**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО**

**Факультет обчислювальної техніки,
інтелектуальних та управляючих систем**

**Кафедра програмного забезпечення
автоматизованих систем**

Супруненко О.О., Гребенович Ю.Є.

Розв'язання задач з дисципліни "Чисельні методи в інформатиці"

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів напрямів підготовки

***050103 – Програмна інженерія,
050101 – Комп'ютерні науки,
040303 – Системний аналіз***

усіх форм навчання

Частина 1

Черкаси 2011

УДК 519.6, 004.423
ББК 22.19
С 89

Рецензенти:

Кузьмук В. В., доктор технічних наук, професор, заступник керівника Відділення гібридних моделюючих і управляючих систем в енергетиці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України;

Онищенко Б. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького.

Супруненко О.О., Гребенович Ю.Є.

С 89 Розв’язання задач з дисципліни „Чисельні методи в інформатиці”: Навчально-методичний посібник для студентів напрямів підготовки 050103 – Програмна інженерія, 050101 – Комп’ютерні науки, 040303 – Системний аналіз, усіх форм навчання. Частина 1. – Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2011. – 80 с.

ISBN 978-966-353-242-4

Навчально-методичний посібник розроблений на допомогу студентам при організації самостійної роботи з дисципліни «Чисельні методи в інформатиці». Перша частина видання містить чисельні методи розв’язання функціональних рівнянь та їх систем, а також методи апроксимації функцій поліномами і сплайнами. У першій частині посібника також розміщені методичні вказівки до виконання та оформлення розрахунково-графічної роботи (РГР), завдання, приклади розв‘язання завдань, перевірка достовірності й точності отриманих розв‘язків, зразки оформлення готових завдань. Наведені методичні вказівки щодо роботи з літературою та оформлення літературних посилань.

УДК 519.6, 004.423
ББК 22.19

Рекомендовано до друку Вченою радою
Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького
(протокол № 2 від 15 листопада 2011 р.)

ISBN 978-966-353-242-4

Зміст

ВСТУП

У навчально-методичному посібнику з «Чисельних методів в інформатиці» зібрані необхідні матеріали для самостійного вивчення і практичного опрацювання застосувань чисельних методів при розв‘язанні задач, які пов‘язані з математичним моделюванням фізичних об‘єктів та систем, з написанням програмних продуктів, що застосовуються у різноманітних сферах людської діяльності.

Перший та другий розділи першої частини навчально-методичного посібника містять теоретичні матеріали й приклади розв‘язання функціональних рівнянь та їх систем чисельними методами з використанням системи автоматизації математичних та науково-технічних розрахунків Matlab. В посібнику також розглянуті задачі апроксимації функцій поліномами і сплайнами, методи наближення функцій.

У третьому розділі розміщені методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з тем першої частини дисципліни «Чисельних методів в інформатиці». В них викладена послідовність виконання та оформлення задач, наведені правила оформлення посилань на літературні та електронні джерела інформації.

Четвертий розділ посібника містить варіанти завдань та задачі до розрахунково-графічної роботи, п‘ятій розділ – приклади виконання та оформлення завдань, а також типові запитання, що виникають при виконанні подібних видів самостійних робіт.

Посібник буде в нагоді тим студентам, які по тим чи іншим причинам вивчають дисципліну «Чисельні методи в інформатиці» самостійно, а також студентам, які в рамках самостійної роботи виконують розрахунково-графічну роботу із зазначених розділів дисципліни «Чисельні методи в інформатиці».

1. Чисельні методи розв‘язання функціональних рівнянь та їх систем

1.1. Похибка чисельного розв‘язку. Стійкість та коректність постановки задачі

В більшості галузей сучасної науки і техніки часто зустрічаються математичні задачі, які не можливо точно розв‘язати класичними методами або такий розв‘язок отримується у складному вигляді, абсолютно не прийнятному для практичного використання. Наприклад, досить часто необхідно розв‘язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з десятками і сотнями невідомих. Розповсюдженим є і знаходження коренів алгебраїчних рівнянь високого порядку та коренів трансцендентних рівнянь. Нерідко приходиться мати справу з розв‘язанням систем диференційних рівнянь, які не інтегруються в елементарних функціях.

