиною вигляду $e^{\alpha x}P_m(x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння Ейлера: $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$.

►Характеристичне рівняння $k(k-1) - k + 2 = 0$, або $k^2 - 2k + 2 = 0$ має корені $k_1 = 1 - i, \quad k_2 = 1 + i$, тому $y_{з.о.} = x(C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x)$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = x(A\ln x + B)$; маємо: $y'_{ч.н.} = A\ln x + B + A, \quad y''_{ч.н.} = \dfrac{A}{x}$. Підставляючи в дане рівняння, одержуємо $Ax - x(A\ln x + A + B) + 2x(A\ln x + B) = x\ln x$, або $Ax\ln x + Bx = x\ln x$, звідки $A = 1, \quad B = 0$.

Отже, $y_{ч.н.} = x\ln x$, а $y = x(C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x) + x\ln x$.◄

Б. Метод Лагранжа.

Якщо відомий частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{3}$$

то його порядок можна понизити на одиницю (не порушуючи лінійності рівняння), покладаючи $y = y_1 z$, де z – нова невідома функція, а потім виконуючи заміну $z' = u$ (або безпосередньо: $u = \left(\dfrac{y}{y_1}\right)'$).

Якщо відомо k частинних лінійно незалежних розв'язків рівняння (3), то порядок рівняння може бути понижений на k одиниць.

Загальний розв'язок рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{4}$$

є сумою будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного рівняння (3).

Якщо відома ФСР відповідного однорідного рівняння (3), то загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4) може бути знайдений методом варіації сталих (метод Лагранжа) (див. п.18).

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + 2y' + xy = 0$, якщо $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ – його частинний розв'язок.

►Покладемо $y = \dfrac{\sin x}{x}z$; тоді $y' = y_1'z + y_1z', \quad y'' = y_1''z + 2y'z' + y_1z''$. Підставляючи в рівняння, одержуємо $(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)z + xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z = 0$.

Оскільки $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ є частинним розв'язком даного рівняння, то $xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$, тому маємо $xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0$.

Але $y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$, а значить $xy_1' + y_1 = \cos x$, і останнє рівняння набуває вигляду $z''\sin x + 2z'\cos x = 0$. Перепишемо його у вигляді $\frac{z''}{z'} + 2\frac{\cos x}{\sin x} = 0$. Звідси маємо $(\ln|z'| + 2\ln|\sin x|)' = 0$, звідки $\ln|z'| + 2\ln|\sin x| = \ln\widetilde{C}_1$, або $z'\sin^2 x = \widetilde{C}_1$. Інтегруючи це рівняння, знайдемо $z = -\widetilde{C}_1 ctgx + C_2$, і, як наслідок, загальний розв'язок вихідного рівняння буде $y = -\widetilde{C}_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$, або $y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$ $(C_1 = -\widetilde{C}_1)$.◄

Практичні завдання

а) Розв'язати дані рівняння Ейлера:

1. $x^2y'' + xy' - y = 0$.

2. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$.

3. $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$.

4. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$.

5. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

6. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$.

б) Проінтегрувати дані рівняння, якщо відомий один частинний розв'язок y_1 однорідного рівняння:

7. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0,$
$y_1 = e^{-2x}$.

8. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,$
$y_1 = x$.

9. $y'' + (tgx - 2ctgx)y' + 2ctg^2xy = 0,$
$y_1 = \sin x$.

10. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4,$
$y_1 = 1/x$.

11. $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3),$
$y_1 = x^2$.

12. $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x},$
$y_1 = \cos e^{-x}$.

Розрахункові завдання

Задача 30. Зінтегрувати подані нижче рівняння, які зводяться до рівнянь із сталими коефіцієнтами.

1. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
2. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.
3. $x^2y'' + xy' - y = 0$.
4. $xy'' + y' = 0$.
5. $x^2y''' - 2y' = 0$.
6. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.
7. $x^3y''' + xy' - y = 0$.
8. $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$.
9. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 0$.
10. $(x+2)^2y'' - 4(x+2)y' + 6y = 0$.
11. $x^4y^{IV} + 10y = 0$.
12. $x^3y''' - xy' - 3y = x^2$.
13. $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^3$.
14. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.
15. $x^3y''' + 8x^2y'' + 12xy' = \ln x$.
16. $x^4y^{IV} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' + y = x^2$.

17. $x^2y''-xy'-3y=5x^4$.

18. $x^2y''-xy'+y=8x^3$.

19. $x^2y''-4xy'+6y=0$.

20. $x^2y''+xy'+4y=10x$.

21. $x^3y''-2xy=6\ln x$.

22. $x^2y''-6y=5x^3+8x^2$.

23. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.

24. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.

25. $x^2y''+3xy'+y=0$.

26. $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

27. $y''+\dfrac{2xy'}{1+x^2}+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$.

28. $x^2y''+4xy'+2y=2\ln^2 x+12x$.

29. $(x+1)^3y'''-3(x+1)^2y''+4(x+1)y'-4y=0$.

30. $(x+1)^3y'''+9(x+1)^2y''+18(x+1)y'+6y=\ln(x+1)$.

Задача 31. Розв’язати дані лінійні рівняння із змінними коефіцієнтами, знаючи один або декілька частинних розв’язків відповідних однорідних рівнянь.

1. $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0, \quad y_1(x)=x$.
2. $(1-x)y''+xy'-y=0, \quad y_1(x)=e^x$.
3. $x^2y''\ln x+y=0, \quad y_1(x)=\ln x$.
4. $x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=0, \quad y_1(x)=xe^{2x}$.
5. $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0, \quad y_1(x)=x^2$.
6. $(1+x^2)y''+xy'-y=0, \quad y_1(x)=\sqrt{1+x^2}$.
7. $(4x^2-x)y''+(4x-2)y'-4y=12x^2-6x, \quad y_1(x)=2x-1$.
8. $xy'''-y''+xy'-y=x^2-3, \quad y_1(x)=x, y_2(x)=\cos x$.
9. $xy'''-y''-xy'+y=-2x^3, \quad y_1(x)=e^x, y_2(x)=x$.
10. $x^2y''\sin 2x-2xy'(\sin 2x-x)+2y(\sin 2x-x)=0, \quad y_1(x)=x$.
11. $(3x^2-x)y''+(3x-2)y'-3y=0, \quad y_1(x)=\dfrac{1}{x}$.
12. $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0, \quad y_1(x)=(x-\sqrt{1+x^2})^n$.
13. $xy''-(x+2)y'+y=0, \quad y_1(x)=x+2$.
14. $y''-(x^2+1)y=0, \quad y_1(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$.
15. $y''-xy'+2y=0, \quad y_1(x)=x^2-1$.
16. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0, \quad y_1(x)=e^{-x^2}$.
17. $y''+y'tgx-y\cos^2 x=0, \quad y_1(x)=e^{\sin x}$.
18. $(x^2-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y=0, \quad y_1(x)=e^x$.
19. $x(1-x)^2y''-2y=0, \quad y_1(x)=\dfrac{x}{1-x}$.
20. $xy''+(x^2+1)y'+2xy=0, \quad y_1(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.
21. $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, \quad y_1(x)=xe^x$.

22. $y'' - \dfrac{2y}{\cos^2 x} = 0, \quad y_1(x) = tgx.$

23. $x^2 y'' - 2xy' + (4x^2 + 2)y = 0, \quad y_1(x) = x\cos 2x$.

24. $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

25. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x, y_2(x) = \dfrac{1}{x}.$

26. $(x^2 - x)y'' + (2x-3)y' - 2y = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{1}{x^2}.$

27. $(2x-3)y''' + (7-6x)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y_1(x) = e^x, y_2(x) = x$.

28. $xy''' - y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}.$

29. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x, \quad y_1(x) = e^x.$

30. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1, \quad y_1(x) = \sin e^x.$

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд лінійного однорідного рівняння із змінними коефіцієнтами?
2. Як понизити порядок такого рівняння, коли відомо один частинний його розв’язок ?
3. Яку додаткову заміну треба зробити, щоб понизити порядок на дві одиниці, коли відомо два частинних розв’язки рівняння?
4. Як розв’язуються лінійні неоднорідні рівняння із змінними коефіцієнтами?
5. Як формулюється теорема про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння?
6. Коли можна застосовувати метод Лагранжа варіації сталих при розв’язуванні такого рівняння ?
7. Який загальний вигляд рівняння Ейлера?
8. Якою заміною воно зводиться до лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами?
9. Як можна відразу записати характеристичне рівняння для утвореного після заміни незалежної змінної ЛОДР з постійними коефіцієнтами, не виконуючи вказаної заміни?
10. Яка функція в такому випадку служить частинним розв’язком?
11. Як записати рівняння вищого порядку у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку?
12. Які властивості лінійного диференціального оператора?
13. Чому при неперервній правій частині $b(x)$ лінійного неоднорідного рівняння задача Коші завжди має розв’язок?

21. Інтегрування рівнянь за допомогою рядів

Література: [1], розд. VIII; [3], розд.VI, §2.

А. Розклад розв’язку в степеневий ряд.

Коли інтегрування лінійних диференціальних рівнянь за допомогою елементарних функцій провести не вдається, їх розв’язки вводяться через нові трансцендентні функції. Для визначення цих функцій часто користуються поданням розв’язку рівняння у вигляді степеневого ряду за зростаючими степенями $x - x_0$, де x_0 – початкове значення.

Нехай дано диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Якщо коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ подаються у вигляді рядів (такі функції називаються голоморфними), то рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...)y = 0 \tag{2}$$

(тут x_0=0). Розв’язок цього рівняння будемо шукати також у вигляді збіжного степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{3}$$

Підставляючи цей вираз для y і його похідних у (2), одержуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0. \tag{4}$$

Перемножаючи степеневі ряди, збираючи подібні члени і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при усіх степенях x у лівій частині (4), одержуємо ряд рівнянь:

$$\begin{array}{r|l} x^0 & 2\cdot 1\cdot C_2 + a_0C_1 + b_0C_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2\cdot C_3 + 2a_0C_2 + a_1C_1 + b_0C_1 + b_1C_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3\cdot C_4 + 3a_0C_3 + 2a_1C_2 + a_2C_1 + b_0C_2 + b_1C_1 + b_2C_0 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5}$$

Коефіцієнти C_0 і C_1 залишаються довільними і відіграють роль довільних сталих. Перше з рівнянь (5) дає C_2 , друге – C_3 , третє – C_4 і т.д.

На практиці зручно діяти таким чином: визначаємо за вказаною схемою два розв’язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$, причому для $y_1(x)$ виберемо C_0=1 і C_1=0, а для $y_2(x)$ вибираємо C_0=0 і C_1=1, що рівносильно таким початковим умовам: $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$; $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

Якщо початкові умови мають вигляд $y(0) = A$, $y'(0) = B$, то, очевидно, $y = Ay_1(x) + By_2(x)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - xy' - 2y = 0 \tag{6}$$

у вигляді степеневого ряду.

►Нехай $y_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kx^k$, тоді $y_1'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kC_kx^{k-1}$, $y_1''(x)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)C_kx^{k-2}$. Підставляючи y_1, y_1' і y_1'' у (6), одержуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)C_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}kC_kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k=0. \tag{7}$$

Для визначеності покладемо, що $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$; звідси знаходимо, що C_0=1, C_1=0. Далі зводячи в (7) подібні члени і прирівнюючи коефіцієнти при всіх степенях x, маємо:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2C_2-2C_0=0, \\ x^1 & 3\cdot 2C_3-1C_1-2C_1=0, \\ x^2 & 4\cdot 3C_4-2C_2-2C_2=0, \\ x^3 & 5\cdot 4C_5-3C_3-2C_3=0, \\ x^4 & 6\cdot 5C_6-4C_4-2C_4=0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \quad \text{звідки} \quad \begin{array}{l} C_2=1, \\ C_3=0, \\ C_4=\dfrac{1}{3}, \\ C_5=0, \\ C_6=\dfrac{C_4}{5}=\dfrac{1}{3\cdot 5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array}$$

Таким чином ,

$$y_1(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{15}x^6+\ldots \tag{8}$$

Аналогічно, беручи

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k \tag{9}$$

і початкові умови $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$, одержуємо $A_0=0$, $A_1=1$, а

$$y_2(x)=x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^k}{k!}=xe^{\frac{x^2}{2}}. \tag{10}$$

Остаточно, $y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$, де A і B – довільні сталі, причому $y(0)=A$, $y'(0)=B$.◄

Практичні завдання

а) Знайти три перші члени розкладу в степеневий ряд розв'язку даного диференціального рівняння при заданих початкових умовах:

1. $y''+xy=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

2. $y''-\sin xy'=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

3. $xy''+y\sin x=x, y(\pi)=1, y'(\pi)=0$.

4. $y''+x^2y=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

5. $y''-x^2y=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

6. $y'''+x\sin y=0, y(0)=\pi/2$, $y'(0)=0,\ y''(0)=0$.

7. $y''\ln x-\sin xy=0, y(e)=e^{-1}, y'(e)=0$.

б) Проінтегрувати за допомогою рядів такі диференціальні рівняння:

8. $y''+xy'+y=0$.

9. $y''-xy'+y-1=0,\quad y(0)=y'(0)=0$.

10. $y'' + xy = 0.$ **11.** $y'' - xy' + 2y = 0.$

12. $y'' + 4xy' + 2(1 + 2x^2)y = 0.$ **13.** $y'' - xy = 0.$

Б. Розклад розв'язку в узагальнений степеневий ряд.

Повертаючись до рівняння (1), розглянемо випадок, коли $p(x)$, $q(x)$ мають особливі точки – точки розриву. Якщо $p(x)$ і $q(x)$ – раціональні, тобто $p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$, $q(x) = \frac{q_1(x)}{q_0(x)}$, де p_1, q_1, p_0, q_0 – многочлени, то особливими будуть точки рівняння, в яких $p_0(x)=0$ або $q_0(x)=0$.

Особлива точка $x=0$ називається регулярною особливою точкою (особливою точкою першого роду), якщо вона є особливою для рівняння $x^2y'' + xp_1(x)y' + q_1(x)y = 0$, де $p_1(x)$ і $q_1(x)$ – голоморфні.

В околі особливої точки $x=x_0$ розв'язки рівняння (1) у вигляді степеневого ряду можуть не існувати. У цьому випадку розв'язки шукають у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x - x_0)^s, \tag{11}$$

де ρ і a_s – невизначені.

Вважатимемо для спрощення запису $x_0=0$, тоді в диференціальному рівнянні (1) функції $p(x)$ та $q(x)$ мають відповідно вигляд $p(x) = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s x^s}{x}$, $q(x) = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} q_s x^s}{x^2}$, де ряди в чисельниках збіжні.

Для визначення показника ρ і коефіцієнтів a_s треба підставити ряд (11) у рівняння (1), скоротити на x^ρ і прирівняти до нуля коефіцієнти при усіх степенях x. При цьому ρ визначається із так званого визначального рівняння

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \tag{12}$$

де

$$a_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \qquad b_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) \ . \tag{13}$$

Нехай ρ_1 і ρ_2 – корені визначального рівняння (12). Будемо розрізняти три випадки:

а) різниця $\rho_1 - \rho_2$ не є цілим числом. Тоді рівняння (1) має два розв'язки у вигляді узагальненого степеневого ряду: $y_1 = x^{\rho_1} \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$, $y_2 = x^{\rho_2} \sum_{s=0}^{\infty} A_s x^s$. Коефіцієнти a_s та A_s визначаються із нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, що одержуються в результаті підстановки функції-розв'язку і її послідовних похідних у рівняння (1) і прирівнювання відповідних коефіцієнтів. A_0 та a_0 не дорівнюють нулю. Вони довільні;

б) різниця $\rho_1 - \rho_2$ є цілим числом ($\neq 0$). Перший розв'язок: $y_1 = x^{\rho_1}\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s x^s$. Другий розв'язок – сума узагальненого степеневого ряду і логарифмічної частини: $y_2 = x^{\rho_2}\sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s x^s + Ay_1(x)\ln(x)$, де A може бути і нулем;

в) $\rho_1 = \rho_2$. Вигляд розв'язків y_1 та y_2 співпадає з попереднім випадком, але $A \neq 0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0, x > 0$.

►Запишемо рівняння у вигляді $y'' + \dfrac{3x-2x^2}{2x^2}y' - \dfrac{x+1}{2x^2}y = 0$ або $y'' + \dfrac{3-2x}{2x}y' - \dfrac{x+1}{2x^2}y = 0.$ Розв'язок будемо шукати у вигляді $y(x) = x^{\rho}\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s x^s; a_0 \neq 0.$

Для знаходження ρ випишемо визначальне рівняння $\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0,$ де $a_0 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-2x}{2} = \dfrac{3}{2},$ $b_0 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x+1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2},$ тобто $\rho(\rho-1) + \dfrac{3}{2}\rho - \dfrac{1}{2} = 0$, або $\rho^2 + \dfrac{1}{2}\rho - \dfrac{1}{2} = 0.$ Звідси $\rho_1 = \dfrac{1}{2}, \rho_2 = -1$ (випадок а).

Згідно наведеного правила беремо $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s x^s \quad (x > 0);$ $y_2(x) = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s x^s.$

Для того, щоб знайти a_s і A_s підставляємо по черзі y_1 і y_2 у вихідне рівняння і бачимо, що $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^s}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2s+3)}\right],$ $y_2(x) = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\dfrac{x^s}{s!}$ або $y_2(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Загальний розв'язок: $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$ де A і B – довільні сталі.◄

Практичні завдання

Проінтегрувати за допомогою узагальнених степеневих рядів дані рівняння:

14. $y'' + y'/(2x) + xy = 0.$

15. $xy'' - (x+1)y'/2 + y = 0.$

16. $2xy'' - (2x^2 + 1)y' + x^3y = 0.$

17. $y'' + (4y')/(3x) + 5y = 0$.

18. $y'' + \dfrac{3}{2x}y' + \dfrac{2}{3x}y = 0.$

Розрахункові завдання

Задача 32. Проінтегрувати за допомогою рядів дані рівняння.

1. $4xy'' + 2y' + y = 0$.
2. $2y'' - (1 + x^3)y = 0$.
3. $y'' = 2x^2 y + 3y'$.
4. $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$.
5. $y'' - x^2 y = 0$.
6. $y'' = ye^{2x}$.
7. $y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{9}y = 0$.
8. $y'' + \frac{1}{3x}y' + 4y = 0$.
9. $y'' + x^2 y = 0$.
10. $y'' - 3xy' + y - 3 = 0$.
11. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$.
12. $xy'' + \frac{4}{5}y' + 2y = 0$.
13. $y'' + \frac{5}{2x}y' + y = 0$.
14. $xy'' + \frac{1}{2}y' + xy = 0$.
15. $y'' + \frac{3}{4x}y' + 4y = 0$.
16. $xy'' - (x + \frac{1}{2})y' + y = 0$.
17. $y'' + xy' - 2x^2 y = 0$.
18. $y'' - (1 + x^2)y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 2$.
19. $y'' - ye^x = 0$.
20. $y'' = x^2 y - y', y(0) = 1, y'(0) = 0$.
21. $xy'' + \frac{1}{3}y' - y = 0$.
22. $y'' - \frac{x}{4}y' + 2y = 0$.
23. $xy'' + \frac{3}{4}y' + y = 0$.
24. $y'' + \frac{x}{1 + x^2}y' - \frac{y}{1 + x^2} = 0, y(0) = y'(0) = 1$.
25. $xy'' + \frac{2}{5}y' + 6y = 0$.
26. $xy'' + (x^2 + \frac{1}{2})y' + 2xy = 0$.
27. $xy'' - \frac{1}{2}y' - 3y = 0$.
28. $xy'' + \frac{2}{3}y' - xy = 0$.
29. $xy'' - 2y'/3 + 2y = 0$.
30. $y'' = ye^{-x}$.

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами?
2. Як записують степеневий ряд для даної функції в околі точки x_0?
3. Коли можна шукати розв’язок рівняння у вигляді степеневого ряду?
4. Як знайти невизначені коефіцієнти цього ряду?
5. Яка роль відводиться двом вільним змінним системи алгебраїчних рівнянь по визначенню коефіцієнтів ряду-розв’язку?
6. За якої умови для відшукання розв’язку рівняння, який не подається через елементарні функції, користуються узагальненим степеневим рядом? Який його вигляд?
7. Що таке визначальне рівняння? Як знайти його коефіцієнти?

8. Яка особлива точка називається регулярною?
9. Від чого залежить вигляд ФСР при розв’язуванні диференціального рівняння за допомогою узагальненого степеневого ряду?
10. Чи може нульовий розв’язок входити в склад ФСР?
11. Яка фундаментальна система розв’язків називається нормованою?
12. За якої умови однорідне лінійне рівняння другого порядку має частинний розв’язок, що задовольняє задані початкові умови і подається у вигляді степеневого ряду за степенями різниці $x-x_0$, де x_0 – початкове значення незалежної змінної? Як можна вибирати початкове значення шуканої функції і її похідної? У якій області збігається ряд, що подає розв’язок?
13. За якої умови однорідне лінійне рівняння другого порядку має в околі особливої точки $x=x_0$ хоча б один частинний розв’язок у вигляді узагальненого степеневого ряду? У якій області збігається цей степеневий ряд? У якому випадку, знаходячи розв’язок у вигляді узагальненого степеневого ряду, одержують розв’язок у вигляді звичайного степеневого ряду?

22. Періодичні розв'язки лінійних рівнянь

Література: [1], розд. VIII; [3], розд. VI, §1, п. 3.

Нехай дано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ – функція, періодична з періодом 2π, яка розкладається в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2}$$

Періодичні розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx). \tag{3}$$

Підставляємо ряд (3) у рівняння (1) і підбираємо його коефіцієнти так, щоб рівність (1) задовольнялась формально. Прирівнюючи вільні члени і коефіцієнти при cosnx і sinnx в лівій і правій частинах одержаної рівності, знайдемо

$$A_0 = \frac{a_0}{p_2};\ A_n = \frac{(p_2 - n^2)a_n - p_1 n b_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2};\ B_n = \frac{(p_2 - n^2)b_n + p_1 n a_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2},\ n = 1,2,.... \tag{4}$$

Перша з рівностей (4) дає необхідну умову розв'язку виду (3): якщо $a_0 \neq 0$, то необхідно, щоб $p_2 \neq 0$. Підставляючи (4) в (3), одержуємо

$$y(x) = \frac{a_0}{2p_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left(p_2 - n^2\right)a_n - p_1 n b_n\right)\cos nx + \left(\left(p_2 - n^2\right)b_n + p_1 n a_n\right)\sin nx}{\left(p_2 - n^2\right)^2 + p_1{}^2 n^2}. \tag{5}$$

Коли $p_1=0$ і $p_2=n^2$, де $n=1,2...$, то періодичний розв'язок буде існувати лише за умови

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = 0,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = 0. \tag{6}$$

Коефіцієнти A_k і B_k при $k \neq n$ знаходяться за формулами (4), а коефіцієнти A_n і B_n залишаються довільними, бо вираз $A_n\cos nx + B_n \sin nx$ є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

У випадку невиконання умов (6) рівняння (1) періодичних розв'язків не має (виникає резонанс). При $p_2=0$ і $a_0=0$, коефіцієнт A_0 залишається невизначеним і рівняння (1) має нескінченну множину періодичних розв'язків, які відрізняються на сталу.

Якщо права частини $f(x)$ рівняння (1) має період $2l \neq 2\pi$, то треба розкладати $f(x)$ за періодом $2l$ і шукати розв'язки у вигляді

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}). \tag{7}$$

Приклад 1. Знайти періодичні розв'язки рівняння: $y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

►Маємо: $p_1 = 0, p_2 = 4 = 2^2, a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{1}{n^2}$ $(n = 3,4,...)$. Функція

$f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ не містить резонуючого члена $a_2\cos 2x+b_2 sin 2x$, а значить, рівняння має періодичні розв'язки, причому нескінченну множину.

За формулами (4) знаходимо коефіцієнти: $A_0=A_n=0,\quad B_1=0,$ $B_n=\frac{1}{n^2(4-n^2)},\quad n=3,4,\ldots.$ Усі періодичні розв'язки даються формулою $y(x)=A_2\cos 2x+B_2\sin 2x-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2(n^2-4)}$, де A_2, B_2 – довільні сталі.◄

Практичні завдання

Знайти періодичні розв'язки (якщо вони існують) даних диференціальних рівнянь:

1. $y''+3y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3}$.

2. $y''+y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

3. $y''+y=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

4. $y''+y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

5. $y''-4y'+4y=\pi^2-x^2, -\pi<x<\pi$.

6. $y''+y=\cos x\cos 2x$.

7. $y''+4y=\cos^2 x$.

8. $y''-4y=|\cos\pi x|$.

9. $y''+9y=\sin^3 x$.

10. $y''-4y'+4y=\arcsin(\sin x)$.

Розрахункові завдання

Задача 33. Знайти періодичні розв'язки (якщо вони існують) даних диференціальних рівнянь.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\sin^2 x$.

2. $y''+3y=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3}$.

3. $y''+3y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3}$.

4. $y''+y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

5. $y''+2y=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

6. $y''+3y=2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3}$.

7. $y''-4y'+4y=-\pi^2+x^2, -\pi<x<\pi$.

8. $y''-4y=|\sin\pi x|$.

9. $y''+y=\sin^3 x$.

10. $y''+y=\sin x\sin 2x$.

11. $y''+2y=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

12. $y''+3y=-1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

13. $y''-4y'+2y=\pi^2-x^2, -\pi<x<\pi$.

14. $y''+y=1+\cos x\cos 2x$.

15. $y''+16y=\cos^2 x$.

16. $y''+27y=1+\sin^3 x$.

17. $y''-4y=2+|\cos\pi x|$.

18. $y''+4y=|\cos 2\pi x|$.

19. $y''-4y'+4y=\arccos(\cos x)$.

20. $y''-2y=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$.

21. $y'' + 2y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

22. $y'' - y = |\sin 2\pi x|$.

23. $y'' + 4y = \cos x \cos 2x$.

24. $y'' - y = \cos^2 x$.

25. $y'' - y = \sin^2 x$.

26. $y'' + y = \sin 2x \sin 4x$.

27. $y'' + y = \cos 2x \cos 4x$.

28. $y'' - y = \sin x \cos^2 x$.

29. $y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

30. $y'' + 9y = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Запитання для самоперевірки

1. Який тригонометричний ряд називають рядом Фур'є функції $f(x)$?
2. Як обчислюються коефіцієнти цього ряду?
3. Який вигляд має розклад в ряд Фур'є функцій, заданих на відрізках $[-\pi; \pi]$, $[-l;l]$?
4. Яка особливість розкладу в ряд Фур'є періодичних функцій?
5. Яка особливість розкладу в ряд Фур'є парних (непарних) функцій?
6. Які вимоги накладаємо на функцію $f(x)$ – праву частину лінійного неоднорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами для відшукання періодичних розв'язків даного рівняння?
7. В якій формі шукаємо періодичний розв'язок рівняння?
8. Як вивести в загальному вигляді вирази для обчислення невизначених коефіцієнтів для $L[y]=y'' +qy$?
9. Як вивести в загальному вигляді вирази для обчислення невизначених коефіцієнтів для $L[y]=y'' +p_1 y' +p_2 y$?
10. За якої умови рівняння періодичних розв'язків не матиме?
11. Що таке резонансний член правої частини рівняння?
12. Коли рівняння має нескінченну множину періодичних розв'язків?
13. При яких значеннях коефіцієнтів p і q усі розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ є періодичними функціями від x?

23. Системи диференціальних рівнянь

Література: [1], розд. IX, §1, 2; розд. X, §1-3; [3], розд. VII, §2.

А. Канонічною системою звичайних диференціальних рівнянь називається система вигляду

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ y_2^{(m_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_k^{(m_k-1)}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Канонічну систему з k рівнянь вищих порядків можна замінити еквівалентною їй системою $n=m_1+m_2+\ldots+m_k$ рівнянь першого порядку відносно похідних всіх n шуканих функцій (нормальна система). Зокрема, одне рівняння n-ого порядку приводять до системи n диференціальних рівнянь.

Нормальна система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{2}$$

Приклад 1. Звести диференціальне рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0$ до нормальної системи.

►Покладемо $x=x_1$, $\frac{dx}{dt}=x_2$; тоді $\frac{dx_1}{dt} = x_2$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$. Підставимо ці вирази в дане рівняння, одержимо: $\frac{dx_2}{dt} + p(t)x_2 + q(t)x_1 = 0$. Нормальна система матиме вигляд $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -p(t)x_2 - q(t)x_1. \end{cases}$ ◄

Розв'язком системи на (a,b) називається сукупність n функцій $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$, визначених і неперервно диференційовних на (a,b), якщо вони перетворюють рівняння системи в тотожності, справедливі для всіх значень $t\in(a,b)$.

Практичні завдання

Покажіть, що дані системи функцій є розв'язками даних систем диференціальних рівнянь:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2+t}{t}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{t^2}, \\ x_2 = t\ln t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2e^{y}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x, \\ z = 2e^{x}. \end{cases}$

Задачею Коші для системи (2) називається задача знаходження розв'язку $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$,…, $y_n=y_n(x)$ цієї системи, що задовольняє початкові умови: $y_1(x_0)=y_1^0$, $y_2(x_0)=y_2^0$,…,$y_n(x_0)=y_n^0$, де x_0, y_1^0, y_2^0, …, y_n^0 – задані числа.

Теорема Коші (існування і єдиності розв'язку нормальної системи).

Якщо функції f_i, i=1, 2, …, n, визначені в області зміни x, y_1, y_2,…,y_n, і існує окіл точки (x_0, y_1^0, y_2^0,…, y_n^0), в якому функції f_i: а) неперервні; б) мають обмежені частинні похідні по змінних y_1, y_2, …, y_n, то знайдеться інтервал ($x_0 - h< x < x_0+h$) зміни x, в якому існує єдиний розв'язок нормальної системи, що задовольняє початковим умовам.

Система n диференційовних функцій $y_i=y_i(x, C_1, C_2, …, C_n)$, i=1, 2, …, n, C_i – довільні сталі, називається загальним розв'язком нормальної системи , якщо: 1) для будь-яких допустимих значень C_1, C_2,…,C_n ця система функцій перетворює (2) в тотожність; 2) в області, де виконуються умови теореми Коші, дані функції розв'язують будь-яку задачу Коші.

Інтегралом нормальної системи (2) називається функція $\varphi(x, y_1, y_2,…, y_n)$, визначена і неперервна разом з своїми частинними похідними першого порядку $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_к}$, $k=\overline{1,n}$, в області, якщо при підстановці в неї довільного розв'язку $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ системи (2) вона набуває сталого значення (тобто функція $\varphi(x, y_1, y_2,…, y_n)$ залежить від вибору розв'язку $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, а не від змінної x). Першим інтегралом нормальної системи (2) називається рівність $\varphi(x, y_1, y_2,…, y_n)=C$, де $\varphi(x, y_1, y_2,…, y_n)$ – інтеграл системи (2) , а C – довільна стала.

Приклад 2. Показати, що функція

$$\varphi(x, y_1, y_2) = \frac{y_2}{x} - y_1 , \tag{3}$$

визначена в області D: $x\neq 0$, $-\infty< y_1, y_2<+\infty$ є інтегралом системи рівнянь

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{x},\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + \frac{y_2}{x}, \tag{4}$$

якщо загальним розв'язком цієї системи є

$$y_1 = C_1x, y_2 = C_1x^2 + C_2x . \tag{5}$$

►Підставляючи (5) в (3), одержуємо $\varphi(x,\ y_1,\ y_2)=\ \varphi(x,\ C_1x,\ C_1x^2+C_2x)=$

$=\dfrac{C_1x^2+C_2x}{x}$ − $C_1x=C_2$ в області D. Отже, функція (3) в області D є інтегралом системи рівнянь (4), а значить, перший інтеграл цієї системи такий: $\dfrac{y_2}{x}$ − $y_1=C$, де C – довільна стала.◄

Нормальна система має безліч перших інтегралів. Загальним інтегралом нормальної системи називається сукупність n незалежних перших інтегралів цієї системи.

Б. Метод виключення (зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння).

Розглянемо систему двох рівнянь $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by+f(t),\\ \dfrac{dy}{dt}=cx+dy+g(t),\end{cases}$ де a, b, c, $d \in R$; $f(t)$, $g(t)$ – задані функції, $x(t)$, $y(t)$ − шукані функції.

З першого рівняння системи знаходимо $y=\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)$ і підставляємо в друге рівняння системи замість y, а замість $\dfrac{dy}{dt}$ − похідну від правої частини останньої рівності. Одержуємо рівняння другого порядку відносно $x(t)$: $A\dfrac{d^2x}{dt^2}+B\dfrac{dx}{dt}+Cx+P(t)=0,$ де A, B, C – сталі. Звідси знаходимо $x=x(t, C_1, C_2)$. Підставивши знайдений вираз для x і $\dfrac{dx}{dt}$ у вираз для y, знайдемо і цю функцію.

Метод виключення використовується для однорідних і неоднорідних систем.

Приклад 3. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+8y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y,\end{cases}$ $x(0)=6, y(0)=-2.$

►З другого рівняння системи знаходимо $x=-3y-\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dx}{dt}=-3\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Підставляючи значення x і $\dfrac{dx}{dt}$ у перше рівняння системи , одержимо рівняння $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=0,$ загальний розв'язок якого $y=C_1e^t+C_2e^{-t}$ $(x=-3y-\dfrac{dy}{dt})$. Тоді $x=-4C_1e^t-2C_2e^{-t}$. Це загальний розв'язок системи.

При початкових значеннях одержимо систему рівнянь для визначення C_1 і C_2: $\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$ $C_1 = -1,\ C_2 = -1$. Розв'язок задачі Коші: $\begin{cases} x = 4e^t + 2e^{-t}, \\ y = -e^t - e^{-t}. \end{cases}$ ◀

Практичні завдання

Методом виключення розв’язати дані системи рівнянь чи задачу Коші для систем рівнянь:

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 7y - z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

В. Знаходження інтегровних комбінацій.

Суть цього методу: з допомогою доцільних арифметичних операцій (додавання, віднімання, ділення, множення) з системи (2) утворюють нову систему рівнянь, кожне з яких (інтегровна комбінація) інтегрується безпосередньо. Інтегруючи їх, одержуємо перші інтеграли системи. Задача інтегрування системи розв'язана, якщо відомо n незалежних перших інтегралів. Наприклад, два перших інтеграли $\varphi_1(t, x_1, x_2) = C_1$, $\varphi_2(t, x_1, x_2) = C_2$ незалежні, якщо якобіан $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\neq 0.$

Для знаходження інтегровних комбінацій треба подати систему диференціальних рівнянь (2) в симетричній формі: $\dfrac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\dfrac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\dfrac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)}$. Для розв'язання цієї системи або беруть пари відношень, які допускають відокремлення змінних, або використовують похідні пропорції: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+...+\lambda_n b_n}$, де коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ довільні і їх вибирають так, щоб чисельник був диференціалом знаменника, або чисельник був повним диференціалом, а знаменник дорівнював нулю.

Приклад 4. Розв'язати систему: $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2(x_1^2+x_2^2)t,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1x_2t.\end{cases}$

►Додаючи рівняння, маємо $\dfrac{d(x_1+x_2)}{dt}=(x_1+x_2)^2 2t$. Відокремлюючи змінні, інтегруємо: $-\dfrac{1}{x_1+x_2}=t^2-C_1$ або $\dfrac{1}{x_1+x_2}+t^2=C_1$. Віднімаючи рівняння, одержимо $\dfrac{d(x_1-x_2)}{dt}=(x_1-x_2)^2 2t$, звідки $\dfrac{1}{x_1-x_2}+t^2=C_2$. Отже, знайдено два перших інтеграли даної системи: $\varphi_1(t,x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1+x_2}+t^2=C_1$, $\varphi_2(t,x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1-x_2}+t^2=C_2$, які є незалежними, бо якобіан

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2}\\ -\dfrac{1}{(x_1-x_2)^2} & \dfrac{1}{(x_1-x_2)^2}\end{vmatrix}=-\frac{2}{(x_1^2-x_2^2)^2}\neq 0.$$

Загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь: $\dfrac{1}{x_1+x_2}+t^2=C_1$, $\dfrac{1}{x_1-x_2}+t^2=C_2$. Розв'язуючи його відносно невідомих функцій, одержуємо загальний розв'язок системи: $x_1 = \dfrac{C_1 + C_2 - 2t^2}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}$, $x_2 = \dfrac{C_2 - C_1}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}$.◄

Приклад 5. Зінтегрувати систему рівнянь: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-1}{z}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}$.

►Приведемо цю систему до симетричної форми: $\dfrac{dy}{z-1} = \dfrac{dx}{z}$, $\dfrac{dz}{1} = \dfrac{dx}{y-x}$ або

$$\frac{dx}{z(y-x)} = \frac{dy}{(z-1)(y-x)} = \frac{dz}{z}. \tag{6}$$

Складемо відношення $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy - dx}{(z-1)(y-x) - z(y-x)}$ або $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{d(y-x)}{y-x}$, звідки

$$(y-x)z = C_1. \tag{7}$$

Прирівнюємо перший і останній дріб системи (6), замінивши знаменник першого дробу через його значення C_1 з (7): $\dfrac{dx}{C_1} = \dfrac{dz}{z}$, звідки $z = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}$, або, замінивши C_1 з (7), $z = C_2 e^{\frac{x}{(y-x)z}}$.

Загальним інтегралом є: $(y-x)z = C_1$, $z = C_2 e^{\frac{x}{(y-x)z}}$.◄

Приклад 6. Знайти загальний інтеграл системи:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{8}$$

►Побудуємо дві інтегровні комбінації, користуючись властивостями ряду рівних відношень. Додаючи в системі чисельники й знаменники дробів, матимемо $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x} = \dfrac{dx + dy + dz}{0}, dx + dy + dz = 0$ або $d(x + y + z) = 0$, тобто

$$x + y + z = C_1. \tag{9}$$

Тепер помножимо в системі (8) чисельники й знаменники дробів відповідно на 2*x*, 2*y*, 2*z* і додамо чисельники й знаменники одержаних дробів. Тоді $\dfrac{2xdx}{2x(z-y)} = \dfrac{2ydy}{2y(x-z)} = \dfrac{2zdz}{2z(y-x)} = \dfrac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0}$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{10}$$

Перші інтеграли (9) і (10) утворюють загальний інтеграл системи (8).◄

Практичні завдання

а) Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos x \sin y. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} e^t \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ e^t \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y}. \end{cases}$

б) Знайти загальний розв'язок систем рівнянь:

21. $\dfrac{dt}{2x} = \dfrac{dx}{-\ln t} = \dfrac{dy}{\ln t - 2x}$. **22.** $\dfrac{dx}{xt} = \dfrac{dy}{-yt} = \dfrac{dt}{xy}$. **23.** $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{ty}$.

24. $\dfrac{dt}{4y-5x} = \dfrac{dx}{5t-3y} = \dfrac{dy}{3x-4t}$. **25.** $\dfrac{dx}{3t-4y} = \dfrac{dt}{2y-3x} = \dfrac{dy}{4x-2t}$.

Г. Метод Ейлера інтегрування однорідних лінійних систем з сталими коефіцієнтами.

Нехай є система трьох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \; . \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{cases} \qquad (11)$$

Шукаємо розв'язок системи (11) у вигляді $x = \lambda e^{kt}$, $y = \mu e^{kt}$, $z = \nu e^{kt}$, λ, μ, ν, k − сталі, які необхідно визначити. Підставляючи в (11) і скорочуючи на e^{kt}, одержимо систему рівнянь для визначення λ, μ, ν:

$$\begin{cases} (a-k)\lambda + b\mu + c\nu = 0, \\ a_1\lambda + (b_1 - k)\mu + c_1\nu = 0, \\ a_2\lambda + b_2\mu + (c_2 - k)\nu = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Система (12) має ненульовий розв'язок, якщо її визначник Δ=0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-k & b & c \\ a_1 & b_1 - k & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - k \end{vmatrix} = 0 \; . \qquad (13)$$

Рівняння (13) називається характеристичним.

а) Корені k_1, k_2, k_3 характеристичного рівняння дійсні і різні.

Підставивши в (12) замість k число k_1 і розв'язавши систему (12), одержимо числа λ_1, μ_1, ν_1. Потім, поклавши в (12) $k = k_2$, одержимо числа λ_2, μ_2, ν_2, і, нарешті, при $k=k_3$ одержимо λ_3, μ_3, ν_3.

Відповідно трьом наборам чисел λ, μ, ν одержимо три частинні розв'язки:

1) $x_1=\lambda_1 e^{k_1 t}$, $y_1=\mu_1 e^{k_1 t}$, $z_1=\nu_1 e^{k_1 t}$;

2) $x_2=\lambda_2 e^{k_2 t}$, $y_2=\mu_2 e^{k_2 t}$, $z_2=\nu_2 e^{k_2 t}$;

3) $x_3=\lambda_3 e^{k_3 t}$, $y_3=\mu_3 e^{k_3 t}$, $z_3=\nu_3 e^{k_3 t}$.

Загальний розв'язок системи (11) має вигляд: $$\begin{aligned} x&=C_1\lambda_1 e^{k_1 t}+C_2\lambda_2 e^{k_2 t}+C_3\lambda_3 e^{k_3 t},\\ y&=C_1\mu_1 e^{k_1 t}+C_2\mu_2 e^{k_2 t}+C_3\mu_3 e^{k_3 t},\\ z&=C_1\nu_1 e^{k_1 t}+C_2\nu_2 e^{k_2 t}+C_3\nu_3 e^{k_3 t}.\end{aligned}$$

Приклад 7. Розв'язати систему: $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+5y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+3z.\end{cases}$$

►Складаємо характеристичне рівняння: $\det\begin{pmatrix} 3-k & -1 & 1\\ -1 & 5-k & -1\\ 1 & -1 & 3-k\end{pmatrix}=0$ або $k^3-11k^2+36k-36=0$, звідки $k_1=2, k_2=3, k_3=6$. Цим кореням відповідають числа: $$\begin{aligned} &\lambda_1=1, \quad \mu_1=0, \quad \nu_1=-1;\\ &\lambda_2=1, \quad \mu_2=1, \quad \nu_2=1;\\ &\lambda_3=1, \quad \mu_3=-2, \quad \nu_3=1.\end{aligned}$$ Частинні розв'язки:

$x_1=e^{2t}$, $y_1=0$, $z_1=-e^{2t}$;

$x_2=e^{3t}$, $y_2=e^{3t}$, $z_2=e^{3t}$;

$x_3=e^{6t}$, $y_3=-2e^{6t}$, $z_3=e^{6t}$.

Загальний розв'язок системи: $$\begin{aligned} x&=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{6t},\\ y&=C_2e^{3t}-2C_3e^{6t},\\ z&=-C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{6t}.\end{aligned}$$ ◄

б) Випадок кратних коренів.

Приклад 8. Розв'язати систему: $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4y-x.\end{cases}$$

►Характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 2-k & 1\\ -1 & 4-k\end{vmatrix}=0$, або $k^2-6k+9=0$ має кратний корінь $k_1=k_2=3$. Розв'язок шукаємо у вигляді: $x=(\lambda_1+\mu_1 t)e^{3t}$,

$y=(\lambda_2+\mu_2 t)e^{3t}$.

Підставивши x і y у перше рівняння системи, одержуємо $3(\lambda_1+\mu_1 t)+\mu_1=2(\lambda_1+\mu_1 t)+(\lambda_2+\mu_2 t)$. Прирівнюючи тут коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частині, одержуємо: $3\lambda_1+\mu_1=2\lambda_1+\lambda_2$, $3\mu_1=2\mu_1+\mu_2$, звідки $\lambda_2=\lambda_1+\mu_1$, $\mu_2=\mu_1$.

Величини λ_1 і μ_1 залишаються довільними. Позначивши їх відповідно через C_1 і C_2, одержуємо загальний розв'язок системи: $x=(C_1+C_2 t)e^{3t}$, $y=(C_1+C_2+C_2 t)e^{3t}$.

Зауваження 1. Коли підставимо x і y у друге рівняння системи, то одержимо цей же результат.

Зауваження 2. У загальному випадку той розв'язок однорідної лінійної системи з n шуканими функціями $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, що відповідає кореню k кратності s характеристичного рівняння, шукають у вигляді $x_i=\widetilde{P}_i(t)e^{kt}$, де $\widetilde{P}_i$ — многочлен степеня $s-m$ з невизначеними коефіцієнтами, $m=n-r$, $r=rang(A-kE)$, A — основна матриця системи, E — одинична матриця n-го порядку.◄

в) Випадок комплексних коренів характеристичного рівняння.

Приклад 9. Розв'язати систему: $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2y-z,\\ \dfrac{dz}{dx}=y+2z.\end{cases}$

►Шукаємо розв'язок у вигляді: $y=\gamma_1 e^{kx}$, $z=\gamma_2 e^{kx}$. Характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix}2-k & -1\\ 1 & 2-k\end{vmatrix}=0$, або $k^2-4k+5=0$ має корені $k_1=2+i$, $k_2=2-i$.

Побудуємо комплексний розв'язок вигляду $y=\gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z=\gamma_2 e^{(2+i)x}$, який відповідає характеристичному числу $k_1=2+i$. Числа γ_1 і γ_2 визначаємо з рівняння $-i\gamma_1-\gamma_2=0$. Покладаючи $\gamma_1=1$, маємо $\gamma_2=-i$, тому $y=e^{(2+i)x}=e^{2x}(\cos x+i\sin x)$, $z=-ie^{(2+i)x}=e^{2x}(\sin x-i\cos x)$.

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо два дійсних лінійно незалежних частинних розв'язки: $y_1=e^{2x}\cos x$, $z_1=e^{2x}\sin x$; $y_2=e^{2x}\sin x$, $z_2=-e^{2x}\cos x$. Загальним розв'язком системи є $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $z=e^{2x}(C_1\sin x-C_2\cos x)$.◄

Практичні завдання

Методом Ейлера знайти загальний розв'язок даних систем, і де вказано, виділити розв'язок, що відповідає заданим початковим умовам:

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \ x(0) = 0, \ y(0) = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x, \ x(0) = 0, \ y(0) = -1. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \ x(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$ **32**. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2z - 3x, \ x(0) = 0, \ y(0) = 0, \ z(0) = 1. \end{cases}$

Д. Метод варіації сталих розв'язування лінійних неоднорідних систем диференціальних рівнянь.

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + tgt. \end{cases}$

►Розв'яжемо однорідну систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \end{cases}$ звівши її до одного рівняння другого порядку: $y = \dfrac{dx}{dt}, \ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$ Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_1 = i, \ k_2 = -i.$ Загальний розв'язок лінійної однорідної системи має вигляд $\begin{cases} \overline{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ \overline{y} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$

Для знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи будемо вважати в загальному розв'язку лінійної однорідної системи C_1 і C_2 функціями від t, тобто: $\begin{cases} x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \\ y = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t. \end{cases}$

Підставимо значення $x(t)$ і $y(t)$ у вихідну систему: $\begin{cases} -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_1' \cos t + C_2' \sin t = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + tg^2 t - 1, \\ -C_1 \cos t - C_2 \sin t - C_1' \sin t + C_2' \cos t = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + tgt. \end{cases}$ Одержимо систему відносно невідомих функцій $C_1'(t)$ і $C_2'(t)$: $\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = tg^2 t - 1, \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = tgt. \end{cases}$

Розв'яжемо її методом Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$,

$C_1'(t) = \begin{vmatrix} tg^2 t - 1 & \sin t \\ tgt & \cos t \end{vmatrix} = -\cos t$, $C_2'(t) = \begin{vmatrix} \cos t & tg^2 t - 1 \\ -\sin t & tgt \end{vmatrix} = \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t}$. Звідси

$C_1(t) = \int -\cos t dt = -\sin t + C_1$, $C_2(t) = \int \dfrac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = \begin{vmatrix} \cos t = z, \\ -\sin t dt = dz \end{vmatrix} =$

$= -\int \dfrac{1 - z^2}{z^2} dz = \dfrac{1}{z} + z + C_2 = \dfrac{1}{\cos t} + \cos t + C_2$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи матиме вигляд: $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + tgt$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2$. ◄

Практичні завдання

Розв'язати системи методом варіації сталих:

34. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - y = e^{-3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t + 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, x(0) = 1, y(0) = -2. \end{cases}$

Е. Матричний метод.

Цим методом безпосередньо знаходиться фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь у вигляді експоненти e^{At}.

Властивості матричної експоненти $e^{A} = E + \dfrac{A}{1!} + \dfrac{A^2}{2!} + ... + \dfrac{A^n}{n!} + ...$:

1) $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B} = e^{B} \cdot e^{A}$;

2) $A = T^{-1} J_A T \Rightarrow e^{A} = T^{-1} e^{J_A} T$ (тут J_A — жорданова форма матриці A);

3) матриця $X(t) = e^{At}$ є розв'язком матричної задачі Коші $\dfrac{dX}{dt} = AX$, $X(0) = E$ (E — одинична матриця), тобто є фундаментальною матрицею системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Для відшукання розв'язків системи рівнянь знаходять матрицю e^{At} за матрицею A, попередньо подавши її у вигляді $A = T^{-1} J_A T$ та скориставшись рівністю $e^{At} = T^{-1} e^{J_A t} T$, де $J_A = diag\big(J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), ..., J_{m_p}(\lambda_p)\big)$,

$$J_{m_i}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{bmatrix},$$

$\sum\limits_{i=1}^{p} m_i = n$, причому власні значення $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ не обов'язково різні. Квазідіагональна матриця J_A називається жордановою формою матриці A, а матриця $J_{m_i}(\lambda)$ — жордановою клітиною (блоком) матриці A. Якщо $m_i = 1$, то жорданова клітина називається простою. Загальна кількість p жорданових клітин дорівнює кількості лінійно незалежних власних векторів матриці A. Власному значенню λ відповідає $m = n - rang(A - \lambda E)$ жорданових клітин.

Записавши матрицю $J_{m_i}(\lambda_i)$ у вигляді $J_{m_i}(\lambda_i) = \lambda_i E + H$, де

$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$, дістанемо, що $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{Ht}$. Матрицю e^{Ht} знаходимо за допомогою ряду матричної експоненти, оскільки $H^{m_i} = 0$, де m_i — порядок клітини $J_{m_i}(\lambda_i)$.

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь: $\frac{dX}{dt} = AX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

►Знаходимо власні значення матриці A з рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ — корені різні, для них жорданові клітини прості, тому жорданова форма J_A діагональна.

Знайдемо матрицю перетворення $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ таку, щоб $A = T^{-1} J_A T$, де $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для знаходження матриці T одержуємо рівняння $TA = J_A T$ або $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$, звідки $t_{11} + 2t_{12} = 0$, $t_{21} + t_{22} = 0$. Одним з розв'язків є $t_{11} = 2,\ t_{12} = -1,\ t_{21} = -1,\ t_{22} = 1$, тому за T беремо матрицю $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det T \neq 0$. Для неї T^{-1} має вигляд $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, і, значить, рівність $A = T^{-1} J_A T$ запишеться як $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Враховуючи рівність $e^{At} = T^{-1} e^{J_A t} T$, маємо:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, будь-який розв'язок $X(t)$ даної системи рівнянь, такий що $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, має вигляд $X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot X_0$.◄

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2. \end{cases}$

►Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, тоді $\dfrac{dX}{dt} = AX$. З рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ знаходимо власні значення матриці A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ — двократний корінь. Оскільки ранг матриці $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ дорівнює 1, то жорданова форма матриці A має вигляд жорданової клітини другого порядку $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Перетворюючу матрицю $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ для матриці A знаходимо, таким чином, з рівності $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$. Для визначення t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22} маємо лінійну систему рівнянь $3t_{11} - t_{12} = 2t_{11} + t_{21}$, $t_{11} + t_{12} = 2t_{12} + t_{22}$, $3t_{21} - t_{22} = 2t_{21}$, $t_{21} + t_{22} = 2t_{22}$, яка еквівалентна системі $\begin{cases} t_{11} - t_{12} - t_{21} = 0, \\ t_{21} - t_{22} = 0. \end{cases}$ Одним з розв'язків цієї системи є: $t_{11} = 3$; $t_{12} = 2$; $t_{21} = 1$; $t_{22} = 1$. Отже, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Оскільки $A = T^{-1} J_A T$, то $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Але $e^{J_A t} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тому $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$. Будь-який розв'язок $X(t)$ даної системи рівнянь, такий що $X(0) = X_0$, має вигляд $X(t) = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix} \cdot X_0$.◄

Зауваження. Окрім розглянутих у двох попередніх прикладах жорданових форм $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (а) та $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (б) дійсних 2×2-матриць A з дійсними різними λ_1, λ_2 та дійсними рівними $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ власними значеннями відповідно зустрічаються ще два їх типи: $J=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$ (в) і $J=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ (г). Випадок (в) відповідає дійсним рівним власним значенням λ_0 діагональної матриці A, випадок (г) — комплексним спряженим власним значенням $\alpha \pm \beta i$ (дійсна жорданова форма).

Практичні завдання

Розв'язати системи рівнянь:

43. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1-2x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1+4x_2.\end{cases}$ **44.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+4x_2.\end{cases}$ **45.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1+4x_2.\end{cases}$

46. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2.\end{cases}$ **47.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1-2x_2.\end{cases}$ **48.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-2x_1-2x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_1+4x_2.\end{cases}$

49. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2-x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1+2x_2-x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-x_2+4x_3.\end{cases}$ **50.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_2-4x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=-x_1-2x_3.\end{cases}$

51. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+12x_2-4x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-3x_2+x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=-x_1-12x_2+6x_3.\end{cases}$ **52.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=3x_1+x_3.\end{cases}$

53. $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2-4x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-12x_1+5x_2+12x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=10x_1-3x_2-9x_3.\end{cases}$ **54.** $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=10x_1-3x_2-9x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-18x_1+7x_2+18x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=18x_1-6x_2-17x_3.\end{cases}$

Розрахункові завдання

Задача 34. Розв'язати системи диференціальних рівнянь.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=7x+3y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+6y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4y-x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x-y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5y-2x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-6x-5y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x-5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+2y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=y-x. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4y-6x. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-2x, \\ \dfrac{dy}{dt}=2y-4x. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=y-4x. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=8y-x, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-9y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+8y. \end{cases}$

$$28.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x-4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y.\end{cases}\qquad 29.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}\qquad 30.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=y-2x.\end{cases}$$

Задача 35. Знайти загальний розв’язок неоднорідних систем диференціальних рівнянь, а також частинний, якщо вказано початкові умови.

$$1.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2e^{t}.\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y+8t,\\ \dfrac{dy}{dt}=5x-y.\end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+2\sin t.\end{cases}\qquad 4.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=t^{2}+6t+1,\\ \dfrac{dy}{dt}-x=-3t^{2}+3t+1.\end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+3x-y=e^{2t},\\ \dfrac{dy}{dt}+x+5y=e^{t}.\end{cases}\qquad 6.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+4y+\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t.\end{cases}$$

$$7.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x+2y+40e^{t},\\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y-9e^{-t}.\end{cases}\qquad 8.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x+4y=1+4t,\\ \dfrac{dy}{dt}+x-y=\dfrac{3}{2}t^{2}.\end{cases}$$

$$9.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x-y=-e^{2t},\\ \dfrac{dy}{dt}+3x-2y=6e^{2t}.\end{cases}\qquad 10.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-y-2x+\cos t+\sin t, x(0)=1, y(0)=-2.\end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{1}{\cos t}.\end{cases}\qquad 12.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^{t}-1},\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+3y-\dfrac{3}{e^{t}-1}.\end{cases}$$

$$13.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-5\sin t.\end{cases}\qquad 14.\ \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y+16te^{t},\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-2y.\end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos t. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^t. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + t, x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + e^t. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} - x = t. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y - 2x = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - 2y = -5e^t \sin t. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x = y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} + y = x + e^t, x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 4y + 2x = 4t + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2, x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = -\sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = \cos t, x(0) = \dfrac{1}{2}, y(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Задача 36. Розв’язати системи рівнянь методом Ейлера і матричним методом.

1. $$\begin{cases} x' = 5x - y - 4z, \\ y' = -12x + 5y + 12z, \\ z' = 10x - 9y - 9z. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x' = 3x - y - z, \\ y' = x + y + z, \\ z' = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x' = 5x - y - 4z, \\ y' = -12x + 5y + 12z, \\ z' = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x' = 10x - 3y - 9z, \\ y' = -18x + 7y + 18z, \\ z' = 18x - 6y - 17z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = 2y + 3z - x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = y - 2x - z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 3x - 2y - 3z, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = y - 2x - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 3x - 2y - z, \\ y' = 3x - 4y - 3z, \\ z' = 2x - 4y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = -y + z + 2x, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x + 2z - y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = x + y + z, \\ z' = 4x - y + 4z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z, \\ y' = -x, \\ z' = x + y - z. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 5x - 6y + z, \\ y' = x - z, \\ z' = -6z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 3x + 12y - 4z, \\ y' = -x - 3y + z, \\ z' = -x - 12y + 6z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 12x - 4y - 12z, \\ z' = -4x + y + 5z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 21x - 8y - 19z, \\ y' = 18x - 7y - 15z, \\ z' = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 3x - y - 3z, \\ y' = -6x + 2y + 6z, \\ z' = 6x - 2y - 6z. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = x - z, \\ y' = -6x + 2y + 6z, \\ z' = 4x - y - 4z. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x, \\ y' = z + x, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд має лінійна система? Коли вона називається однорідною; неоднорідною?
2. За якої умови задача Коші для лінійної системи має єдиний розв’язок? В якому інтервалі існують розв’язки? Чому лінійна система не має особливих розв’язків?
3. Які розв’язки однорідної лінійної системи називаються лінійно незалежними? Що таке фундаментальна система розв’язків? Чи може нульовий

розв'язок входити в ФСР? Яка умова необхідна і достатня для того, щоб дана система розв'язків була фундаментальною? Яка фундаментальна система називається нормованою в заданій точці $x = x_0$?

4. Як побудувати загальний розв'язок однорідної лінійної системи, якщо відома фундаментальна система розв'язків? В якій області визначено загальний розв'язок?
5. Як знайти загальний розв'язок неоднорідної лінійної системи, якщо відомо один її частинний розв'язок і загальний розв'язок відповідної однорідної системи?
6. В чому полягає метод Лагранжа знаходження загального розв'язку неоднорідної лінійної системи?
7. Як побудувати однорідну лінійну систему, яка має задану фундаментальну систему розв'язків?
8. В чому полягає метод Ейлера інтегрування лінійних систем з сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків від вибору коренів характеристичного рівняння? Як впливають на структуру фундаментальної системи розв'язків елементарні дільники матриці коефіцієнтів системи?
9. В якому випадку систему диференціальних рівнянь можна проінтегрувати шляхом послідовного інтегрування рівнянь, що входять до її складу? В чому полягає метод виключення?
10. Що таке метод інтегровних комбінацій?
11. Яка система рівнянь називається нормальною? Як звести одне рівняння вищого порядку до нормальної системи рівнянь?
12. Що таке система диференціальних рівнянь в симетричній формі? Що називається її інтегралом; першим інтегралом; загальним інтегралом?
13. В чому полягає матричний метод інтегрування однорідної лінійної системи з сталими коефіцієнтами?
14. Який вигляд матриць розв'язків лінійної системи, в якій матриця A має діагональну форму?

Теми доповідей, рефератів, курсових робіт

1. Метод інваріанту для лінійних диференціальних рівнянь 2-ого порядку із змінними коефіцієнтами. [25, 1]
2. Рівняння Бесселя та його застосування. [25, 13, 19, 32]
3. Інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою узагальнених степеневих рядів. [25, 19, 13]
4. Інтегрування диференціальних рівнянь операційним методом. [18, 32]
5. Векторно-матричний метод інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь. [19, 4, 9]
6. Рівняння і поліноми Лежандра. [25, 13, 26]
7. Рівняння і функції Матьє. [13]
8. Теореми існування розв’язків для диференціальних рівнянь *n*-ого порядку. [25, 19]
9. Симетрична форма системи диференціальних рівнянь. [25, 19]
10. Стійкість за Ляпуновим. [25, 2, 20, 3, 9]
11. Асимптотичні ряди та їх властивості. [29, 5, 31]
12. Асимптотичне інтегрування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. [27, 31]
13. Крайова задача Штурма-Ліувілля. [34, 4, 13, 32, 26]
14. Функція Гріна і крайові задачі. [13, 4]
15. Теорія Флоке. [19, 9]
16. Диференціальне рівняння Гаусса і гіпергеометрична функція. [19, 25, 13]
17. Теорема про диференційовність розв’язків задачі Коші за параметром та початковими даними. [22, 34, 16]
18. Побудова і розвиток теорії звичайних диференціальних рівнянь. [25, 13]
19. Голоморфні розв’язки задачі Коші для рівнянь першого і другого порядків і інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. [22, 19, 25, 34]
20. Диференціальні рівняння і поліноми Лагерра. [13, 26]
21. Теорема Каччіопполі-Тихонова. [22]
22. Спряжені диференціальні рівняння і системи. [25, 19, 13, 1]
23. Теорема Жордана про канонічну форму системи лінійних диференціальних рівнянь *n*-ого порядку з сталими коефіцієнтами. [22, 23]
24. Елементарні дільники матриць. [6, 25, 31, 20]
25. Інтегрування лінійних диференціальних систем з регулярною особливою точкою. [27, 1, 30]
26. Гіпергеометричне рівняння. [25, 19, 13, 26, 1]
27. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь і систем. [1, 16, 21, 34, 26]
28. Геометричні задачі, які приводять до диференціальних рівнянь другого порядку. [24, 25]
29. Фізичні задачі, які приводять до диференціальних рівнянь другого порядку. [24, 25]
30. Періодичні розв’язки диференціальних рівнянь другого порядку і систем. [4, 9, 25, 19, 14]
31. Застосування функцій від матриці до інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. [6]

Диференціальні рівняння першого порядку в задачах геометрії і фізики

Диференціальні рівняння як математичні моделі реальних процесів

Коли мова йде про математичну модель явища чи процесу, то звичайно мається на увазі опис цього явища чи процесу засобами якої-небудь математичної теорії, системою алгебраїчних чи диференціальних рівнянь разом з початковими умовами і іншими даними, необхідними для її розв'язання.

Кожне диференціальне рівняння – математична модель деякого класу процесів, які існують реально і навіть інколи не мають схожості, хоча між ними є глибинний зв'язок. Наприклад, диференціальне рівняння показникового зростання $x'(t) = kx(t)$ описує різні процеси, які відбуваються в дійсності: процес радіоактивного розпаду, процес росту популяції бактерій, процес охолодження тіла, процес розширення газу, процес зміни тиску повітря і інші процеси, тобто зовсім різні реальні процеси, які зводяться до дослідження зміни деякої величини, наприклад, від часу. Вивчення багатьох процесів приводить до вивчення зв'язків між самим ходом процесу і його швидкістю, а у більш складних випадках – і "бистротою" її зміни і т. д., тобто до виявлення зв'язків між невідомою функцією і її послідовними похідними.

Диференціальне рівняння – це абстракція більш високого порядку, ніж функціональна, а застосовуючи її, ми глибше проникаємо в дійсність, моделюючи її.

Як же будується модель процесу – диференціальне рівняння?

Як і при побудові інших моделей процесів, так і при побудові диференціального рівняння роблять деякі спрощуючі припущення, абстрагуються від деяких деталей. Покажемо це на прикладі моделі росту популяції бактерій. Нехай $N(t)$ – чисельність популяції, що розмножується, в момент часу t. При ідеальних умовах приріст її чисельності $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ за час від t до $t+\Delta t$ для багатьох видів бактерій вважають пропорційним наявній в даний момент часу кількості бактерій. Крім того, при малих Δt приріст $\Delta N(t)$ приблизно пропорційний даному проміжку часу. Отже, при зроблених припущеннях $\Delta N(t) \approx kN(t)\Delta t$, де $k > 0$ – коефіцієнт, який залежить від виду бактерій. Для швидкості зміни чисельності популяції маємо співвідношення $N'(t) \approx \dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx kN(t)$. Тут ми абстрагуємося від того, що кількість бактерій може вимірюватися тільки натуральними числами і вважаємо, що $N(t)$ змінюється неперервно в часі. Далі вважаємо, що наближена рівність тим точніша, чим менше Δt, і одержуємо граничним переходом диференціальне рівняння, яке і описує закон росту популяції: $N'(t) = kN(t)$. Після одержання диференціального рівняння (моделі процесу) воно розв’язується математичними методами, а потім вже з одержаного розв’язку роблять висновки відносно протікання модельованого явища в часі.

Розглянемо ще такий приклад. Нехай на лісовому масиві є a м^3 деревини, і кожного року ця кількість стало зростає на p % по відношенню до початкової кількості деревини. Скільки деревини буде на масиві через t років?

Якщо робити підрахунок за простими процентами, то кожного року додається $\frac{ap}{100}$ м^3 деревини, а за t років – $\frac{a}{100}pt$, тобто, через t років буде $a\left(1+\frac{pt}{100}\right)$ м^3 деревини. Отже, така модель задачі підпорядкована закону арифметичної прогресії. Зауважимо, що така модель процесу росту деревини є грубою, оскільки вона не враховує росту новоутворених клітин.

Кращою моделлю буде модель, підпорядкована закону, який описується геометричною прогресією. Для цього будемо робити підрахунок за складними процентами, і одержимо таку кількість деревини на масиві лісу через t років: $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$. Недолік моделі тепер у дискретному законі підрахунку – через 1, 2, 3 і т. д. років.

Кількість же деревини змінюється неперервно, а тому нам потрібно одержати таку модель росту величини, щоб приріст приєднувався неперервно, як це і відбувається в природі. Значить, будемо враховувати приріст за 1 місяць, за 1 день, за 1 годину, за 1 хвилину, за 1 секунду і т.д. Такий приріст забезпечить кількість деревини $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$, де $n \to \infty$ (з одного боку потрібно зменшити проміжок часу, а з іншого − збільшити в сотні разів кількість таких проміжків). Далі за допомогою граничного переходу одержуємо $a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^{nt} = ae^{\frac{pt}{100}}$.

Отже, $y = ae^{kt}$ − закон неперервної зміни величини. Функція $y = ae^{kt}$ є розв’язком диференціального рівняння показникового росту $y' = ky$.

Експоненційна залежність є розв’язком великої кількості задач, що виникають у різних областях людської діяльності. Характер цих та подібних задач і етапи їх розв’язування можна схематично описати так: відбувається деякий процес, наприклад, фізичний, хімічний, біологічний тощо; нас цікавить певна функціональна характеристика усього процесу, наприклад, закон зміни температури від часу; якщо є достатньою певна інформація про перебіг усього процесу, то будують його математичну модель – диференціальне рівняння, розв’язком якого є шукана функціональна характеристика процесу. Диференціальне рівняння моделює краще в тому смислі, що воно описує еволюцію процесу, характер тих змін, які відбуваються в матеріальній системі, можливі варіанти цих змін в залежності від початкового стану системи.

Як ми вже бачили, поняття диференціального рівняння багате конкретним змістом. Воно сприяє розв'язанню множини конкретних практичних задач, розширює сферу застосувань математики, відображає єдність багатогранних властивостей явищ і процесів природи. Використання задач прикладного характеру розширює уявлення про роль математики у вивченні реальних процесів, про взаємозв'язки математики і практики. Поряд з формуванням світогляду, розв'язування таких задач сприяє розвитку інтересу до математики, протидіє вихованню формального мислення.

Досвід показує, що використання диференціальних рівнянь в якості математичних моделей дуже плодотворне, але не треба забувати, що область застосування моделей будь-якого роду обмежена. Розглянемо ще для прикладу задачу про охолодження тіла.

Вода має температуру 80 ^{o}С, а через 5 хв. – 78 ^{o}С. Температура оточуючого середовища – 13 ^{o}С. Якою буде температура води через 30 хв.?

Нехай T – температура води, T' – швидкість її зменшення, яка пропорційна різниці температур води і середовища, тобто $\frac{dT}{dt}=k(T-13)$, k – коефіцієнт пропорційності, $dT=k(T-13)dt$. Відокремлюємо змінні: $\frac{dT}{T-13}=kdt$. Інтегруємо: $\ln(T-13)=kt+C$ або $T-13=e^{kt}\cdot C_1$, $C_1>0$. Отже, $T=C_1e^{kt}+13$ – закон охолодження.

Сталі C_1 і k визначаємо з початкових умов: для $t=0$ $T=80$, значить, $80=C_1e^{k\cdot 0}+13$, $C_1=67$, $T=67e^{kt}+13$; для $t=5$ $T=78$, тому $78=67e^{k\cdot 5}+13$, звідси $k\approx -0{,}006$, і остаточно $T=67e^{-0{,}006\cdot t}+13$.

Для $t=30$ $T=67e^{-0{,}006\cdot 30}+13=69$.

Зауважимо, що вимірювання на практиці дають дещо інший результат. Справа в тому, що побудована модель даного процесу є наближеною, вона не враховує впливу інших характеристик. Уточнення моделі продовжується. Потрібно шукати нові фактори, які суттєво змінюють природу явища. Зокрема, якщо врахувати теплообмін через стінки і дно посудини, а також те, що температура середовища, звичайно, змінюється, то модель буде точнішою, але це в свою чергу ускладнить як саме одержання диференціального рівняння, так і його розв'язання.

Задачі, подібні за характером до описаних, почали виникати на початку XVII ст. Розвиток навігації та військової справи, будівництво аригаційних споруд сприяли розвитку механіки, астрономії, оптики, а значить, докорінному поновленню математичних знань. Ці нові практичні задачі зумовили появу і нових методів, пов'язаних з розглядом "нескінченно малих" величин, що стали фундаментом, на якому виникли диференціальне та інтегральне числення. Творці його – І. Ньютон (1643–1727) і Г. В. Лейбніц (1646–1716). Вони – перші з тих, хто розв'язував диференціальні рівняння.

Основні поняття теорії диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну, невідому функцію і її похідну. Його загальний вигляд $y' = f(x, y)$ *або* $F(x, y, y') = 0$.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку на інтервалі (a, b) *називається функція* $y = \varphi(x)$, *яка диференційовна і перетворює рівняння в тотожність.*

Загальним розв'язком називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка задовольняє рівнянню і містить довільну сталу *C*. $\Phi(x, y, C)$ – загальний інтеграл рівняння. Кожний розв'язок, який одержується із загального, якщо надати сталій *C* певного числового значення, називається частинним розв'язком. Частинний розв'язок рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ знайдемо, якщо задано початкову умову $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Диференціальне рівняння першого порядку вважається розв'язаним, якщо воно зведене до вигляду $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$, оскільки тоді рівняння інтегрується. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, поділивши таке рівняння на $N(y)P(x) \neq 0$, маємо $\dfrac{M(x)}{P(x)}dx + \dfrac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$, звідки одержимо загальний інтеграл $\int \dfrac{M(x)}{P(x)}dx + \int \dfrac{Q(y)}{N(y)}dy = C$.

В квадратурах інтегруються також однорідні рівняння (підстановка $y = ux$), лінійні рівняння (підстановка $y = uv$) і рівняння в повних диференціалах ($\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dx = C$).

Геометричні задачі. Декартова прямокутна система координат

Щоб розв'язати геометричну задачу, яка приводить до диференціального рівняння, потрібно:

1. Побудувати рисунок.
2. Позначити шукану криву через $y = f(x)$; виділити умови, які мають місце для окремих точок, тобто початкові умови.
3. Виразити всі згадувані в задачі величини через x, y, y'. Тоді для задачі можна буде побудувати її модель – диференціальне рівняння, з якого треба знайти функцію $f(x)$.
4. Знайти загальний розв'язок одержаного рівняння і вилучити з нього за допомогою початкових умов рівняння шуканої кривої.

Задачі на властивості дотичних і нормалей до кривих

У таких задачах необхідно за властивостями дотичних і нормалей до кривих знайти самі ці криві, що володіють даними властивостями.

Дотичною M_0T_0 *до кривої* $y = f(x)$ *у точці* M_0 *називається пряма лінія, яка проходить через точку* M_0 *і займає граничне положення січної, яка проходить через точку* M_0 *і іншу точку* M *лінії, коли ця точка* M *ковзає по кривій до точки* M_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в її точці (x_0, y_0) має вигляд

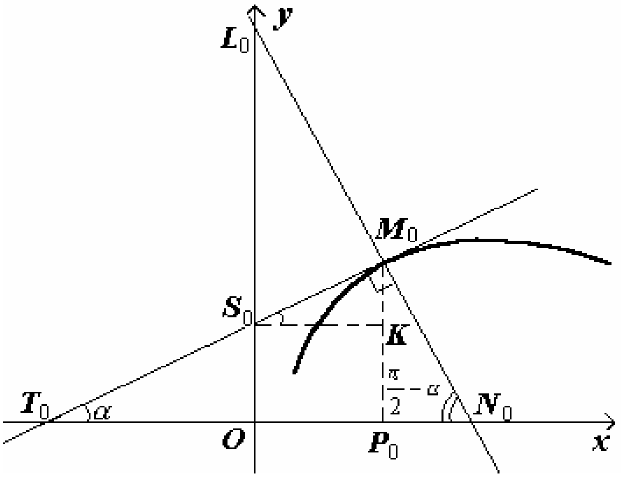
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Нормаллю до кривої $y = f(x)$ *в її точці* M_0 *називається пряма* M_0N_0*, яка проходить через точку* M_0 *перпендикулярно до дотичної в цій же точці.*

Рівнянням нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) є

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

З дотичною і нормаллю пов'язані відрізки, які ними відтинаються на осях Ox і Oy. Спочатку знайдемо абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox. Для цього в рівнянні дотичної покладемо $y = 0$, одержимо: $-y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, звідси $x = x_0 - \dfrac{y_0}{f'(x_0)}$ або, інакше, $T_0O = \left|\dfrac{y'x - y}{y'}\right|$, $y' = tg\alpha$ (тут і далі індекси в позначенні точки дотику



опускатимемо).

Отже, відрізком, який відтинається дотичною на осі *Ox,* є

$$T_0O=\left|\frac{y'x-y}{y'}\right|. \tag{3}$$

Відрізком, який відтинається дотичною на осі Oy, є

$$S_0O=|y-y'x|. \tag{4}$$

Аналогічно знаходимо відрізки, які відтинаються нормаллю на осях Ox і Oy. Відрізком, який відтинається нормаллю на осі *Ox,* є

$$ON_0=|x+y'y|. \tag{5}$$

Відрізок, який відтинається нормаллю на осі *Oy*, —

$$OL_0=|y+xy'|. \tag{6}$$

Тепер знайдемо відрізки дотичної T_0M_0 і нормалі N_0M_0. Розглянемо трикутник $T_0M_0P_0$: $\frac{M_0P_0}{T_0M_0}=sin\alpha$, $T_0M_0=\frac{M_0P_0}{sin\alpha}$, $T_0M_0=\left|\frac{y}{sin\alpha}\right|=\left|\frac{y\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\alpha}\right|=$ $=\left|\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}\right|$. Отже, відрізок дотичної визначається як

$$T_0M_0=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|. \tag{7}$$

Аналогічно знаходимо відрізок нормалі:

$$M_0N_0=|y|\sqrt{1+y'^2}. \tag{8}$$

Використовуючи відрізки, які відтинають на осях *Ox* і *Oy* дотична і нормаль, знаходимо відрізки дотичної і нормалі, які знаходяться між осями координат:

$$T_0S_0=\left|\frac{y'x-y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}. \tag{9}$$

$$L_0N_0=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(1+y'^2\right)+4xyy'}. \tag{10}$$

Відстань від початку координат до дотичної:

$$d_1=\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{11}$$

Відстань від початку координат до нормалі:

$$d_2=\frac{|x+yy'|}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{12}$$

Приклад 1. Крива $y=f(x)$ проходить через точку $(1,2)$. Кожна дотична до неї перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву.

▼Нехай (x,y) − довільна точка на даній кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці (x, y), буде $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, де $X, Y -$ координати біжучої точки кривої. З тієї умови, що дотична перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою $2x$, одержимо диференціальне рівняння $1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x)$, $x\frac{dy}{dx} = 1 - y$. Відокремивши змінні і проінтегрувавши це рівняння, знаходимо $y - 1 = \frac{C}{x}$.

Крива проходить через точку $(1{,}2)$, тому $C = 1$, і, значить, шукана крива − гіпербола $y = 1 + \frac{1}{x}$.▲

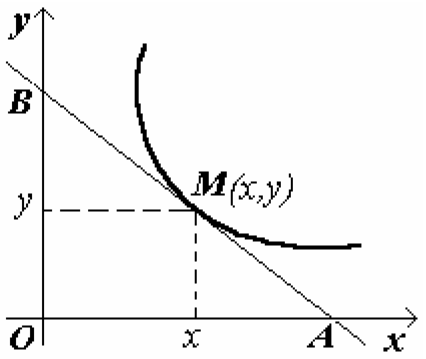
Приклад 2. Крива проходить через точку $(0{,}1)$ і має ту властивістъ, що в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти криву.

▼Нехай (x, y) − довільна точка на шуканій кривій. Тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці (x, y) дорівнює похідній від шуканої функції в точці (x, y), тобто $\frac{dy}{dx}$. За умовою задачі $\frac{dy}{dx} = 2xy$. Звідси $y = Ce^{x^2}$.

Оскільки $y(0) = 1$, то $C = 1$, і $y = e^{x^2}$.▲

Приклад 3. Знайти криву, яка має ту властивість, що відрізок, який відтинається дотичною в довільній точці кривої на осі ординат, дорівнює подвоєній ординаті точки дотику.

▼Розглянемо на шуканій кривій довільну точку $M(x, y)$. Рівняння дотичної в точці M має вигляд $Y - y = y'(X - x)$, де X, Y − координати біжучої точки дотичної, а y' − похідна шуканої функції в даній точці. Для знаходження відрізка OB, який відтинається дотичною на осі Oy, покладемо в її рівнянні $x = 0$; тоді $OB = Y_B = y - xy'$ (див. (4)).



З іншого боку, за умовою задачі $OB = 2y$. Прирівняємо тепер вирази для $OB: y - xy' = 2y$ або $xy' + y = 0$. Звідси $xdy + ydx = 0$, $d(xy) = 0$, $xy = C$, C − стала.▲

Приклад 4. Знайти криву, рівняння якої задовольняє диференціальне рівняння $y' = x$, а вона сама проходить через точку $(1{,}2)$.

▼З рівняння $y' = x$ слідує, що $dy = xdx$ і $y = \int xdx + C,$ тобто $y = \frac{x^2}{2} + C$ (рівняння сім'ї кривих). З умови $y(1) = 2$ одержуємо $2 = \frac{1}{2} + C$, звідки $C = \frac{3}{2}$. Отже, $y = \frac{x^2 + 3}{2}$.▲

Приклад 5. Знайти криву, яка проходить через точку $(0,–2)$, щоб тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці.

▼Виходячи з геометричного змісту похідної, одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, що задовольняють умову задачі: $\frac{dy}{dx}=y+3$. Відокремлюючи змінні і інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок $y=Ce^{x}-3$.

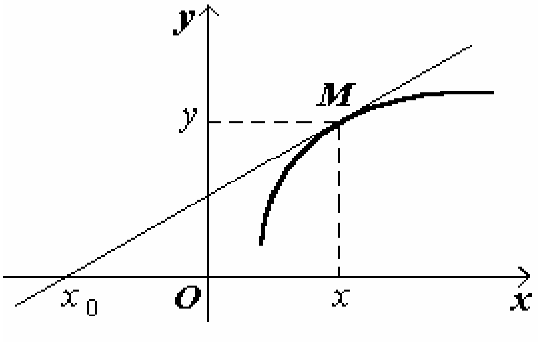
Оскільки шукана крива проходить через точку $(0,-2)$, тобто $y\big|_{x=0}=-2$, то із загального розв'язку при $x=0, y=-2$ одержимо $-2=C-3$, звідки $C=1$. Шукана крива визначається рівнянням $y=e^{x}-3$.▲

Приклад 6. Знайти криві, в яких дотична і нормаль в будь-якій точці рівновіддалені від початку координат.

▼Відстань від початку координат до дотичної $Y-y=y'(X-x)$ дорівнює $d_1=\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}$, а до нормалі $-$ $d_2=\frac{|x+yy'|}{\sqrt{1+y'^2}}$, тобто $x+yy'=\pm(y-xy')$. Це однорідне рівняння. Вводячи заміну $u=\frac{y}{x}$, одержуємо після інтегрування та повернення до початкових змінних такий загальний інтеграл: $\ln\sqrt{x^2+y^2}=C\pm arctg\frac{y}{x}$.▲

Приклад 7. Знайти криву, яка має ту властивість, що відрізок будь-якої дотичної, який міститься між точкою дотику і віссю абсцис, поділяється віссю ординат навпіл.

▼Рівняння дотичної в будь-якій точці (x,y) шуканої кривої $Y-y=y'(X-x)$, де X і Y $-$ координати довільної точки на дотичній. Покладаючи тут $Y=0$, знайдемо абсцису x_0 точки перетину дотичної з віссю Ox: $x_0=x-\frac{y}{y'}$. Згідно умови задачі $x_0+x=0$, тобто $2x-\frac{y}{y'}=0$.



$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, $2\ln|y|=\ln|x|+\ln|C_1|$; $y^2=Cx$ $-$ парабола, симетрична відносно осі Ox. ▲

Приклад 8. Знайти криву, що проходить через точку $(0,1)$, а кутовий коефіцієнт дотичної до неї в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки.

▼Згідно умови задачі $y'=y$. Подамо це рівняння у вигляді $y'-y=0$. Помноживши обидві частини останнього рівняння на e^{-x}, дістанемо $e^{-x}(y'-y)=0$, $(ye^{-x})'=0$, звідки $ye^{-x}=C$, $y=Ce^{x}$, де $C-$ довільна стала. Це і є загальний розв'язок рівняння.

Згідно з початковою умовою крива проходить через точку $(0,1)$, тому

$1=Ce^0$, $C=1$. Таким чином, рівняння шуканої кривої має вигляд $y=e^x$.

Оскільки $y'=e^x$, то $y'-y=e^x-e^x=0$. Отже, перевірка ще раз доводить, що функція $y=e^x$ є розв'язком рівняння, а значить, і поставленої задачі. ▲

Приклад 9. Знайти криві, нормалі яких перетинаються в одній точці $(0{,}0)$. З сім'ї даних кривих вибрати ту криву, що проходить через точку $(3,-4)$.

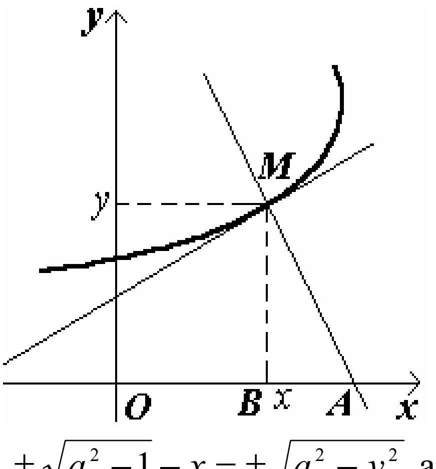
▼Візьмемо на площині декартову прямокутну систему координат і припустимо, що нормалі даної сім'ї кривих перетинаються в одній точці, що є початком координат. Відомо, що рівняння дотичної, проведеної до кривої в точці (x_0, y_0), має вигляд $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Оскільки нормаль кривої в даній точці перпендикулярна до її дотичної, проведеної через цю точку, то, замінивши в рівнянні дотичної кутовий коефіцієнт на обернений та змінивши його знак на протилежний, одержимо відразу рівняння нормалі: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Нормаль до кривої проходить через початок координат, тому її рівняння слід шукати у вигляді $y=kx$, де $k=-\dfrac{1}{f'(x)}$. Отже, $y=-\dfrac{1}{y'}x$ або $y'=-\dfrac{x}{y}$ – диференціальне рівняння даної задачі (це рівняння можна також одержати, якщо в рівнянні нормалі покласти $X=Y=0$). Перепишемо рівняння у вигляді $yy'+x=0$. Помноживши його на 2, дістанемо $2yy'+2x=0$, тобто $(y^2+x^2)'=0$, звідки $y^2+x^2=C$, де C – стала. Це і є рівняння шуканої сім'ї – сім'ї концентричних кіл.

З початкової умови знаходимо, що $C=25$. Отже, через точку $(3,-4)$ проходить коло $y^2+x^2=25$.▲

Приклад 10. Знайти криві, в яких нормаль є стала – a. Визначити з них ту криву, що проходить через точку $Z(0{,}1)$.