Кількість таких задач значно зросла у зв‘язку з бурхливим розвитком науки і техніки з одного боку, і можливістю застосуванням розроблених теорій в машинних моделях, які формуються та функціонують у комп‘ютерному варіанті.

Комп‘ютерну техніку використовують не тільки для побудови математичних моделей, а і для ефективного розв‘язання задач, що пов‘язанні з функціонуванням даних моделей. У зв‘язку з цими потребами виділилась область математики, яка покликана розробляти методи отримання числових результатів основних задач математикного аналізу, алгебри та геометрії, а також шляхи використання з цією метою сучасних комп‘ютерних засобів. Ця область математики отримала назву ***чисельні методи***.

Застосування комп‘ютерної техніки та розширення технічної і математичної освіти різко збільшило можливості побудови й дослідження математичних моделей. Все частіше результати розрахунків дозволяють виявити і передбачити явища, що раніше не спостерігалися, що можливо завдяки виникненню і розвитку машинного (комп‘ютерного) експерименту.

Вимоги до чисельних розв‘язків нових задач привели до появи великої кількості нових чисельних методів, систематизації та переосмислення давніх методів. Ефект, що досягається вдосконаленням чисельних методів, за порядком дорівнює ефекту, що досягається за рахунок ефективності комп‘ютерної техніки. В наш час стрімко розвиваються багатопроцесорні та багатомашинні обчислювальні системи, що обумовлює необхідність розпаралелювання задач, в тому числі й задач, що реалізують чисельні методи. Тому перспективними є дослідження в області чисельних методів, що дозволять проводити ефективне розбиття задачі на підзадачі та будувати оцінки їх ефективності по часу та іншим критеріям.

Розв'язати задачу в *класичній математиці* означає довести існування розв'язку і знайти його точне значення.

При ***чисельному розв'язку задачі*** потрібно також довести *існування розв'язку* і запропонувати *ітераційний процес*, який *збігається до розв'язку* зі заданою *точністю*.

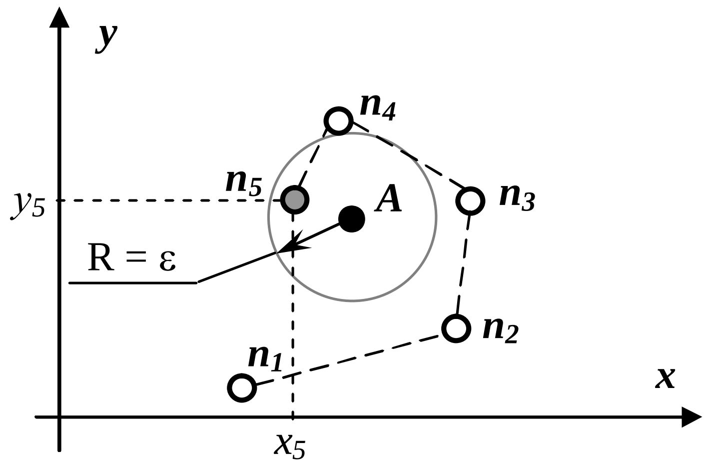


Рис. 1.1. Точність розв'язання задачі чисельними методами визначається ε-околом.

Точність чисельного розв'язку. Поняття заданої точності в чисельних методах продемонструємо графічно. Навколо точки *A*, що відображає точний розв'язок задачі, окреслимо коло радіусом ε, тобто ε-окіл. При обчисленні чергового значення змінних x_5 та y_5 , що визначають положення точки розв'язку n_5, яка першою з проміжних результатів обчислень n_i входить в ε-окіл, отримуємо результат чисельного розрахунку задачі з точністю ε.

Для прикладного математика і програміста, що працює у певній галузі науки чи техніки, важливо, щоб процес розв'язку не потребував великих витрат часу і комп'ютерної пам'яті. Для нього важливі також питання, пов'язані зі стійкістю результатів відносно збурень початкових даних і округленнями при обчисленнях.

Стійкість задачі. Похибки у вхідних даних задачі є неусувними. Причому в одних випадках похибки вхідних даних і результатів задачі мають однаковий порядок, а в інших вони можуть відрізнятися на кілька порядків. Чутливість задачі до неточностей у вхідних даних характеризується *стійкістю*.