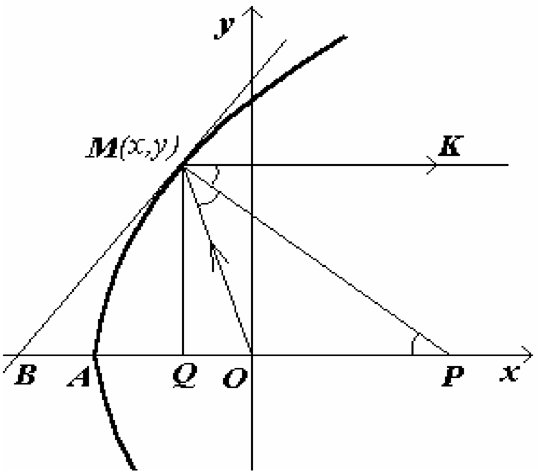
▼Рівняння нормалі в точці $M(x,y)$: $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$. При $Y=0$: $-y=-\dfrac{1}{y'}(X_A-x)$ або $yy'=X_A-x$. Довжина відрізка нормалі: $MA^2=AB^2+BM^2$. Таким чином, $a^2=(X_A-x)^2+y^2$; $a^2=(y'y)^2+y^2$, $\sqrt{a^2-y^2}=\pm yy'$, $y'=\pm\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\pm\dfrac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx$, $\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C$. З початкових умов $C=\mp\sqrt{a^2-1}$, а значить, рівняння шуканої кривої $\pm\sqrt{a^2-1}-x=\pm\sqrt{a^2-y^2}$ або $\left(x\mp\sqrt{a^2-1}\right)^2+y^2=a^2$. ▲



Приклад 11 (параболічне дзеркало). Визначити форму дзеркала-прожектора, яке всі промені світла, що виходять з даної точки *O*, відбиває паралельно даному напряму.

▼З міркувань симетрії ясно, що поверхня дзеркала має бути поверхнею обертання, а тому знайдемо лише рівняння $y = f(x)$ лінії, яку треба обертати навколо певної осі, паралельної даному напряму.

Нехай *OM* − промінь, що падає на дзеркало, *MK* − відбитий промінь, *MP* − нормаль до шуканої лінії. Розташуємо прямокутну систему координат *xOy* так, як показано на малюнку, і скористаємося відомим з фізики законом відбивання світла, за яким кут падіння дорівнює куту відбивання, тобто ∠*OMP* = ∠*PMK*. Прямі *AP* і *MK* паралельні, тому ∠*MPO* = ∠*PMK* як внутрішні різносторонні; отже, ∠*OMP* = =∠*MPO*, і *OM* =*OP*.



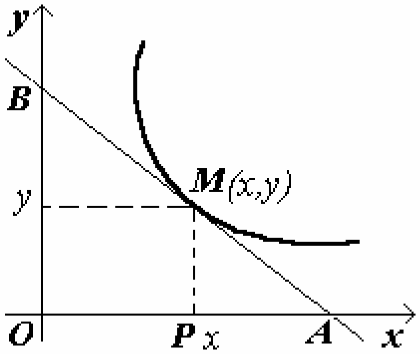
Піднормаль $QP = QO + OP = -x + + \sqrt{x^2 + y^2}$. Крім того, ∠*MPO*=90°- ∠*MBQ*, отже *MB* − дотична до шуканої кривої $y = f(x)$. Маємо, таким чином, $QP = QM \cdot ctg\angle MPO = y \cdot ctg(90^\circ - \angle MBQ) = y \cdot tg\angle MBQ = yy'$.

Прирівнюючи праві частини двох співвідношень для *QP,* дістанемо диференціальне рівняння $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ або $\dfrac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, тобто $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1$.

Інтегруючи останнє рівняння, маємо: $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$, або $y^2 = 2Cx + C^2$ − парабола з віссю симетрії *Ox*. ▲

Приклад 12. Знайти криві, які мають ту властивість, що відрізок дотичної, який міститься між осями координат, поділяється в точці дотику пополам.

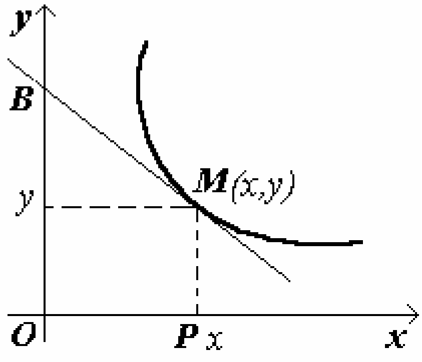
▼Нехай *M(x,y)* − довільна точка кривої, і *AM* =*MB*. З Δ*OAB* маємо: $\dfrac{OB}{OA} = tg\angle BAO$, і оскільки $OA = 2x$, $OB = 2y$, $tg\angle BAO = -y'$, то диференціальне рівняння задачі запишеться як $\dfrac{y}{x} = -y'$. Відокремлюємо змінні: $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Інтегруємо: $\ln|y| = -\ln|x| + C$ $(-\infty < C < \infty)$ або $|xy| = e^C$, і значить $xy = \pm e^C$.



Позначаючи $\pm e^C$ через $\overline{C}$, одержимо $xy = \overline{C}$ $(\overline{C} \neq 0)$.▲

Приклад 13. Знайти криві, в яких відрізок, який відтинається дотичною на осі *Oy*, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

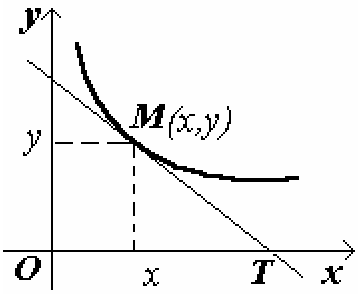
▼Згідно умови задачі $OB = PM^2$, $PM = |y|$. Відрізок *OB* знаходимо з рівняння дотичної $Y - y = y'(X - x)$, покладаючи в ньому $X = 0$: $OB = |Y_B| = |y - xy'|$. Диференціальне рівняння задачі − рівняння Бернуллі $xy' - y = \pm y^2$.



Ділимо його на y^2 і покладаємо $y^{-1} = z$, звідки $\frac{dz}{dx} = -\frac{y'}{y^2}$; приходимо до лінійного рівняння $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \mp\frac{1}{x}$. Розв'язуючи його (інтегрується також і як рівняння з відокремлюваними змінними), одержуємо $y = \frac{x}{C \mp x}$.▲

Приклад 14. Знайти криві, для яких довжина будь-якої дотичної дорівнює довжині відрізка, який відтинає ця дотична на осі *Ox*.

▼Довжина дотичної: $MT = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$. Довжина відрізка, який відтинається дотичною на осі абсцис: $OT = \left|x - \frac{y}{y'}\right|$. За умовою задачі *MT*=*OT*, тобто $\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| = \left|x - \frac{y}{y'}\right|$ або $\frac{y^2}{y'^2}\left(1+y'^2\right) = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2$, звідки $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ – однорідне рівняння (математична модель задачі). Розв'язуємо його підстановкою $y = ux$: $x^2 + y^2 - Cy = 0$.▲

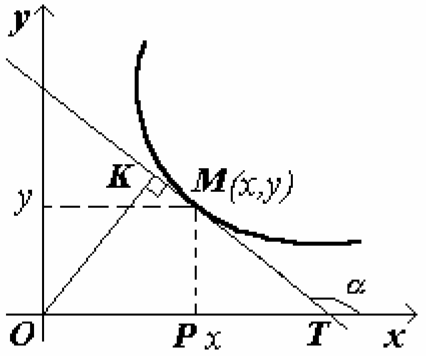


Приклад 15. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (1,1) і має ту властивість, що відстань від початку координат до будь-якої її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

▼Оскільки $OT = \left|x - \frac{y}{y'}\right|$, то $OK = \left|\frac{xy' - y}{y'}\sin(\pi - \alpha)\right| = \left|\frac{xy' - y}{y'}\sin\alpha\right| =$

$$= \left|\frac{xy' - y}{y'} \cdot \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\right| = \left|\frac{xy' - y}{y'} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right| = \left|\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}}\right|.$$

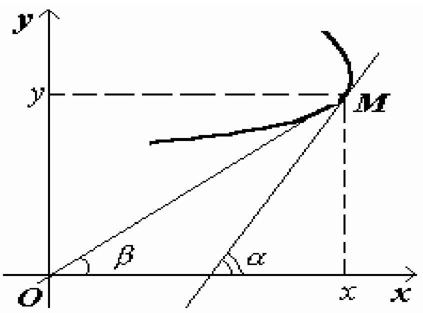
Згідно умови задачі $\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm x$ або $(xy' - y)^2 = x^2\left(1+y'^2\right)$, $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ – однорідне рівняння. Використовуючи підстановку $y = ux$, знаходимо рівняння сім'ї інтегральних кривих: $y^2 + x^2 = Cx$.



З початкової умови знаходимо, що $C = 2$. Шукана крива, таким чином, коло $(x-1)^2 + y^2 = 1$.▲

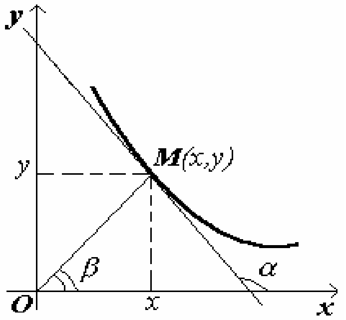
Приклад 16. Кут α, утворений дотичною до кривої з віссю *Ox,* дорівнює потрійному куту β, утвореному з цією віссю прямою, яка з'єднує точку дотику з початком координат. Визначити криву.

▼За умовою $\alpha = 3\beta$, але $tg\alpha = y'$, а $tg\beta = \frac{y}{x}$. Враховуючи, що



$tg\alpha = tg3\beta = \frac{3tg\beta - tg^3\beta}{1-3tg^2\beta}$, дістанемо однорідне диференціальне рівняння $y' = \frac{3x^2y - y^3}{(x^2-3y^2)x}$. Розв'язуємо його підстановкою $y = ux$. Одержуємо загальний інтеграл $\left(x^2+y^2\right)^2 = Cxy$, де C – довільна стала.▲

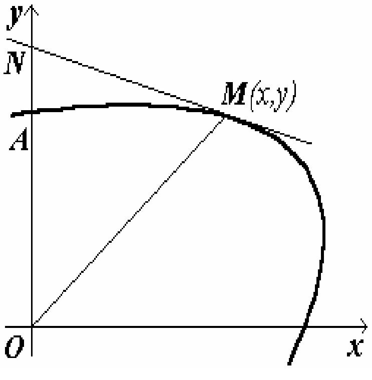
Приклад 17. Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної у довільній точці в k разів більший за кутовий коефіцієнт прямої, що сполучає цю точку з початком координат.



▼ $tg\alpha = y'$. Кутовий коефіцієнт прямої OM $k_1 = tg\beta = \frac{y}{x}$. Отже, згідно умови задачі, $\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$. Рівняння шуканої кривої, таким чином, $y = Cx^k$ (C – довільна стала).▲

Приклад 18. Знайти криву, яка проходить через точку $A(0,1)$, для якої трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній її точці і радус-вектором точки дотику – рівнобедрений (основа трикутника – відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy).

▼Нехай $y = f(x)$ – рівняння шуканої кривої. Проведемо дотичну MN в довільній точці $M(x,y)$ кривої до перетину з віссю Oy в точці N. Згідно умови



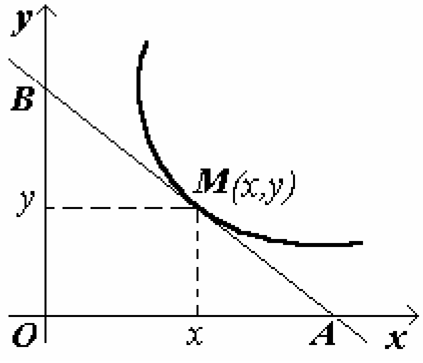
повинна виконуватись рівність $ON=OM$. Але $OM = \sqrt{y^2+x^2}$, а ON знайдемо з рівняння дотичної $Y - y = y'(X - x)$, покладаючи $X=0$, тобто $|Y_N| = ON = |y - xy'|$. Отже, маємо однорідне рівняння $y - xy' = \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Покладаючи $y=ux$, після заміни і відокремлення змінних одержимо $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \mp\frac{dx}{x}$ або $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = \ln|C_1| \mp \ln|x|$, звідки $x^2 = C\left(C \mp 2y\right)$. Підставляючи координати точки A у знайдений загальний інтеграл, одержимо: $0 = C(C \mp 2)$; з трьох значень $C=0$ і $C=\pm 2$ перше не підходить за змістом задачі (при $C=0$ парабола вироджується у вісь Oy).

Отже, шукана крива – парабола $x^2 = 4(1-y)$ або $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.▲

Приклад 19. Знайти лінію, яка має ту властивість, що відрізок будь-якої дотичної до неї, що міститься між координатними осями, має сталу довжину, що дорівнює l.

▼Рівняння дотичної до кривої в точці *M(x,y)* має вигляд $Y-y=y'(X-x)$.

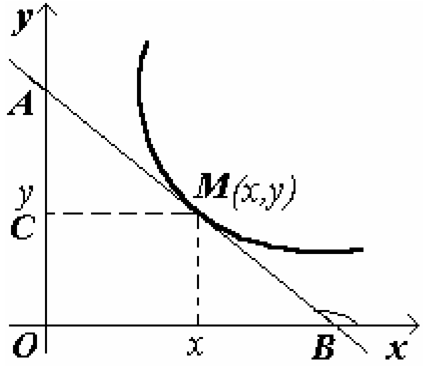


Обчислимо координати точок *A* і *B,* знайшовши відрізки, які відтинає дотична на осях *Ox* і *Oy*. Поклавши у рівнянні дотичної спочатку *X*=0, а потім *Y*=0, одержимо, що $|Y_B|=|y-xy'|$, $|X_A|=\left|x-\dfrac{y}{y'}\right|$. Знаходимо тепер відстань між точками *A* і *B*: $\sqrt{\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2}=l$. Після перетворення будемо мати в якості моделі задачі рівняння Клеро $y=xy'\pm\dfrac{ly'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Його загальний розв'язок $y=Cx\pm\dfrac{Cl}{\sqrt{1+C^2}}$ − сім'я прямих, відрізки яких між осями координат мають довжину, що якраз дорівнює l.

Продиференціюємо розв'язок по *C* і утворимо систему рівнянь: $\begin{cases} y=Cx\pm\dfrac{Cl}{\sqrt{1+C^2}}, \\ x=\mp\dfrac{l}{\left(1+C^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$ − особливий інтеграл в параметричній формі. Виключивши параметр *C*, одержуємо: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$ − астроїда, обвідна сім'ї інтегральних кривих. ▲

Приклад 20. Знайти криві, для яких довжина відрізка, що його відтинає дотична на осі ординат, пропорційна квадрату ординати точки дотику.

▼Нехай точка *M(x,y)* лежить на шуканій кривій і *AB* − дотична до кривої в



точці *M*. Скористаємось рівнянням дотичної $Y-y=y'(X-x)$, де *X* і *Y* − біжучі координати дотичної, а *x* і *y* − координати точки дотику *M*.

Покладаючи *X*=0, знайдемо відрізок, який відтинає дотична на осі *Oy*: $OA=|Y_A|=|y-xy'|$. За умовою диференціальним рівнянням шуканої кривої буде $y-xy'=ky^2$, де k − коефіцієнт пропорційності.

Відокремлюючи змінні і ітегруючи, матимемо послідовно: $\dfrac{dy}{y(1-ky)}=\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{1-ky+ky}{y(1-ky)}dy=\int\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dy}{y}+\int\dfrac{k}{1-ky}dy=\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln|y|-\ln|1-ky|=\ln|x|-\ln C_1$, де

$C_1 > 0$. Потенціюванням знаходимо: $\left|\dfrac{x(1-ky)}{y}\right| = C_1$, $\dfrac{x(1-ky)}{y} = \pm C_1$ або $\dfrac{x(1-ky)}{y} = C, C \neq 0$, звідки $y = \dfrac{x}{k + Cx}$ − сім'я рівнобічних гіпербол.▲

Приклад 21. Знайти криву, якщо довжина дотичної в кожній її точці є величина стала, що дорівнює a.

▼Користуючись формулою довжини відрізка дотичної, одержимо диференціальне рівняння кривої $\dfrac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'} = \pm a$, звідки $y' = \pm\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Після відокремлення змінних, інтегруємо, вводячи підстановку $y = a\sin\varphi$, і одержуємо загальний розв'язок в параметричній формі: $x = \pm a\left(\cos\varphi + \ln tg\dfrac{\varphi}{2}\right) + C, \quad y = a\sin\varphi$ − сім'я трактрис з спільною асимптотою Ox.▲

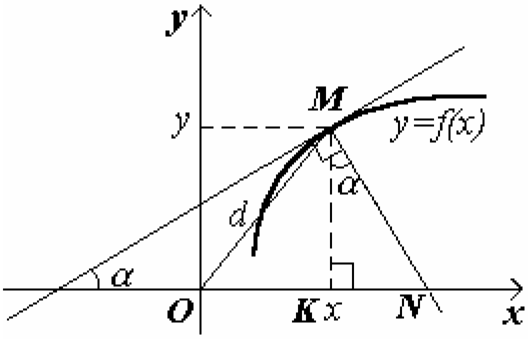
Приклад 22. Знайти криву, довжина нормалі якої для кожної точки M дорівнює відстані точки M від початку координат.

▼$M(x,y)$ − довільна точка кривої $y=f(x)$. Її відстань від початку координат $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. MN − нормаль, її довжина $MN = \dfrac{MK}{\cos\alpha} = \left|y\sqrt{1+tg^2\alpha}\right| = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$.

Прирівнюємо згідно з умовою d і MN: $\sqrt{x^2+y^2} = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad y^2(1+y'^2) = x^2 + y^2,$

$y^2 + y^2y'^2 = x^2 + y^2, \quad yy' = \pm x, \quad y\dfrac{dy}{dx} = \pm x,$

$ydy = \pm xdx$; $\dfrac{y^2}{2} + C_1 = \pm\dfrac{x^2}{2}$, $y^2 \pm x^2 = C$.



Отже, шукана крива є або колом, або рівнобічною гіперболою, або прямою $y = x$ чи $y = -x$.▲

Задачі

1. Знайти криві, для яких проекція на вісь абсцис відрізка дотичної, що міститься між точкою дотику і віссю абсцис, дорівнює середньому арифметичному координат точки дотику.
Відповідь: $y = C(x-y)^2$.

2. Знайти криві, для яких відношення відрізка осі абсцис, що відтинається перпендикуляром до дотичної, проведеним у точку дотику, до радіус-вектора точки дотику є величина стала, що дорівнює k.
Відповідь: $kx - \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

3. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу від абсциси точки дотику.
Відповідь: $y=Cx^2$.

4. Крива проходить через точку (1,1) і має ту властвість, що тангенс кута нахилу кожної її дотичної пропорційний квадрату аргумента точки дотику. Знайти криву.

5. Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці дорівнює абсцисі точки дотику.

Відповідь: $y=\frac{x^2}{2}+C$.

6. Знайти таку криву, яка проходить через точку (0,-2), щоб кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній у три рази.
Вказівка. Диференціальне рівняння $y' = 3y$.

Відповідь: $y=-2e^{3x}$.

7. Знайти криву, всі нормалі якої проходять через точку (2,-3).

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $3+y=\frac{1}{y'}(2-x)$.

Відповідь: $(x-2)^2+(y+3)^2=C$.

8. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1,3)$, для якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю Oy поділяється навпіл у точці перетину з віссю Ox.
Відповідь: $y=3x^2$.

9. Знайти криву, яка проходить через точку $A(2,4)$, знаючи, що абсциса точки перетину дотичної в довільній точці кривої з віссю Ox дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

10. Визначити криву, знаючи, що сума координат точок перетину дотичної до кривої з осями координат у два рази більша від суми координат точки дотику.
Відповідь: $xy = C$; $x + y = C$.

11. Знайти криву, що проходить через точку $A(1,2)$, для якої абсциса точки перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис дорівнює $\frac{2}{3}$ абсциси точки дотику.

Відповідь: $y=2x^3$.

12. Знайти криву, знаючи, що ордината точки перетину нормалі в довільній точці кривої з віссю ординат дорівнює подвоєній ординаті точки кривої, через яку проведено дану нормаль.
Відповідь: $x^2-y^2=C^2$.

13. Знайти криві, для яких відстань від початку координат до точки на кривій дорівнює довжині відрізка дотичної, що знаходиться між цією точкою і віссю абсцис.
Відповідь: $xy=C$; $y = Cx$.

14. Знайти криві, нормалі до яких проходять через початок координат.
Відповідь: $x^2+y^2=C^2$.

15. Знайти криву, для якої довжина відрізка, який відтинається на осі ординат нормаллю, проведеною в будь-якій точці кривої, дорівнює відстані цієї точки до початку координат.

Відповідь: $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$.

16. Знайти криву, для якої добуток абсциси якої-небудь точки на величину відрізка, який відтинається нормаллю на осі Oy, дорівнює квадрату відстані цієї точки від початку координат.

Відповідь: $x^2+y^2=Cx^4$.

17. Знайти криву, яка проходить через точку (2,0) і має ту властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину, що дорівнює 2.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $x^2 + \left(x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$.

Відповідь: трактриса $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\left(\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right)$.

18. Знайти лінію, всі дотичні до якої проходять через дану точку (x_0, y_0).

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $y - y_0 = y'(x - x_0)$.

Відповідь: $y - y_0 = C(x - x_0)$.

19. Знайти криву, для якої квадрат довжини відрізка, який відтинається будь-якою дотичною на осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

Відповідь: $x = Ce^{\pm 2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}}$.

20. Знайти криву, для якої довжина нормалі пропорційна квадрату ординати точки дотику.

Відповідь: $y = \frac{1}{2k}\left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right)$.

21. Знайти криву, в якої довільна дотична перетинається з віссю ординат у точці, яка однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

Відповідь: $x^2 + y^2 = Cx$.

22. Знайти криву, якщо її дотична відтинає на осі Oy відрізок, що дорівнює $\frac{1}{n}$-й суми координат точки дотику.

Відповідь: $y = Cx^{\frac{n-1}{n}} - x$.

23. Знайти криві, які мають ту властивість, що відрізок, який дотична в будь-якій точці кривої відтинає на осі Oy, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $y - xy' = x^2$.

Відповідь: $y = Cx - x^2$.

24. Знайти криву, для якої відрізок, який відтинається дотичною на осі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $y - xy' = \dfrac{x+y}{2}$.

Відповідь: $y = C\sqrt{x} - x$.

25. Знайти лінію, що проходить через початок координат, а всі нормалі до неї − через дану точку (x_0, y_0).

Відповідь: коло $x^2 + y^2 = 2(xx_0 + yy_0)$.

26. Знайти лінію, яка має ту властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, що міститься між віссю *Ox* і прямою $y = ax + b$, поділяється точкою дотику пополам.

Відповідь: $y^2 - by - axy = C$.

27. Знайти криву, в якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

Відповідь: $y = C(x^2 + y^2)$.

28. Знайти криву, в якої відрізок будь-якої нормалі, що міститься між осями координат, поділяється у точці дотику навпіл.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $yy' = x$.

29. Знайти лінію, для якої відрізок, який відтинається на осі ординат дотичною в довільній точці пропорційний кубу ординати точки дотику.

Відповідь: $\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{y^2} = 1$.

30. Знайти криві, які мають ту властивість, що відрізок осі абсцис, який відтинається дотичною і нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, дорівнює $2a$.

Відповідь: $a\ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C$.

31. Знайти криву, яка проходить через точку (2,1) і має ту властивість, що відрізок її дотичної, кінці якого лежать на осях координат, поділяється точкою дотику навпіл.

Відповідь: $xy = 6$.

32. Знайти всі ті криві, для яких відрізок, який відтинається дотичною на осі *Ox*, пропорційний квадрату абсциси точки дотику.

Відповідь: $y = \dfrac{Cx}{1 - kx}$.

33. Довести, що крива, всі нормалі якої проходять через сталу точку, є колом.

34. Довести, що крива, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в будь-якій точці пропорційний абсцисі точки дотику, є параболою.

35. Нормаль *MQ* перетинає вісь *Ox* в точці *Q*. Довести, що коли абсциса точки *Q* вдвічі більша від абсциси точки *M*, то крива − рівнобічна гіпербола.

Вказівка. Скористатися рівнянням нормалі до кривої в точці *M*.

36. Знайти криву, для якої добуток абсциси будь-якої точки, що належить кривій, і величини відрізка, який відтинається нормаллю на осі *Ox*, дорівнює подвоєному квадрату відстані цієї точки від початку координат.

Відповідь: $y = \pm x\sqrt{C^2 x^2 - 1}$.

37. Знайти криві, для яких кут між радіус-вектором, проведеним у точку M кривої і дотичною, проведеною в точці M, сталий і дорівнює α.

Відповідь: $\ln(x^2 + y^2) = 2ctg\alpha \cdot arctg\dfrac{y}{x} + C$.

38. Знайти лінію, дотичні до якої відтинають на осях координат відрізки, сума яких дорівнює $2a$.

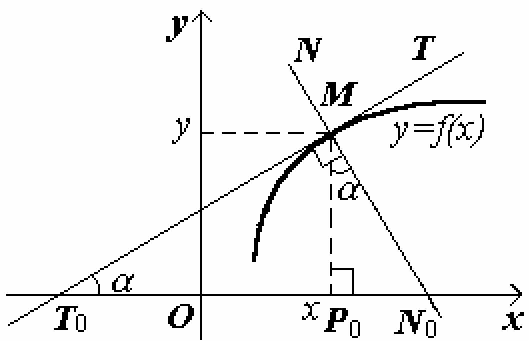
Відповідь: $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

39. Знайти криві, в яких нормаль співпадає з радіус-вектором точки дотику.

Відповідь: $x^2 + y^2 = C$.

Задачі на властивості піддотичних і піднормалей кривих

Піддотичною кривої в її точці M *називається проекція* T_0P_0 *на вісь Ох напрямленого відрізка* T_0M *дотичної до цієї лінії в точці* M .



Піднормаллю кривої в її точці M *називається проекція* N_0P_0 *на вісь Ох напрямленого відрізка* N_0M *нормалі до цієї лінії в точці* M .

Піддотична визначається так: $T_0P_0 = \dfrac{y}{f'(x)}$; піднормаль − $N_0P_0 = -yf'(x)$.

Якщо $M(x,y)$ − біжуча точка кривої, то матимемо, що

$$T_0P_0 = \frac{y}{y'}, \tag{13}$$

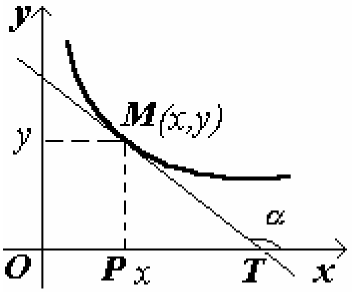
$$N_0P_0 = -yy'. \tag{14}$$

Приклад 23. Знайти криві, в яких сума довжин нормалі і піднормалі є сталою величиною, що дорівнює *а*.

▼Довжина піднормалі $|yy'|$, а довжина нормалі $\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$. Отже, рівняння, якому повинні задовольняти шукані криві, має вигляд $|yy'| + \left|y\sqrt{1+y'^2}\right| = a$. Розв’язуючи його відносно y', знаходимо (враховуючи обидва можливі знаки): $y' = \pm\dfrac{a^2-y^2}{2ay}$. Відокремлюємо змінні: $\dfrac{2ydy}{a^2-y^2} = \pm\dfrac{dx}{a}$. Інтегруючи, одержуємо загальний інтеграл $\ln\left|a^2-y^2\right| = \pm\dfrac{x}{a} + \ln|C_1|$. Виконавши перетворення, приводимо рівняння шуканих кривих до вигляду $y^2 = a^2 + Ce^{\pm\frac{x}{a}}$.▲

Приклад 24. Знайти криву, для якої сума відрізків дотичної і піддотичної пропорційна добутку координат точки дотику.

▼*Вказівка.* Використати формули довжин відрізків дотичної *ТМ* і піддотичної *ТР*: $TM = \left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$, $TP = \left|\dfrac{y}{y'}\right|$. Диференціальне рівняння задачі $\left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| + \left|\dfrac{y}{y'}\right| = kxy$, $y' = \pm\dfrac{2kx}{k^2x^2-1}$.



Відповідь: $y = \pm\dfrac{1}{k}\ln\left|k^2x^2-1\right| + C$.▲

Приклад 25. Знайти криву, знаючи, що півсума її піддотичної і піднормалі в будь-якій точці дорівнює абсцисі точки дотику.

▼Модель задачі – диференціальне рівняння $\frac{y}{y'} - yy' = 2x$ або $y = \frac{2y'}{1-y'^2}x$ – рівняння Лагранжа. Запишемо його у вигляді $x = \frac{1-y'^2}{2y'}y$ або $x = \frac{yx'}{2} - \frac{y}{2x'}$ (нехай $x = \varphi(y)$).

Покладемо $x' = p$. Тоді $x = \frac{yp}{2} - \frac{y}{2p}$ або $x = \frac{y}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$, $x' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{y}{2}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$. Замінимо x' через p і, виконуючи перетворення, одержимо $\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$, $y = Cp$, а загальний інтеграл у параметричній формі запишеться тепер як $\begin{cases} x = \frac{Cp}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right), \\ y = Cp. \end{cases}$

Виключаючи параметр, одержимо $x = \frac{y^2}{2C} - \frac{C}{2}$ або $2Cx = y^2 - C^2$ – сім'я парабол.▲

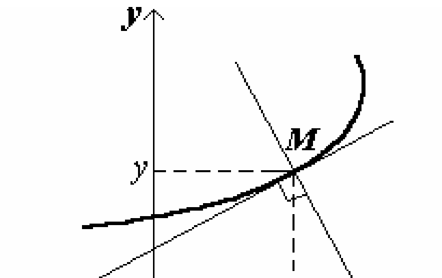
Приклад 26. Знайти криву, відрізки піднормалей якої на осях Ox і Oy однакові.

▼ *Вказівка.* Відрізок піднормалі на осі Ox дорівнює $|yy'|$, а на осі Oy – $\left|\frac{x}{y'}\right|$; отже, $yy' = \pm\frac{x}{y'}$.

Відповідь: $y^{\frac{3}{2}} \pm x^{\frac{3}{2}} = C$.▲

Приклад 27. Знайти лінію, для якої сума нормалі і піднормалі пропорційна абсцисі.

▼Відомо, що $MT = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$. Піднормаль $TK = -yy'$. Отже, виходячи з умови задачі, маємо диференціальне рівняння $\left|y\sqrt{1+y'^2}\right| - yy' = kx$ або $y^2 = k^2x^2 + 2kxyy'$, тобто $y' = \frac{y^2 - k^2x^2}{2kxy}$ – однорідне рівняння.



Після введення заміни $y = ux$ та відокремлення змінних одержуємо $\frac{2kudu}{(1-2k)u^2 - k^2} = \frac{dx}{x}$; інтегруємо і повертаємось до початкових змінних:

$y^2 = Cx^{\frac{1}{k}} + \frac{k^2x^2}{1-2k}$.▲

Задачі

40. Знайти криві, в яких піднормаль є стала, що дорівнює a. Вилучити з них ту криву, яка проходить через точку $M(0,1)$.
Відповідь: $y^2 = C - 2ax$; $y^2 = 1 - 2ax$.

41. Знайти всі ті криві, у яких піддотична дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.
Відповідь: $y^2 = Cx$.

42. Знайти криві, в яких піддотична пропорційна абсцисі точки дотику.
Відповідь: $y^k = Cx$.

43. Знайти криву, в якої піднормаль в будь-якій точці так відноситься до суми абсциси і ординати, як ордината цієї точки до її абсциси.
Відповідь: $y = \frac{C}{2x} - \frac{x}{2}$.

44. Знайти криву, якщо піднормаль для будь-якої точки кривої є середнім арифметичним її координат, взятим з протилежним знаком.
Відповідь: $(x-y)^2(x+2y) = C$.

45. Знайти криву, якщо будь-яка її піддотична є середнім арифметичним координат точки дотику.
Відповідь: $(x-y)^2 = Cy$.

46. Знайти всі ті криві, для яких піддотична є сталою величиною, що дорівнює k.
Відповідь: $y = Ce^{\frac{x}{k}}$.

47. Знайти криву, для якої відношення відрізка, утвореного дотичною на осі Oy, до відрізка, утвореного піднормаллю на осі Ox, є величиною сталою, що дорівнює k.
Відповідь: $arctg\frac{y}{x} + \frac{k}{2}\ln(x^2 + y^2) = C$.

48. Знайти криву, для якої піднормаль дорівнює різниці радіус-вектора і абсциси точки дотику.
Відповідь: $y^2 = C^2 - 2Cx$.

49. Знайти криві, які мають ту властивість, що ордината будь-якої її точки є середнім пропорційним абсциси і суми абсциси і піднормалі.
Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $y^2 = x(x - yy')$.
Відповідь: $y^2 = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{2}$.

50. Знайти криву, в кожній точці якої піднормаль є середнім арифметичним квадратів координат цієї точки.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $yy' = -\frac{x^2 + y^2}{2}$.

Відповідь: $y^2 = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$.

51. Знайти криву, яка проходить через точку $\left(\sqrt{2},0\right)$, якщо сума довжин її дотичної і піддотичної дорівнює добутку координат точки дотику.

Відповідь: $y = \pm\ln\left|x^2 - 1\right|$.

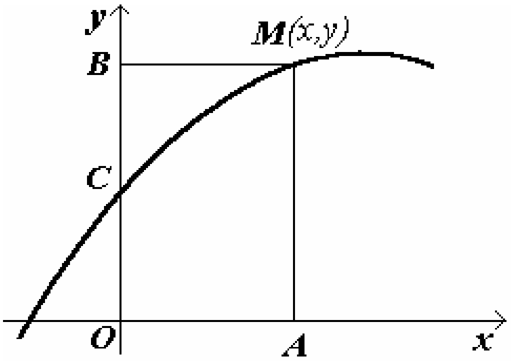
52. Знайти криву, яка проходить через точку (1,2), якщо її піддотична вдвічі більша від абсциси точки дотику.

Відповідь: $y^2 = 4x$.

Задачі на площі фігур та довжини дуг кривих

Приклад 28. Знайти криву, яка має ту властивість, що якщо через довільну її точку провести прямі паралельно осям координат до перетину з ними, то площа прямокутника, який при цьому утвориться, поділиться кривою на дві частини, одна з яких за площею втричі більша за іншу.

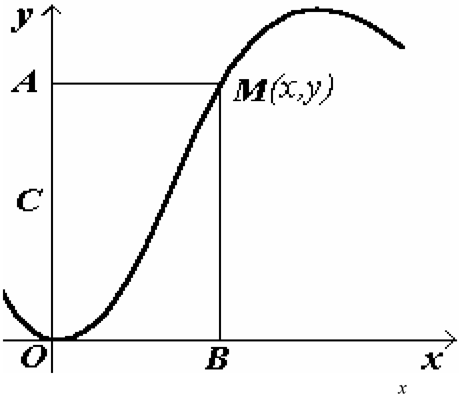
▼ Нехай *C* − точка перетину шуканої кривої $y = f(x)$ з віссю *Oy*. Тоді за умовою площа криволінійної трапеції *OCMA* дорівнює $\left|\int_0^x ydx\right|$; вона втричі більша від площі криволінійного трикутника *CBM*, яка дорівнює $|xy| - \left|\int_0^x ydx\right|$. Отже, $\left|\int_0^x ydx\right| = 3\left(|xy| - \left|\int_0^x ydx\right|\right)$, звідки $4\int_0^x ydx = \pm 3xy$.



Диференціюючи обидві частини по *x*, маємо $\pm 4y = 3y + 3xy'$ або $3xy' = y$ (якщо беремо знак “+”). Розв’язком цього рівняння буде $y^3 = Cx$ (якщо взяти “–”, то одержимо розв’язок $y^3 = \dfrac{C}{x^7}$, який не задовольняє умову задачі).▲

Приклад 29. Крива проходить через початок координат і лежить у півплощині $y \geq 0$. Кожний прямокутник, обмежений осями координат і перпендикулярами до них, проведеними з точки кривої, крива поділяє на дві частини, причому, перша частина прямокутника, яка знаходиться під кривою, у два рази менша від площі тієї частини, що знаходиться над кривою. Знайти рівняння кривої.

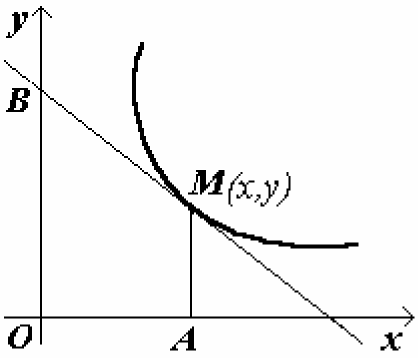
▼Опустимо з довільної точки *M*(*x,y*) шуканої кривої $y = f(x)$ перпендикуляри *MA* і *MB* на координатні осі. Площа прямокутника *OAMB* $S = xy$ (або $S = -xy$, якщо точку *M* вибрано в області $x \leq 0$). Площу частини прямокутника, що лежить під кривою, обчислюємо за формулою $Q = \int_0^x y(t)dt$ (або $Q = -\int_0^x y(t)dt$, якщо $x < 0$). За умовою задачі $S - Q = 2Q$, тобто $xy = 3\int_0^x y(t)dt$.



Продиференціювавши обидві частини по *x*, маємо диференціальне рівняння $x\dfrac{dy}{dx} + y = 3y$ або $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$. Інтегруючи, знаходимо: $y=Cx^2$. Оскільки крива лежить у півплощині $y \geq 0$, то $C > 0$.▲

Приклад 30. Знайти криві, в яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є величина стала, що дорівнює a^2.

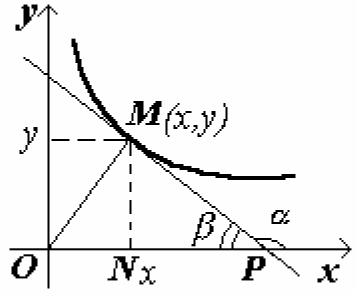
▼Відрізок, який відтинає дотична на осі Oy визначається як $|y - xy'|$. Площа трапеції, що розглядається, визначається так: $\frac{|y - xy'| + |y|}{2} \cdot |x| = a^2$. Звідси маємо для визначення y таке диференціальне рівняння: $y'x^2 - 2xy \pm 2a^2 = 0$ (інші випадки розкриття модулів дають рівняння $\pm x^2 y' = 2a^2$ і відповідно розв'язки $y = \mp \frac{2a^2}{x} + C$, що не задовольняють умову задачі, бо задають криві в інших координатних чвертях, ніж це визначено способом розкриття модулів, зокрема $|xy|$).



Це лінійне диференціальне рівняння, загальний розв'язок якого $y = Cx^2 \pm \frac{2a^2}{3x}$. ▲

Приклад 31. Площа трикутника, утвореного радіус-вектором *OM* точки *M(x,y)* кривої, дотичною *MP* і віссю *Ox*, дорівнює 2. Знайти криву.

▼ $S_{\Delta OMP} = \frac{1}{2} OP \cdot MN$; $MN = |y|$; $OP = \left| x - \frac{y}{y'} \right|$ як відрізок осі абсцис, що відтинається від початку координат дотичною. Отже, $\left(x - \frac{y}{y'} \right) y = \pm 4$.



Подамо це рівняння у вигляді $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \mp \frac{4}{y^2}$. Це лінійне рівняння, тому розв'язуємо його підстановкою $x = uv$. Остаточно матимемо: $x = \pm \frac{2}{y} + Cy$.▲

Приклад 32. Знайти криву, яка має ту властивість, що площа криволінійної трапеції, обмеженої дугою кривої, дорівнює довжині дуги. Крива проходить через точку (0,1).

▼ З умови слідує, що $\int_a^x |y| dx = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx$. Звідси, диференціюючи, приходимо до рівняння $y = \pm\sqrt{1 + y'^2}$. Розв'яжемо рівняння відносно похідної: $y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, $|y| \geq 1$. Відокремлюємо змінні і інтегруємо: $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm \int dx + C$; $\ln\left| y + \sqrt{y^2 - 1} \right| = \pm x + C$.

Оскільки при x=0 y=1, то C=0. Таким чином, $y + \sqrt{y^2 - 1} = \pm e^{\pm x}$ (*). Звідси

$$\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=\pm e^{\mp x} \text{ або } y-\sqrt{y^2-1}=\pm e^{\mp x} \text{ (**).}$$

Додаючи рівності (*) і (**), одержуємо $2y=\pm(e^{\pm x}+e^{\mp x})$. Таким чином, шуканою кривою є ланцюгова лінія $y=\pm\frac{1}{2}(e^{\pm x}+e^{\mp x})$.▲

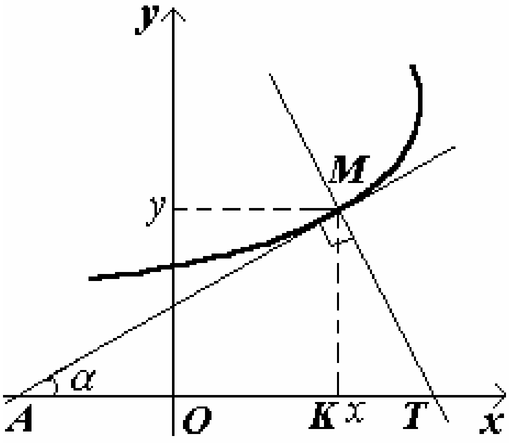
Приклад 33. Знайти криву, яка має ту властивість, що дотична до неї в будь-якій точці утворює з осями координат трикутник площею 2 кв. од.

▼*Вказівка.* Диференціальне рівняння задачі $|y-xy'|\cdot\left|x-\frac{y}{y'}\right|=4$. Розв'язуючи його відносно y, приходимо до рівняння Клеро.

Відповідь: гіперболи $xy=\pm1$ і прямі $y=Cx\pm2\sqrt{\mp C}$, дотичні до цих гіпербол.▲

Приклад 34. Знайти лінію, для якої площа прямокутника, що має за сторони дотичну і нормаль в будь-якій точці кривої, дорівнює площі прямокутника із сторонами, що дорівнюють за довжиною абсцисі і ординаті цієї точки.

▼ $AM=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$ – відрізок дотичної, $TM=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$ – відрізок нормалі. Згідно умови задачі одержуємо таке рівняння: $\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|\cdot\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|=|xy|$ або $y+yy'^2=\pm xy'$, звідки $y=\pm\frac{xy'}{1+y'^2}$.



Покладемо $y'=p$: $y=\pm\frac{xp}{1+p^2}$.

Диференціюючи по x, матимемо:

$$\frac{dy}{dx}=p=\pm\frac{\left(p+x\frac{dp}{dx}\right)\left(1+p^2\right)-2p\frac{dp}{dx}xp}{\left(1+p^2\right)^2},$$

$$p=\pm\frac{p+p^3+\frac{dp}{dx}\left(x-p^2x\right)}{\left(1+p^2\right)^2}, \qquad \pm p\left(1+p^2\right)^2-p-p^3=\frac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right),$$

$$\pm p\left(1+2p^2+p^4\right)-p-p^3=\frac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right), \qquad \left[\begin{array}{l} p+2p^3+p^5-p-p^3=\frac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right), \\ -p-2p^3-p^5-p-p^3=\frac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} p^3+p^5=\dfrac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right), \\ -p(p^2+1)(p^2+2)=\dfrac{dp}{dx}x\left(1-p^2\right), \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\left(1-p^2\right)dp}{p^3\left(1+p^2\right)}=\dfrac{dx}{x}, \\ \dfrac{\left(p^2-1\right)dp}{p\left(1+p^2\right)\left(2+p^2\right)}=\dfrac{dx}{x}. \end{array}\right.$$

Інтегруємо:

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int\frac{1-p^2}{p^3\left(1+p^2\right)}dp=\ln\left|Cx\right|, \\ \displaystyle\int\frac{p^2-1}{p\left(1+p^2\right)\left(2+p^2\right)}dp=\ln\left|Cx\right|. \end{array}\right.$$

Використовуючи розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби та подальше інтегрування, одержуємо, що

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\overline{C}e^{-\frac{1}{2p^2}}\left(1+p^2\right)}{p^2}, \\ x=\dfrac{\overline{C}\left(1+p^2\right)}{p^{\frac{1}{2}}\left(p^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}. \end{array}\right.$$

Далі знаходимо y, пам’ятаючи, що $y=\pm\dfrac{xp}{1+p^2}$: $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\overline{C}e^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}, \\ y=-\dfrac{\overline{C}p^{\frac{1}{2}}}{\left(p^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}. \end{array}\right.$

Відповідь: а) $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\overline{C}e^{-\frac{1}{2p^2}}\left(1+p^2\right)}{p^2}, \\ y=\dfrac{\overline{C}e^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}; \end{array}\right.$ б) $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\overline{C}\left(1+p^2\right)}{p^{\frac{1}{2}}\left(p^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}, \\ y=-\dfrac{\overline{C}p^{\frac{1}{2}}}{\left(p^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}. \end{array}\right.$ ▲

Задачі

53. Знайти криві, які мають ту властивістъ, що якщо через будь-яку точку кривої провести прямі паралельно осям координат до перетину з цими осями, то площа одержаного прямокутника поділиться кривою у відношенні 1:2. *Відповідь:* $y=Cx^2$; $y^2=Cx$.

54. Площа фігури, обмеженої кривою, віссю Ox та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати. Знайти ту з інтегральних кривих, яка проходить через початок координат.

Вказівка. $\int_a^x ydx=y^3$, $ydx=3y^2dy$ – диференціальне рівняння задачі.

Відповідь: $y^2 = \frac{2}{3}x$.

55. Знайти криву, для якої площа Q, обмежена кривою, віссю Ox і двома ординатами $x = 0$ і $x = a$ є даною функцією від y: $Q = a^2 \ln\frac{y}{a}$.

Вказівка. $\int_0^x y dx = a^2 \ln\frac{y}{a}$.

Відповідь: гіпербола $y = \frac{a^2}{C - x}$.

56. Визначити криві, для яких площа прямокутника з вершинами в початку координат, довільній точці кривої та проекціях цієї точки на координатні осі дорівнює площі прямокутника з вершинами в тій же точці кривої, її проекції на вісь Ox і в точці перетину з віссю Ox дотичної до кривої в даній точці.

Відповідь: $y = C\sqrt{x}, \quad y' > 0; \ y = \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad y' < 0$.

57. Знайти криву, яка проходить через точки $O(0,0)$ і $A(1,1)$ і обмежує криволінійну трапецію з основою $[0, x]$, площа якої пропорційна y^4.

Вказівка. Використовуйте подання площі криволінійної трапеції через визначений інтеграл.

Відповідь: $y = \sqrt[3]{x}$.

58. Знайти криву, в якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

Відповідь: $y=x+Cx^2$.

59. Знайти криві, в яких площа трикутника, утвореного дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величиною сталою, що дорівнює a^2.

Відповідь: $xy = a^2 + Cy^2$.

60. Знайти лінію, для якої площа криволінійної трапеції, яка міститься між віссю абсцис, кривою і двома ординатами, одна з яких стала, а друга − змінна, дорівнює відношенню куба змінної ординати до змінної абсциси.

Відповідь: $\left(2y^2 - x^2\right)^3 = Cx^2$.

61. Визначити криві, для яких площа прямокутника, побудованого на відрізках, які відтинаються на осях координат дотичною в довільній точці кривої, в чотири рази більша від площі прямокутника, побудованого на відрізках перпендикулярів, опущених з точки кривої на осі координат.

Відповідь: $xy = C$.

62. Знайти криву $y = f(x) \quad \left(f(x) \geq 0, \quad f(0) = 0\right)$, яка обмежує криволінійну трапецію з основою $[0, x]$, площа якої пропорційна $(n+1)$-му степеню $f(x)$. Відомо, що $f(1) = 1$.

Відповідь: $x = y^n$.

63. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала, що дорівнює a^2. *Відповідь:* $(C \pm x)y = 2a^2$.

64. Знайти криву, для якої сума катетів трикутника, побудованого так, як в попередній задачі, є величина стала, що дорівнює b.
Відповідь: $b \ln y - y = \pm x + C, \quad 0 < y < b$.

65. Знайти криву, для якої трикутник, утворений нормаллю з осями координат, був би рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox, дотичною і нормаллю.
Відповідь: $(x - C)^2 + y^2 = C^2$.

66. Знайти криву, для якої площа між кривою, віссю абсцис та ординатою пропорційна довжині дуги цієї кривої.

Відповідь: $y = a \cdot ch\dfrac{x - C}{a}$.

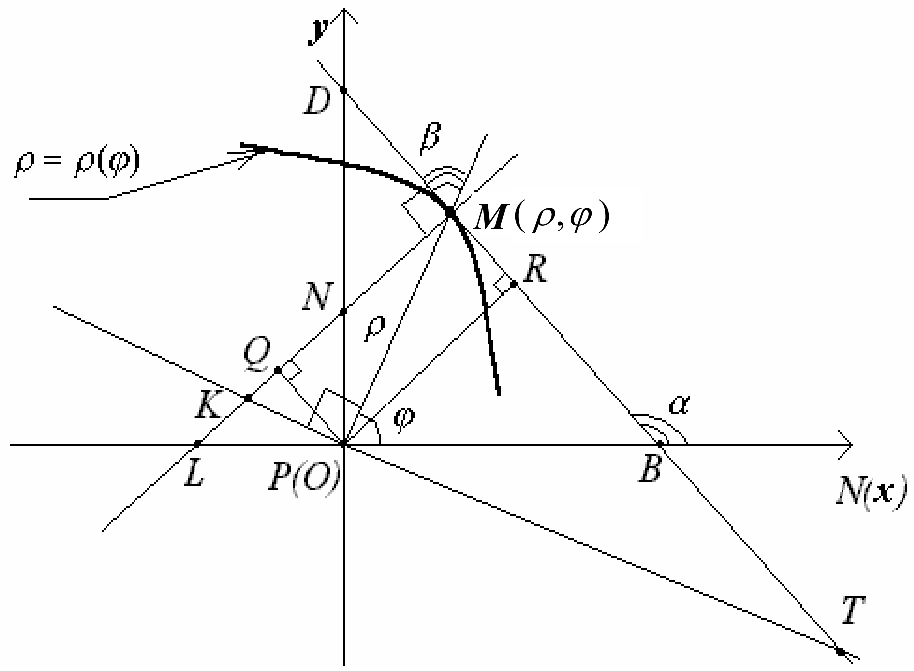
67. Знайти криву, яка проходить через точку $N(0, a)$ і має ту властивість, що площа криволінійної трапеції, обмеженої будь-якою дугою кривої, двома ординатами і віссю абсцис, пропорційна довжині цієї дуги. Коефіцієнт пропорційності дорівнює a.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $y' = \pm\dfrac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$.

Відповідь: $y = a \cdot ch\dfrac{x}{a}$.

Геометричні задачі. Полярна система координат

Означення дотичної і нормалі до кривої при переході з декартової прямокутної системи координат (ДПСК) до полярної системи координат (ПСК) не змінюються, але, зрозуміло, нового вигляду наберуть рівняння цих прямих, а, отже, і вирази для обчислення довжин відрізків, пов’язаних з ними.



Знайдемо їх, вважаючи заданим рівняння кривої в ПСК у явному вигляді $\rho=\rho(\varphi)$, а саму ПСК – узгодженою з ДПСК, так що $\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Нехай радіус-вектор точки *M* дорівнює ρ і утворює з полярною віссю (віссю *Ox*) кут φ, з дотичною до кривої у даній точці – кут β. Сама ж дотична утворює з полярною віссю кут α.

Обчислимо $tg\beta$. Оскільки з трикутника *PMB* $\beta=\alpha-\varphi$, то $\beta=arctg\frac{dy}{dx}-\varphi$,

$tg\beta=tg\left(arctg\frac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}-\varphi\right)$, звідки

$$tg\beta=\frac{\rho}{\rho'}. \tag{1}$$

Піддотичною кривої в точці M назвемо проекцію TP напрямленого відрізка TM дотичної на пряму, яка проходить через полюс перпендикулярно до радіус-вектора точки M.

Знайдемо з прямокутного трикутника *MTP* піддотичну *TP*:

$$TP=\frac{\rho^2}{\rho'} \tag{2}$$

(тригонометрична форма: $TP=\rho tg\beta$).

Піднормаллю кривої в точці M назвемо проекцію PK напрямленого відрізка MK нормалі на пряму, яка проходить через полюс перпендикулярно до радіус-вектора точки M.

Знайдемо з прямокутного трикутника *KMP* піднормаль *PK*:

$$PK=\rho' \tag{3}$$

(тригонометрична форма: $PK=\rho ctg\beta$).

Знайдемо відрізок дотичної *TM*:

$$TM=\left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right|=\left|tg\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right| \tag{4}$$

(якщо взяти $PM=\rho$, $PT=\rho tg\beta$, то одержимо тригонометричну форму: $TM=\dfrac{\rho}{\cos\beta}$).

Знайдемо відрізок нормалі *KM*:

$$KM=\sqrt{\rho^2+\rho'^2} \tag{5}$$

(тригонометрична форма: $KM=\dfrac{\rho}{\sin\beta}$).

З ΔPMB визначаємо відрізок *PB*, що відтинається дотичною на полярній осі:

$$PB=\left|\frac{\rho^2}{\rho\cos\varphi+\rho'\sin\varphi}\right|=\left|\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\sin\alpha}\right|. \tag{6}$$

З прямокутного трикутника *PBD* знаходимо відрізок *PD*, що відтинається дотичною на промені $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$:

$$PD=\left|\frac{\rho^2}{\rho\sin\varphi-\rho'\cos\varphi}\right|=\left|\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cos\alpha}\right|. \tag{7}$$

Тепер обрахуємо довжину відрізка дотичної *DB*, що міститься між полярною віссю та променем $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$:

$$DB=\left|\frac{2\rho^2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{(\rho^2-\rho'^2)\sin2\varphi-2\rho\rho'\cos2\varphi}\right|=\left|\frac{2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\sin2\alpha}\right|. \tag{8}$$

Знайдемо довжину відрізка *LP*, що відтинається нормаллю на полярній осі:

$$LP=\left|\frac{\rho\rho'}{\rho\sin\varphi-\rho'\cos\varphi}\right|=\left|\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cos\alpha}\right|. \tag{9}$$

Обчислимо довжину відрізка, що відтинається нормаллю на промені $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$:

$$PN=\left|\frac{\rho'\rho}{\rho\cos\varphi+\rho'\sin\varphi}\right|=\left|\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\sin\alpha}\right|. \tag{10}$$

Знайдемо відрізок нормалі між полярною віссю та променем $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$:

$$LN=\left|\frac{2\rho\rho'\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{(\rho^2-\rho'^2)\sin2\varphi-2\rho\rho'\cos2\varphi}\right|=\left|\frac{2\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\sin2\alpha}\right|. \tag{11}$$

Визначимо довжину перпендикуляра, опущеного із полюса на дотичну:

$$PR = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \qquad (12)$$

(тригонометрична форма $PR = \rho\sin\beta$).

Знайдемо відстань від полюса до нормалі:

$$PQ = \left|\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\right| \qquad (13)$$

(тригонометрична форма $PQ = \rho\cos\beta$).

Узагальнюючи одержані відомості, запишемо рівняння дотичної в ПСК:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho^2}{\rho\cos(\bar{\varphi} - \varphi) - \rho'\sin(\bar{\varphi} - \varphi)} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\sin(\alpha - \bar{\varphi})}, \qquad (14)$$

де $\bar{\varphi}, \bar{\rho}$ – координати біжучої точки дотичної.

Рівняння нормалі в ПСК має вигляд

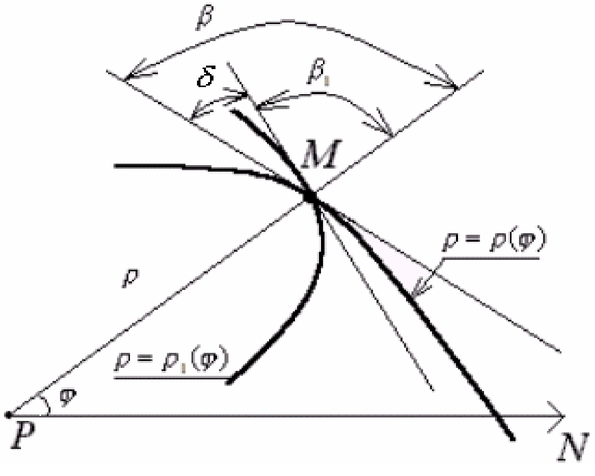
$$\bar{\rho} = \frac{\rho'\rho}{\rho'\cos(\bar{\varphi} - \varphi) + \rho\sin(\bar{\varphi} - \varphi)} = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\cos(\alpha - \bar{\varphi})} \qquad (15)$$

де $\bar{\varphi}, \bar{\rho}$ – координати біжучої точки нормалі.

Задачі на траєкторії

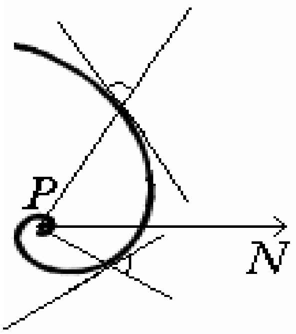
Приклад 1. Знайти криві, які перетинають усі півпрямі, які виходять з полюса, під кутом $\frac{\pi}{4}$.

▼Щоб від рівняння сім'ї кривих $F(\rho, \varphi) = 0$ перейти до рівняння ізогональних траєкторій $F_1(\rho, \varphi) = 0$ (кривих, кожна з яких перетинає криві даної сім'ї під одним і тим же кутом δ), треба в диференціальному рівнянні даної сім'ї замінити ρ' відповідним диференціальним виразом (як в декартовій прямокутній системі y' замінюють на $-\frac{1}{y'}$, коли $\delta = 90^\circ$). Знайдемо цю відповідність, вважаючи заданими рівняння даної сім'ї кривих та сім'ї ізогональних траєкторій (кут перетину δ) у явному вигляді $\rho = \rho(\varphi)$ та $\rho = \rho_1(\varphi)$ відповідно.



Нехай у точці перетину M ізогональних траєкторій відповідні дотичні утворюють з продовженням даного радіус-вектора кути β і β_1. Тоді один із кутів між кривими (між дотичними до них) $\delta = \beta - \beta_1$, а

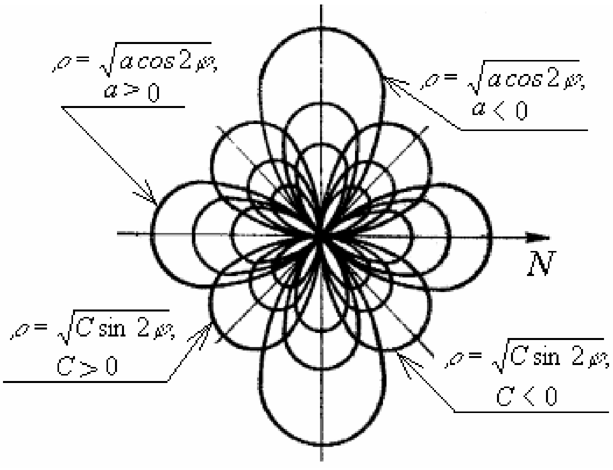
$tg\delta=\dfrac{tg\beta-tg\beta_1}{1+tg\beta\cdot tg\beta_1}$, звідки з урахуванням (1) $\rho_1'=\dfrac{\rho\rho'+\rho^2 tg\delta}{\rho-\rho' tg\delta}$ (при $\delta\to 90^\circ$ $tg\delta\to\infty$, і $\rho_1'\to-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$ – ортогональні траєкторії).



Оскільки рівняння усіх півпрямих, які виходять з полюса, має вигляд $\varphi=C$, то диференціюючи його, знаходимо, що $\dfrac{d\varphi}{d\rho}=0$ або $\dfrac{1}{\rho'}=0$. Замінивши тут ρ' на $\dfrac{\rho\rho'+\rho^2 tg\delta}{\rho-\rho' tg\delta}$ та врахувавши, що $tg\delta=1$, одержуємо диференціальне рівняння сім'ї ізогональних траєкторій $\dfrac{\rho-\rho'}{\rho\rho'+\rho^2}=0$ або $\rho'=\rho$. Інтегруючи його, встановлюємо, що ізогональними траєкторіями півпрямих $\varphi=C$ є логарифмічні спіралі $\rho=ae^{\varphi}$, де $a>0$. ▲

Приклад 2. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї лемніскат $\rho^2=a\cos 2\varphi$.

▼Диференціюємо по φ рівняння $\rho^2=a\cos 2\varphi$: $\rho\rho'=-a\sin 2\varphi$. Виключаючи параметр a з останніх двох рівнянь, одержимо диференціальне рівняння даної сім'ї кривих: $\rho'=-\rho tg 2\varphi$. Замінюючи ρ' на $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$, знайдемо диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}=-\rho tg2\varphi$, звідки $\dfrac{d\rho}{\rho}=ctg 2\varphi d\varphi$. Інтегруємо і знаходимо таким чином рівняння ортогональних траєкторій $\rho^2=C\sin 2\varphi$.



Отже, ортогональними траєкторіями сім'ї лемніскат є лемніскати, осі симетрії яких утворюють з полярною віссю кут 45°. ▲

Приклад 3. Знайти ізогональні траєкторії сім'ї синусоїдальних спіралей $\rho^k=a^k\sin k\varphi$ (кут ω).

▼Диференціальне рівняння даної сім'ї $\dfrac{\rho'}{\rho}=ctgk\varphi$. Потрібно в ньому замінити ρ' на $\dfrac{\rho\rho'+\rho^2 tg\omega}{\rho-\rho' tg\omega}$ і тоді матимемо $\dfrac{1-ctg\omega ctgk\varphi}{ctg\omega+ctgk\varphi}d\varphi+\dfrac{d\rho}{\rho}=0$ або $\dfrac{d\rho}{\rho}=ctg(k\varphi+\omega)d\varphi$. Звідси $\rho^k=C^k\sin(k\varphi+\omega)$ – ізогональні траєкторії. Це також синусоїдальні спіралі, але повернуті на кут $\dfrac{\omega}{k}$. ▲

Задачі

1. Знайти ортогональні траєкторії даної сім’ї кривих: $\rho = a(1+\cos\varphi)$. *Відповідь:* $\rho = C(1-\cos\varphi)$.

2. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину α) сім’ї ліній $\rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$.

Відповідь: $\rho^2 = \dfrac{C}{\cos(2\varphi-\alpha)}$.

3. Знайти ортогональні траєкторії для сім’ї кривих $(x^2+y^2)^2 - a^2xy = 0$.
Вказівка. Перейти до полярних координат.
Відповідь: $(x^2+y^2)^2 = C(x^2-y^2)$.

4. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину α) сім’ї кривих $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Відповідь: $\rho = C\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}+\alpha\right)$.

5. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину α) сім’ї кіл $\rho = a\cos\varphi$.
Відповідь: $\rho = C\cos(\varphi+\alpha)$.

6. Знайти диференціальне рівняння ізогональних траєкторій ($\alpha = 90°$) сім’ї кривих $\rho = a+\cos\varphi$.
Відповідь: $\rho' \sin\varphi = \rho^2$.

7. Знайти диференціальне рівняння ізогональних траєкторій ($\alpha = 90°$) сім’ї кривих $\rho = a\cos^2\varphi$.

Відповідь: $\rho' = \dfrac{1}{2}\rho ctg\varphi$.

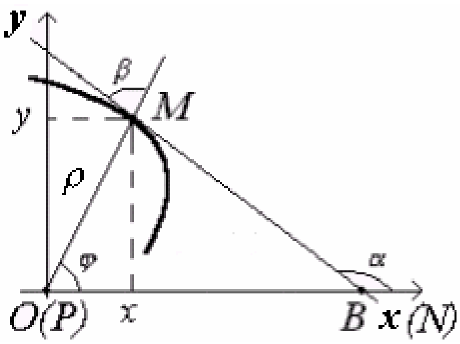
8. Знайти диференціальне рівняння ізогональних траєкторій ($\alpha = 45°$) сім’ї кривих $\rho = a\sin\varphi$.
Відповідь: $\rho' = \rho ctg(\varphi \pm 45°)$.

9. Знайти криві, які перетинають усі логарифмічні спіралі $\rho = ae^{\varphi}$ під кутом $\pi/4$.
Відповідь: $\rho = C$.

Задачі на властивості дотичних, нормалей, піддотичних і піднормалей

Приклад 4. Знайти криві, у яких кут φ між віссю абсцис і радіус-вектором точки дотику дорівнює куту β між його продовженням і дотичною.

▼*Перший спосіб.* Нехай криву задано в ДПСК рівнянням $y = y(x)$, а $M(x, y)$ – точка дотику на ній. Радіус-вектор OM утворює з додатним напрямом осі абсцис кут φ, а дотична до кривої в точці M – кут α. Кут між прямими OM і BM дорівнює β і визначається як $\alpha - \varphi$ або через кутові коефіцієнти даних прямих за співвідношенням $tg\beta = \dfrac{tg\alpha - tg\varphi}{1 + tg\alpha \cdot tg\varphi}$.



Оскільки $tg\alpha = y'$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, то $tg\beta = \dfrac{y' - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{yy'}{x}} = \dfrac{xy' - y}{x + yy'}$, і згідно з умовою задачі маємо таке диференціальне рівняння для знаходження кривої: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{xy' - y}{x + yy'}$

або $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. Це однорідне диференціальне рівняння першого порядку (права частина – однорідна як відношення двох однорідних многочленів другого порядку функція нульового виміру). Поділивши чисельник і знаменник на x^2, приходимо до рівняння $y' = \dfrac{2 \cdot y/x}{1 - (y/x)^2}$. Впроваджуючи заміну змінних $\dfrac{y}{x} = u$ та врахувавши, що $y' = (u \cdot x)' = u'x + u$, зводимо дане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними $u'x + u = \dfrac{2u}{1 - u^2}$.

Для інтегрування відокремлюємо змінні та проводимо розкладання підінтегральної функції (раціональний дріб) на елементарні дроби: $\dfrac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)} du = \dfrac{dx}{x}$;

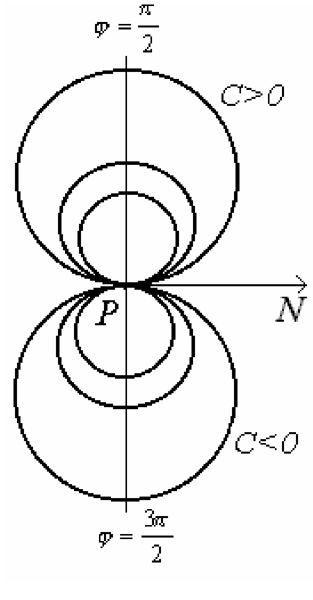
$\dfrac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{Bu + C}{u^2 + 1} = \dfrac{A(u^2 + 1) + (Bu + C) \cdot u}{u(u^2 + 1)}$, де A, B, C – невідомі коефіцієнти. З рівності $1 - u^2 = (A + B) \cdot u^2 + Cu + A$ чисельників рівних дробів одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} A + B = -1, \\ C = 0, \\ A = 1, \end{cases}$ з якої знаходимо, що $A = 1, B = -2, C = 0$.

Отже, інтегруючи, маємо: $\int\frac{du}{u}-\int\frac{2udu}{u^2+1}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C_1|$, $\ln|u|-\ln(u^2+1)=\ln|C_1\cdot x|$, $\frac{u}{u^2+1}=\frac{x}{2C}$ ($\frac{1}{2C}=\pm C_1$, $\ln|C_1|$ – стала інтегрування).

Повертаючись до початкових змінних, запишемо: $\frac{y/x}{(y/x)^2+1}=\frac{x}{2C}$ або після спрощень: $x^2+(y-C)^2=C^2$. Таким чином, шуканими кривими є кола з центрами на осі ординат, що дотикаються до початку координат.

Другий спосіб. Нехай полярне рівняння кривої $\rho=\rho(\varphi)$, координати точки дотику M – ρ і φ, дотична BM утворює з полярною віссю кут α.

З трикутника PMB знаходимо, що $\alpha=\varphi+\beta$. Звідси з урахуванням того, що $tg\alpha=\frac{(\rho\sin\varphi)'}{(\rho\cos\varphi)'}$, матимемо $tg\beta=\frac{\rho}{\rho'}$. За умовою $\frac{\rho}{\rho'}=tg\varphi$, тобто математичною моделлю задачі є диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його ($\frac{d\rho}{\rho}=\frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}$, $\ln|\rho|=\ln|\sin\varphi|+C_1$), знаходимо загальний розв'язок $\rho=C\sin\varphi$.



Безпосередньою побудовою (область визначення $\sin\varphi\geq 0$ ($\sin\varphi\leq 0$) для $C>0$ ($C<0$); $\rho(\pi-\varphi)=\rho(\varphi)$ – крива симетрична відносно променя $\varphi=\frac{\pi}{2}$) або перетворенням до декартового рівняння ($\rho=C\sin\varphi$, $\rho^2=C\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=Cy$, $x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2$) переконуємося, що шукані криві – це кола довільного радіуса з центрами на променях $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, що дотикаються до полюса.

Як бачимо на прикладі цієї задачі, доцільність переходу до полярних координат виправдовується: спрощується диференціальна модель – замість однорідного диференціального рівняння маємо рівняння з відокремлюваними змінними. ▲

Приклад 5. Знайти криву, якщо відстань від полюса до нормалі дорівнює проекції радіус-вектора на бісектрису полярного аргумента, тобто $\rho\cos\frac{\varphi}{2}$.

▼Розв'яжемо задачу двома способами.

Перший спосіб (алгебраїчна форма). Згідно формули (13), маємо $\left|\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}\right|=\rho\cos\frac{\varphi}{2}$, звідки $\frac{\rho'}{\rho}=\pm ctg\frac{\varphi}{2}$. Отже, даній вимозі задовольняють дві сім'ї кривих: 1) $\rho = C^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$; 2) $\rho = C^2 \cos ec^2 \frac{\varphi}{2}$.

Другий спосіб (тригонометрична форма). Згідно тригонометричної форми формули (13) маємо рівняння $\rho \cos\beta = \rho\cos\frac{\varphi}{2}$ або $\cos\beta = \cos\frac{\varphi}{2}$. Звідси $\varphi = 2\beta$ або $\varphi = 4\pi - 2\beta$.

Ми одержали рівняння, кінцевий вигляд яких між φ і β. Диференціюючи їх, запишемо: $d\varphi = \pm 2d\beta$. Виключаємо $d\varphi$ з допомогою рівності $tg\beta = \frac{\rho d\varphi}{d\rho}$: $tg\beta \frac{d\rho}{\rho} = \pm 2d\beta$.

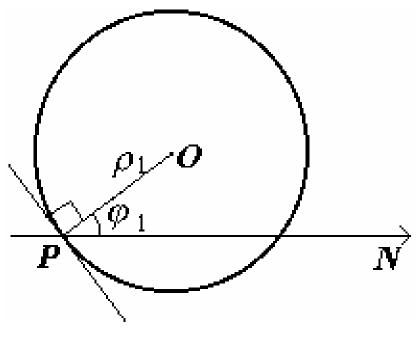
Отже, одержано дві сім'ї інтегральних кривих (у параметричній формі): 1)$\varphi = 2\beta$, $\rho = C^2 \sin^2\beta$; 2) $\varphi = 4\pi - 2\beta$, $\rho = C^2 \cos ec^2\beta$. Виключаючи β, матимемо такий же результат як і вище.

Позначаючи у першому випадку $C^2 = 2a$, у другому − $2C^2 = p$, можна записати розв'язок так: 1) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$; 2) $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$, тобто маємо сім'ї кардіоїд і парабол.▲

Приклад 6. Знайти лінію, яка проходить через полюс, а всі нормалі – через точку (ρ_1, φ_1).

▼Покладемо у формулі (15) нормалі до кривої $\rho = \rho(\varphi)$ $\bar{\rho} = \rho_1$, а $\bar{\varphi} = \varphi_1$: $\rho_1(\rho\sin(\varphi_1 - \varphi) + \rho'\cos(\varphi_1 - \varphi)) = \rho\rho'$, де (ρ, φ) – координати точки дотику. Очевидно, що $\rho\sin(\varphi_1 - \varphi) + \rho'\cos(\varphi_1 - \varphi) = (\rho\cos(\varphi_1 - \varphi))'$, а $\rho\rho' = \left(\frac{\rho^2}{2}\right)'$, тому, інтегруючи безпосередньо, одержуємо $\rho_1\rho\cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 + C$.

З початкових умов (крива проходить через полюс, тобто точка $(0, \varphi)$ належить їй), знаходимо $C = 0$. Таким чином, коло $\rho = 2\rho_1\cos(\varphi_1 - \varphi)$ з центром у точці (ρ_1, φ_1) і радіусом ρ_1 – шукана крива .▲

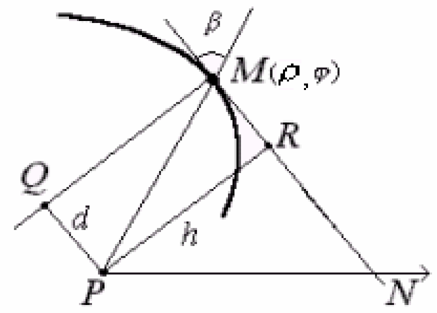


Приклад 7. Знайти криві, якщо відомо, що їх нормалі співпадають з радіус-вектором точки дотику.

▼Оскільки нормаль перпендикулярна до дотичної, то відстань h від полюса до дотичної з одного боку дорівнює ρ, а з іншого – її можна знайти як $\rho\sin\beta = \rho \cdot \frac{|tg\beta|}{\sqrt{1 + tg^2\beta}}$ (див. мал. до пр. 4). Враховуючи рівність (1),

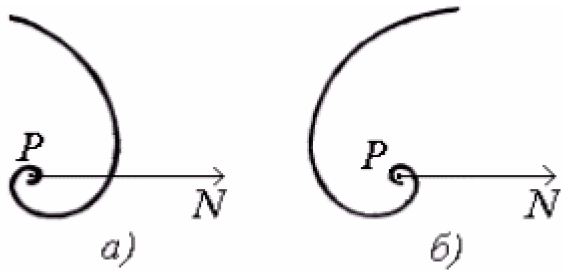
$h = \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$. Таким чином, прирівнюючи два вирази для довжини перпендикуляра, опущеного з полюса на дотичну, маємо таке диференціальне рівняння для відшукання кривих: $\rho = \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$ або $\rho' = 0$. Звідси $\rho = C$ – сім'я концентричних кіл довільного радіуса з центром у полюсі.▲

Приклад 8. Знайти криві, для яких відстань від полюса до дотичної в довільній точці дорівнює відстані від полюса до нормалі.



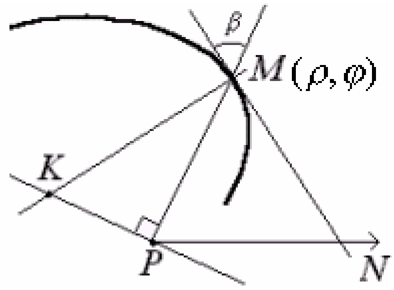
▼З прямокутного трикутника PQM відстань $d = PQ$ від полюса до нормалі, яка проходить через точку дотику $M(\rho,\varphi)$, знаходимо за теоремою Піфагора як $\sqrt{PM^2 - QM^2}$. Беручи до уваги (12), маємо $d = \left|\dfrac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\right|$.

За умовою задачі $h = d$, тобто $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \left|\dfrac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}\right|$ або $\rho' = \pm\rho$.

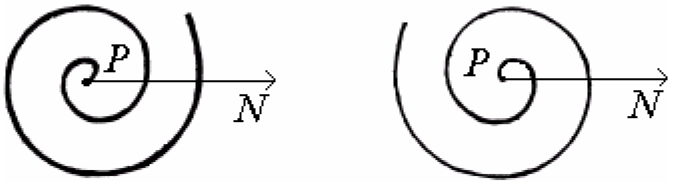


Відокремлюючи змінні і інтегруючи, знаходимо шукані криві $\rho = Ce^{\pm\varphi}$, де $C > 0$. Це логарифмічні спіралі, які, "розкручуючись" (полярний кут φ зростає), віддаляються від полюса, якщо взяти знак плюс (мал. а), і сходяться до полюса – в протилежному випадку (мал. б). ▲

Приклад 9. Знайти криві, полярна піднормаль яких є сталою величиною, що дорівнює a.



▼Оскільки полярна піднормаль є проекцією відрізка MK нормалі, що знаходиться між точкою дотику M і прямою, яка проходить через полюс перпендикулярно до радіус-вектора точки M, на цю пряму, то із прямокутного трикутника MPK $PK = PM \cdot ctg\beta$, або згідно з (1) $PK = \rho'$.



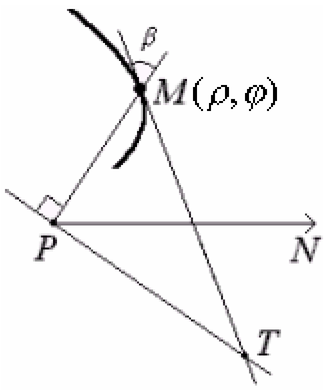
а) $a>0$, $C=0$ б) $a<0$, $C=0$

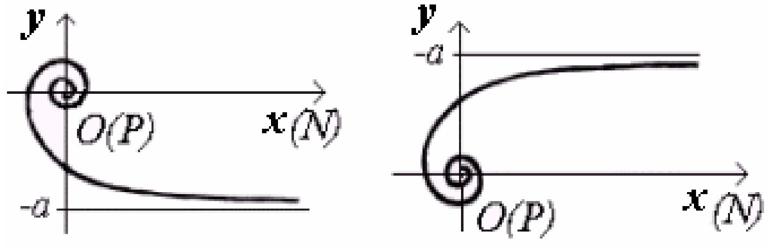
Таким чином, диференціальне рівняння, яким моделюється задача, має вигляд $\rho' = a$ або $\dfrac{d\rho}{d\varphi} = a$, звідки $d\rho = ad\varphi$, а $\rho = a\varphi + C$ (спіралі Архімеда). ▲

Приклад 10. Знайти криву, полярна піддотична якої є сталою величиною, що дорівнює a.

▼Піддотична означається аналогічно до піднормалі: це проекція відрізка дотичної TM на пряму TP. З прямокутного трикутника MPT піддотична TP визначається як $PM \cdot tg\angle PMT$ або, використовуючи (1), $TP=\frac{\rho^2}{\rho'}$.

Отже, $\frac{\rho^2}{\rho'}=a$, $\frac{d\rho}{\rho^2}=\frac{1}{a}d\varphi$, $\frac{1}{\rho}=-\frac{\varphi}{a}+\frac{C}{a}$; $\rho=\frac{a}{C-\varphi}$ – загальне рівняння шуканих інтегральних кривих (гіперболічні спіралі). ▲



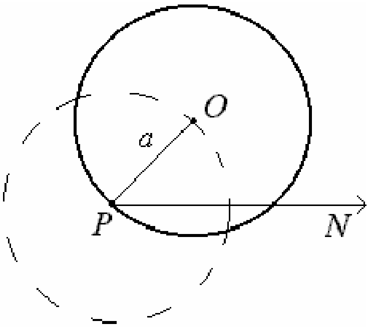


а)a>0, C=0 б)a<0, C=0

Приклад 11. Знайти криві, довжина відрізка нормалі яких є сталою величиною $2a$.

▼Відрізок нормалі – це відрізок MK (див. мал. пр. 9). З прямокутного трикутника MPK його довжину знаходимо як довжину гіпотенузи: $MK=\sqrt{PM^2+PK^2}$, де $PM=\rho$ – радіус-вектор точки дотику M, PK – полярна піднормаль шуканої кривої. Тому, повертаючись до рівності (3), можна записати, що $MK=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$.

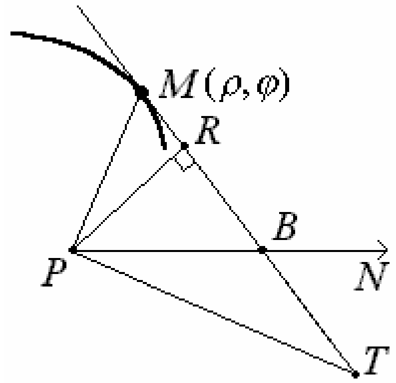
Для нашої задачі $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=2a$ або $\rho'=\pm\sqrt{(2a)^2-\rho^2}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо: $\frac{d\rho}{\sqrt{(2a)^2-\rho^2}}=\pm d\varphi$, $\arcsin\frac{\rho}{2a}=C\pm\varphi$; остаточне рівняння сім'ї інтегральних кривих набуває вигляду $\rho=2a\cdot\sin(C\pm\varphi)$. Воно задає кола радіусом a з центром у біжучій точці $O\left(a;\frac{\pi}{2}-C\right)$ у випадку $+\varphi$ і $O'\left(a;C-\frac{\pi}{2}\right)$ – у випадку $-\varphi$. ▲



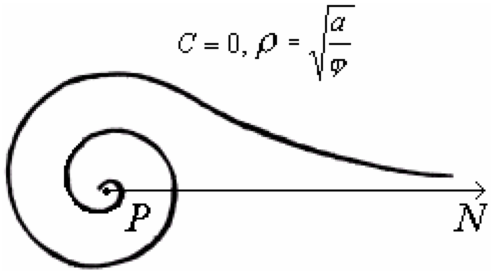
Приклад 12. Знайти криву, для якої площа трикутника, утвореного полярним радіусом точки дотику, полярною віссю і відрізком дотичної, що ділиться полярною віссю навпіл, є величиною постійною (дорівнює $0{,}5a$).

▼Обчислимо довжину сторони BM трикутника PMB, про який йдеться в умові задачі, як половину відрізка між точкою дотику і прямою, що проходить через полюс перпендикулярно до радіус-вектора точки M. Для цього спочатку обрахуємо довжину відрізка TM дотичної, спираючись на рівність (2): $TM=\left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right|$. Таким чином, $MB=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right|$, а відповідна висота $PR = \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$ (див. (12)).

Отже, з іншого боку, площу трикутника PMB обчислюємо як половину добутку основи TM на висоту PR і маємо, що $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left| \dfrac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right| \cdot \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \dfrac{a}{2}$ або після спрощень: $\dfrac{\rho^3}{\rho'} = \pm 2a$. Знову для відшукання рівняння кривої одержали диференціальне рівняння, змінні в якому легко відокремлюються: $\dfrac{d\rho}{\rho^3} = \pm \dfrac{d\varphi}{2a}$.



$\int \dfrac{dr}{\rho^3} = \pm \dfrac{1}{2a} \int d\varphi - \dfrac{C}{2a}$ (сталу інтегрування беремо у вигляді $-\dfrac{C}{2a}$ для зручності), і тоді $-\dfrac{1}{2\rho^2} = \dfrac{\pm\varphi - C}{2a}$, звідки $\rho = \sqrt{\dfrac{a}{C \pm \varphi}}$. ▲



Приклад 13. Знайти криві, у яких відрізок, що відтинається будь-якою дотичною на полярній осі, дорівнює полярному радіусу точки дотику.

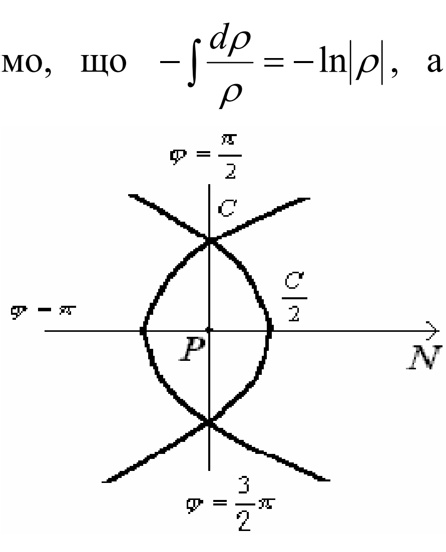
▼Довжину відрізка PB полярної осі, який міститься між полюсом і точкою перетину дотичної з полярною віссю, можна знайти з трикутника PMB (див. мал. до пр. 12: $PM = \rho, \angle PMB = \beta, \angle BPM = \varphi$), наприклад, за теоремою синусів, якщо врахувати рівність (1): $PB = \left| \dfrac{\rho^2}{\rho \cos\varphi + \rho' \sin\varphi} \right|$.

Отже, за умовою задачі матимемо таке диференціальне рівняння: $\left| \dfrac{\rho^2}{\rho \cos\varphi + \rho' \sin\varphi} \right| = \rho$ або $\rho(\cos\varphi \pm 1) = -\rho' \sin\varphi$, звідки після відокремлення змінних: $-\dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi} d\varphi$. Інтегруючи, одержимо, що $-\int \dfrac{d\rho}{\rho} = -\ln|\rho|$, а

$$\int \frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi} d\varphi = \int \frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= -\int \frac{\cos\varphi \pm 1}{1 - \cos^2\varphi} d\cos\varphi =$$

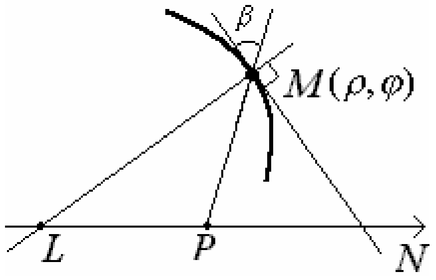
$$= -\int \frac{\cos\varphi \pm 1}{(1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)} d\cos\varphi = \ln|\cos\varphi \mp 1|.$$ Якщо



сталу інтегрування взяти у формі $\ln\left|\frac{1}{C_1}\right|$, то відразу запишемо загальний розв’язок у вигляді $\rho = \frac{C}{1 \pm \cos\varphi}$, де $C = \pm C_1 > 0$. Таким чином, умову задачі задовольняють параболи, фокуси яких співпадають з полюсом, а вітки спрямовані або ж за напрямом полярної осі (знак “–”), або в протилежному напрямі (знак “+”). ▲

Приклад 14. Знайти криві, для яких відрізок, що відтинається будь-якою нормаллю на полярній осі, дорівнює полярному радіусу точки дотику.