Задача називається ***стійкою за вхідними даними***, якщо її розв‘язок неперервно залежить від вхідних даних, тобто малому приросту вхідної величини Δx відповідає малий приріст розв‘язку Δy .

При невиконання даної умови задача вважається не стійкою, що означає – зміни, навіть незначні, у вхідних даних можуть привести до як завгодно великих похибок розв‘язку. Застосування до розв‘язання таких задач чисельних методів є недоцільним, оскільки поточні похибки будуть накопичуватися при виконанні ітерацій і не дозволять отримати розв‘язок із заданою (чи обмеженою) точністю.

Нестійким також може бути чисельний метод розв‘язання задачі. Для усунення такої нестійкості вносять зміни до алгоритму методу, чи пред‘являють жорсткі вимоги до обчислювальної похибки (похибки округлення). Наприклад, обчислимо інтеграл:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx; \qquad n = 1,2...9.$$

При інтегруванні за частинами отримаємо:

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 n\, x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad I_1 = \frac{1}{e}; \quad I_2 = 1 - 2 \cdot I_1; \quad ... \quad ; \quad I_n = 1 - n \cdot I_{n-1}$$

Обчислимо значення інтегралу для $n = 1,2,...,9$:

$I_1 = 0{,}367879$;	$I_4 = 0{,}170904$;	$I_7 = 0{,}110160$;
$I_2 = 0{,}264242$;	$I_5 = 0{,}145480$;	$I_8 = 0{,}108720$;
$I_3 = 0{,}207274$;	$I_4 = 0{,}127120$;	$I_9 = -0{,}068480$.

Значення I_9 є помилковим, оскільки підінтегральна функція $x^9 e^{x-1}$ у всіх точках відрізку $[0;1]$ є невід’ємною. Дана помилка викликана похибкою округлення: для I_1 $\Delta I_1 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$; … ; для I_9 $\Delta I_9 = 9! \cdot \Delta I_1 = 0{,}1601$. Істинне значення I_9 з трьома значущими цифрами після коми дорівнює 0,0916.

Ще одним важливим поняттям є коректність постановки задачі.

Задача називається коректно поставленою, якщо для будь-яких вхідних даних з деякого класу існує єдиний і стійкий за вхідними даними розв‘язок.

Для розв‘язку некоректно поставлених задач застосовувати звичайні чисельні методи не варто, оскільки похибки округлень при розрахунках можуть катастрофічно зростати, спотворюючи результати розв‘язання задачі. Для розв‘язання таких задач використовують так звані *методи регуляризації* [8], які замінюють дану задачу коректно поставленою.

Похибки результату чисельного розв‘язання задачі поділяються на три групи [1], розподіл по яких обумовлений наступними причинами:

- математичний опис задачі є неточним (неточно задані початкові дані, не всі характеристики об‘єкта моделювання відображені в моделі, та ін.) – з цієї причини виникає ***незнищенна похибка***,
- застосований для розв‘язання задачі метод не є точним – виникає ***похибка методу***,
- при введенні даних, виконанні арифметичних операцій, при виведенні результатів проводяться округлення, що викликає ***обчислювальну похибку***.

Незнищенну похибку можемо записати, як $\rho_1 = \bar{I} - I$, де I – точне значення невідомої.

При застосуванні чисельного методу виникає похибка методу:

$$\rho_2 = \tilde{\bar{I}}_k - \bar{I}$$

Обчислення проводимо з кінцевою кількістю розрядів чисел, що викликає обчислювальну похибку:

$$\rho_3 = I^* - \tilde{\bar{I}}_k$$

Повну похибку розв‘язання задачі запишемо у вигляді:

$$\rho = I^* - I = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 .$$

1.2. Розв'язання функціональних рівнянь з однією змінною

У загальному вигляді функціональне рівняння записується у вигляді:

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

де F(x) визначена і неперервна на скінченому інтервалі *[a,b]*. Число ξ (ксі) називається коренем *r* кратності, якщо воно задовольняє рівнянням:

$$F(\xi) = 0,\ F'(\xi) = 0,\ \ldots\ F^{r-1}(\xi) = 0 \tag{2}$$

Однократний корінь називається простим.