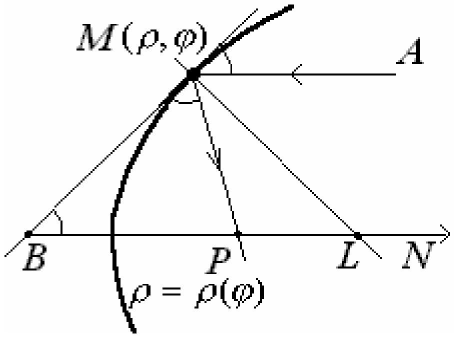
▼ Аналогічними до попередньої задачі міркуваннями знаходимо відрізок LP полярної осі між полюсом і точкою перетину нормалі до кривої $\rho = \rho(\varphi)$ з полярною віссю, врахувавши, що $PM = \rho$, $\angle LMP = 90^\circ - \beta$, $\angle PLM = \varphi + \beta - 90^\circ$: $LP = \left|\frac{\rho\rho'}{\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi}\right|$. Прирівнявши праву частину останньої рівності до ρ, одержимо після інтегрування диференціального рівняння такі ж як і у задачі прикладу 13 інтегральні криві. ▲



Приклад 15. Знайти форму дзеркала, яке збирає всі паралельні промені в одну точку.

▼Знайдемо рівняння кривої, яку треба обертати навколо полярної осі, щоб забезпечити потрібну форму дзеркальної поверхні.

Для цього припустимо, що всі падаючі промені паралельні полярній осі і збираються після відбивання в полюсі полярної системи координат. Якщо BM – дотична до кривої $\rho = \rho(\varphi)$ в точці M падіння променя AM, а LM – нормаль, то згідно закону відбивання $\angle LBM = \angle BMP$. Це означає, що ΔMPB рівнобедрений, $MP = PB$; ми приходимо до задачі прикладу 13.



Таким чином, шукана форма дзеркала – параболоїд обертання.

Поширений спосіб розв’язання цієї задачі в декартовій прямокутній системі координат приводить через ланцюжок геометричних міркувань лише до однорідного диференціального рівняння. ▲

Задачі

10. Знайти криву, полярна піддотична якої дорівнює полярній піднормалі. *Відповідь:* $\rho = Ce^{\pm\varphi}$ (логарифмічні спіралі).

11. Знайти криві, дотичні до яких в будь-якій точці утворюють рівні кути з полярним радіусом і полярною віссю.

Відповідь: $\rho(1 \pm \cos\varphi) = C$.

12. Знайти криву, у якої точка перетину будь-якої дотичної з полярною віссю однаково віддалена від точки дотику і від полюса.
Відповідь: $\rho = C\sin\varphi$.

13. Знайти криву, у якої відстань будь-якої дотичної до полюса дорівнює відстані від полюса до проекції точки дотику на полярну вісь.
Відповідь: $\rho = C\cos\varphi$.

14. Знайти криву, у якої точка перетину будь-якої дотичної з полярною віссю вдвічі ближче знаходиться до полюса, ніж проекція точки дотику на полярну вісь до полюса.
Відповідь: $C\rho\cos^2\varphi = \sin\varphi$.

15. Знайти лінію, всі дотичні до якої проходять через дану точку (ρ_1, φ_1).
Вказівка. Використати рівняння (14) дотичної до кривої $\rho = \rho(\varphi)$. Врахувати, що знаменник (14) є повною похідною.
Відповідь: пучок прямих $\rho\sin(\varphi - \varphi_1) = C(\rho_1 - \rho\cos(\varphi - \varphi_1))$.

16. Визначити криву, всі дотичні якої проходять через полюс.
Відповідь: $\varphi = C$.

17. Визначити криву, для якої відношення відрізка, утвореного дотичною на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, до відрізка, утвореного нормаллю на полярній осі, є величина стала.
Відповідь: $\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$.

18. Знайти криву, знаючи що відношення відрізка, утворюваного її нормаллю на полярній осі, до радіус-вектора, є величина стала й дорівнює k.
Відповідь: $\rho = \dfrac{C}{1 - k\cos\varphi}$.

19. Знайти криву, знаючи, що трикутник, утворений дотичною до неї, променем $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ та радіус-вектором точки дотику, є рівнобедреним.
Вказівка. Розглянути усі можливі випадки: основа трикутника – радіус-вектор точки дотику; основа трикутника – відрізок, що відтинається дотичною на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$; основа трикутника – відрізок дотичної між точкою дотику і променем $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.
Відповідь: $\rho = C\cos\varphi, \rho = \dfrac{C}{1 + \cos\varphi}, \rho^2 = \dfrac{C}{\sin 2\varphi}$.

20. Знайти криві, для яких відрізок, що його відтинає дотична на полярній осі, пропорційний квадрату відстані проекції точки дотику на полярну вісь до полюса.
Відповідь: $k\rho\sin\varphi = tg\varphi + C$.

21. Знайти криву, яка має таку властивість: відрізок полярної осі від полюса до перетину з дотичною до кривої в будь-якій точці пропорційний відстані проекції цієї точки на промінь $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ до полюса.

Відповідь: $C\rho\sin\varphi = e^{-\frac{ctg\varphi}{k}}$.

22. Визначити криву, у якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, до радіус-вектора точки дотику дорівнює постійній величині.

Відповідь: $\rho^{2a} = \dfrac{C\cos\varphi}{(\sin\varphi+1)^2}$.

23. Знайти криву, для якої довжина відрізка, який відтинається на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ нормаллю, проведеною в довільній точці кривої, дорівнює довжині полярного радіуса цієї точки.

Відповідь: $\rho = \dfrac{C}{1-\sin\varphi}$.

24. Знайти криві, які володіють такою властивістю: відрізок, який дотична у будь-якій точці кривої відсікає на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ дорівнює квадрату відстані проекції точки дотику на полярну вісь від полюса.

Відповідь: $\rho = \dfrac{C - ctg\varphi}{\cos\varphi}$.

25. Знайти криву, у якої відрізок, що відтинається дотичною на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, дорівнює півсумі відстаней проекції точки дотику на полярну вісь та на промінь $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ до полюса.

Відповідь: $\rho = \dfrac{C\cos\varphi}{1+\sin 2\varphi}$.

26. Знайти криву, для якої добуток проекції радіус-вектора якоїсь точки на полярну вісь на величину відрізка, що відтинається нормаллю на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, дорівнює подвоєному квадрату полярного радіуса даної точки.

Відповідь: $\rho = \dfrac{C}{1+\cos 2\varphi}$.

27. Знайти криві, у яких відрізок, який відтинається дотичною на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, дорівнює квадрату проекції полярного радіуса точки дотику на цей промінь.

Вказівка. Диференціальна модель задачі $\rho' - \rho tg\varphi = -\frac{1}{\cos\varphi \sin^2\varphi}$.

Відповідь: $\rho = \frac{C}{\cos\varphi} + \frac{1}{\sin\varphi}$**.**

28. Знайти рівняння кривої в полярних координатах, коли відомо, що тангенс кута β, утвореного радіус-вектором, проведеним у точку дотику, і дотичною до кривої в тій же точці, дорівнює полярному куту φ.

Відповідь: $\rho = C\varphi$**.**

29. Знайти в полярних координатах рівняння кривої, радіус-вектор якої утворює з дотичною сталий кут β, такий що $tg\beta = b$.

Відповідь: $\rho = Ce^{\frac{\varphi}{b}}$**.**

30. Знайти рівняння кривої, в кожній точці якої тангенс кута між радіус-вектором і дотичною до кривої дорівнює квадрату радіус-вектора .

Відповідь: $\rho^2 = 2(\varphi + C)$**.**

31. Знайти криву, для якої тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій точці до полярної осі в n разів більший від тангенса кута, який утворює з полярною віссю радіус-вектор точки дотику.

Відповідь: $\rho^{n-1}\cos^n\varphi = C\sin\varphi$**.**

32. Яка лінія володіє такою властивістю: кут, який складає з полярною віссю дотична до лінії в будь-якій точці, вдвічі більший від кута, який складає з полярною віссю радіус-вектор точки дотику?

Вказівка. Пов’язати задані кути з кутом β між дотичною і радіус-вектором точки дотику.

Відповідь: $\rho = C\sin\varphi$ **.**

33. Знайти лінію, у якої відрізок, який відтинається на промені $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ дотичною в довільній точці, пропорційний кубу проекції радіус-вектора точки дотику на цей же промінь.

Відповідь: $\rho^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{k\sin^2\varphi} + C\right)$**.**

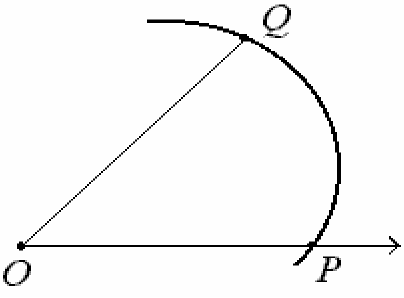
34. Знайти криві, у яких площа трикутника, обмеженого дотичною, полярною віссю і полярним радіусом точки дотику, є величина постійна, що дорівнює a^2.

Відповідь: $\frac{1}{\rho^2} = C\sin^2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2a^2}$**.**

Задачі на площі фігур та довжини дуг кривих

Приклад 16. Знайти криву, яка володіє такою властивістю: довжина її дуги, що знаходиться між будь-якими двома точками *P* і *Q*, пропорційна різниці відстаней точок *P* і *Q* від нерухомої точки *O*.

▼Якщо зафіксувати точку *P*, то дуга *QP* буде змінюватися пропорційно різниці *OQ* і постійної *OP*. Введемо полярні координати, беручи точку *O* за полюс і *OP* − за полярну вісь.

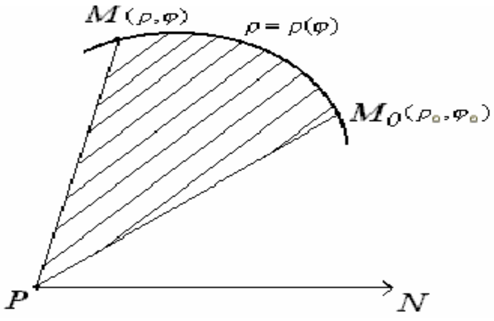


Диференціал дуги в полярних координатах $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$. Звідси для нашої задачі $kd\rho = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$ або $d\varphi = \sqrt{k^2 - 1}\,\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{a}\frac{d\rho}{\rho}$.

Інтегруючи, знаходимо: $\rho = Ce^{a\varphi}$ (логарифмічна спіраль).▲

Приклад 17. Знайти лінію, задану рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, для якої площа сектора, обмеженого лінією і полярними радіусами постійної точки (ρ_0, φ_0) та біжучої точки (ρ, φ) лінії, пропорційна з коефіцієнтом k добутку полярних координат ρ, φ біжучої точки.

▼Математична модель задачі: $\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^2 d\varphi = k\rho\varphi$. Диференціюємо по φ для одержання диференціального рівняння: $\rho^2 = 2k(\rho'\varphi + \rho)$. Відокремлюємо змінні і маємо: $\frac{d\rho}{\rho(\rho - 2k)} = \frac{d\varphi}{2k\varphi}$.



Використаємо розклад на елементарні дроби:

$$\frac{1}{\rho(\rho - 2k)} = \frac{A}{\rho} - \frac{B}{\rho - 2k} = \frac{A(\rho - 2k) - B\rho}{\rho(\rho - 2k)},$$

$\begin{cases} A - B = 0, \\ -2kA = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} A = -\frac{1}{2k}, \\ B = -\frac{1}{2k}. \end{cases}$ Одержимо: $-\frac{1}{2k}\int \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2k}\int \frac{d\rho}{\rho - 2k} = \frac{1}{2k}\int \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{1}{2k}\ln|C_1|$

або $\frac{\rho - 2k}{\rho} = C\varphi$ − загальний інтеграл.

Підставимо замість ρ і φ ρ_0 і φ_0 відповідно і знайдемо з початкових умов сталу інтегрування *C*: $C = \frac{\rho_0 - 2k}{\rho_0\varphi_0}$. Записуємо частинний інтеграл рівняння, що відповідає умові задачі: $\frac{\rho - 2k}{\rho} = \frac{\rho_0 - 2k}{\rho_0\varphi_0} \cdot \varphi$.▲

Фізичні задачі

Щоб розв'язати фізичну задачу за допомогою диференціального рівняння, необхідно:

1) встановити величини, які змінюються в даному явищі чи процесі, і вивчити фізичні закони, що пов'язують їх;
2) вибрати незалежну змінну і функцію цієї змінної, яку ми хочемо знайти;
3) виходячи з умови задачі, визначити початкові і (або) крайові умови;
4) виразити усі величини задачі через незалежну змінну, шукану функцію і її похідну;
5) виходячи з умови задачі і фізичного закону, якому підкоряється дане явище чи процес, скласти диференціальне рівняння;
6) знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння;
7) за початковими і (або) крайовими умовами знайти частинний розв'язок;
8) дати йому фізичну інтерпретацію та дослідити одержаний розв'язок.

Радіоактивний розпад

Приклад 1. Активність радіоактивної речовини пропорційна швидкості свого зменшення. Знайти залежність цієї активності від часу, якщо відомо, що протягом 4 днів вона зменшилась вдвічі.

▼Нехай $R(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу t, а R_0 – в момент часу t_0=0, $\frac{dR}{dt}$ – швидкість зміни кількості речовини. Маємо рівняння: $\frac{dR}{dt} = kR$, звідки $R = Ce^{kt}$. Згідно початкових умов $R(0)$=R_0, тому $R = R_0 e^{kt}$, а значить $\frac{R_0}{2} = R_0 e^{4k}$, звідки $k = -\frac{\ln 2}{4}$.

Отже, $R = R_0 e^{-0,1733t}$.▲

Приклад 2. Закон розпаду радію полягає в тому, що швидкість розпаду пропорційна наявній кількості радію. Відомо, що половина його початкового запасу розпадається за 1600 років. Який процент радію розпадеться через 100 років?

▼Нехай R – кількість радію в момент часу t. Швидкість його розпаду $\frac{dR}{dt}$. Оскільки вона пропорційна R, то маємо таке диференціальне рівняння – модель даного процесу: $\frac{dR}{dt} = kR$, де k – стала. Звідси, $\frac{dR}{R} = kdt$, і значить, $\ln R = kt + C$.

Нехай початковий запас радію R_0. Підставляючи $t = 0$, $R = R_0$, знаходимо, що $\ln R_0 = C$, а підставляючи знайдене значення C в загальний розв'язок, одержуємо $\ln\frac{R}{R_0}=kt$.

При t=1600 $R=\frac{1}{2}R_0$. Звідси $\ln\frac{1}{2}=1600k$, і значить, $k=-\frac{\ln 2}{1600}$. Тому при $t=100$ будемо мати: $\ln\frac{R}{R_0}=-\frac{\ln 2}{1600}\cdot 100=-0{,}0433$, звідки $\frac{R}{R_0}=0{,}958$, а це показує, що через 100 років 95,8 % початкового запасу радію збережеться, а 4,2 % – розпадеться.▲

Приклад 3 (розмноження бактерій)[1]. В культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється за 1 годину, то у скільки разів вона збільшиться за 2,5 години?

▼Нехай $x(t)$ – кількість дріжджів в момент часу t, а x_0 – в момент часу t=0, $\frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни кількості дріжджів. Маємо: $\frac{dx}{dt}=kx$; $x=x_0e^{kt}$.

З початкових умов $t=1$, $x=2x_0$ маємо k=ln2, тому через 2,5 год. $x=2^{\frac{5}{2}}x_0=5{,}66x_0$.▲

Приклад 4 (приріст капіталу)[2]. Суму 100 гривень покладено в банк під 5 % річних, причому, за домовленістю приріст обчислюється неперервно. Через скільки років капітал складе 200 гривень?

▼Нехай через t років капітал становить A гривень. На протязі часу dt приріст величини A визначається так: $dA=0{,}05\cdot A\cdot dt$. Інтегруючи в межах від 100 до 200, одержуємо: $\int\limits_{100}^{200}\frac{dA}{A}=0{,}05t\Big|_0^t$, звідки $t=\frac{1}{0{,}05}\ln 2=13{,}9$ року.▲

Приклад 5. Суму 100 гривень покладено в банк під 3 % річних. Через який час сума подвоїться, якщо приріст нараховується неперервно?

▼$S(t)$ – сума вкладу в момент часу t. Швидкість її зміни пропорційна наявній сумі вкладу (k=0,03). Маємо диференціальне рівняння $\frac{dS}{dt}=0{,}03S$ або $\frac{dS}{S}=0{,}03dt$. Інтегруємо: $\int\limits_{100}^{200}\frac{dS}{S}=0{,}03\int\limits_0^t dt$ або $\ln 2=0{,}03t$, тобто шуканий час $t=\frac{\ln 2}{0{,}03}=23{,}1$ року (співставте з результатом попередньої задачі; порівняйте відношення результатів із відношенням процентних ставок).▲

Задачі

1. За 30 днів розпалось 50 % початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1 % від її початкової кількості?

[1, 2] Дані задачі не відносяться до фізичних, однак наводяться тут як такі, що передбачають використання єдиної математичної моделі – диференціальних рівнянь показникового зростання.

Відповідь: 200 років.

2. Згідно досліду, протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявного радію?
Відповідь: 1575 років.

3. Час, протягом якого кількість радіоактивної речовини зменшується вдвічі, називається періодом піврозпаду. Знайти час, протягом якого з 10 г речовини залишиться 1 г, якщо період піврозпаду цієї речовини становить 1 рік.

Відповідь: $\frac{\ln 10}{\ln 2}$ років.

4. Культурі з 100 бактерій дано можливість розмножуватися при сприятливих умовах. Через 12 год. виявилось, що культура містить 500 бактерій. Скільки буде бактерій через 2 доби після початку експерименту? *Відповідь:* 62500.

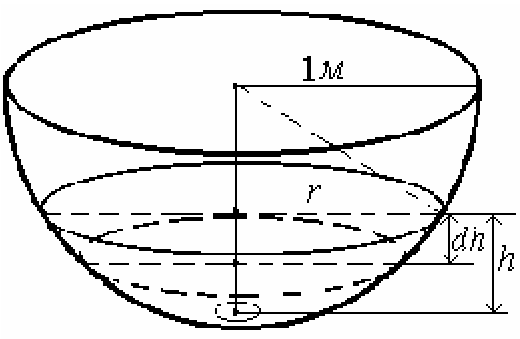
5. Культурі з 400 бактерій дано можливість розмножуватися при сприятливих умовах. Через 2 год. число бактерій збільшилось вдвічі. Через скільки годин їх буде в 16 разів більше?
Відповідь: 8 год.

Витікання рідини через отвір

Якщо б не було втрати енергії, то швидкість, з якою рідина витікала б через невеликий круглий отвір, розміщений на глибині h, дорівнювала б швидкості вільно падаючого тіла, що пройшло шлях h, тобто $\sqrt{2gh}$. Через тертя та параметри самої посудини, пов'язані з формою резервуара та отвору, ця швидкість наближено дорівнює, наприклад для води, $\upsilon = 0{,}6\sqrt{2gh}$.

Приклад 6. За який час вода, яка заповнює півсферичну чашу діаметром 2 м, витече з неї через круглий отвір радіусом 1 см, вирізаний у дні чаші?

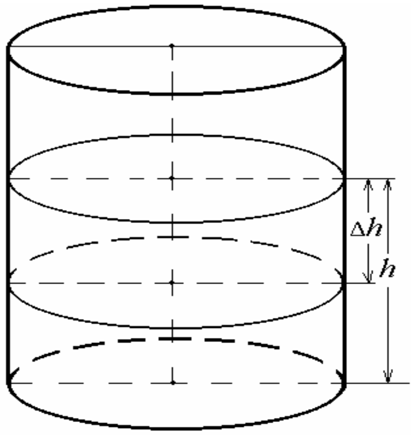
▼Нехай h − висота води в момент часу t, і $r = \sqrt{1-(1-h)^2}$ − радіус круга, утвореного її вільною поверхнею. Вода, яка витікає з чаші за час dt, утворює циліндр, висота якого υdt, а основа − круг радіусом 0,01 м. Об'єм такої маси води обчислюється як $\pi(0{,}01)^2\upsilon dt$.



Внаслідок цього витікання в чаші вода опускається на dh, а об'єм води, що витекла, наближено дорівнює $-\pi r^2 dh$. Оскільки згадані об'єми однакові, то запишемо, що $\pi(h^2-2h)dh = \pi(0{,}01)^2\upsilon dt = \pi\cdot\dfrac{0{,}6\sqrt{2gh}}{10000}dt$. Інтегруємо і одержуємо, що $t = 3770\int\limits_1^0\left(h^{\frac{3}{2}}-2h^{\frac{1}{2}}\right)dh = 3520$ с.▲

Приклад 7. Вода витікає через отвір у дні циліндричної посудини, яку поставлено вертикально. За яким законом буде знижуватись рівень води в посудині та як визначається тривалість витікання, якщо відомо, що швидкість υ її витікання залежить від висоти h стовпа рідини так: $\upsilon = 0{,}6\sqrt{2gh}$?

▼Позначимо через H висоту посудини, через S − площу її основи, через s − площу отвору, через $h(t)$ − висоту стовпа рідини в момент часу t.



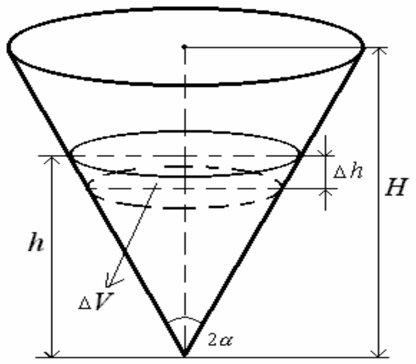
За проміжок часу від t до $t+\Delta t$ рівень води в посудині знизиться з h до $h+\Delta h$ ($\Delta h < 0$). За цей час з посудини витече $-S\cdot\Delta h$ кубічних метрів води. Таким же буде об'єм рідини, що витікає за цей же час через отвір. Він дорівнює площі s, що множиться на довжину шляху l, пройденого частками рідини з моменту t до $t+\Delta t$. Цей рух нерівномірний: в момент часу t швидкість витікання обчислюється як $0{,}6\sqrt{2gh}$, а в момент $t+\Delta t$ – як $0{,}6\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Для обчислення довжини пройденого шляху скористаємося середньою швидкістю: $l = \upsilon_{сер}\cdot\Delta t$, де $\upsilon_{сер} = 0{,}6\sqrt{2g(h+\theta\Delta h)}$, $0<\theta<1$. Отже, $-S\Delta h = 0{,}6\sqrt{2g(h+\theta\Delta h)}\Delta ts$. Звідси

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h+\theta\Delta h}, \qquad k = 0{,}6\cdot\frac{s}{S}\cdot\sqrt{2g}$. Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, одержуємо диференціальне рівняння задачі $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$.

$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -kdt; \quad 2\sqrt{h} = -kt + C$. Використовуючи початкову умову (при $t = 0 \quad h = H$), знаходимо C: $\quad 2\sqrt{H} = C$. Маємо: $2\sqrt{h} = -kt + 2\sqrt{H}$, звідки $h = \left(\sqrt{H} - \frac{k}{2}t\right)^2$, $t = \frac{2}{k}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$. Покладаючи $h = 0$, знаходимо, що вся вода витече за час $t = \frac{2}{k}\cdot\sqrt{H}$ секунд.▲

Приклад 8. Знайти час *T*, за який рідина, яка заповнює конус висотою *H* з кутом при вершині 2α, витікає з нього через отвір площею *S*, вирізаний у вершині конуса, якщо відомо, що швидкість υ витікання рідини виражається функцією $\upsilon = k\sqrt{2gh}$.

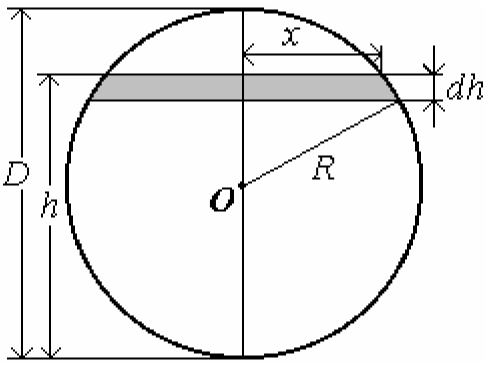
▼Підрахуємо об'єм рідини ΔV, що витікає через отвір у дні за час Δt. Він чисельно дорівнює об'єму циліндра з площею основи *S* і висотою $\upsilon\Delta t$ (з точністю до нескінченно малих вищих порядків), тобто $\Delta V = Sk\sqrt{2gh}\Delta t$.



За проміжок часу Δt рівень рідини в посудині понизився на Δh. Обчислимо об'єм шару рідини ΔV, що міститься між рівнями *h* і $h+\Delta h$ ($\Delta h<0$). Цей шар являє собою зрізаний конус. Замінюючи його циліндром з тією ж висотою Δh і основою, що дорівнює верхній основі конуса, одержуємо: $\Delta V = -\pi\cdot h^2\cdot tg^2\alpha\cdot\Delta h$. Значить, $\pi\cdot h^2\cdot tg^2\alpha\cdot\Delta h = -Sk\sqrt{2gh}\Delta t$, звідки $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\mu\cdot h^{-\frac{3}{2}}, \quad \mu = \frac{Sk\sqrt{2g}}{\pi tg^2\alpha}$. У граничній формі (при $\Delta t \to 0$) маємо диференціальне рівняння задачі: $\frac{dh}{dt} = -\mu\cdot h^{-\frac{3}{2}}$.

Знайдемо його розв'язок, що задовольняє початкову умову $h = H$ при $t = 0$, і час $t = T$, при якому $h = 0$ (час витікання). Інтегруючи диференціальне рівняння, одержуємо $\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -\mu t + C$. Використовуючи початкову умову, знаходимо: $C = \frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$. Покладаючи $t = T$, $h = 0$, одержуємо, що $0 = -\mu T + \frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$, звідки $T = \frac{2}{5\mu}\cdot H^{\frac{5}{2}}$.▲

Приклад 9. Визначити час витікання гасу з цистерни довжиною *L* і діаметром *D* через короткий зливний патрубок у нижній частині цистерни, площа поперечного перерізу якого ω.

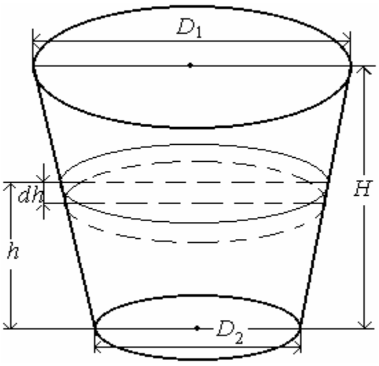


▼Змінна $S(h)$ (площа дзеркала гасу) визначається за формулою $S(h)=2xL=2L\sqrt{R^2-(h-R)^2}=2L\sqrt{(D-h)h}$, і тому $T=\dfrac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int\limits_0^D\dfrac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}dh=\dfrac{4LD\sqrt{D}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}$.

Наприклад, при $L=12$ м, $D=2{,}6$ м, $\omega=0{,}01$ м^2, $\mu=0{,}6$ (для гасу) маємо: $T=\dfrac{4\cdot12\cdot2{,}6\cdot\sqrt{2{,}6}}{3\cdot0{,}01\cdot0{,}6\cdot\sqrt{19{,}62}}=2520$ с = 42 хв.▲

Приклад 10. Визначити час витікання води з конічного резервуара діаметром D_1 верхньої основи, D_2 – нижньої, висотою *H* через круглий отвір діаметром *a* у дні резервуара.

▼Площа горизонтального перерізу конуса $S(h)=\dfrac{\pi}{4}\left(D_2+(D_1-D_2)\cdot\dfrac{h}{H}\right)^2$,



тому $T=\dfrac{1}{a^2\mu\sqrt{2g}}\int\limits_0^H\dfrac{\left(D_2+(D_1-D_2)\cdot\dfrac{h}{H}\right)^2}{\sqrt{h}}dh=$ $=\dfrac{2\sqrt{H}}{15a^2\mu\sqrt{2g}}\cdot\left(3D_1^2+4D_1D_2+8D_2^2\right)$. Зокрема, при $D_1=0{,}8$ м, $D_2=0{,}3$ м, $H=1$ м, $a=0{,}03$ м, $\mu=0{,}62$ (вода) маємо: $T=194$ с = 3 хв. 14 с.▲

Приклад 11. У дні наповненої водою циліндричної посудини з вертикальною віссю є малий отвір площею ω_0, закритий діафрагмою (як в об’єктиві фотоапарата). В початковий момент діафрагма починає відкриватися, причому площа ω отвору пропорційна часу: $\omega=kt$, а діафрагма повністю відкривається через τ секунд. Визначити висоту h_1 рідини в посудині, коли діафрагма відкрита повністю . Висота циліндра H , площа основи − *S*.

▼Якщо площа отвору, через який витікає рідина, залежить від часу $\omega=\omega(t)$, то диференціальне рівняння $\omega(t)\upsilon(h)dt=-S(h)dh$ після відокремлення змінних буде мати вигляд $\omega(t)dt=-\dfrac{S(h)}{\upsilon(h)}dh$, а його інтеграл $\int\limits_0^t\omega(t)dt=-\int\limits_H^h\dfrac{S(h)}{\upsilon(h)}dh$ (*).

За умовою $\omega=\omega_0$ при $t=\tau$. Значить, $\omega_0=k\tau$, звідки $k=\dfrac{\omega_0}{\tau}$, і тому $\omega=\dfrac{\omega_0}{\tau}\cdot t$. Підставляючи ω в інтеграл (*), одержимо $\dfrac{\omega_0}{\tau}\int\limits_0^t tdt=-\dfrac{S}{\mu\sqrt{2g}}\int\limits_H^h\dfrac{dh}{\sqrt{h}}$, звідки $\frac{\omega_0}{2\tau}\cdot t^2=\frac{2S}{\mu\sqrt{2g}}\cdot\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}\right).$

При $t=\tau$ висота рівня рідини h дорівнює h_1, тому $\frac{\omega_0\tau\mu\sqrt{2g}}{4S}=\sqrt{H}-\sqrt{h_1}$, а

$$h_1=\left(\sqrt{H}-\frac{\omega_0\tau\mu\sqrt{2g}}{4S}\right)^2 . \blacktriangle$$

Задачі

(припустити, що рідина з резервуара витікає з швидкістю, яка дорівнює $\upsilon=c\sqrt{2gh}$, де $g\approx 10$ м/с^2, h − висота рівня рідини над отвором, c − стала (для води $c=0{,}6$)

6. За який час витече вся вода з циліндричного бака діаметром $2R=1{,}8$ м і висотою H=2,4 м через отвір у дні діаметром $2r=6$ см? Вісь циліндра вертикальна.

Відповідь: 17,5 хв.

7. Розв’язати попередню задачу в припущенні, що вісь циліндра горизонтальна, а отвір знаходиться в найнижчій частині циліндра.

Відповідь: 17,3 хв.

8. Циліндричний бак, який поставлено вертикально, має отвір у дні. Половина води з повного бака витікає за 5хв. За який час витече вся вода?

Відповідь: $5\left(2+\sqrt{2}\right)=17{,}07$ хв.

9. Лійка має форму кругового конуса радіусом R=6 см і висотою H=10 м. За який час витече вся вода з лійки через круглий отвір діаметром 0,5 см, зроблений у вершині конуса?

Відповідь: 27 с.

10. У прямокутний бак довжиною 75 см, шириною 60 см і висотою 80 см надходить 1,8 л води за секунду. У дні є отвір площею 2,5 см^2. За який час наповниться бак? Порівняти результат з часом наповнення такого ж бака, але без отвору в дні.

Відповідь: 260 с, 200 с.

11. Циліндричний резервуар з горизонтальною віссю має довжину 6 м і діаметр 4 м. За який час вода, що заповнює резервуар, витече з нього через круглий отвір радіусом $\frac{1}{12}$ м у дні?

Відповідь: 18,5 хв.

12. Посудина являє собою тіло обертання. Якою повинна бути його форма, щоб при витіканні рідини з отвору радіусом r у дні ця рідина в посудині опускалася рівномірно?

Відповідь: у розрізі буде крива $f(h)=C\sqrt[4]{h}$.

13. За який час витече вся вода з циліндричного бака, діаметр основи якого

2 м і висота 3 м, через отвір у дні діаметром 6 см (вісь циліндра вертикальна)?

Відповідь: $\sqrt{\frac{3}{g}}\cdot 0{,}054$ с.

14. У дні циліндра з поперечним перерізом S і вертикальною віссю є малий круглий отвір площею q, закритий діафрагмою. В циліндр налито рідину до висоти h. В момент часу $t = 0$ діафрагма починає відкриватись, причому площа отвору пропорційна часу, і отвір повністю відкривається за 7 с. Якою буде висота H рідини в циліндрі через T с після початку досліду?

Відповідь: $H=\left(\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}\cdot q\cdot T\right)^2$.

15. Знайти час, протягом якого вся вода витікає з конічної лійки, якщо відомо, що половина води витікає за 2 хв.

Відповідь: 4,6 хв.

16. Резервуар, що має вертикальну вісь, протікає у дні. Припускаючи, що швидкість витікання води пропорційна тиску, знайти, за який час витече половина води, якщо відомо, що десята частина води витекла за першу добу.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $dh=-kghdt$.

Відповідь: 6,6 доби.

17. Два вертикальних резервуари, кожен з яких має висоту і діаметр по 4 м, поставлено поруч і з'єднано біля дна короткою трубкою діаметром $\frac{1}{6}$ м. Якщо спочатку один резервуар наповнений водою, а другий − порожній, то через який час вода буде знаходитися в них на одному рівні? Вважається, що швидкість протікання води через трубку визначається як швидкість руху води, що витікає з отвору під тим же тиском.

Відповідь: 7,27 хв.

18. У резервуар глибиною 4 м**,** що має в поперечному перерізі квадрат із стороною 6 м, вливається вода зі швидкістю 10 м/с. За який час буде наповнюватися резервуар, якщо в той же час вода витікає з нього через квадратний отвір із стороною $\frac{1}{12}$ м, що є у дні?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\left(\frac{1}{6}-0{,}6\sqrt{2gh}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2\right)dt=36dh$.

Закони руху

Приклад 12. Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю $\upsilon_0 = 20$ км/год. На повному ходу його двигун виключається, і через 40 с після цього швидкість човна зменшується до $\upsilon_1 = 8$ км/год. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хв. після зупинки двигуна.

▼На рухомий човен діє сила $F = -k\upsilon$, де k − коефіцієнт пропорційності. Згідно другого закону динаміки Ньютона маємо: $F = ma = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt}$, і, отже, диференціальне рівняння руху запишеться так: $m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon$. Звідси $\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}dt$ або $\ln\upsilon = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$, і $\upsilon = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot t}$.

З початкової умови (при t=0 $\upsilon = 20$) маємо $20 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}$, звідки $C = 20$. Уточнюємо закон зміни швидкості човна: $\upsilon = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$.

Додаткова умова вказує, що при $t = 40$ с = 1/90 год. швидкість складає 8 км/год., звідки $8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ або $e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$, тому закон зміни швидкості остаточно запишеться так: $\upsilon = 20 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{90t}$.

Підставляючи числові дані задачі в знайдене співвідношення і враховуючи при цьому, що $t = 2$ хв. = 1/30 год., одержуємо:

$$\upsilon = 20\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{90}\right)^{\frac{1}{30}} = 20 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28 \text{ км/год.}$$ ▲

Приклад 13. Куля, рухаючись із швидкістю 400 м/с, пробиває стіну товщиною $h = 20$ см і вилітає з неї із швидкістю $\upsilon_1 = 100$ м/с. Сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості руху кулі. Знайти час T руху кулі в стіні.

▼Згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху кулі має вигляд $m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^2$. Відокремлюючи змінні, одержуємо: $\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -k_1 dt, \quad k_1 = \frac{k}{m}$. Отже, $-\frac{1}{\upsilon} = -k_1 t - C$ або $\frac{1}{\upsilon} = k_1 t + C$.

З початкової умови ($\upsilon = \upsilon_0$ при $t = 0$) знаходимо, що $C = \frac{1}{\upsilon_0}$, а тому $\frac{1}{\upsilon} = k_1 t + \frac{1}{\upsilon_0}$. Якщо покласти $\upsilon = \upsilon_1$, то t=T, і шуканий час визначається з рівняння $T=\frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{\upsilon_1}-\frac{1}{\upsilon_0}\right)$. Залишається визначити $\frac{1}{k_1}$.

Для цього одержаний розʼязок перепишемо так: $\frac{dx}{dt}=\frac{\upsilon_0}{1+k_1\upsilon_0 t}$, де швидкість υ замінено на $\frac{dx}{dt}$. Зінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо $x=\frac{1}{k_1}\ln(1+k_1\upsilon_0 t)+C_1$. При t=0 маємо $x=0$ (куля входить в стіну), і тому $C_1=0$; при $t=T$ $\quad x=h$ (куля виходить із стіни), а тому $h=\frac{1}{k_1}\ln(1+k_1\upsilon_0 T)$.

Отже, $\upsilon_1=\frac{\upsilon_0}{1+k_1\upsilon_0 T}$, $\quad 1+k_1\upsilon_0 T=\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}$. Вираз для h набуває тепер вигляду $h=\frac{1}{k_1}\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}$ або $\frac{1}{k_1}=\frac{h}{\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}}$. Підставляючи $\frac{1}{k_1}$ у формулу для T, дістанемо:

$$T=\frac{h}{\ln\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}}\left(\frac{1}{\upsilon_1}-\frac{1}{\upsilon_0}\right).$$

Виконуючи обчислення ($\upsilon_0=400$ м/с, $\upsilon_1=100$ м/с, $h=0{,}2$ м, дістанемо, що T = 0,00108 с.▲

Приклад 14. Маса парашутиста з парашутом 80 кг. Опір повітря при опусканні парашутиста пропорційний квадрату його швидкості (k=400). Визначити швидкість спуску в залежності від часу.

▼При опусканні діючими силами будуть вага парашутиста з парашутом $P=mg$ (направлена вниз) і сила опору повітря $F=k\upsilon^2$ (направлена вгору). Отже, рівнодійною є сила $R=mg-k\upsilon^2$. Згідно другого закону Ньютона одержуємо диференціальне рівняння руху $m\frac{d\upsilon}{dt}=mg-k\upsilon^2$. Його загальний розвʼязок:

$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+\upsilon}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-\upsilon}=Ce^{2\cdot\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}$ або $\upsilon=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{Ce^{2\cdot\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}-1}{Ce^{2\cdot\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}+1}$. Використовуючи початкову умову: $t=0,\quad \upsilon=0$, визначаємо C: C=1. Отже, $\upsilon=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{e^{2\cdot\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}-1}{e^{2\cdot\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}+1}$.▲

Приклад 15. Дія тертя на диск, який обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти залежність кутової швидкості від часу, якщо відомо, що диск, почавши обертання із швидкістю 200 об./хв., через одну хвилину обертався із швидкістю 120 об./хв.

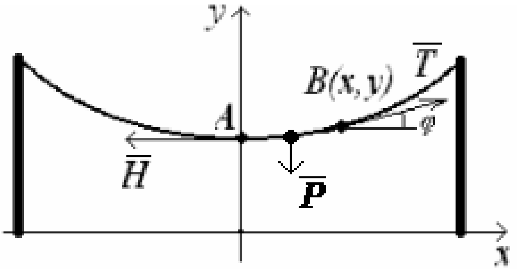
▼Нехай ω – кутова швидкість обертання диска (об./хв.), $\frac{d\omega}{dt}$ – “бистрота” зміни кутової швидкості обертання диска (кутове прискорення) в рідині. Маємо рівняння дії сил $\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$. Звідси $\frac{d\omega}{\omega} = -kdt;\quad \ln\omega = -kt + \ln|C_1|,\quad \omega = Ce^{-kt}$.

Використаємо початкові умови: t_0=0, ω_0=200; $\omega_0 = Ce^{-k\cdot 0}$, $C = 200$. При t_1=1 хв. ω_1=120 об./хв., тому матимемо $120 = Ce^{-k}$ або $120 = Ce^{-k}$, звідки $e^{-k} = \frac{3}{5},\quad k = \ln\frac{5}{3}$.

Шукана залежність кутової швидкості від часу така: $\omega = 200e^{-t\cdot\ln\frac{5}{3}} = 200\left(\frac{3}{5}\right)^t$.▲

Приклад 16. Знайти криву, яку утворює канат, за який підвішено міст (на кожну одиницю горизонтальної проекції навантаження однакове).

▼Частина каната AB знаходиться в рівновазі під дією трьох сил: горизонтального натягу H в точці A, натягу T, направленого вздовж каната в точці B, і ваги мосту між точками A і B. Вагою каната в зв’язку з її малістю нехтуємо.



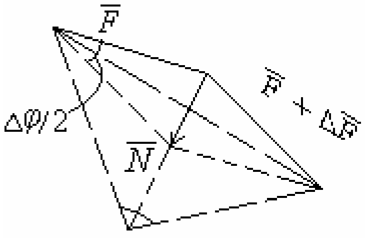
Вага частини мосту між A і B пропорційна довжині x і складає kx. На основі фундаментальних понять статики про те, що сума проекцій всіх діючих сил на вертикальну і горизонтальну осі дорівнює нулю, одержимо умови рівноваги сил: 1) вертикальних: $T\sin\varphi = kx$ (*); 2) горизонтальних: $T\cos\varphi = H$ (**). Поділивши (*) на (**), одержуємо: $tg\varphi = \frac{k}{H}x$. Але $tg\varphi = y'$, тому $y' = \frac{k}{H}x$. Інтегруючи, одержуємо рівняння шуканої кривої: $y = \frac{k}{2H}x^2 + C$ – сім’я парабол.▲

Приклад 17. Матрос, обернувши кілька разів трос навколо тумби, легко втримує пароплав. Чому?

▼Розглянемо задачу про тертя троса AB об нерухомий циліндр – тумбу з центром у точці O. Завдяки тертю більша сила $\overline{Q}$ врівноважується меншою силою $\overline{P}$.

Введемо до розгляду малий елемент MM_1 троса, так що $\angle MOM_1 = \Delta\varphi$, і нехай до точок M і M_1 прикладено відповідно сили $\overline{F}$ і $\overline{F} + \Delta\overline{F}$. Рівнодійну цих сил $\overline{N}$ визначимо за правилом паралелограма (паралелограм сил вважатимемо для спрощення міркувань ромбом, оскільки $\overline{F}$

і $\overline{F}+\Delta\overline{F}$ відрізняються мало у зв’язку з малістю $\Delta\varphi$). Маємо: $\frac{N}{2}=F\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$.



Для малих кутів $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx\frac{\Delta\varphi}{2}$, тому наближено $N=F\Delta\varphi$ і $\overline{N}$ – перпендикулярна до виділеного елемента троса MM_1. Сила тертя ΔR на ньому пропорційна N і становить $\Delta R=\mu F\Delta\varphi$, де μ – коефіцієнт тертя. Враховуючи, що натяг троса в точці M_1 перевищує натяг в точці M якраз на ΔR, матимемо $\Delta F=\mu F\Delta\varphi$. Поділивши на $\Delta\varphi$ і перейшовши до границі при $\Delta\varphi\to 0$, одержуємо диференціальне рівняння задачі $\frac{dF}{d\varphi}=\mu F$.

Його розв’язок $F=Ce^{\mu\varphi}$, де C – стала. В точці A $(\varphi=0)$ $F=P$, а тому $C=P$ і $F=Pe^{\mu\varphi}$. В точці B $(\varphi=\alpha)$ для найбільшого значення сили F маємо $F=Q=Pe^{\mu\alpha}$. Різниця між силами P і Q значно зростає із збільшенням кута α; наприклад, обхопивши тумбу 5 разів звичайним тросом (μ=0,5) можна зусиллям 10 кг зрівноважити майже 25500 кг, тобто одна людина втримує пароплав.▲

Задачі

19. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, швидкість його через 4 с – 1 м/с. Коли швидкість човна зменшиться до 1 см/с? Який шлях може пройти човен до повної зупинки?
Відповідь: 50 с; 15 м.

20. Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу двигун було виключено, і через 40 с швидкість човна стала рівною 2 м/с. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна, визначити його швидкість через 1 хв. після виключення двигуна?

Відповідь: $\frac{8}{25}$ м/с.

21. Куля, яка має швидкість $\upsilon_0=200$ м/с, пробиває дошку товщиною 40 см і вилітає з іншої сторони дошки зі швидкістю $\upsilon_1=80$ м/с. Скільки часу куля перебуває в дошці, якщо опір дошки руху кулі пропорційний її швидкості?

Відповідь: $2\ln\frac{5}{2}$ с.

22. Куля входить у дошку товщиною 10 см із швидкістю 200 м/с, а вилітає з неї зі швидкістю $\upsilon_1=80$ м/с. Вважаючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху, знайти, скільки часу куля рухалася в дошці.
Відповідь: 0,00082 с.

23. Парашутист стрибнув з висоти 1,5 км, а розкрив парашут на висоті 0,5 км. Який час він падав до розкриття парашута? Гранична швидкість людини в повітрі 50 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості .
Відповідь: 23 с.

24. Матеріальна точка рухається прямолінійно, причому, її кінетична енергія в момент часу t пропорційна середній швидкості руху в інтервалі часу від нуля до t. Відомо, що при $t = 0$ шлях $s = 0$. Показати, що рух рівномірний.

25. Матеріальна точка рухається по прямій із швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка знаходилась на відстані 2 м від місця початку руху і мала швидкість $\upsilon_0 = 10$ м/с. Визначити пройдений шлях і швидкість точки через 8 с після початку руху.

Відповідь: $\upsilon(8) = \frac{10}{9}$ м/с; $s(8) = 18$ м.

26. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, середовище протидіє руху тіла з силою, пропорційною швидкості. Знайти закон руху тіла.

Відповідь: $s = \frac{kt^2}{2a^2} - \frac{kt}{a^4} - C_1 e^{-a^2 t} + C_2$.

27. Тіло масою m рухається прямолінійно; на нього діє сила, пропорційна кубу часу (k), який пройшов з того моменту, коли швидкість дорівнювала υ_0. Крім того, руху тіла протидіє середовище із силою, пропорційною добутку швидкості і часу (k_1). Знайти залежність швидкості від часу.

Відповідь: $\upsilon = (\upsilon_0 + b)e^{-at^2} + b(at^2 - 1)$, де $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$.

28. Точка масою m рухається прямолінійно; на неї діє сила, пропорційна часу (k_1), що пройшов з того моменту, коли швидкість дорівнювала нулю. Крім того, на точку діє сила опору середовища, пропорційна швидкост (k). Знайти залежність швидкості від часу.

Відповідь: $\upsilon = \frac{k_1}{k}\left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{-\frac{kt}{m}}\right)$.

29. Точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу, що відраховується з моменту t=0, і сили, обернено пропорційної швидкості руху точки. В момент часу t=10 с швидкість дорівнювала 0,5 м/с, а сила − $4 \cdot 10^{-5}$ Н. Якою була швидкість через 1 хв. після початку руху?
Відповідь: ≈ 2,7 м/с.

30. Футбольний м'яч масою 0,4 кг кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 4,8 мН при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому. Як зміняться ці результати, якщо знехтувати опором повітря?
Відповідь: 1,75 с, 16,3 м; 2 с, 20 м.

31. Обчислити час падіння м'яча масою 400 г з висоти 16,3 м без початкової швидкості з урахуванням опору повітря $\left(F_{оп.} = -k\upsilon\right)$. Знайти швидкість м'яча наприкінці падіння.

Відповідь: 1,87 с; 16,4 м/с.

32. Сила тертя, яка сповільнює обертання диска в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання.

а) Диск, почавши обертання з кутовою швидкістю 3 об./с, через 1 хв. обертається з кутовою швидкістю 2 об./с. Якою буде його кутова швидкість через 3 хв. після початку обертання?

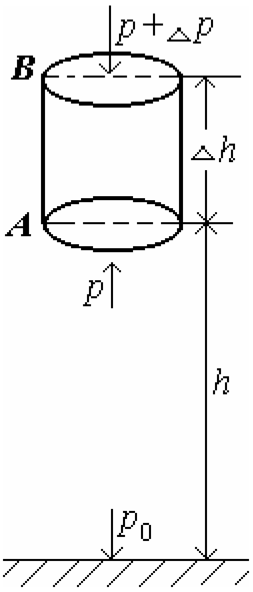
б) Диск, почавши обертання з кутовою швидкістю 5 об./с, через 2 хв. обертається з кутовою швидкістю 3 об./с. Через який час після початку обертання він буде мати кутову швидкість 1 об./с?

Відповідь: а) 8,9 об./с; б) через 6 хв. 18 с.

Барометрична формула

Приклад 18. Відомо, що чим вище над рівнем моря, тим повітря розрідженіше – атмосферний тиск з вистою зменшується. Встановити залежність $p = p(h)$ тиску p від висоти h.

▼Розглянемо умови рівноваги повітряного циліндра AB з поперечним перерізом площею 1 м^2. Нехай h і $h + \Delta h$ − висоти його основ A і B над рівнем моря, p і $p + \Delta p$ − відповідні тиски повітря, ρ − густина повітря на висоті h. Вага циліндра AB врівноважується силою тиску: $-\Delta p = \Delta m g$, де Δm − маса повітряного циліндра, g − прискорення вільного падіння. Масу даного циліндра знаходимо як добуток його об'єму на середню густину: $\Delta m = 1 \cdot \Delta h \cdot \rho_c$. Якщо $\Delta h \to 0$, то $\rho_c \to \rho$ і, переходячи до границі у співвідношенні $\frac{\Delta p}{\Delta h} = -g\rho_c$, маємо диференціальне рівняння $\frac{dp}{dh} = -g\rho(h)$.



На основі закону Бойля-Маріотта у припущенні сталості температури на певних висотах, робимо висновок про те, що тиск пропорційний густині: $pV = \nu RT$, $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu RT}{m} \cdot \frac{m}{V} = k \cdot \rho(h)$; $k = \frac{\nu RT}{m}$, $\rho(h) = \frac{m}{V}$, ν − кількість речовини, R − універсальна газова стала, m – маса газу. Замінюючи в диференціальному рівнянні задачі $\rho(h)$ на $\frac{p}{k}$, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dp}{dh} = -g \cdot \frac{p}{k}$, звідки $p = Ce^{-\frac{g}{k}h}$, де C – довільна стала.

Якщо на рівні моря $(h = 0)$ атмосферний тиск дорівнює p_0, то залежність тиску від висоти (барометрична формула) запишеться остаточно так: $p = p_0 e^{-\frac{g}{k}h}$.▲

Задачі

33. При температурі 25 °С атмосферний тиск у двох пунктах становить відповідно $l_1 = 750$ мм рт. ст. і $l_2 = 720$ мм рт. ст. Знайти різницю висот цих пунктів над рівнем моря. Вважати атмосферний тиск пропорційним густині повітря з коефіцієнтом $k = 8000(1 + 0{,}004t)$, де t − температура повітря.

Відповідь: 360 м.

34. Знайти атмосферний тиск на висоті h, якщо на поверхні землі тиск дорівнює 1 кГ/см^2 і густина повітря 0,0012 г/см^3. Використати закон Бойля-

Маріотта, згідно з яким густина пропорційна тиску (тобто знехтувати зміною температури повітря з висотою).

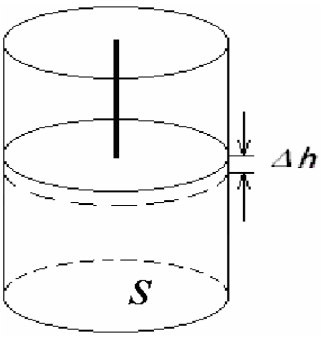
Відповідь: на висоті h км $p(h)=e^{-0,12h}$ (кГ/см^2).

35. Припускаючи, що у вертикальному повітряному стовпі тиск на кожному рівні обумовлений тиском вищих шарів, знайти залежність тиску p від висоти h, якщо відомо, що на рівні моря ($h=0$) цей тиск дорівнює $9,81\cdot 10^4$ Па, а на висоті 500 м – $9,016\cdot 10^4$ Па.

Відповідь: $p=0,92^{\frac{h}{500}}$.

Адіабатне розширення газу

Приклад 19. Розглянемо ідеальний газ, що міститься в об’ємі V. Вважатимемо, що розширення газу відбувається без теплообміну з середовищем (адіабатний процес), де він міститься. Дослідити залежність між об’ємом газу V та його тиском p при сталій температурі T.



▼ Нехай газ міститься в циліндрі з рухомим поршнем, площа поверхні якого S. Якщо поршень пересувається на відстань Δh угору, то об’єм газу збільшується на ΔV. При сталому тиску механічна робота газу дорівнює $pS\Delta h = p\Delta V$. В адіабатному процесі газ виконує механічну роботу за рахунок зменшення своєї власної енергії, яка визначається величиною $C_V\Delta T$, де ΔT − від’ємний приріст температури газу, а C_V − його теплоємність при сталому об’ємі. Отже, $C_V\Delta T = -p\Delta V$.

Згідно закону Менделеєва-Клапейрона $pV = RT$, де R − універсальна газова стала. Звідси та з попереднього співвідношення маємо $C_V\Delta T = -\frac{RT}{V}\Delta V$. Переходячи до границі, коли $\Delta V \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння $\frac{dT}{dV} = -\alpha\frac{T}{V}$, де $\alpha = -\frac{R}{C_V}$.

Відокремимо змінні і проінтегруємо: $\frac{dT}{T} + \alpha\frac{dV}{V} = 0$, $d(\ln T + \alpha\ln V) = 0$, $\ln(TV^{\alpha}) = \ln C$, де $C>0$ – стала інтегрування, $TV^{\alpha} = C$, $T = CV^{-\alpha}$. Повертаючись до закону Менделеєва-Клапейрона, запишемо: $\frac{pV}{R} = CV^{-\alpha}$, звідки $pV^{1+\alpha} = C_1$, $C_1 = RC$.

Нехай $k = 1+\alpha$; тоді маємо класичний закон Пуассона для адіабатного розширення газу: $pV^k = C_1$. Довільна стала C_1 залежить від початкових умов. Якщо початковий тиск газу p_0 і початковий об’єм V_0, то $p_0V_0^k = C_1$, і, отже, $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k$, $k > 1$.▲

Приклад 20. У циліндричній посудині, об’єм якої V_0, повітря за допомогою поршня адіабатно стискається до об’єму V_1. Обчислити роботу стискання.

▼При опусканні поршня на відстань dx виконується елементарна робота $dA = -pSdx$, де p − тиск повітря до опускання поршня, S − площа поршня. Але $Sdx = dV$ − відповідна зміна об’єму, тому $dA = -pdV$. За законом Пуассона $p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k$, де k − стала (для певного газу) величина. Дістанемо диференціальне рівняння задачі:

$dA = -p_0 V_0^k \frac{dV}{V^k}$. Розв’язавши його, знайдемо: $A = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)V^{k-1}} + C, \quad C = -\frac{p_0 V_0}{k-1}$ (C знайшли з початкових умов: $A(V_0) = 0$).

При $V=V_1$ $A = \frac{p_0 V_0}{k-1}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right), \quad k \neq 1$.▲

Зміна концентрації розчину чи суміші

Приклад 21. У резервуарі об’ємом 100 л знаходиться розсіл, що містить 10 кг розчиненої солі. В резервуар втікає вода з швидкістю 3 л за хвилину, і суміш витікає з резервуара з тією ж швидкістю, причому концентрація підтримується рівномірною. Скільки солі залишиться в резервуарі через 1 год.?

▼Нехай через t хвилин у резервуарі буде x кг солі. Тоді концентрація солі становитиме $c=\frac{x}{100}$ кг на 1 л розчину. За проміжок часу dt $3dt$ л води вливається в резервуар і $3dt$ л розчину, що містить $3cdt$ кг солі, витікає. Звідси зміна кількості солі в резервуарі характеризується співвідношенням $dx=-3cdt=-\frac{3x}{100}dt$.

Кількість солі, що залишається в резервуарі через 1 год., визначається із співвідношення $\int_{10}^{x}\frac{dx}{x}=-\frac{3}{100}\int_{0}^{60}dt$, звідки $\ln\frac{x}{10}=-1{,}8$ і, значить, x=1,654 кг.▲

Приклад 22. У залі кубатурою 10800 м^3 повітря містило 0,12 % вуглекислого газу. Який об’єм повітря, що містить 0,04 % вуглекислого газу, треба щохвилини подавати до зали, щоб через 10 хв. у ній було 0,06 % вуглекислого газу?

▼Нехай в момент часу t у кімнаті буде x % вуглекислого газу. За час dt вентилятор додав $0{,}04\cdot\frac{1}{100}\cdot adt$, а вийшло з приміщення $x\cdot\frac{1}{100}\cdot adt$ м^3 вуглекислого газу (a – шукана продуктивність вентилятора). Значить, за час dt хвилин кількість вуглекислого газу в повітрі зменшилась на $dq=(0{,}01x-0{,}0004)adt$ м^3. Якщо dx – процентне зменшення вмісту вуглекислого газу в повітрі, то з іншого боку $dq=-10800\cdot 0{,}01dx$ м^3 (знак мінус береться тому, що $dx<0$).

Прирівнюючи обидва вирази для dq, складемо диференціальне рівняння $(0{,}01x-0{,}0004)adt=-10800\cdot 0{,}01dx$. Відокремлюємо змінні: $-\frac{adt}{10800}=\frac{dx}{x-0{,}04}$. Інтегруємо: $x-0{,}04=Ce^{-\frac{at}{10800}}$.

Оскільки x = 0,12 для t=0, то C=0,08, і частинний інтеграл має вигляд $x-0{,}04=0{,}08e^{-\frac{at}{10800}}$. Оскільки x=0,06 при t=10, то $0{,}02=0{,}08e^{\frac{-a}{1080}}$, звідки $e^{\frac{-a}{1080}}=\frac{1}{4}$, $a=1080\ln 4\approx 1500$ м^3/хв.▲

Задачі

36. У резервуарі об’ємом 100 л знаходиться розсіл, що містить 10 кг розчинної солі. В резервуар втікає вода із швидкістю 3 л/хв., і суміш витікає з резервуара з тією ж швидкістю в другий резервуар місткістю 100 л, який наповнений водою. З другого резервуара суміш витікає з такою ж швидкістю. Скільки солі буде містити другий резервуар через 1 год.?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $dx = \left(0{,}3e^{-0{,}03t} - 0{,}03x\right)dt$.

Відповідь: 3 кг.

37. У посудині знаходиться 60 л розчину, що містить 5 кг солі. В бак неперервно подається вода із швидкістю 3 л/хв., яка перемішується з розчином. Суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі в посудині залишиться через годину?

Відповідь: $5e^{-3}$ кг.

38. Резервуар містить 100 л розсолу, в якому знаходиться 10 кг розчинної солі. Вода вливається в резервуар із швидкістю 3 л/хв., і суміш витікає з нього із швидкістю 2 л/хв., причому концентрація підтримується рівномірним помішуванням. Скільки солі в резервуарі буде через 1 год.?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $dx = \dfrac{2x}{100 + t}dt$.

Відповідь: 3,9 кг.

39. Людина в середньому дихає 18 разів за 1 хв., видихаючи кожен раз 2000 см^3 повітря, що містить 4 % вуглекислого газу. Який процент вуглекислоти буде містити через півгодини повітря аудиторії об'ємом 400 м^3, якщо в ній знаходиться 50 чоловік і якщо вентилятори за хвилину забезпечують надходження 40 м^3 свіжого повітря?

Відповідь: 0,17 %.

40. В торгове приміщення об'ємом 10000 м^3 входить через вентилятори за 1хв. 1000 м^3 свіжого повітря, що містить 0,04 % вуглекислого газу. О 9 год. ранку в приміщення входять службовці, і через півгодини вміст вуглекислого газу в повітрі підвищується до 0,12 %. Якого проценту вуглекислого газу слід чекати в повітрі о 14 годині?

Відповідь: 0,124 %.

41. Балон об'ємом 20 л містить повітря (80 % азоту і 20 % кисню). У балон входить 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і виходить така ж кількість суміші. Через який час в посудині буде 99 % азоту?

Відповідь: 10 хв.

42. У повітрі кімнати об'ємом 200 м^3 міститься 0,15 % вуглекислого газу (CO_2). Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, що містить 0,04 % CO_2. Через який час кількість вуглекислого газу в кімнаті зменшиться втричі?

Відповідь: 24 хв.

43. У фляжку місткістю 1 л по одній трубці надходить кисень, і суміш його з повітрям виходить через другу трубку. Припускаючи, що концентрація залишається рівномірною, і що повітря містить 21 % кисню, знайти, який буде процент кисню у фляжці після того, як через неї пройде 5 л газу.

Вказівка. Позначити через x кількість газу, який пройшов через фляжку, через y – наявну кількість кисню; маємо: $dy = dx - ydx$.

Відповідь: 99,5 %.

Процеси першого і другого порядків[1]

Мономолекулярний процес – це хімічна реакція першого порядку, в процесі якої певна речовина *A* перетворюється в стійку речовину *C*. Нехай α – початкова кількість речовини *A*, що вступила в реакцію. За час *t* від початку реакції цієї речовини залишилося α - *x*, де *x* – кількість утвореної речовини *C*. Вважаючи, що швидкість перебігу реакції $\frac{dx}{dt}$ пропорційна з коефіцієнтом *k* кількості речовини, що не перетворилася, дістанемо диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)$. Відокремлюючи змінні й інтегруючи, знаходимо $\frac{dx}{\alpha - x} = kdt$, $-\ln(\alpha - x) + \ln|C_1| = kt$. Загальний розв'язок матиме вигляд $\alpha - x = Ce^{-kt}$, *C* – довільна стала, яка визначається з початкової умови: *x*=0 при *t*=0. Отже, *C*=α.

Остаточно маємо: $x = \alpha(1 - e^{-kt})$.

Приклад 23. Нехай розчиняють цукрозу у воді, причому на початку реакції кількість цукрози x_0, а за час *t* розчинилась її кількість *x*. Тоді вважають, що $\frac{dx}{dt} = k(x_0 - x)$, де *k* – стала. Обчислити, за який час розчиняється у воді вся цукроза.

▼Інтегруючи, маємо: $\ln(x_0 - x) = -kt + C$. Довільну сталу *C* визначаємо з умови *x*(0)=0, тобто $C = \ln x_0$. Отже, $x_0 - x = x_0 e^{-kt}$ або $x = x_0(1 - e^{-kt})$.

При розчиненні усієї речовини *x*= x_0; це можливо при *t*=∞. Отже, теоретично вся речовина ніколи не розчиниться, а практично вважають реакцію завершеною, якщо кількість нерозчиненої речовини менша 0,001 її початкової кількості. З цих міркувань маємо для $x = 0{,}999x_0$ $e^{-kt} = 0{,}001$. Отже, $kt = \frac{\lg 1000}{\lg e} = \frac{3}{0{,}4343}$ або $t = 6{,}91/k$. Ось за такий час практично вся цукроза розчиниться у воді.▲

Нехай маємо процес, у якому беруть участь дві незалежні змінні величини *x* і *y* та третя величина *z*, пропорційна як *x*, так і *y*. Це означає, що при сталому *y z* пропорційна *x*, а при сталому *x* – *z* пропорційна *y*. Це виражається рівністю $z = kxy$.

До такого процесу належить той процес, при якому швидкість розчинення якої-небудь речовини пропорційна наявній кількості *x* нерозчиненої речовини і в той же час пропорційна різниці між концентрацією *c* даної речовини в даний момент і її концентрацією *s* у насиченому розчині. Таким чином, маємо: $\frac{dx}{dt} = kx(s - c)$. Повна кількість речовини (розчиненої і нерозчиненої) залиша-

---

[1] За своїм змістом задачі цього пункту дуже близькі до фізичних. Процеси, що розглядатимуться, доповнюють вивчені у попередньому пункті.

ється сталою на протязі процесу, що дозволяє виразити c через x, а отже, $\frac{dx}{dt}$ є функцією другого степеня від x. Такого роду процеси, в яких швидкість зміни якої-небудь величини виражається функцією другого степеня від x, називаються процесами другого порядку.

Нехай a і b – початкові кількості речовин A і B, а x – кількість кожної з цих речовин, що вступила в реакцію за час t від її початку. Вважаючи, що швидкість перебігу цієї хімічної реакції $\frac{dx}{dt}$ пропорційна з коефіцієнтом k добуткові наявних кількостей речовин A і B – відповідно $a-x$ і $b-x$, дістанемо диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), \quad a\neq b$. Відокремлюємо змінні: $\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt$. Інтегруємо: $\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left(\int\frac{dx}{a-x}-\int\frac{dx}{b-x}\right)=$ $=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}-\frac{1}{b-a}\ln C$ (сталу зручно взяти в такому вигляді). Отже, $\ln\frac{b-x}{a-x}-\ln C=(b-a)kt$, і після потенціювання загальний інтеграл диференціального рівняння задачі матиме вигляд $\frac{b-x}{a-x}=Ce^{-(a-b)kt}$, де C – довільна стала, яку визначаємо з початкових умов: x=0, коли t=0.

Враховуючи, що $C=b/a$, матимемо $x=ab\frac{1-e^{-(a-b)kt}}{a-be^{-(a-b)kt}}$. Якщо $t\to\infty$, то $x\to b$, тобто процес другого порядку також продовжується нескінченно довго.

Коли $a=b$, має місце диференціальне рівняння $\frac{dx}{(a-x)^2}=kt$. Інтегруючи, маємо $\frac{1}{a-x}+C_1=kt$; C_1 – довільна стала, яка з урахуванням початкових умов дорівнює $-1/a$. Отже, $x=\frac{a}{1+1/(akt)}$.

Зауваження. Коефіцієнт k в усіх хімічних реакціях для кожної речовини визначається експериментально.

Приклад 24. З деякої (хімічно неділяльної) речовини добувають сірку, розчиняючи цю речовину в бензолі. Знайдено, що користуючись великою кількістю бензолу, за 42 хв. вдається добути половину всієї наявної кількості сірки. Знайти, скільки сірки можна розчинити за 6 год., якщо в даній речовині міститься 6 г сірки, і якщо взято 100 г бензолу – кількість, яка при насиченні розчиняє 11 г сірки.

▼Нехай x – кількість сірки, яка залишається нерозчиненою в момент часу t. Концентрація сірки в насиченому розчині $s=\frac{11}{100}$ г сірки на 1 г бензолу. Для визначення x дістанемо диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = kx(0{,}11 - c)$. Якщо взяти велику кількість бензолу, то c стає дуже малим і ним можна знехтувати. Тому $\frac{dx}{dt} = 0{,}11kx$. Оскільки на протязі 42 хв. розчиняється половина наявної сірки, то $\int_6^3 \frac{dx}{x} = 0{,}11k\int_0^{42} dt$, звідки $k = -0{,}15$.

Якщо бензолу є 100 г, то, оскільки кількість розчиненої сірки $6 - x$, маємо $c = \frac{6 - x}{100}$. Тому рівняння задачі набуває такого вигляду: $\frac{dx}{dt} = -0{,}15x\left(0{,}11 - \frac{6 - x}{100}\right) = -0{,}0015x(5 + x)$, звідки $\int_6^x \frac{dx}{x(x+5)} = -0{,}0015\int_0^{360} dt$ і $\ln\frac{11x}{6(x+5)} = -2{,}7$. Звідси одержуємо x=0,192. Це і є та кількість сірки (в грамах), яка залишається нерозчиненою через 6 год.▲

Задачі

44. Деяка речовина перетворюється в іншу із швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Якщо кількість першої 31,4 г після 1 год. і 9,7 г після 3 год., то визначити: 1) скільки речовини було на початку процесу; 2) через який час після початку процесу залишиться лише 1 % від початкової кількості речовини, що перетворюється?

Відповідь: 1) 56,52 г; 2) 7,84 год.

45. В результаті хімічної реакції з двох рідин *A* і *B* об'ємом 10 та 20 літрів відповідно, утворюється нова хімічна речовина *C*. Визначити закон утворення речовини *C* залежно від часу *t* за умови, що протягом хімічної реакції температура не змінювалась, і за 20 хв. утворилося 6 л речовини *C*. Вважати, що з кожних двох об'ємів речовини *A* і одного об'єму речовини *B* утворюється три об'єми речовини *C*.

Вказівка. Диференціальне рівняння процесу $\frac{dx}{dt} = k\left(10 - \frac{2x}{3}\right)\left(20 - \frac{x}{3}\right)$.

Відповідь: $x = 15\left(1 - (2/3)^{3t}\right)/\left(1 - 0{,}25 \cdot (2/3)^{3t}\right)$.

46. Вода, що міститься в речовині, випаровується в навколишній простір із швидкістю, пропорційною кількості води в даній речовині, а також пропорційною різниці між вологістю навколишнього повітря і вологістю насиченого водяною парою повітря. Деяка кількість речовини, що містить 3 кг води, була поміщена в кімнату об'ємом 100 м^3, повітря якої мало спочатку вологість 25 %. Насичене повітря при тій же температурі містить 0,12 кг води на 1 м^3. Якщо протягом першої доби речовина втратила половину своєї вологи, то скільки води в ній залишиться через 2 доби?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{ds}{dt} = ks(s+6)$.

Відповідь: 0,82 кг.

47. Протягом якого часу речовина (попередня задача) втратить 90 % своєї вологи, якщо вологість навколишнього повітря (25 %) підтримували сталою за допомогою вентиляції?

Відповідь: 3 доби.

48. Дно резервуара місткістю 300 л покрите сумішшю солі і нерозчинної речовини. Припускаючи, що швидкість розчинення солі пропорційна різниці між її концентрацією в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг солі на 3 кг води), і що дана кількість чистої води розчиняє $1/3$ кг солі за 1 хв., знайти, скільки солі буде містити розчин через 1 год.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{dx}{dt} = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$.

Відповідь: 18,1 кг.

49. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Діючи на неї 90 л води, знайшли, що протягом 1 год. розчинилась половина солі. Скільки солі розчинилось би протягом того ж часу, якби взяти подвоєну кількість води? Швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі і різниці між концентрацією розчину в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг солі на 3 л).

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{10-x}{90} - \frac{1}{3}\right)$.

Відповідь: 5,2 кг.

50. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 2 кг солі. Діючи на неї 30 л води, знайшли, що через 5 хв. 1 кг солі розчинився. Через скільки часу розчиниться 99 % початкової кількості солі?

Відповідь: 32,2 хв.

Охолодження тіла

Приклад 25. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Якщо при температурі повітря 20 °C тіло охолоджується від 100 °C до 60 °C за 20 хв., то за який час температура його понизиться до 30 °C?

▼Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в градусах в момент часу t. Запишемо диференціальне рівняння задачі у вигляді $\frac{dT}{dt}=k(T-20)$. Коефіцієнт пропорційності k знаходимо, інтегруючи рівняння і враховуючи початкові умови: $\frac{dT}{T-20}=kdt,\ \int\limits_{100}^{60}\frac{dT}{T-20}=k\int\limits_{0}^{20}dt$. Звідси $\ln(T-20)\Big|_{T=100}^{T=60}=20k$ або $\ln\frac{1}{2}=20k$, тобто $k=-\frac{\ln 2}{20}$.

Інтегруємо рівняння задачі по T в межах від 100 до 30 і по t – в межах від 0 до t: $\int\limits_{100}^{30}\frac{dT}{T-20}=k\int\limits_{0}^{t}dt$ або $\ln\frac{1}{8}=kt$, тобто $t=-\frac{1}{k}\cdot 3\ln 2$. Підставляючи замість k знайдене значення, одержуємо $t=\frac{20}{\ln 2}\cdot 3\ln 2=60$ хв. Отже, через годину температура тіла понизиться до 30 °C.▲

Задачі

51. Тіло охололо на повітрі від 100 °C до 60 °C за 10 хв. Температура повітря 20 °C. Коли тіло охолоне до 25 °C?
Відповідь: 40 хв.

52. Тіло, температура якого 25 °C, поміщено в термостат, у якому підтримується температура 0 °C. За який час тіло охолоне до 10 °C, якщо за 20 хв. воно охололо до 20 °C?
Відповідь: ≈82 хв.

53. Тіло, температура якого 30 °C, за 30 хв. перебування в термостаті, температура якого 0 °C, охололо до 22,5 °C. Якою буде температура тіла через 3 год. після початку досліду?
Відповідь: ≈5 °C.

54. Температура витягнутого з печі тіла на протязі 20 хв. падає від 200 °C до 150 °C. Температура повітря 25 °C. За який час температура тіла понизиться до 30 °C?
Відповідь: 4 год. 34 хв.

55. Тіло, нагріте до температури 200 °C, охолоджується на повітрі, температура якого дорівнює 20 °C. Через 5 хв. після початку охолодження температура тіла дорівнює 60 °C. Через який час воно охолоне до температури 25 °C?

Поширення тепла

Якщо на кожній з поверхонь, які обмежують тіло, підтримувати сталу температуру, то тіло за якийсь час приходить в стаціонарний стан, при якому температура різна в різних точках тіла, але в кожній окремій точці не змінюється з часом. Часто буває, що температура T є функцією тільки однієї координати, наприклад x. Згідно закону Фур'є в цьому випадку швидкість, з якою тепло поширюється через поверхню A, перпендикулярну до осі x, дорівнює $Q = -kA\dfrac{dT}{dx}$, де k – стала величина, яка називається теплопровідністю даної речовини.

Якщо тепер уявити ряд поверхонь A таких, що потік тепла, який перетинає одну з них, перетинає і всі інші, то рівняння процесу може бути записане у вигляді $Q = const$. Якщо при цьому площу A задано як функцію від x, то ми одержуємо згадане диференціальне рівняння, що дозволяє визначити T як функцію x. Підставляючи в знайдений роз'язок значення x і T на двох поверхнях тіла, знайдемо Q і сталу інтегрування.

Приклад 26. Залізна куля (k = 0,14) має внутрішній радіус 6 см, а зовнішній – 10 см. Вона знаходиться в стаціонарному тепловому стані, причому температура на внутрішній поверхні постійно дорівнює 200 $^{\circ}$C, а на зовнішній – 20 $^{\circ}$C. Знайти температуру на відстані r від центра і кількість тепла, яку віддає куля за 1 с.

▼Тепло поширюється радіально. На відстані r від центра площа поверхні, через яку поширюється тепло, визначається як площа сфери: $A = 4\pi r^2$. Оскільки між окремими сферичними поверхнями кількість тепла залишається незмінною, то через дві будь-які поверхні протікає одна і та ж кількість теплоти; тому за законом Фур'є $-4\pi k r^2 \dfrac{dT}{dr} = Q = const$. Відокремлюючи змінні і інтегруючи, одержуємо $4\pi kT = \dfrac{Q}{r} + C$.

Підставляючи T=20, r=10 і T=200, r=6, знаходимо: $C = -1000\pi k$, $Q = 10800\pi k$, а значить, $T = \dfrac{2700}{r} - 250$.

Для швидкості тепловипускання кулі одержуємо: $Q = 10800\pi k = 4750$ кал/с (1 кал $\approx$ 4,2 Дж).▲

Задачі

56. Цегляна стіна (k=0,0015) має товщину 30 см. Знайти, як залежить температура від відстані точки від зовнішнього краю стіни, якщо вона дорівнює 20 $^{\circ}$C на її внутрішній поверхні і 0 °C – на зовнішній. Знайти також кількість тепла, яке стіна (на 1м^2) віддає назовні протягом доби.
Відповідь: $T = 2x/3$; 864 ккал.

Перехідний процес в електричному колі

Приклад 27. Сила струму *i* і електрорушійна сила ε у колі з опором *R* і індуктивністю *L* пов'язані співвідношенням $\varepsilon = Ri + L\frac{di}{dt}$. Вважаючи ε сталою, а силу струму в початковий момент рівною нулю, знайти силу струму в момент часу *t*.

▼Перепишемо рівняння задачі у вигляді $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}$. Це лінійне рівняння по відношенню до $\frac{di}{dt}$ і *i*. Розв'язуючи його підстановкою $i = u \cdot v$, маємо $i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$.▲

Приклад 28. У колі з опором *R* і індуктивністю *L* діє періодична електрорушійна сила $\varepsilon_1 = \alpha \sin\frac{2\pi}{T}t$ (де *T* – період, *t* – час, α – стала, що дорівнює $\max \varepsilon_1$). Визначити силу струму в момент часу *t*, якщо в початковий момент *t*=0 *i*=0.

▼У колі діють дві сили: електрорушійна сила $\varepsilon_1 = \alpha \sin\frac{2\pi}{T}t$ і протилежна їй електрорушійна сила індукції $\varepsilon_2 = -L\frac{di}{dt}$, тому $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha \sin\frac{2\pi}{T}t - L\frac{di}{dt}$. Згідно закону Ома $i = \frac{\varepsilon}{R}$, тобто $i = \frac{\alpha \sin\frac{2\pi}{T}t - L\frac{di}{dt}}{R}$. Позначимо $\frac{2\pi}{T} = k$, одержимо диференціальне рівняння процесу $L\frac{di}{dt} + Ri = \alpha \sin kt$ – лінійне рівняння першого порядку.

Розв'язуючи його, маємо такий загальний розв'язок: $i = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\alpha R}{k^2L^2 + R^2}\sin kt - \frac{\alpha kL}{k^2L^2 + R^2}\cos kt$.

Сталу *C* знаходимо з початкових умов (*t*=0, *i*=0): $C = \frac{\alpha kL}{k^2L^2 + R^2}$. Отже, $I(t) = \frac{\alpha}{k^2L^2 + R^2}\left(kLe^{-\frac{R}{L}i} + R\sin kt - kL\cos kt\right)$.▲

Задачі

57. Різниця потенціалів на затискачах котушки рівномірно падає від ε_0=2 В до ε_1=1 В за 10 с. Яким буде струм наприкінці десятої секунди, якщо на початку досліду він дорівнював $16\frac{2}{3}$ А? Опір котушки 0,12 Ом, коефіцієнт індуктивності 0,1 Гн.

Відповідь: 9,03 А.

58. До електричного кола підводиться напруга U=300 В, його активний опір складає R=150 Ом. Коефіцієнт самоіндукції L=30 Гн. За який час з моменту замикання кола сила струму досягне 99 % свого граничного значення? Знайти закон зміни сили струму в такому колі.

Відповідь: $t = \frac{1}{5}\ln 100 \approx 0{,}9$ с.

59. Знайти закон зміни сили струму в електричному колі з опором R і ємністю C при замиканні кола на джерело струму постійної напруги U.

Вказівка. Спад напруги на конденсаторі визначається як $\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$.

Відповідь: $i = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}$.

Абсорбція світла

Приклад 29. Поглинання (абсорбція) світлового потоку тонким шаром води пропорційне до товщини шару і потоку, який падає на його поверхню. При проходженні через шар товщиною 1 м поглинається 1/4 початкового світлового потоку. Яка частина світлового потоку дійде до глибини $h = 4$ м?

▼Нехай $Q = Q(h)$ − світловий потік, який доходить до глибини h. При проходженні через шар води товщиною dh поглинутий світловий потік визначається як $dQ = -kQdh$, звідси $Q(h) = Ce^{-kh}$.

Нехай початковий світловий потік дорівнює Q_0. Тоді з початкової умови $Q(0) = Q_0$ знаходимо, що $C=Q_0$, і тому $Q(h) = Q_0 e^{-kh}$.

За умовою $Q(1) = \frac{3}{4}Q_0$, отже, $\frac{3}{4}Q_0 = Q_0 e^{-k}$, звідки $e^{-k} = \frac{3}{4}$ і $Q(h) = Q_0\left(\frac{3}{4}\right)^h$.

На глибину $h = 4$ м дійде світловий потік $Q(4) = Q_0\left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}316Q_0$.▲

Задачі

60. Кількість світла, що абсорбується при проходженні через тонкий шар води, пропорційна товщині шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо при проходженні через шар товщиною 3 м абсорбується половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?
Відповідь: 1/1024.

61. Метр товщі скла визначеного сорту поглинає 1/4 того світла, що проходить через нього. Якої товщини треба взяти скло, щоб воно поглинало тільки 1 % світла?
Вказівка. Використайте закон поглинання світла шаром води.
Відповідь: $\ln 0{,}99/\ln 0{,}75 \approx 0{,}035$ м.

62. Якщо десятиметровий шар води поглинає 40 % світла, то на якій глибині денне світло буде дорівнювати місячному, яскравість якого складає $\frac{1}{3}\cdot 10^{-5}$ яскравості денного світла на поверхні води?
Відповідь: 247 м.

Різні задачі

Приклад 30. Провідник має заряд Q=1000 Кл. Він поступово його втрачає. Швидкість втрати заряду пропорційна заряду провідника в даний момент часу. Який заряд залишиться на провіднику через 10 хв., якщо за першу хвилину втрачено 100 Кл електрики?

▼Нехай в момент часу t заряд провідника становить $Q(t)$. Швидкість втрати заряду визначається як $-\dfrac{dQ}{dt}$. Оскільки швидкість втрати заряду пропорційна заряду $Q(t)$, то диференціальне рівняння задачі має вигляд $-\dfrac{dQ}{dt} = kQ$.

Інтегруючи його, маємо: $Q = Ce^{-kt}$. Використовуємо початкові умови (при t=0 Q=Q_0) і знаходимо сталу C: C= Q_0. Отже, $Q = Q_0e^{-kt}$.

Враховуючи додаткові умови (при t = 1 хв. Q=900 Кл), маємо: $900 = 1000e^{-k}$, $e^{-k} = 0{,}9$ і $Q = 1000\cdot(0{,}9)^t$. При t=10 хв. $Q = 1000\cdot 0{,}9^{10} \approx 349$ Кл.▲

Приклад 31. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна до радіуса листка і кількості сонячного світла, яке попадає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна до площі листка і косинуса кута між напрямом променів і вертикаллю до листка. Знайти залежність між площею S листка і часом t, якщо о 6 год. ця площа дорівнювала 1600 см^2, а о 18 год. того самого дня − 2500 см^2. Вважати, що кут між сонячним променем і вертикаллю о 6 год. і о 18 год. становить 90°, а опівдні – 0°.

▼Нехай $S = S(t)$ − площа листка в момент часу t, $S(0)$=1600 см^2, $S(12)$=2500 см^2. Швидкість росту листка $S' = krQ$, де k – коефіцієнт пропорційності, r – радіус листка, Q – кількість сонячного світла. За умовою $Q = \gamma S\cos\alpha$, γ − коефіцієнт пропорційності, α − кут між напрямом сонячного променя і вертикаллю до листка.

Кут $\alpha = \alpha(t)$ − функція часу, яка лінійно залежить від часу, — $\alpha = at + b$, $\alpha(0) = -\pi/2$, $\alpha(6) = 0$, $\alpha(12) = \pi/2$. З умови задачі дістаємо $a = \pi/12$, $b = -\pi/2$, тобто $\alpha = \dfrac{\pi}{12}(t-6)$.

Отже, $Q = \gamma S\cos\dfrac{\pi}{12}(t-6)$, $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$, тобто маємо диференціальне рівняння $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{k\gamma}{\sqrt{\pi}}S\sqrt{S}\cos\dfrac{\pi}{12}(t-6)$. Відокремлюємо змінні і інтегруємо: $S^{-\frac{3}{2}}dS = \dfrac{\mu}{\sqrt{\pi}}\cos\dfrac{\pi}{12}(t-6)dt$, де $\mu = k\gamma$; $-\dfrac{2}{\sqrt{S}} = \dfrac{12\mu}{\pi^{\frac{3}{2}}}\sin\dfrac{\pi}{12}(t-6) - 2C$,

$$S = \left(C - \frac{6\mu}{\pi^{\frac{3}{2}}}\sin\frac{\pi}{12}(t-6)\right)^{-2}.$$

Використовуючи початкову та додаткову умови, послідовно знаходимо сталу інтегрування і коефіцієнт μ. Остаточно залежність площі листка в см^2 від часу в годинах матиме вигляд $S = \dfrac{16000}{\left(9 - \sin\dfrac{\pi}{12}(t-6)\right)^2}$. ▲

Задачі

63. При іонізації газу швидкість зменшення числа вільних електронів пропорційна квадрату їх наявної кількості (n). Знайти залежність n від часу t, якщо при t=1 $n = \frac{1}{2}n_0$.

Відповідь: $n = \dfrac{n_0}{1+t}$.

64. Залежність питомої теплоти c заліза від температури t (для температур нижче 200 $^{\circ}$C) виражається формулою $c = 0{,}1053 + 0{,}000142t$. Обчислити кількість тепла Q, необхідного для нагрівання 100 кг заліза від 50 $^{\circ}$C до 100 $^{\circ}$C, якщо $\dfrac{dQ}{dt} = mc$, де m – маса заліза в кілограмах, а Q виражається в кілокалоріях.

Відповідь: 579,75 ккал.