Два рівняння *F(x)* та *G(x)* називаються рівносильними, якщо будь-який розв'язок кожного з них є розв'язком і для іншого.

Функціональні рівняння поділяються на алгебраїчні (наприклад: $x^3 - 3x + 10 = 0$), та трансцендентні (наприклад: $\sin(2 \cdot x) - \lg(x/3) = 0$).

Алгебраїчні рівняння є лінійні й нелінійні.

Шляхом алгебраїчних перетворень із будь-якого алгебраїчного рівняння можна отримати рівняння у канонічній формі:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad (3)$$

де n – ступінь алгебраїчного рівняння. Кожне алгебраїчне рівняння має хоча б один дійсний корінь чи пару комплексних.

При зведенні алгебраїчного рівняння до канонічної форми отримаємо ті ж корені, що і для початкового рівняння, але при цьому можуть з'явитися сторонні корені. Наприклад:

$$\sqrt{2x^2 - 1} + x = \sqrt{2x^2 + 1} - 1 \Rightarrow 7x^4 + 12x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \qquad (4)$$

Якщо функція *F(x)* не є алгебраїчною, то рівняння (1) називається трансцендентним. Наприклад:

$$\lg(2x) = \cos(0.5 \cdot x) \qquad (5)$$

У деяких випадках розв'язування трансцендентних рівнянь зводиться до розв'язання алгебраїчних.

У теорії чисельних методів ***розв'язати рівняння*** – значить встановити, чи має воно корені на вказаному проміжку, з'ясувати кількість коренів, відшукати значення всіх виявлених коренів із заданою точністю (корені мають знаходитися у ε-околі точного розв'язку).

Задача чисельного знаходження дійсних і комплексних коренів рівняння зазвичай складається з *двох етапів*:

- ***відокремлення коренів*** – знаходження достатньо малих околів у заданій області, в кожному з яких знаходиться тільки один корінь,
- ***уточнення коренів*** – обчислення коренів із заданим ступенем точності ε в деякому околі (ε-околі).

Для знаходження дійсних коренів рівняння (1) застосовується ряд методів, серед яких найчастіше використовують такі чисельні методи:

- метод половинного ділення (бісекції);
- метод хорд;
- метод січних;
- метод дотичних (Ньютона);
- метод простої ітерації.

1.2.1. Початковий етап: відокремлення коренів

Відокремлення коренів полягає у встановленні „тісних" проміжків, кожен з яких вміщує тільки один корінь. Найпростіший ***алгоритм відокремлення коренів*** полягає у наступному:

проміжок, на якому відшукуються розв'язки, ділять рівномірно на невеликі відрізки, на кінцях кожного відрізку розраховують значення функції, якщо функція на кінцях відрізку змінює знак – відрізок містить корінь (значення початку і кінця відрізку записується для подальшої обробки), інакше – 1) коренів кілька і відрізок ділять на менші відрізки, або 2) кореня на відрізку немає і відрізок ігнорується.

Величина відрізків поділу залежить від коефіцієнта гладкості функції. У розрахунково-графічній роботі можемо прийняти $\boldsymbol{h = |b - a| / 10}$. Для визначення відрізку, що вміщує один корінь, можемо скористатися наступною **теоремою**:

Теорема 1. Якщо функція *y = F(x)* неперервна на інтервалі *[a,b]* і якщо *F(a)* та *F(b)* мають протилежні знаки, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$, то *F(x)* має хоча б один дійсний корінь на інтервалі *[a,b]*. Якщо при цьому *F(x)* має першу і другу похідні, що не змінюють знак на інтервалі *[a,b]* (кількох точках інтервалу), то *корінь єдиний*.