Диференціальні рівняння вищих порядків у задачах геометрії і фізики

Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

А. Рівняння n-го порядку, розв'язані відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (1)$$

Типи рівнянь (1), що допускають зниження порядку:

1) $y^{(n)} = f(x)$. Загальний розв'язок знаходиться n квадратурами:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1\left(x - x_0\right)^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{C_2\left(x - x_0\right)^{n-2}}{(n-2)\,!} + ... + C_{n-1}(x - x_0) + C_n; \qquad (2)$$

2) $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. Підстановка $y^{(n-1)} = z$ зводить це рівняння до рівняння першого порядку $z' = f(z)$. З нього знаходять $z = \varphi(x, C_1)$. З урахуванням підстановки маємо: $y^{(n-1)} = \varphi\left(x, C_1\right)$, що є рівнянням попереднього типу. Тут y знаходиться $(n-1)$-ю квадратурою;

3) $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$. Підстановка $y^{(n-2)} = z$, $y^{(n-1)} = z'$, $y^{(n)} = z''$ приводить дане рівняння до вигляду $z'' = f(z)$. Помноживши його обидві частини на $2z'dx$, матимемо $2z''z'dx = 2f(z)z'dx$ або $d(z'^2) = 2f(z)dz$. Після інтегрування одержуємо $z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1$, $z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}$, $\dfrac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx$, тобто: $\varphi(x, C_1, C_2) = z$ або $y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2)$ (рівняння першого типу). Тут y знаходиться $(n-2)$-ма квадратурами.

Б. Рівняння n-го порядку, не розв'язані відносно старшої похідної:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0, \qquad (3)$$

які допускають зниження порядку:

4) $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$. Підстановка $y^{(k)} = z$, $y^{(k+1)} = z'$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ знижує порядок рівняння на k одиниць;

5) $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Підстановка $y' = p$ знижує порядок рівняння на одиницю. Справді, $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dpdy}{dydx} = p\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = \dfrac{dy''}{dx} = \dfrac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)dy}{dydx} =$

$$= p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \text{ і т. д.}$$

В. Лінійні однорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

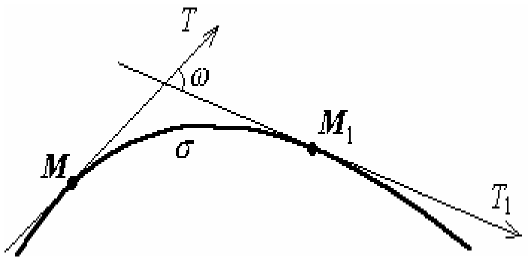
$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \qquad (4)$$

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, де y_i, $i = \overline{1, n}$, — частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння (4).

Геометричні задачі

Кривина плоскої кривої. Радіус кривини

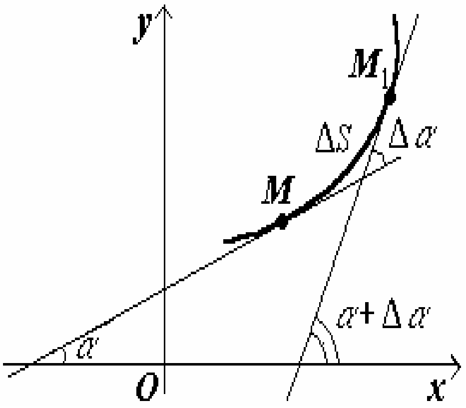
Нехай криву (L) задано в параметричній формі $(L): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ і MM_1 − її дуга, довжиною σ. Розглянемо дотичні MT і M_1T_1: ω — кут між ними в радіанах.



Середню кривину k_c *означають за формулою* $k_c = \dfrac{\omega}{\sigma}$. *Кривина в точці означається за формулою* $k = \lim\limits_{\sigma \to 0} \dfrac{\omega}{\sigma}$ (для кола $k = \dfrac{1}{R}$, де R — радіус кола).

Виведемо формулу для кривини кривої (вважатимемо, що точки кривої не особливі), знаючи, що $k = \dfrac{d\alpha}{dS} = \dfrac{\alpha'_t}{S'_t}$ (*). Відомо, що $S'_t = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Знайдемо α'_t. Оскільки $tg\alpha = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ і $\alpha = arctg\dfrac{y'_t}{x'_t}$, то

$$\alpha'_t = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \cdot \frac{x'_t \cdot y''_{t^2} - x''_{t^2} \cdot y'_t}{(x'_t)^2} = \frac{x'_t \cdot y''_{t^2} - x''_{t^2} \cdot y'_t}{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}.$$



Підставивши в (*) вирази для S'_t і α'_t, матимемо:

$$k = \frac{x'_t \cdot y''_{t^2} - x''_{t^2} \cdot y'_t}{\left((x'_t)^2 + (y'_t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Якщо ж криву (L) задано в декартових координатах $(L): y = f(x)$, то її кривина визначається за формулою

$$k = \frac{y''_{x^2}}{\left(1 + (y'_x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

У випадку, коли криву (L) задано в полярній системі координат $(L): \rho = f(\theta)$, перейшовши до параметричного подання, матимемо

$$k = \frac{\rho^2 + 2 \cdot \rho'^2_\theta - \rho \cdot \rho''_{\theta^2}}{\left(\rho^2 + \rho'^2_\theta\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Радіус кривини — $R = \dfrac{dS}{d\alpha}$.

При параметричному заданні кривої $R = \dfrac{\left((x'_t)^2 + (y'_t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'_t \cdot y''_{t^2} - x''_{t^2} \cdot y'_t}$, в декартових координатах — $R = \dfrac{\left(1 + (y'_x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}$, в полярній системі координат — $R = \dfrac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

Приклад 1. Знайти криві, кривина яких в кожній точці дорівнює 1.

▼Кривина визначається за формулою $k = \dfrac{y''_{x^2}}{\left(1 + y'^2_x\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$, звідки $y'' = \left(1 + y'\right)^{\frac{3}{2}}$ — рівняння другого порядку вигляду $y'' = f(y')$.

Знижуємо порядок рівняння підстановкою $y' = z$: $\dfrac{dz}{dx} = \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$. Звідси $\dfrac{dz}{\left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = dx$ або $d\left(\dfrac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\right) = dx$ (можна також застосувати підстановку $z = tgt$). Інтегруючи, маємо: $\dfrac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = x + C_1$ або, розв’язавши відносно z, — $z = \dfrac{x + C_1}{\pm\sqrt{1 - (x + C_1)^2}}$, $y' = \dfrac{x + C_1}{\pm\sqrt{1 - (x + C_1)^2}}$. Інтегруючи вдруге, маємо: $y + C_2 = \pm\sqrt{1 - (x + C_1)^2}$ або $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 1$ — сім’я одиничних кіл.▲

Приклад 2. Знайти всі плоскі криві, для яких радіус кривини R пропорційний відрізку нормалі. Розглянути випадки, коли коефіцієнт пропорційності дорівнює $1,\ -1,\ 2,\ -2$.

▼Оскільки радіус кривини $R = \dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ (криву вважатимемо заданою в декартовій системі координат у вигляді $y = y(x)$), і довжина відрізка нормалі визначається як $|y| \cdot \sqrt{1 + y'^2}$, то диференціальним рівнянням задачі буде $1 + y'^2 = k \cdot y \cdot y''$. Його загальний інтеграл знаходять підстановкою $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$: $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}} = \pm x + C_2$.

Нехай $k = 1$. У цьому випадку загальний інтеграл конкретизується до вигляду $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{(y/C_1)^2 - 1}} = \pm x + C_2$, $\pm x + C_2 = |C_1| \cdot \ln\left|y + \sqrt{y^2 - C_1^2}\right|$. Звідси

$y+\sqrt{y^2-\overline{C_1}^2}=\pm e^{\frac{x+\overline{C_2}}{\overline{C_1}}}$, $y-\sqrt{y^2-\overline{C_1}^2}=\pm\overline{C_1}^2\cdot e^{-\frac{x+\overline{C_2}}{\overline{C_1}}}$ (тут $\overline{C_1}=|C_1|$, $\overline{C_2}=C_2$). Додаючи дві останні рівності, одержуємо розв'язок $y=\pm\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+\overline{C_2}}{\overline{C_1}}}+\overline{C_1}^2 e^{-\frac{x+\overline{C_2}}{\overline{C_1}}}\right)$ — сім'я ланцюгових ліній.

Якщо $k=-1$, то у цьому випадку $\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{C_1}{y}\right)^2-1}}=\pm x+C_2$. Інтегруючи, одержимо $(x-\overline{C_2})^2+y^2=\overline{C_1}^2$ — сім'я кіл з центрами на осі Ox.

При $k=2$ із загального інтеграла матимемо $\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}}=\pm x+C_2$. Інтегруючи, запишемо, що $y=\frac{\left(x+\overline{C_2}\right)^2}{4\cdot\overline{C_1}}+\overline{C_1}$ — сім'я парабол, осі яких паралельні осі Oy.

Якщо ж $k=-2$, то $\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{C_1}{y}-1}}=\pm x+C_2$ або $\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}dy=\pm x+C_2$. Інтегрування проводиться підстановкою $y=C_1\sin^2\frac{t}{2}=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$, що дає інтеграл у параметричній формі $\begin{cases} x=\overline{C_1}(t-\sin t)+\overline{C_2}, \\ y=\overline{C_1}(1-\cos t) \end{cases}$ — сім'я циклоїд з вершинами на осі Ox.▲

Задачі

1. Знайти плоскі криві, у яких радіус кривини пропорційний кубу нормалі. *Відповідь:* $(x-C_1)^2-C_2\cdot y^2+k\cdot C_2^{\ 2}=0$.

2. Визначити криву, радіус кривини якої дорівнює постійній величині. *Відповідь:* $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R^2$, $R=const$.

3. Знайти рівняння кривої, яка дотикається до осі абсцис у початку координат, якщо її кривина в будь-якій точці дорівнює $\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$. *Відповідь:* $y=\pm\ln\cos x$.

4. Знайти рівняння кривих, у яких радіус кривини в будь-якій точці дорівнює довжині відрізка нормалі, що знаходиться між цією точкою і віссю абсцис, якщо крива: а) увігнута; б) опукла.

Відповідь: а) $y=\dfrac{1}{C_1}ch(C_1x+C_2)$ при $y''>0$; б) $(x+C_2)^2+y^2=C_1^{\,2}$ при $y''<0$.

5. Знайти рівняння кривих, у яких радіус кривини в будь-якій точці вдвічі більший від довжини відрізка нормалі, що знаходиться між цією точкою і віссю абсцис, якщо відомо, що крива: а) увігнута; б) опукла.

Відповідь: а) $4\cdot(C_1\cdot y-1)=C_1^{\,2}(x+C_2)^2$ при $y''>0$; б) $x=\dfrac{C_1}{2}(t-\sin t)+C_2$, $y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos t)$ при $y''<0$.

6. Знайти лінію, для якої проекція радіуса кривини на вісь Oy є величиною постійною, що дорівнює a.

Відповідь: $e^{\frac{y}{a}}=C_2\sec\left(\dfrac{x}{a}+C_1\right)$.

7. Знайти інтегральну криву, знаючи, що радіус її кривини пропорційний квадрату абсциси (коефіцієнт пропорційності $\dfrac{1}{a}$) та справедлива умова $y(a)=-\dfrac{a}{3}$, $y'(a)=0$.

Відповідь: $3y=(x-2a)\sqrt{\dfrac{2x-a}{a}}$.

8. Знайти криві, в яких радіус кривини дорівнює відрізку нормалі, який міститься між даними паралельними прямими.

Відповідь: $\ln y+\ln\dfrac{x+C_1}{h}=C_2$.

9. Знайти криві, в яких радіус кривини обернено пропорційний косинусу кута між дотичною і віссю абсцис.

Відповідь: $y=C_2-k\ln\cos\left(\dfrac{x}{k}+C_1\right)$.

10. Знайти сім'ю кривих, для яких відношення радіуса кривини до довжини нормалі дорівнює 2. Виділити криву, для якої $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Відповідь: $y=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2$, $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(x+1)^2$.

11. Знайти криву, в якої радіус кривини дорівнює 1.
Відповідь: $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=1$.

Різні задачі

(при необхідності продиференціюйте співвідношення, яким моделюється задача)

12. Знайти інтегральну криву рівняння $y \cdot y'' + y'^2 = 1$, яка проходить через точку $(0,1)$ і дотикається до прямої $x + y = 1$.

Відповідь: $y = -x + 1$.

13. Знайти інтегральну криву рівняння $y \cdot y' \cdot y'' = y'^3 + y''^2$, яка дотикається в початку координат до прямої $x + y = 0$.

Відповідь: $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$.

14. Знайти криву, яка проходить через початок координат і має ту властивість, що площа трикутника, утвореного дотичною до кривої в деякій точці, ординатою цієї точки і віссю Ox, пропорційна площі криволінійної трапеції, яка утворена кривою, віссю Ox і ординатою цієї точки.

Відповідь: $C \cdot x = y^{2k-1}$, $\left(k > \dfrac{1}{2}\right)$.

15. Знайти лінію, довжина дуги якої, що відраховується від деякої точки, пропорційна кутовому коефіцієнту дотичної в кінцевій точці дуги.

Відповідь: ланцюгова лінія.

Фізичні задачі

Закони руху

Приклад 1. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю υ_0. Знайти закон руху тіла, вважаючи, що воно рухається тільки під дією сили тяжіння.

▼Необхідно знайти залежність $s = f(t)$. Для цього на основі другого закону динаміки Ньютона запишемо диференціальне рівняння руху тіла $m\frac{d^2s}{dt^2} = F$, де $\frac{d^2s}{dt^2}$ — прискорення, m — маса тіла, F — сила, що діє на тіло в напрямку руху.

За умовою задачі сила F дорівнює силі тяжіння mg, яка направлена вниз, тобто протилежно руху, а тому беремо знак мінус: $F = -mg$.

Таким чином, диференціальна модель задачі матиме вигляд $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$. Це диференціальне рівняння вигляду $y'' = const$. Інтегруючи його двічі, маємо $\frac{ds}{dt} = -gt + C_1 = \upsilon$, $C_1 = \upsilon_0$, тобто $\frac{ds}{dt} = \upsilon_0 - gt$; $s = \int(\upsilon_0 - gt)dt = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_2$ або з урахуванням другої початкової умови ($s(0) = 0$) $s = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Це і є шуканий закон руху (залежність координати рухомого тіла від часу).▲

Приклад 2. Тіло опускається в рідину. Сила опору пропорційна швидкості. Знайти закон руху тіла, що опускається в рідину без початкової швидкості.

▼Нехай за t секунд тіло проходить шлях s. Якщо m — маса тіла і g — прискорення сили земного тяжіння, то вага тіла дорівнює mg. Сила опору направлена вгору і пропорційна швидкості, тобто дорівнює $k\upsilon$ або $k \cdot \frac{ds}{dt}$. Рівнодійною сил, що прикладаються до тіла, є $F = mg - k \cdot \frac{ds}{dt}$.

Рівняння задачі: $mg - k\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$ або $s'' + k_1 s' = g$, де $k_1 = \frac{k}{m}$. Це рівняння вигляду $y'' = f(y')$. Покладаючи $s' = p$, $s'' = p'$, одержуємо рівняння першого порядку $\frac{dp}{dt} + k_1 p = g$, змінні в якому легко відокремлюються: $-dt = \frac{dp}{k_1 p - g}$. Звідси, інтегруючи, одержуємо $k_1 p - g = C_1 e^{-k_1 t}$ або, повертаючись до початкових змінних, $k_1 s' - g = C_1 e^{-k_1 t}$.

Оскільки $s' = \upsilon = 0$ при $t = 0$, то $-g = C_1$, і ми знову приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними $k_1 s' = g\left(1-e^{-k_1 t}\right)$. Звідси $s=\frac{g}{k_1}\left(t+\frac{1}{k_1}e^{-k_1 t}\right)+C_2$. З другої початкової умови ($s(0)=0$) знаходимо сталу інтегрування C_2: $C_2=-\frac{g}{k_1^2}$, і уточнюємо закон руху тіла до вигляду $s=\frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{mg}{k}t$.▲

Приклад 3. Тіло масою m починає падати з деякої висоти. При падінні воно зазнає опору, пропорційного квадрату швидкості руху. Знайти закон руху тіла.

▼У момент часу t тіло знаходиться під дією сили тяжіння і опору середовища. Сила тяжіння дорівнює mg, сила опору середовища — $k\upsilon^2$ і направлена протилежно руху. Отже, $ma = mg - k\upsilon^2$.

Якщо пройдений від початку координат шлях дорівнює s, то швидкість руху $\upsilon=\frac{ds}{dt}$, а прискорення при прямолінійному русі $a=\frac{d^2 s}{dt^2}$. Маємо таке диференціальне рівняння задачі: $\frac{d^2 s}{dt^2}=g-\frac{k}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

Це диференціальне рівняння вигляду $y''=f(y')$. Розв’язуємо його методом зниження порядку: $\frac{d^2 s}{dt^2}=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\upsilon\frac{d\upsilon}{ds}$; $\frac{d\upsilon}{ds}\upsilon=g-\frac{k}{m}\upsilon^2$ або після відокремлення змінних: $\frac{m\cdot\upsilon\cdot d\upsilon}{mg-k\upsilon^2}=ds$. Інтегруємо: $-\frac{m}{2k}\ln\left|mg-k\upsilon^2\right|+C=s$.

Нехай $s(0)=\upsilon(0)=0$. Тоді з останньої рівності одержуємо $-\frac{m}{2k}\ln(mg)+C=0$, звідки $C=\frac{m}{2k}\ln(mg)$, а $s=\frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-k\upsilon^2}\right|$ або $\ln\left|\frac{mg}{mg-ks'^2}\right|=\frac{2ks}{m}$.

Оскільки тіло падає, то згідно диференціального рівняння задачі $m\frac{d^2 s}{dt^2}>0$, і значить, $mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2>0$ і $\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}>0$, а, отже, $\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=e^{\frac{2ks}{m}}$, $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}$. Відокремлюючи змінні, одержимо $\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}dt$, звідки $\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}t+\overline{C}$. Інтеграл в лівій частині цього рівняння знаходимо за допомогою підстановки $z=e^{\frac{ks}{m}}$, звідки $dz=\frac{k}{m}e^{\frac{ks}{m}}ds$, $ds=\frac{m}{k}e^{-\frac{kS}{m}}dz=\frac{m}{k}\cdot\frac{dz}{z}$.

Таким чином, $\int \frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\frac{m}{k}\int \frac{dz}{z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}=\frac{m}{k}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{m}{k}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=$

$$=\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}t+\overline{C}.$$

Підставляючи в останню рівність початкові умови $t=0$, $s=0$, одержимо $\overline{C}=0$. Отже, загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{k\cdot s}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2\cdot k\cdot s}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}t$. Звідси $e^{\frac{k\cdot s}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2\cdot k\cdot s}{m}}-1}=e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}$ (*), $\frac{1}{e^{\frac{k\cdot s}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2\cdot k\cdot s}{m}}-1}}=e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}$. Помноживши чисельник і знаменник на $e^{\frac{k\cdot s}{m}}-\sqrt{e^{\frac{2\cdot k\cdot s}{m}}-1}$, одержимо $e^{\frac{k\cdot s}{m}}-\sqrt{e^{\frac{2\cdot k\cdot s}{m}}-1}=e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}$ (**), звідки, враховуючи (*), маємо $e^{\frac{ks}{m}}=\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}$, а закон руху падаючого тіла $s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}$ або $s=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t$.▲

Приклад 4. Знайти закон руху матеріальної точки масою m по прямій AO під дією відштовхуючої сили, обернено пропорційної кубу відстані точки $x=OM$ від нерухомого центра O.

▼Диференціальне рівняння руху точки згідно другого закону динаміки буде таким: $m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{x^3}$, де k — коефіцієнт пропорційності. Подамо це рівняння у формі $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{x^3}=a^2\cdot\frac{1}{x^3}$ або $x''=a^2\cdot\frac{1}{x^3}$ і помножимо обидві частини рівняння на $2x'dt$: $2x'x''dt=2a^2\frac{x'dt}{x^3}$.

Маємо: $d\left(x'^2\right)=2a^2\frac{dx}{x^3}=a^2d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, звідки $x'^2=a^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{C_1}\right)=\frac{a^2}{C_1}\cdot\frac{x^2-C_1}{x^2}$, $x'=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-C_1}}{x}$, $\frac{dx}{dt}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2-C_1}}{x}$. Відокремлюючи змінні, одержимо $\frac{xdx}{\sqrt{x^2-C_1}}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}dt$.

Розв'язуючи останнє рівняння, приходимо до рівності $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-C_1}}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\left(t+C_2\right)$, звідки $\sqrt{x^2-C_1}=\pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\left(t+C_2\right)$ або

$x^2 - C_1 = \frac{a^2}{C_1}\left(t + C_2\right)^2$.▲

Приклад 5. Матеріальна точка масою m під дією сили $F(t) = \cos t$ переміщується прямолінійно. Знайти закон переміщення матеріальної точки.

▼Направимо вісь Ox по тій прямій, по якій рухається точка. Тоді прикладена сила і прискорення точки будуть направлені по осі Ox, і диференціальне рівняння руху матиме вигляд $m\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$. Початкові умови: $x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$ при $t = t_0$.

Оскільки, $\frac{dx}{dt} = \upsilon$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt}$, то рівняння задачі перепишеться у вигляді рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними: $m\frac{d\upsilon}{dt} = \cos t$, звідки $\upsilon = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\cos u du + \upsilon_0 = \frac{1}{m}\sin u\Big|_{t_0}^{t} + \upsilon_0$, $\upsilon = \frac{1}{m}\left(\sin t - \sin t_0\right) + \upsilon_0$, $\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + \frac{1}{m}\times$ $\times\left(\sin t - \sin t_0\right)$.

Проінтегрувавши вдруге, одержимо $x = \upsilon_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\left(-\cos t\Big|_{t_0}^{t} - \sin t_0 \cdot t\Big|_{t_0}^{t}\right) +$ $+ x_0$, звідки $x = x_0 + \upsilon_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{m}\left(-\cos t + \cos t_0 - \sin t_0 \cdot (t - t_0)\right)$.▲

Приклад 6. Матеріальна точка масою m під дією сили $F = \upsilon^2$ переміщується прямолінійно. Знайти закон переміщення матеріальної точки.

▼У цьому випадку диференціальне рівняння має вигляд $m\frac{d^2x}{dt^2} = \upsilon^2$, $m\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon^2$, звідки $m\frac{d\upsilon}{d\upsilon^2} = dt$, $-m\upsilon^{-1}\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = t - t_0$, $m\left(\frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon}\right) = t - t_0$, $-\frac{m}{\upsilon} = t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}$, $\upsilon = -\frac{m}{t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}}$ або $\frac{dx}{dt} = -\frac{m}{t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}}$.

Звідси $dx = -\frac{m}{t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}}dt$, $x = -\int_{t_0}^{t}\frac{m}{t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}}dt + x_0$, $x = -m\ln\left|t - t_0 - \frac{m}{\upsilon_0}\right|\Big|_{t_0}^{t} + x_0$,

$x = m\ln\left|\frac{m}{(t - t_0)\upsilon_0 - m}\right| + x_0$.▲

Приклад 7. Матеріальна точка притягується центром, що знаходиться у початку координат, з силою, пропорційною відстані. Рух починається з точки $(a, 0)$ з початковою швидкістю υ_0 перпендикулярно до осі Ox. Знайти траєкторію точки.

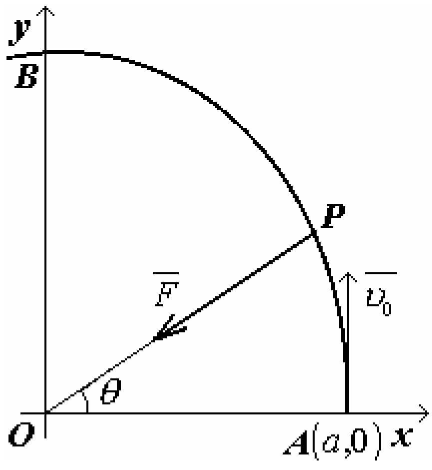
▼Проекції сили взаємодії точки з нерухомим центром на осі Ox та Oy дорівнюють відповідно $-k^2x$ і $-k^2y$, тому $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x$ і $m\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2y$ — два диференціальні рівняння руху матеріальної точки (складний рух розклали на два простих — прямолінійних) з початковими умовами $x=a$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=\upsilon_0$ при $t=0$.

Інтегруючи обидва ці рівняння вигляду $y''=f(y)$ (див. розв'язання задачі пр. 4), знаходимо з урахуванням початкових умов, що $\frac{x}{a}=\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right)$, $\frac{ky}{\upsilon_0\sqrt{m}}=\pm\sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t\right)$.

Для одержання рівняння траєкторії руху точки виключаємо з двох останніх рівностей параметр t — підносимо їх до квадрату і додаємо: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{m\upsilon_0{}^2}=1$. Якщо цей результат переписати у вигляді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{m}\upsilon_0/k\right)^2}=1$, стає зрозуміло, що шукана крива — еліпс.▲

Приклад 8. Матеріальна точка масою m притягується полюсом з силою $\frac{k^2m}{r^3}$, де k — стала, r — відстань рухомої точки від полюса. Знайти закон руху, припускаючи, що координати початкового положення точки — $(a,0)$, і що початкова швидкість $\upsilon_0>\frac{k}{a}$ направлена перпендикулярно до осі Ox.

▼Як і у попередній задачі подамо плоский рух точки як композицію двох простих. Для цього запровадимо полярну систему координат, узгоджену з вибраною раніше декартовою прямокутною, і розглядатимемо два рухи: по прямій, що сполучає дану точку і полюс (при $\theta=const$), і по колу фіксованого радіуса $r=const$.

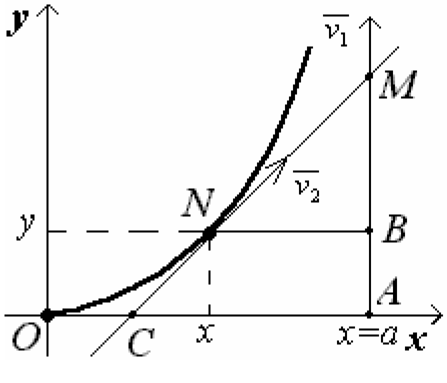


Диференціальні рівняння руху в полярних координатах: $m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\frac{k^2m}{r^3}$ (*), $\frac{m}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$ (**) (одержуються відповідно при додаванні та відніманні диференціальних рівнянь руху по осі *Ox* та осі *Oy*, якщо покласти в них $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$).

Безпосереднє інтегрування рівняння (**) дає $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_1$. В початковий момент $r=a$ і $r\frac{d\theta}{dt}=\upsilon_0$, значить, $C_1=a\upsilon_0$ і $\frac{d\theta}{dt}=\frac{a\upsilon_0}{r^2}$. Підставляючи цей результат у рівняння (*), маємо: $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{a^2\upsilon_0{}^2-k^2}{r^3}$ або, помноживши на $\frac{dr}{dt}dt$, — $\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}dt=\frac{a^2\upsilon_0{}^2-k^2}{r^3}dr$, звідки $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(a^2\upsilon_0{}^2-k^2\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)$ (сталу інтегрування взято у відповідності з початковими умовами, тобто $\frac{dr}{dt}=0$ при $r=a$).

Поділивши останнє співвідношення на рівняння $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{a^2\upsilon_0{}^2}{r^4}$, одержимо $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{a^2\upsilon_0{}^2-k^2}{a^4\upsilon_0^2}\cdot r^2\cdot\left(r^2-a^2\right)$. Розв'язуючи це рівняння і визначаючи сталу інтегрування так, щоб мати $r=a$ при $\theta=0$, матимемо рівняння траєкторії у вигляді $r=a\cdot\sec\left(\frac{\sqrt{a^2\upsilon_0{}^2-k^2}}{a\upsilon_0}\cdot\theta\right)$.▲

Приклад 9. Нехай лисиця рухається рівномірно із швидюстю υ_1 вздовж прямої $x=a$, а собака, що її наздоганяє, — рівномірно із швидкістю υ_2 вздовж деякої кривої переслідування, постійно "тримаючи курс" на лисицю. Визначити за відношенням $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}=n$ $(n\geq 1)$ криву переслідування, припускаючи, що в початковий момент часу собака перебував у початку координат, а лисиця − в точці $A(a{,}0)$.



▼Введемо ДПСК xOy і розглянемо криву переслідування, яка проходить через точку O. Продовжимо дотичну MN до перетину з віссю Ox в точці C і проведемо через точку N перпендикуляр до прямої AM, який перетинає її в точці B. Тоді в змінній точці $N(x{,}y)$ шуканої кривої в момент часу t $\frac{dy}{dx}=tg\angle ACM=tg\angle BNM=\frac{MB}{NB}=\frac{\upsilon_1 t-y}{a-x}$. Якщо $s=\upsilon_2 t=n\upsilon_1 t$, то $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{s}{n}-y}{a-x}$, звідки $(a-x)\frac{dy}{dx}+y=\frac{s}{n}$. Диференціюючи це співвідношення, маємо:

$-\frac{dy}{dx}+(a-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{ds}{ndx}$, де ds – диференціал дуги. Як відомо, диференціал дуги кривої визначається за формулою $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$, тому після підстановки дістанемо диференціальне рівняння $n(a-x)y''=\sqrt{1+y'^2}$.

Це рівняння другого порядку. Поклавши $y'=p$, матимемо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{n(a-x)}$, інтегруючи яке, дістанемо $\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\ln C=-\frac{1}{n}\ln(a-x)$, де lnC − довільна стала. Визначимо її, враховуючи початкові умови, − x=0, $p=\frac{dy}{dx}=0$ при t=0. Маємо: $\ln C=-\frac{1}{n}\ln a$, і, отже, $\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=-\frac{1}{n}\ln\frac{a-x}{a}$. Після потенціювання: $p+\sqrt{1+p^2}=\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$ (*), звідки $\frac{1}{p-\sqrt{1+p^2}}=-\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$ або $p-\sqrt{1+p^2}=-\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ (**). Додаючи рівності (*) і (**) і розділивши результат на 2, дістанемо $p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}-\left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ (***).

Повторне інтегрування при $n\neq 1$, дає $y=\frac{1}{2}\left(-\frac{a^{\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}(a-x)^{1-\frac{1}{n}}+\frac{a^{-\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}(a-x)^{1+\frac{1}{n}}\right)+C_1$, де C_1 – довільна стала, яку визначаємо, враховуючи початкові умови: при x=0 y=0. Маємо: $0=\frac{1}{2}\left(-\frac{a}{1-\frac{1}{n}}+\frac{a}{1+\frac{1}{n}}\right)+C_1, C_1=\frac{a}{n-\frac{1}{n}}$. Отже, рівняння шуканої кривої:

$$y=\frac{1}{2}\left(-\frac{a^{\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}(a-x)^{1-\frac{1}{n}}+\frac{a^{-\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}(a-x)^{1+\frac{1}{n}}\right)+\frac{a}{n-\frac{1}{n}}$$ (****), де $n\neq 1$.

Для n=1 рівняння (***) має вигляд: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-x}-\frac{a-x}{a}\right)$. Після інтегрування дістаємо: $y=-\frac{a}{2}\ln(a-x)+\frac{1}{4a}(a-x)^2+C_2$, де з урахуванням початкових умов $C_2=\frac{a}{2}\ln a-\frac{a}{4}$. Отже, рівняння шуканої кривої при $n=1$: $y=\frac{a}{2}\ln\frac{a}{a-x}+\frac{1}{4a}(a-x)^2-\frac{a}{4}$.

Покладаючи в (****) $x=a$, знайдемо шлях, який подолає лисиця: $y_0=\frac{a}{n-\frac{1}{n}}$, і час, за який собака її наздожене: $t=\frac{y_0}{\upsilon_1}=\frac{a}{\upsilon_1}\cdot\frac{1}{n-\frac{1}{n}}$.▲

Приклад 10. Підводний човен, що перебував у стані спокою, одержав невелику від'ємну плавучість P і занурюється на глибину. Опір води пропорційний швидкості занурення і дорівнює $kS\upsilon$, де k — коефіцієнт пропорційності, S — площа горизонтальної проекції човна, υ — швидкість занурення. Маса човна — m. Визначити швидкість занурення і шлях, пройдений човном за час t_1.

▼Проектуючи сили, які діють на човен при його зануренні, на вертикальну вісь, одержимо диференціальне рівняння руху $m\frac{d^2y}{dt^2}+kS\frac{dy}{dt}-P=0$. Скористаємось підстановкою $\upsilon=\frac{dy}{dt}$ і поділимо рівняння на m: $\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{kS\upsilon}{m}-\frac{P}{m}=0$. Відокремлюючи змінні, приходимо до диференціального рівняння $\frac{md\upsilon}{P-kS\upsilon}=dt$. Інтегруючи, одержуємо загальний розв'язок $-\frac{m}{kS}\ln(C(P-kS\upsilon))=t$. Враховуючи початкову умову (при $t=0$ $\upsilon=0$), знаходимо $C=\frac{1}{P}$. Отже, швидкість занурення визначиться з рівняння $-\frac{m}{kS}\ln\left(1-\frac{k}{P}S\upsilon\right)=t$ як $\upsilon=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)$.

Для визначення шляху, пройденого човном за час t, останнє рівняння перепишемо у вигляді $\frac{dy}{dt}=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)$, звідки $dy=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)dt$, $y=\frac{P}{kS}\left(t+\frac{m}{ks}e^{-\frac{kS}{m}t}+C\right)$. Звідси, враховуючи початкові умови ($y=0$ при $t=0$), $y=\frac{P}{kS}\left(t-\frac{m}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t}\right)\right)$.

При $t=t_1$ пройдений шлях $y=y_1$ складає $y_1=\frac{P}{kS}\left(t_1-\frac{m}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{m}t_1}\right)\right)$.▲

Приклад 11. Куля входить в дошку товщиною 12 см із швидкістю 200 м/с, а вилітає з неї — із швидкістю 60 м/с. Сила опору деревини пропорційна квадрату швидкості руху. Знайти тривалість руху кулі в дошці.

▼На основі другого закону Ньютона диференціальне рівняння руху кулі в дошці запишеться так: $m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=-k\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, де m — маса кулі, k — коефіцієнт пропорційності. Знижуючи порядок рівняння заміною $s'=p$, одержимо $\frac{dp}{dt}=-\frac{k}{m}p^2$, звідки після відокремлення змінних та інтегрування $-\frac{1}{p}=-\frac{k}{m}t+C_1$. Оскільки при $t=0$ $p=\frac{ds}{dt}=200$, то $C_1=-\frac{1}{200}$, і вдруге доведеться проінтегрувати вже рівняння $ds=\frac{dt}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}}$ (*).

Маємо, таким чином, що $s=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}\right)+C_2$, де $C_2=\frac{m}{k}\ln 200$, бо при $t=0$ $s=0$. Записуємо частинний розв'язок рівняння у вигляді $s=\frac{m}{k}\ln\left(200\cdot\frac{k}{m}\cdot t+1\right)$ або $t=\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{ks}{m}}-1\right)$.

З додаткової умови ($s'=60$ при $s=0{,}12$) знаходимо, повертаючись до рівняння (*), що $60=\frac{200}{e^{\frac{k}{m}\cdot 0{,}12}}$, звідки $\frac{k}{m}=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0{,}12}\approx 10{,}03$. Отже, $t=\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{ks}{m}}-1\right)\approx$

$\approx\frac{1}{200\cdot 10{,}03}\left(\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}\cdot 0{,}12}-1\right)\approx 0{,}00114$ с — час проходження кулею дошки. ▲

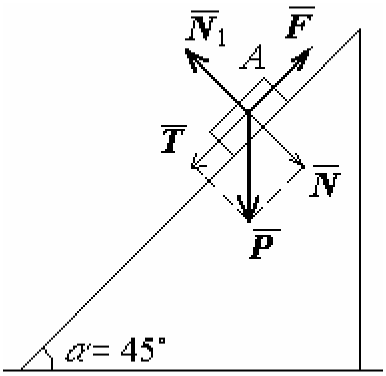
Приклад 12. Водій трамвая, виключаючи поступово реостат, збільшує потужність вагонного двигуна так, що при цьому сила тяги зростає на 1200 Н за кожну секунду. Знайти закон руху вагона, якщо спочатку сила тяги дорівнювала нулю. Вага вагона становить 100 кН, сила тертя стала і дорівнює 2000 Н, початкова швидкість дорівнює нулю.

▼Центр мас вагона переміщується по горизонтальній прямій. Початок координат зафіксуємо в початковому положенні центра мас. Проектуючи прикладені до вагона сили на вісь абсцис, одержимо таке диференціальне рівняння задачі: $\frac{P}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=1200t-2000$ (рівняння вигляду $y''=f(x)$), де $\frac{P}{g}$ — маса вагона, $1200t$ — сила тяги, t — час, що пройшов з моменту виключення реостата.

Початок руху вагона не співпадає з моментом виключення реостата. Час t_0, що відповідає початку руху, визначається з умови рівності сили тяги і сили тертя: $1200t_0 = 2000$, звідки $t_0 = \frac{5}{3}$ с. Величину $1200t - 2000$ позначимо через $1200t_1$. Тоді $t_1 = t - \frac{5}{3}$, і диференціальне рівняння матиме вигляд $\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt_1^2} - 1200t_1 = 0$. Інтегруючи його безпосередньо, одержуємо $\frac{dx}{dt_1} = \frac{1200g}{P} \cdot \frac{t_1^2}{2} + C_1$, де $C_1 = 0$, бо згідно з початковими умовами $x'(0) = 0$. Друге інтегрування дає $x = \frac{1200g}{P} \cdot \frac{t_1^3}{6} + C_2$. Визначимо C_2: при $t_1 = 0$ $x = 0$, тому і $C_2 = 0$.

Закон руху вагона, таким чином, запишеться так: $x = \frac{200g}{P} \cdot \left(t - \frac{5}{3}\right)^3 = \frac{200 \cdot 9{,}81}{100000} \cdot \left(t - \frac{5}{3}\right)^3 = 0{,}001962 \cdot \left(t - \frac{5}{3}\right)^3$.▲

Приклад 13. По похилій площині довжиною $l = 10$ м ковзає тіло A. Кут нахилу площини $\alpha = 45^\circ$. Коефіцієнт тертя по похилій площині $k = 0{,}5$. Знайти закон руху тіла і час, за який тіло пройде похилу площину, якщо в початковий момент воно знаходиться в стані спокою на верхній грані.



▼У будь-який момент часу t на тіло A діють три сили: сила тяжіння $\overline{P}$, сила тертя $\overline{F}$ і нормальна реакція площини $\overline{N_1}$. Нормальна $\overline{N}$ і тангенціальна $\overline{T}$ складові сили тяжіння за абсолютною величиною відповідно дорівнюють $P\cos\alpha$ і $P\sin\alpha$. Сила тертя $F = kN = kP\cos\alpha$. Замінимо сили $\overline{P}$, $\overline{F}$, $\overline{N}_1$ еквівалентною системою сил $\overline{T}$ і $\overline{F}$ (сили $\overline{N}$ і $\overline{N}_1$ врівноважуються, а система сил $\overline{T}$ і $\overline{N}$ еквівалентна силі $\overline{P}$). Рівнодійна сил, еквівалентна системі сил $\overline{T}$ і $\overline{F}$, $\overline{R} = \overline{T} + \overline{F}$, $R = P\sin\alpha - kP\cos\alpha$ діє в напрямі руху.

З іншого боку $P = mg$, $R = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$, звідки і одержуємо диференціальне рівняння руху тіла A: $\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. Це рівняння типу $y'' = C$. Розв'язуючи його безпосереднім інтегруванням, матимемо $\frac{ds}{dt} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)t + C_1$, $s = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2 + C_1t + C_2$ — загальний розв'язок диференціального рівняння. Сталі C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов: $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ при $t = 0$. Складаємо систему

$\begin{cases} 0 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1, \\ 0 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2, \end{cases}$ звідки $C_1 = C_2 = 0$. Підставивши ці значення в загальний розв'язок диференціального рівняння, одержимо закон руху $s = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2$. Підставивши сюди числові дані задачі, одержимо $s = \frac{g\sqrt{2}}{8}\cdot t^2$, звідки $t = 2\sqrt{\frac{s\sqrt{2}}{g}}$ — час проходження тіла по площині. Оскільки $s = l = 10$ м, то $t = 2\sqrt{\frac{l\sqrt{2}}{g}} = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{9{,}81}} = 2{,}4$ с.▲

Приклад 14. Снаряд вилітає з гармати із швидкістю 800 м/с під кутом 45° до горизонту. Знайти, нехтуючи опором повітря, найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд, і місце його падіння.

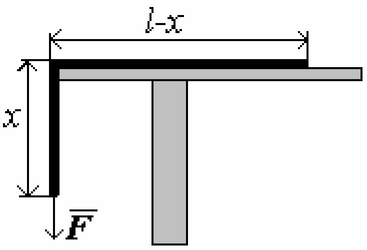
▼Взявши за початок координат точку початку руху снаряда, за вісь абсцис — горизонтальну пряму за напрямом руху, а за вісь ординат — вертикальну пряму (додатній напрям — вгору), маємо: $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ при початкових даних $x = y = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 800\cdot\cos 45^\circ$ при $t = 0$. Звідси, покладаючи $800\cdot\cos 45^\circ = a$, знаходимо $x = at$, $y = -\frac{g}{2}\cdot t^2 + at$.

Найбільшого значення y набуває при $t = \frac{a}{g}$; тоді $y = \frac{a^2}{2g} \approx 16{,}3$ км. Точку падіння знайдемо, зауваживши, що для неї $y = 0$, $t = \frac{2a}{g}$, і тому $x = \frac{2a^2}{g} = 65$ км.▲

Приклад 15. Снаряд вилітає з гармати із швидкістю υ_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, припускаючи, що опір повітря дорівнює $k\upsilon$, де k — коефіцієнт опору, υ — швидкість руху.

▼Вибравши систему координат так, як і у задачі попереднього прикладу, одержимо: $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -k\cdot\frac{dx}{dt}$, $m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -k\cdot\frac{dy}{dt} - mg$ з початковими умовами $x = y = 0$, $\frac{dx}{dt} = \upsilon_0\cdot\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \upsilon_0\cdot\sin\alpha$ при $t = 0$. Інтегруючи, знаходимо $x = \frac{m\upsilon_0\cos\alpha}{k}\cdot\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right)$, $y = \frac{m}{k^2}\cdot(k\upsilon_0\sin\alpha + mg)\cdot\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right) - \frac{mg}{k}\cdot t$.▲

Приклад 16. Ланцюг довжиною $l = 4$ м зсувається з гладенького горизонтального столу. В початковий момент з столу звисав кінець ланцюга довжиною $a = 0{,}5$ м. Нехтуючи тертям, знайти час зсування цього ланцюга зі столу.



▼У будь-який момент часу на ланцюг діє сила F, що дорівнює вазі звисаючої частини ланюга довжиною x. Позначивши вагу всього ланцюга через P, одержимо пропорцію $\frac{F}{P}=\frac{x}{l}$, звідки $F=\frac{P}{l}\cdot x=\frac{mg}{l}\cdot x$, де m — маса всього ланцюга.

На основі другого закону динаміки, таким чином, матимемо: $m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg}{l}\cdot x$ або $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}\cdot x=0$ — лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Підставивши сюди числові значення замість g і l, одержимо $\frac{d^2x}{dt^2}-2{,}5\cdot x=0$. Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння $\lambda^2-2{,}5=0$, звідки $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ — його корені. Отже, загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння запишеться як $x=C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}$.