Варіантів розташування функції на відрізку може бути кілька:

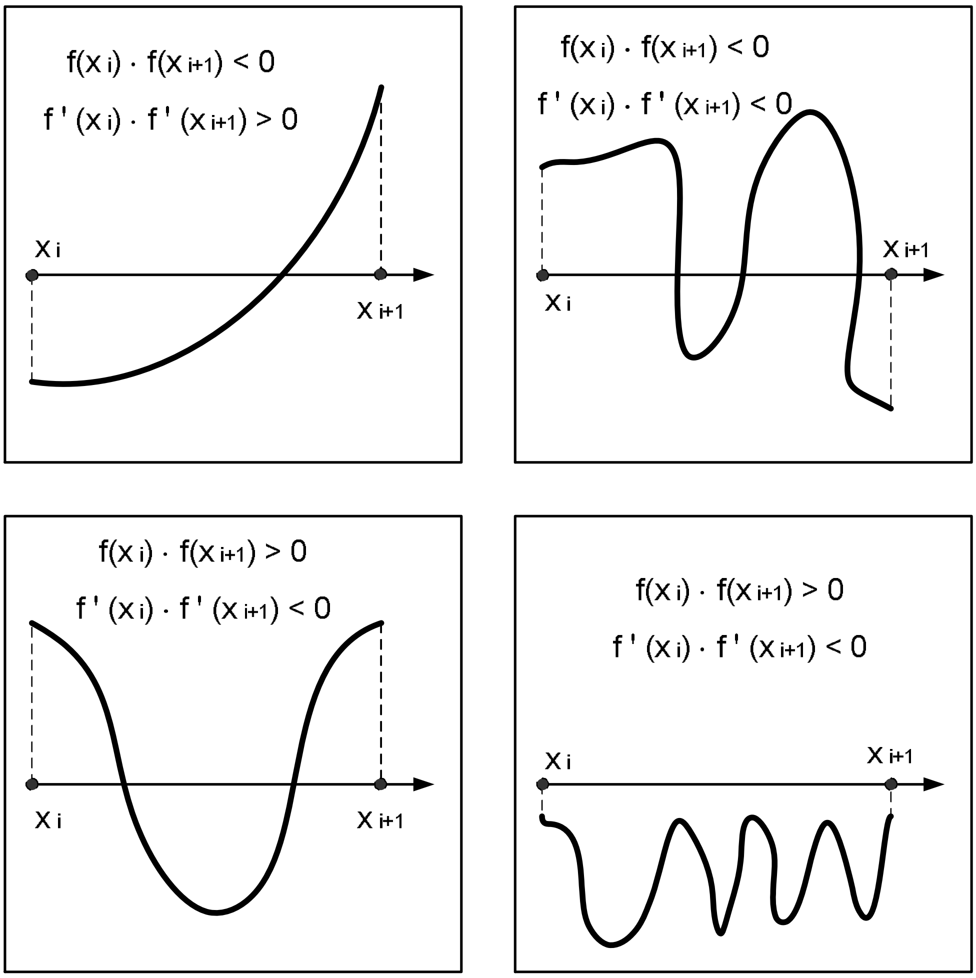


Рис. 1. Варіанти відокремлення коренів рівняння.

В залежності реалізації алгоритм відокремлення коренів може модифікуватися. Так у більшості випадків, коли немає однозначного рішення про відкидання поточного проміжку (випадки 2-4 на рис. 1), його ділять на кілька менших проміжків. У розрахунково-графічній роботі в якості додаткового кроку поділу приймемо $\boldsymbol{h_d = l_i / 5}$.

1.2.2. Етап 2: уточнення коренів

Уточнення коренів полягає у обчисленні коренів у заданих границях [***a, b***] із заданим ступенем точності ε на кожному відокремленому проміжку, який вміщує один корінь (такі проміжки отримуємо на попередньому етапі). Методи уточнення коренів мають алгоритм наближення кореня із заданою точністю та умову виходу з ітераційного (покрокового) процесу.

1.2.2.1. Метод половинного ділення

Припустимо, що функція *F(x)* на відрізку *[a, b]* неперервна і рівняння $F(x) = 0$ має на цьому відрізку єдиний корінь. Поділимо відрізок *[a, b]* точкою $\boldsymbol{c = 1/2(a+b)}$ навпіл (рис. 2). Якщо $F(c) \neq 0$, то вибираємо відрізок *[a, c]* чи *[c, b]*, на якому функція змінює знак, (*F(a)· F(c) < 0* чи *F(c)· F(b) < 0*) и далі ділимо обраний відрізок. На кожному кроці процесу половинного ділення відрізок зменшується вдвічі.