Визначимо довільні сталі C_1 і C_2 з початкових умов: при $t=0$ $x=a=0{,}5$ м, $\upsilon=\frac{dx}{dt}=0$. Маємо: $a=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2$ (*). Оскільки ж $\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot C_1\cdot e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot C_2\cdot e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}$, то $0=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot C_1\cdot e^0-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot C_2\cdot e^0$ (**). З системи рівнянь (*) і (**) знаходимо: $C_1=C_2=\frac{a}{2}=0{,}25$.

Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, одержимо його частинний розв'язок $x=0{,}25\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}\right)$. Розв'язуючи це рівняння відносно t, матимемо $\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}\right)^2-4xe^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}+1=0$, звідки $\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}\right)_{1,2}=2x\pm\sqrt{4x^2-1}$. Відкидаючи тут знак мінус (при $t>0$ $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}>e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot t}$), знаходимо час зсування ланцюга: $t=\sqrt{\frac{2}{5}}\ln(2x+\sqrt{4x^2-1})$, $t=\sqrt{\frac{2}{5}}\ln(8+\sqrt{63})\approx 1{,}75$ с.▲

Задачі

1. Знайти час, необхідний для того, щоб упасти на землю з висоти 400000 км (відстань від Місяця до Землі), якщо ця висота обчислюється від центра Землі, і якщо радіус Землі дорівнює наближено 6400 км.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x^2}$.

Відповідь: 122 год.

2. Матеріальна точка масою m рухається по прямій лінії до центра, що притягує її з силою $\frac{mk^2}{r^3}$, де r — відстань точки від центра. Рух починається із стану спокою при $r=a$. Знайти час, за який точка досягне центра.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k^2}{r^3}$.

Відповідь: $t=\frac{a}{k}\int\limits_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\frac{a^2}{k}$.

3. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно, наближаючись до центра, що відштовхує її з силою, яка дорівнює k^2mr, де r — відстань точки від центра. Якщо рух починається на відстані a від центра з початковою швидкістю ka, то показати, що точка, необмежено наближаючись до центра, ніколи його не досягне.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d^2r}{dt^2}=k^2r$; $r=ae^{-kt}$.

4. Знайти швидкість, якої набуває тіло при падінні на Землю з нескінченно великої висоти під дією сили тяжіння, обернено пропорційної квадрату відстані точки від центра Землі.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k}{r^2}$.

Відповідь: 11,15 км/с.

5. Знайти закон руху тіла, що вільно падає без початкової швидкості, припускаючи, що опір повітря пропорційний квадрату швидкості, а швидкість має своєю границею величину 75 м/с.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\upsilon}{dt}=g(1-k^2\upsilon^2)$.

Відповідь: $s=\frac{75^2}{g}\ln\left(\frac{e^{\frac{gt}{75}}+e^{-\frac{gt}{75}}}{2}\right)$.

6. Матеріальну точку кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю υ_0. Припускаючи, що опір повітря дорівнює $k\upsilon^2$, знайти швидкість, з якою точка впаде на землю.

Відповідь: $\upsilon=\upsilon_0\sqrt{\frac{mg}{mg+k\upsilon_0^2}}$.

7. Матеріальна точка відштовхується центром, що знаходиться у початку координат, з силою, пропорційною відстані. Рух починається з точки $(a,0)$ з початковою швидкістю υ_0 перпендикулярно до осі Ox. Знайти траєкторію руху точки.

Відповідь: гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2y^2}{m\upsilon_0{}^2}=1$.

8. Матеріальна точка масою m відштовхується від прямої з силою, пропорційною відстані від точки до цієї прямої (k^2m). В початковий момент відстань від точки до прямої дорівнює a, а швидкість — υ_0 (паралельно прямій). Знайти траєкторію руху точки.

Відповідь: $y=ach\left(\frac{kx}{\upsilon_0}\right)$.

9. Обчислити швидкість, з якою упаде на Землю тіло, що в початковий момент знаходиться на орбіті Місяця у стані спокою.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{gr^2}{(R-x)^2}$, де x — відстань, пройдена тілом за t с, $g=9{,}8$ м/с^2, $r=6370$ км, $R=384000$ км.

Відповідь: 11,08 км/с.

10. Знайти закон прямолінійного руху матеріальної точки масою m, якщо відомо, що робота сили, яка діє в напрямі руху і залежить від шляху, пропорційна часу (k), що пройшов з моменту початку руху.

11. Тіло масою 2 кг, кинуте вертикально вгору із швидкістю 20 м/с, зазнає опору повітря, сила якого при швидкості υ м/с дорівнює $0{,}04\cdot\upsilon$ кГ. Знайти, через скільки секунд тіло досягне найвищого положення.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}+k\cdot\frac{ds}{dt}+mg=0$.

Відповідь: 1,7 с.

12. Моторний човен масою 300 кг рухається прямолінійно з початковою швидкістю 16 м/с. Опір води пропорційний швидкості човна і дорівнює 10 кГ при швидкості 1 м/с. Яку відстань і за який час пройде човен, перш ніж його швидкість стане дорівнювати 8 м/с?

Відповідь: $s=25$ м, $t=2{,}1$ с.

13. Катер рухається в стоячій воді з швидкістю $\upsilon=10$ км/год. На повному ходу його двигун було виключено, і через 20 с швидкість катера зменшилась до $\upsilon_1=6$ км/год. Вважаючи опір води руху катера пропорційним його швидкості, визначити: а) швидкість катера через 2 хв. після зупинки двигуна; б) відстань, пройдену катером протягом першої хвилини після зупинки двигуна.

Відповідь: 0,467 км/год.; 82,5 м.

14. Ланцюг довжиною $l=6$ м зсувається зі столу без тертя. Рух починається тоді, коли 1 м ланцюга звисає. За який час зсунеться увесь ланцюг?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $6\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=gs$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{6}{g}}\cdot\ln\left(6+\sqrt{35}\right)$.

15. Ланцюг довжиною $l=18$ м зсувається з крюка без тертя. По один бік крюка звисає 8 м ланцюга, а по інший — 10 м. За який час зсунеться увесь ланцюг?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $18 \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = gs - g(18 - s)$.

Відповідь: $\frac{3}{\sqrt{g}} \cdot \ln\left(9 + 4\sqrt{5}\right)$.

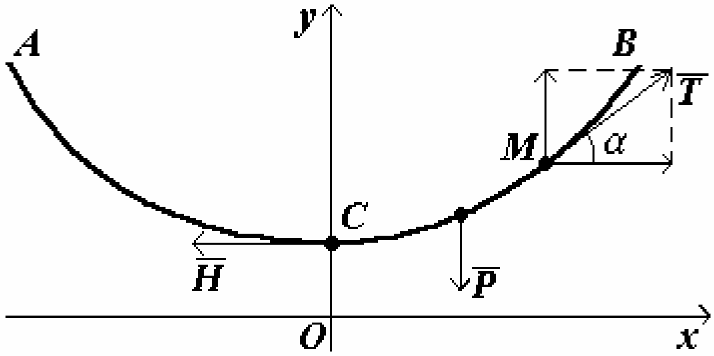
16. Ланцюг довжиною $l = 18$ м зсувається з крюка з тертям, сила якого дорівнює вазі одного метра ланцюга. По один бік крюка звисає 8 м ланцюга, а по інший — 10 м. За який час зсунеться увесь ланцюг?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $18 \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = gs - g(18 - s) - g$.

Статика. Задачі з технічної механіки

Приклад 17. Знайти криву, форми якої набуває закріплений на кінцях і вільно звисаючий однорідний важкий ланцюг під дією власної ваги.

▼*Перший спосіб.* Нехай ACB — крива, форми якої набуває ланцюг. Вісь Ox проведемо так, щоб вона була паралельна дотичній до кривої в точці C, а вісь Oy проведемо через точку C. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на кривій і складемо диференціальне рівняння, виходячи з умови рівноваги сил, що діють на дугу MC кривої, — сил натягу $\overline{H}$ і $\overline{T}$, направлених по дотичній, і ваги $\overline{P}$, направленої вертикально вниз і рівної за величиною qS (де q — вага одиниці довжини ланцюга, S — довжина дуги MC). Таким чином, $\overline{H} + \overline{T} + \overline{P} = 0$.

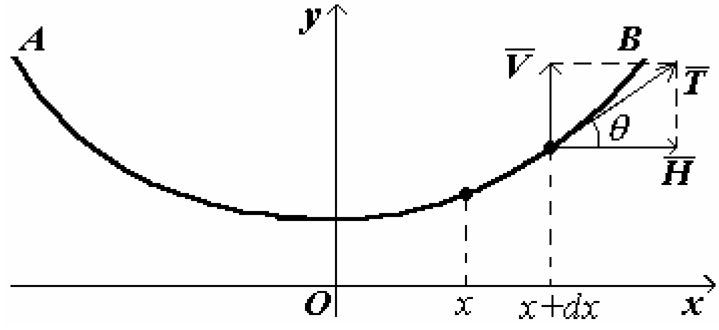


Розкладаючи силу $\overline{T}$ на вертикальну та горизонтальну складові, одержимо $T \cdot \cos\alpha = H$, $T \cdot \sin\alpha = qS$. Звідси $tg\alpha = \frac{q}{H} S$ або $y' = \frac{q}{H} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$. Диференціюючи (щоб позбавитись від інтеграла) і поклавши $\frac{H}{q} = a$, одержимо диференціальне рівняння задачі: $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Підстановка $y' = z$ приводить до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + z^2}$. Після відокремлення змінних і взяття інтеграла одержимо $\ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \frac{x}{a} + \ln|C|$, звідки $z + \sqrt{1 + z^2} = C_1 \cdot e^{\frac{x}{a}}$. Ізолювавши корінь $\sqrt{z^2 + 1}$ і підносячи до квадрату обидві часини, одержимо рівність, після спрощення якої знайдемо, що $1 = C_1^2 \cdot e^{\frac{2x}{a}} - 2 \cdot C_1 \cdot z \cdot e^{\frac{x}{a}}$, а, отже, $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{2} \cdot e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2 \cdot C_1} \cdot e^{-\frac{x}{a}}$. Загальний розв’язок цього рівняння запишеться як $y = \frac{a \cdot C_1}{2} \cdot e^{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2 \cdot C_1} \cdot e^{-\frac{x}{a}} + C_2$.

Для визначення сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови: $x_0 = 0$, $y_0 = a$ (розміщуємо вісь Ox так, щоб $OC = a$), $y_0' = 0$. Підставляючи ці значення замість x, y', y в останні дві рівності, одержимо, що $C_1 = 1$ (другий корінь (від’ємний) не підходить), $C_2 = 0$. Отже, шуканий частинний розв’язок

$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ або $y=a\cdot ch\frac{x}{a}$ — ланцюгова лінія.



Другий спосіб. З умови рівноваги випливає, що горизонтальна складова $\overline{H}$ натягу ланцюга має бути сталою. Позначивши кут нахилу дотичної через θ, одержимо для вертикальної складової натягу ланцюга значення $H\cdot tg\theta$. Позначивши вагу одиниці довжини ланцюга через ω, вагу елемента dS, горизонтальна проекція якого складає dx, знайдемо як $\frac{\omega dx}{\cos\theta}$.

На ділянці від x до $x+dx$ різниця вертикальних компонент натягу ланцюга дорівнює вазі цієї частини ланцюга, значить, $H\cdot\frac{d}{dx}(tg\theta)=\frac{\omega}{\cos\theta}$ або $\frac{d\theta}{dx}=\frac{\omega}{H}\cos\theta$. Відокремлюючи змінні, одержимо $\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{\omega}{H}dx$ або $\int\limits_0^\theta\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{\omega}{H}\int\limits_0^x dx$ (тут ми вважаємо, що при $x=0$ $\theta=0$, тобто, що $x=0$ відповідає найнижчій точці ланцюгової лінії).

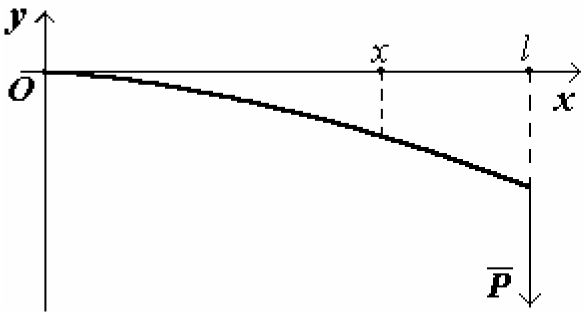
Виконуючи інтегрування, одержимо: $\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\omega}{H}x$ або $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=e^{\frac{\omega x}{H}}$. Беручи до уваги, що $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)-ctg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=2\cdot tg\theta$, запишемо, що $tg\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{\omega x}{H}}-e^{-\frac{\omega x}{H}}\right)$.

Нехай тепер $y=y(x)$ — шукане рівняння ланцюгової лінії. Диференціюючи, одержимо завдяки останньому результату, що $\frac{dy}{dx}=tg\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{\omega x}{H}}-e^{-\frac{\omega x}{H}}\right)$, звідки $y=\frac{H}{2\cdot\omega}\cdot\left(e^{\frac{\omega x}{H}}+e^{-\frac{\omega x}{H}}\right)+C$.

Сталу C підбираємо так, щоб крива проходила через довільну задану точку, тобто $C=-\frac{H}{\omega}$.▲

Приклад 18. Однорідна горизонтальна балка довжиною l з однаковим поперечним перерізом закріплена в лівому кінці і знаходиться під дією вертикальної сили P, яка прикладається до правого кінця балки і направлена вниз. Знайти рівняння зігнутої осі балки і обчислити прогин балки в її правому кінці.

▼Виберемо декартову прямокутну систему координат, направивши вісь Ox по горизонтальній осі балки, а вісь Oy — вертикально вгору через лівий кінець балки. При невеликому прогині балки лінія зігнутої осі балки виражається диференціальним рівнянням $EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=M_x$, де E — модуль Юнга речовини балки, I — момент інерції площі поперечного перерізу балки відносно її осі, M_x — прогинаючий момент у перерізі з абсцисою x, який дорівнює сумі моментів відносно точки x усіх сил, розміщених справа від перерізу.



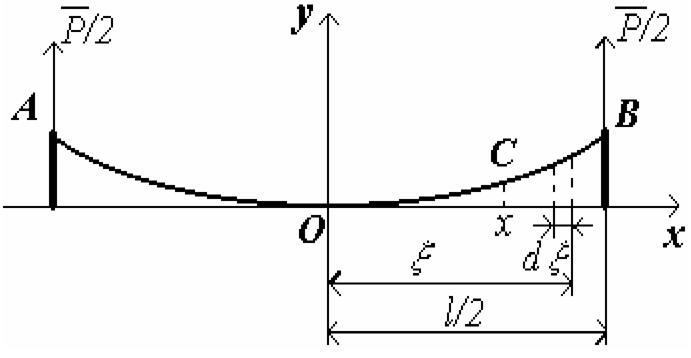
При даних умовах E і I — сталі і відомі для розглядуваної балки, а прогинаючий момент у перерізі з абсцисою x дорівнює $M_x=-P(l-x)$ (знак мінус пояснюється тим, що сила $\overline{P}$ направлена вниз). Отже, інтегруючи безпосередньо рівняння $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{P}{EI}(l-x)$, знаходимо $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P}{EI}\cdot\dfrac{(l-x)^2}{2}+C_1$, $y=-\dfrac{P}{EI}\cdot\dfrac{(l-x)^3}{6}+C_1x+C_2$.

Оскільки лівий кінець балки закріплений, то $y(0)=0$. Крім того, вісь Ox — горизонтальне положення осі балки є дотичною до зігнутої осі балки в лівому кінці, тому $y'(0)=0$. Таким чином, для визначення сталих C_1 і C_2 маємо такі початкові умови: $y(0)=y'(0)=0$. Використовуючи першу з них, знаходимо $C_2=\dfrac{Pl^3}{6EI}$. Друга умова дає $C_1=-\dfrac{Pl^2}{2EI}$. Значить, при даних умовах вісь балки розміщується по лінії $y=-\dfrac{P}{EI}\cdot\left(\dfrac{(l-x)^3}{6}+\dfrac{l^2x}{2}-\dfrac{l^3}{6}\right)$.

Величина прогину балки дорівнює $|y(l)|=\dfrac{Pl^3}{3EI}$.▲

Приклад 19. Однорідна балка довжиною l на двох опорах прогинається під дією рівномірно розподіленого навантаження величиною P. Визначити рівняння пружної лінії і величину найбільшого прогину балки.

▼Реакції опор дорівнюють $P/2$. На одиницю довжини припадає навантаження P/l. Розглянемо переріз C балки на відстані x від початку координат. Справа від перерізу сила $P/2$ дає момент $\left(\dfrac{l}{2}-x\right)\cdot\dfrac{P}{2}$. Момент відносно перерізу, що створюється неперерервно розподіленим навантаженням, обчислюється так. Навантаження на елемент довжини



балки $d\xi$ з абсцисою ξ має величину $\frac{P}{l}\cdot d\xi$, а його момент відносно перерізу C буде $(\xi - x)\cdot\frac{P}{l}\cdot d\xi$. Повний момент усього навантаження частини балки CB дорівнює $-\int\limits_x^{l/2}(\xi - x)\cdot\frac{P}{l}\cdot d\xi$. Отже, сумарний момент M_x дорівнює $M_x = -\int\limits_x^{l/2}(\xi - x)\cdot\frac{P}{l}\cdot d\xi + \left(\frac{l}{2} - x\right)\cdot\frac{P}{2} = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right)$.

Як відомо, диференціальне рівняння зігнутої осі балки має вигляд $y'' = \frac{M_x}{EI}$, де E — модуль Юнга, I — момент інерції. Підставляючи в нього вираз для M_x, матимемо рівняння $y'' = \frac{P}{2EI}\cdot\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right)$, початкові умови для якого такі: $y(0) = y'(0) = 0$. Розв'язуючи це рівняння при даних початкових умовах, одержуємо $y' = \frac{P}{2EI}\cdot\int\limits_0^x\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right)dx = \frac{P}{2EI}\cdot\left(\frac{lx}{4} - \frac{x^3}{3l}\right)$, $y = \frac{P}{2EI}\cdot\left(\frac{lx^2}{8} - \frac{x^4}{12l}\right) = \frac{P}{48EI}\cdot\left(3lx^2 - \frac{2x^4}{l}\right)$.

Стріла прогину в середині прольоту ($x = 0$) дорівнює: $h\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{48EI}\cdot\left(3l\cdot\frac{l^2}{4} - \frac{2l^4}{16l}\right) = \frac{5}{8}\cdot\frac{Pl^3}{48EI}$.▲

Задачі

17. Балка довжиною $2l$ лежить кінцями на підставках, а в її середині підвішено вантаж вагою W. Знайти найбільший прогин балки, нехтуючи її вагою.
Вказівка. Приймаючи за початок координат середину балки, диференціальне рівняння задачі запишеться як $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}W(l - x)$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\cdot\frac{Wl^3}{EI}$.

18. Знайти прогин горизонтальної, закріпленої одним кінцем балки, на вільному кінці якої прикріплено тягар вагою W. Довжина балки l. Вагою балки можна знехтувати.
Вказівка. Приймаючи за початок координат точку кріплення балки, матимемо: $M_x = -W(l - x)$.

Відповідь: $\frac{1}{3}\cdot\frac{Wl^3}{EI}$.

19. Балку довжиною l закріплено так, як говориться в умові попередньої задачі, але навантаження її рівномірне і складає W Н на одиницю довжини. Знайти прогин балки.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{W}{2}(l-x)^2$.

Відповідь: $\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{Wl^3}{EI}$.

20. Знайти прогин балки, яка серединою і кінцями лежить на опорах, при рівномірному навантаженні W Н на одиницю довжини.

Вказівка. Приймаючи за початок координат середину балки, досліджуємо прогин її правої половини. Початкові умови: 1) $y(0) = y'(0) = 0$; 2) $y(l) = 0$ (якщо початкову довжину балки вважати рівною $2l$). Позначивши через klW невідому реакцію правої опори, одержуємо $M_x = klW(l-x) - \dfrac{W}{2}\cdot(l-x)^2$.

21. Знайти прогин балки, один кінець якої закріплено горизонтально, а інший лежить на опорі, при рівномірному навантаженні W Н на одиницю довжини.

Вказівка. Позначивши через l довжину балки і прийнявши за початок координат точку її кріплення, робимо висновок про те, що діючі сили і початкові умови такі ж, як і у попередній задачі.

22. Знайти прогин балки, обидва кінці якої закріплено горизонтально, при рівномірному навантаженні W Н на одиницю довжини.

Вказівка. Приймаємо за початок координат середину балки і позначаємо її довжину через $2l$. Укріплений кінець балки одержує реакцію, яка зводиться до сили lW, що напрвлена вгору, і до пари сил, яка невідома, але момент якої μ відносно точки з абсцисою x є сталою величиною. Отже, $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{W}{2}\cdot(l-x)^2 + Wl(l-x) + \mu$ — диференціальне рівняння задачі. Початкові умови: 1) $y(0) = y'(0) = 0$; 2) $y'(l) = 0$.

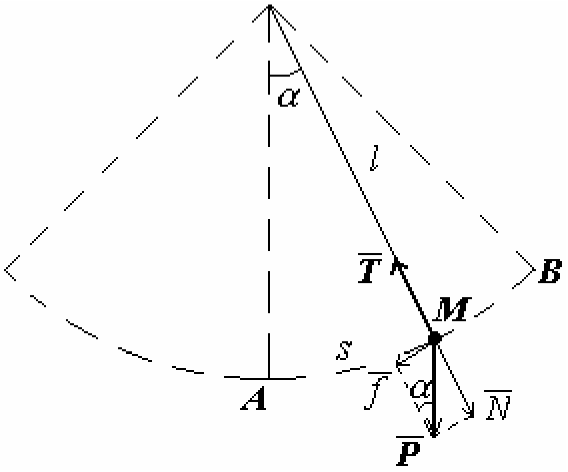
23. Вертикальна колона довжиною l, нижній кінець якої укріплено нерухомо, підтримує своїм верхнім кінцем вантаж вагою P. Під дією цього вантажу верхній кінець колони відхиляється на відстань a від свого положення по вертикалі. Знайти згинаючий момент і форму зігнутої колони, а також величину найбільшого вантажу, який втримає колона.

Вказівка. Приймаючи за початок координат нижній кінець колони і за вісь Ox — вертикальну пряму, покладаючи $p = \dfrac{dy}{dx}$, одержимо $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = EIp\dfrac{dp}{dy} = P(a-y)$ при початкових умовах $y(0) = y'(0) = 0$. Умова витримування вантажу: $x = l$ при $y = a$.

Відповідь: $y = a\left(1 - \cos\left(\sqrt{\dfrac{P}{EI}}\cdot x\right)\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2l}\right)^2 EI$.

Задачі на коливання

Приклад 20. Знайти закон руху і визначити період T коливань математичного маятника довжиною l при малих відхиленнях.

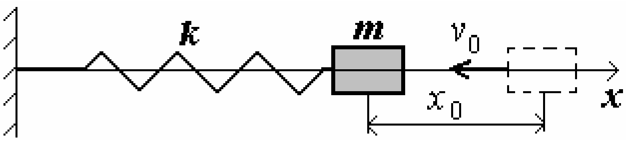


▼Вага кульки M дорівнює P. Розкладаємо її на дві складові: $\overline{N}$ — по напрямку нитки, $\overline{f}$ — по дотичній до траєкторії. Сила $\overline{N}$ зрівноважується силою натягу $\overline{T}$ нитки, і, таким чином, вся система сил еквівалентна силі $\overline{f}$: $\left|\overline{f}\right| = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$, де m — маса кульки, g — прискорення земного тяжіння.

Оскільки для додатних кутів α додатна складова f направлена у "від'ємний" бік, то $f = -mg\sin\alpha \approx mg\alpha$, бо при малих відхиленнях нитки від вертикалі $\sin\alpha \sim \alpha$. Але $\alpha = \frac{s}{l}$, і тому $f = -\frac{mg}{l}\cdot s$, де s — довжина пройденого кулькою криволінійного шляху. На основі другого закону динаміки одержимо диференціальне рівняння руху $m\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{mg}{l}\cdot s$ або $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}\cdot s = 0$.

Інтегруючи це лінійне рівняння другого порядку, одержимо загальний розв'язок $s = C_1\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$ (дійсно, корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$ уявні: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot i$). Використовуючи початкові умови ($s(0) = a,\ s'(0) = 0$), знаходимо C_1 і C_2: $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = a. \end{cases}$ Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, одержуємо $s = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$, де a — амплітуда коливань.

Таким чином, рух математичного маятника являє собою гармонічне коливання з періодом $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$.▲



Приклад 21. Дано систему, зображену на малюнку. Маса тіла m, жорсткість пружини k. Тіло змістили із положення рівноваги вправо на величину x_0 і штовхнули вліво, надавши йому швидкості υ_0. Знайдіть

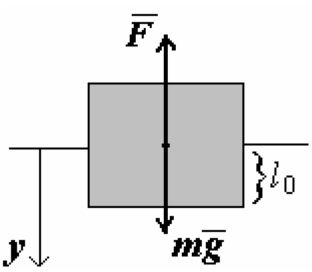
частоту, амплітуду і початкову фазу коливань. Тертя немає.

▼Якщо відхилення тіла від положення рівноваги в довільний момент часу *t* дорівнює *x*, то за законом Гука $F_{пр} = -kx$, і рівняння руху запишеться у вигляді $mx'' + kx = 0$ або $x'' + \frac{k}{m} \cdot x = 0$. По аналогії з попереднім прикладом загальний розв'язок цього лінійного диференціального рівняння такий: $x = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$ або, якщо скористатися формулою допоміжного аргумента, — $x = x_m \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_0\right)$, де x_m — амплітуда, $\sqrt{\frac{k}{m}}$ — циклічна частота, φ_0 — початкова фаза коливань. Зауважимо, що одержаний результат є частинним випадком загального правила: якщо рівняння коливань побудовано, то квадрат частоти (циклічної частоти) коливань дорівнює відношенню коефіцієнта при невідомій функції до коефіцієнта при другій похідній цієї функції по часу.

Для визначення амплітуди x_m і початкової фази φ_0 (сталих інтегрування) повернемося до початкових умов: при $t = 0$ $x = x_0$ і $\upsilon = x' = -\upsilon_0$, попередньо знайшовши із залежності зміщення від часу $x = x_m \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_0\right)$ швидкість: $\upsilon = x' = x_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi_0\right)$. Покладемо в цих виразах $t = 0$: $x_0 = x_m \sin\varphi_0$, $-\frac{\upsilon_0}{\sqrt{k/m}} = x_m \cos\varphi_0$. Поділивши одне рівняння на інше, одержимо $tg\varphi_0 = -\frac{x_0\sqrt{k/m}}{\upsilon_0}$ або $\varphi_0 = arctg\left(-\frac{x_0}{\upsilon_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$; піднісши обидва рівняння до квадрату і додавши, знайдемо $x_m^2 = x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k/m}$ або $x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{m\upsilon_0^2}{k}}$.▲

Приклад 22. На поверхні води плаває прямокутний брусок масою *m* і площею поперечного перерізу *S*. Йому поштовхом надали швидкості υ_0, направленої вниз. Знайдіть частоту, початкову фазу і амплітуду коливань.

▼В положенні рівноваги глибина занурення тіла у воду l_0 визначається рівністю сили тяжіння mg і виштовхуючої сили $F = \rho_в S l_0 g$ (тут $\rho_в$ — густина води): $mg = \rho_в S l_0 g$. При коливаннях, наприклад в момент, коли глибина занурення дорівнює $l_0 + y$, другий закон Ньютона записується у вигляді $mg - \rho_в S(l_0 + y)g = ma$, де $a = y''$. Віднімаючи від другого рівняння перше, одержуємо $-\rho_в Sgy = my''$ або



$$y'' + \frac{\rho_в Sg}{m} y = 0.$$

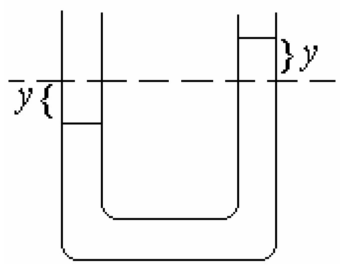
Це — уже знайоме нам рівняння коливань. Його розв'язок має вигляд $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, де $\omega = \sqrt{\dfrac{\rho_в Sg}{m}}$ — частота коливань бруска. За допомогою початкових умов ($y(0) = 0$, $y'(0) = \upsilon_0$) визначаємо амплітуду і початкову фазу: $y_m = \dfrac{\upsilon_0}{\omega} = \upsilon_0 \sqrt{\dfrac{m}{\rho_в Sg}}$ і $\varphi_0 = 0$.▲

Приклад 23. Знайти частоту коливань рідини, налитої в *U*-подібну трубку. Маса рідини *m*, густина ρ, площа перерізу трубки S.

▼Вважаючи відомим спосіб знаходження частоти коливань через відношення коефіцієнтів диференціального рівняння руху (див. пр. 21, 22), скористаємось ще й енергетичними міркуваннями — частоту коливань будемо шукати не з рівняння коливань, а із виразу для повної енергії системи. Пояснимо це на прикладі пружинного маятника.

При коливаннях тіла на пружині (див. пр. 21) повна енергія системи складається з потенціальної енергії пружини і кінетичної енергії тіла: $W = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{m(x')^2}{2}$. Частота коливань такого маятника, як вже відомо, дорівнює $\omega = \sqrt{k/m}$, тобто визначається відношенням постійних коефіцієнтів у виразах для потенціальної і кінетичної енергій. Так буде для будь-якої коливної системи: якщо повну енергію системи записано у вигляді двох доданків, один з яких пропорційний квадрату величини, яка характеризує відхилення системи від положення рівноваги (*k*), а другий — квадрату похідної цієї величини по часу (*m*), то частота коливань системи $\omega = \sqrt{k/m}$.

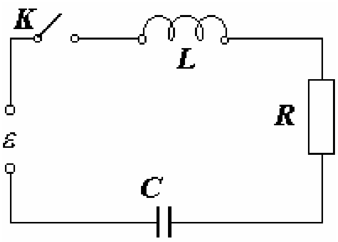
Повертаючись до нашої задачі, вважатимемо, що в деякий момент рідина відхилилася від положення рівноваги на величину *y*, і її швидкість дорівнює υ. Знайдемо повну енергію системи в цей момент.



Зауважимо, що зображену на малюнку конфігурацію можна отримати, перенісши стовпчик рідини висотою *y* і масою $\Delta m = \rho S y$ із лівого коліна трубки в праве. При цьому стовпчик рідини набуває потенціальної енергії $W_p = \Delta m g y = \rho S g y^2$. Кінетична енергія всієї маси рідини дорівнює $W_k = m\upsilon^2/2 = m(y')^2/2$. Таким чином, повна енергія системи дорівнює $W = \rho S g y^2 + \dfrac{m(y')^2}{2}$, звідки одержуємо, що частота коливань $\omega = \sqrt{\dfrac{2\rho S g}{m}}$.▲

Приклад 24. До джерела струму з ЕРС, що дорівнює ε, підключено контур, який складається із послідовно з'єднаних котушки індуктивності L, активного опору R і ємності C. Знайти струм i в колі як функцію часу t, якщо в початковий момент струм в контурі і заряд конденсатора дорівнюють нулю. Розглянути випадок, коли $\varepsilon = E = const$.

►За законом Кірхгофа електрорушійна сила в колі дорівнює сумі спадів напруг на індуктивності, опорі і ємності, $\varepsilon = u_L + u_R + u_C$, пов'язаних з струмом i співвідношеннями $u_L = L\frac{di}{dt}$, $u_R = Ri$, $u_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)d\tau$. Таким чином, маємо рівняння $\varepsilon = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)d\tau$, після диференціювання якого по t одержуємо вже лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{CL} i = 0$.



Характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}}$. Якщо $R^2 C - 4L < 0$, то загальний розв'язок $i = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)$, де $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_1^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, визначає електричні коливання.

Оскільки $L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = E$, то $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{E}{L}$, і початкові умови, таким чином, запишуться у вигляді $i\big|_{t=0} = 0$, $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{E}{L}$. Звідси матимемо розв'язок $i = \frac{E}{L\omega_1} e^{-\alpha t} \sin\omega_1 t$.◄

Задачі

24. Запишіть рівняння руху і вираз для повної енергії математичного маятника та знайдіть частоту його коливань.

Відповідь: $x'' + \frac{g}{l} \cdot x = 0$, $W = \frac{mg}{2l} x^2 + \frac{m}{2}(x')^2$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

25. Матеріальна точка рухається по прямій під дією центральної сили, пропорційної відстані точки до центра. Знайти закон руху точки.

Відповідь: $s = A\sin\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t + \varphi\right)$, де m — маса матеріальної точки, a — коефіцієнт пропорційності, A і φ — довільні сталі.

26. Матеріальна точка рухається по прямій під дією центральної сили, пропорційної відстані точки до центра, при наявності опору середовища, пропорційного швидкості руху. Знайти закон руху точки, якщо опір малий в порівняння з притягуванням.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $ms'' = -as - bs'$. Позначивши $\frac{a}{m} = \alpha^2$ і $\frac{b}{2m} = \beta$, матимемо $s'' + 2\beta s' + \alpha^2 s = 0$. Оскільки $\beta^2 < \alpha^2$, то корені характеристичного рівняння комплексні.
Відповідь: $s = Ae^{-\beta t}\sin(\gamma t + \varphi)$, де $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, A і φ — довільні сталі.

27. Матеріальна точка масою m притягується кожним із двох центрів з силою, пропорційною відстані x. Коефіцієнт пропорційності k, відстань між центрами $2b$. В початковий момент точка знаходиться в стані спокою на відстані $x = C$ від середини відрізка з кінцями в центрах притягання на лінії, що з'єднує ці центри. Знайти закон руху точки.
Вказівка. Диференціальне рівняння руху (початок координат посередині відстані між центрами) $mx'' = k(b - x) - k(b + x) = -2kx$.
Відповідь: $x = C\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot t\right)$.

28. Сила, що розтягує пружину, пропорційна збільшенню її довжини і дорівнює 1 кГ при видовженні 1 см. До пружини підвішено вантаж вагою 2 кГ. Знайти період коливань, які здійснює цей вантаж, якщо його злегка відтягнути вниз і потім відпустити.
Вказівка. Диференціальне рівняння задачі (початок координат в точці, де вантаж знаходиться у стані спокою) $\frac{2}{g} \cdot x'' = 2 - k(x + 0{,}02)$.
Відповідь: $T = \frac{\pi}{5}\sqrt{\frac{2}{g}}$ с.

29. Знайти закон руху тіла вагою 1,96 кГ, підвішеного на пружині, яка силою 1 кГ розтягується на 20 см. В початковий момент пружину розтягнуто з положення рівноваги на 5 см, тіло знаходиться в стані спокою. Опір середовища пропорційний швидкості і при швидкості 1 см/с дорівнює 0,02 кГ.
Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $x'' + kx' + cx = 0$.

30. Циліндричний поплавець радіусом 3 м і вагою 81 кГ стоїть вертикально у воді ($\rho = 1000$ кг/м^3). Поплавець трохи підняли, а потім відпустили. Яким буде період його коливань?
Вказівка. Позначивши через x вертикальну координату центра ваги поплавця, що відраховуєься від положення рівноваги, матимемо диференціальне рівняння задачі $\frac{81}{g} \cdot x'' + 9000\pi x = 0$.
Відповідь: $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{\pi}{10g}}$ с.

31. Горизонтальний диск радіусом a і масою M висить на дротині, яка прикріплена в його центрі. Якщо провернути диск навколо вертикальної осі, що проходить через його центр, на кут θ, то момент кручення дротини дорівнюватиме $T = k\theta$. Помічено, що диск, коли його повернути на малий кут θ, а тоді відпустити, здійснює *n* коливань за 1 с. Знайти *k*.

Вказівка. Оскільки момент інерції диска відносно осі обертання дорівнює $I = \frac{Ma^2}{2}$, то диференціальне рівняння моментів дає $\frac{Ma^2}{2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$.

Відповідь: $k = 2\pi^2 a^2 n^2 M$.

32. Санки масою m і довжиною l ковзають зі швидкістю υ_0 по гладенькому льоду. Раптом лід закінчується, і санки заїздять на асфальт, де коефіцієнт тертя дорівнює μ. Відомо, що санки заїхали на асфальт тільки частково. Знайдіть час до повної зупинки санок.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $mx'' + \mu \frac{m}{l} gx = 0$.

Відповідь: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

33. Припустимо, що через Землю зроблено тунель, який проходить через її центр. Камінь, що впав у тунель, притягується центром із силою, пропорційною відстані до центра. За який час камінь пролетить увесь тунель?

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $r'' = -kr$.

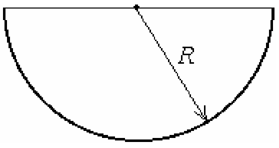
Відповідь: $t \approx 42{,}3$ хв.

34. Циліндричну посудину з газом закрито поршнем масою m і площею поперечного перерізу *S*. У рівновазі поршень знаходиться на висоті l від дна посудини. В якийсь момент поршень зміщують із положення рівноваги вниз на величину h_0 і відпускають. Визначити частоту, початкову фазу і амплітуду коливань. Атмосферний тиск p_a відомий. Вважати, що в процесі коливань температура газу залишається постійною.

Вказівка. Рівновага поршня описується рівнянням $mg + p_a S - pS = 0$, де p — тиск газу. Згідно закону Бойля-Маріотта $pSl = (p + \Delta p)(l - y)S$. Диференціальне рівняння задачі $my'' + \frac{mg + p_a S}{l} y = 0$.

Відповідь: $\omega = \sqrt{\frac{mg + p_a S}{ml}}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_m = h_0$.

35. Дротину у вигляді півкільця радіусом *R* підвішено так, як показано на малюнку. Знайдіть частоту коливань цієї системи.



Вказівка. Повна енергія системи дорівнює $W = \frac{mgR}{\pi}\varphi^2 + \frac{mR^2}{2}(\varphi')^2$, де m — маса півкільця, φ — кут його повороту від положення рівноваги в довільний момент часу, $\varphi' = \omega$ — кутова швидкість руху півкільця в цей момент. Враховано, що центр мас однорідного півкільця радіусом *R* знаходиться на відстані $\frac{2}{\pi}R$ від центра півкільця, момент інерції відносно осі обертання $I = mR^2$, а кінетична енергія обертального руху $W_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

Відповідь: $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\pi R}}$.

36. Тіло здійснює 90 коливань за хвилину. Амплітуда коливань зменшується вдвічі за 15 с. Знайти диференціальне рівняння руху.

Вказівка. Продиференціювати двічі вираз закону затухаючих коливань $x = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$, врахувавши, що $T = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{2}{3}$ і $e^{-15\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $x'' + 0{,}092x' + 88{,}8x = 0$.

37. На тіло вагою 10 кГ діє пружна сила, яка намагається повернути його в стан стійкої рівноваги. Сила пропорційна зміщенню і дорівнює 2 кГ при зміщенні 1 м. Опір середовища пропорційний швидкості. Амплітуда після трьох коливань зменшується в 10 разів. Знайти період коливань.

Вказівка. Див. вказівку до попередньої задачі.

38. Вантаж вагою P підвішено на вертикальній пружині, довжина якої в недеформованому стані дорівнює l. На вантаж діє періодична вимушуюча сила $Q\sin pt$, де Q і p — постійні. Знайти закон руху вантажа, нехтуючи масою пружини і опором середовища.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q\sin pt$.

Відповідь: $x = A\sin(kt + \alpha) + \dfrac{q}{k^2 - p^2}\sin pt$, якщо $p \neq k$; $x = A\sin(kt + \alpha) - \dfrac{q}{2k}t\cos kt$, якщо $p = k$.

39. Розв’язати попередню задачу з урахуванням опору середовища, пропорційного швидкості руху.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\dfrac{dx}{dt} + Q\sin pt$ або $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} + k^2x = q\sin pt$.

Відповідь: $x = Ae^{-kt}\sin(k_1t + \alpha) + B\sin(pt - \delta)$.

40. Розв’язати задачу прикладу 24, якщо $\varepsilon = E\sin\omega t$.

Вказівка. Диференціальне рівняння задачі $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}i = E\omega\cos\omega t$.

Література

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Х.: ГНТИ, 1939.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1971.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИИЛ, 1954.
4. Бибиков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
7. Гудименко Ф. С. Диференціальні рівняння.–К.: Вид-во КДУ, 1958.
8. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1956.
9. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
10. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972.
11. Еругин Н. П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1974.
12. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
14. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИИЛ, 1958.
15. Латишева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – К.: Вища школа, 1974.
16. Лопатинский Я. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.: Вища школа, 1974.
17. Ляшко И. И. и др. Дифференциальные уравнения. – К.: Вища школа, 1981.
18. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. – К.: Вид-во КДУ, 1968.
19. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышейш. шк., 1974.
20. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976.
21. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
22. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.
23. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
24. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II, т. III ч. 2. – М.: Наука, 1974.
25. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.

26. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИИЛ, 1962.
27. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
28. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983.
29. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, т. II. – М.: Наука, 1966.
30. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970.
31. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища школа, 1971.
32. Шкіль М. І., Сотниченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння. − К.: Вища школа, 1992.
33. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. – К.: Изд-во АН УССР, 1960.
34. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

Навчально-методичні посібники та збірники задач, використані при розробці даного посібника

35. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987.
36. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. − М.: Наука, 1972.
37. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь.− К.: Вища школа, 1972.
38. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.
39. Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. − М.: Высшая школа, 1978.
40. Креер Л. И. Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. — М., 1940.
41. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. − Минск: Вышэйш. шк., 1987.
42. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. − К.: Вища школа, 1994.
43. Стрижак Т. Г., Коновалова Н. Р. Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 1994.
44. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. − М.: Наука, 1992.

Навчальне видання

ГРИГОРЕНКО Василь Костянтинович –
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу ЧНУ ім. Б. Хмельницького

ЛИЛА Дмитро Макарович −
кандидат фізико-математичних наук, в.о. доцента кафедри математики та методики навчання математики ЧНУ ім. Б. Хмельницького

Диференціальні рівняння: *Посібник*

Комп'ютерний набір та верстка Д. М. Лили

Свідоцтво ДК №294. Підписано до друку ....

Формат 60×84/16. Гарнітура Таймс.

Папір офсет. Ум. друк. арк. 14,5. Обл. друк. арк. 14,5.

Тираж 50 прим. Зам. № ...

Віддруковано з оригінал-макету у видавничому відділі
Черкаського національного університету
імені Богдана Хмельницького

Адреса: 18000, м. Черкаси, бул. Шевченка, 81, кімн. 117,
тел. (0472) 31-13-16, факс (0472) 37-22-33,
e-mail: cic@cdu.edu.ua, http://www.cdu.edu.ua