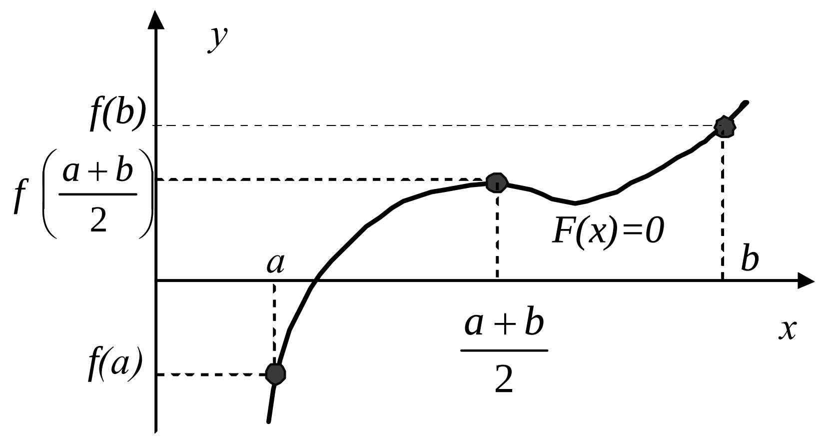


Рис. 2. Знаходження кореня рівняння методом половинного ділення.

Ітераційний процес продовжуємо, поки довжина відрізка не стане менше заданої точності ε:

$$\left| a - b \right| < \varepsilon \tag{6}$$

В якості розв‘язку приймаємо ліву (a) чи праву (b) границю інтервалу. Якщо в якості відповіді обрати точку в середині проміжку, то точний результат не може відхилятися від неї більш ніж на $\varepsilon / 2$, тому для досягнення заданої точності ε потрібно вийти з ітераційного процесу, коли виконається умова $\left| a - b \right| < 2 \cdot \varepsilon$.

1.2.2.2. Метод хорд

Даний метод ґрунтується на лінійній інтерполяції функції *F(x)=0* по двох значеннях, що мають протилежні знаки у значенні функцій *F(a)* та *F(b)* (рис. 3). Метод хорд швидше попереднього збігається до розв‘язку навіть при досить малих значеннях ε.

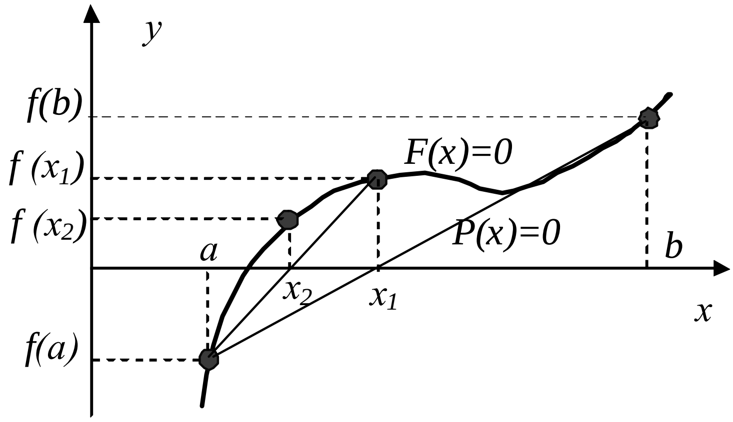


Рис. 3. Знаходження кореня за методом хорд.

Наприклад, потрібно знайти корінь рівняння *F(x)=0* на проміжку *[a; b]*, і відомо, що *F(x)* неперервна на *[a; b]* та *F(a)·F(b)* **< *0***. Крім того, перша *F'(x)* і друга *F''(x)* похідні функції *F(x)* зберігають на проміжку *[a; b]* свій знак. Замінимо функцію *F(x)* лінійною функцією, яка проходить через вузлові точки *(a , F(a))* і *(b , F(b))* :

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \;\Rightarrow\; P(x)=y=f(a)+\frac{x-a}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big) \quad (7)$$

Лінійна функція *P(x)* на кінцях відрізку *[a; b]* приймає такі ж значення, як і функція *F(x)=0.* В якості першого наближення при знаходженні кореня функції *F(x)=0* візьмемо точне значення кореня функції *P(x)=0*, тобто x_1, яке розрахуємо з рівняння:

$$f(a)+\frac{x_1-a}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big)=0 \;\Rightarrow\; x_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \quad (8)$$

При подальшому дослідженні відрізків $[a; x_1]$ та $[x_1; b]$, виберемо той, на якому функція змінює знак. На рис. 3 таким відрізком є $[a; x_1]$. Для обраного відрізка побудуємо лінійне наближення функції та виконаємо розрахунки кореня для лінійного наближення за формулою 8, в результаті розрахунків отримуємо координати точки x_2. Ітераційний процес закінчуємо, коли $\left|F(x_i)\right|<\varepsilon$.

1.2.2.3. Метод січних

Метод січних подібний до методу хорд, тільки точки з координатами $(x_0 , F(x_0))$ та $(x_1 , F(x_1))$ взяті з одного боку від кореня рівняння *F(x)=0.* Геометрична інтерпретація методу представлена на рис. 4.

В якості початкового наближення обираємо точки (x_0, $f(x_0)$) та (x_1, $f(x_1)$), що розташована від краю відрізка, наприклад, на **1/10** його довжини. Через точки (x_0, $f(x_0)$) та (x_1, $f(x_1)$) проводимо січну до графіку функції, яка перетинає вісь x в точці $(x_2, 0)$. Перевіряємо виконання умови $\left|f(x_2)\right| < \varepsilon$, якщо вона не виконується, проводимо січну через точки (x_1, $f(x_1)$) та (x_2, $f(x_2)$), знаходимо точку перетину січної з віссю x (точка $(x_3, 0)$) і перевіряємо виконання чергової умови $\left|f(x_3)\right| < \varepsilon$. Ітерації продовжуємо до виконання умови виходу з ітераційного процесу, тобто $\left|f(x_n)\right| < \varepsilon$.

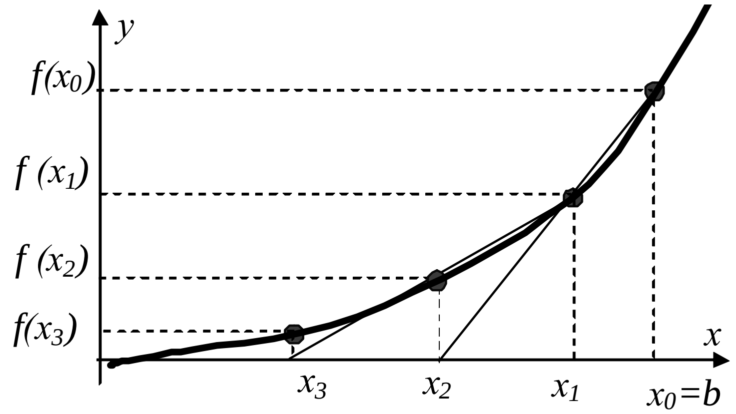


Рис. 4. Знаходження кореня за методом січних.

Загальна формула для знаходження точки перетину січної з віссю x:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{9}$$

1.2.2.4. Метод дотичних (Ньютона)

Метод дотичних базується на заміні функції $F(x)=0$ у точці початкового наближення x_0 дотичною, яка при перетині з віссю x в точці $(x_1, 0)$ дає перше наближення. У цьому методі Ньютон замість інтерполяції використав екстраполяцію, що знаходиться за допомогою дотичної у визначеній точці. Геометрична інтерпретація методу дотичних (Ньютона) показана на рис. 5. В якості початкового наближення обираємо абсцису $x_0 = b$. У точці (x_0 , $f(x_0)$) проводимо дотичну до графіку функції, яка перетинає вісь x в точці $(x_1, 0)$. Перевіряємо виконання умови $\left|f(x_1)\right| < \varepsilon$, якщо вона не виконується, проводимо дотичну в точці (x_1 , $f(x_1)$), знаходимо точку перетину дотичної з віссю x (точка $(x_2, 0)$) і перевіряємо виконання

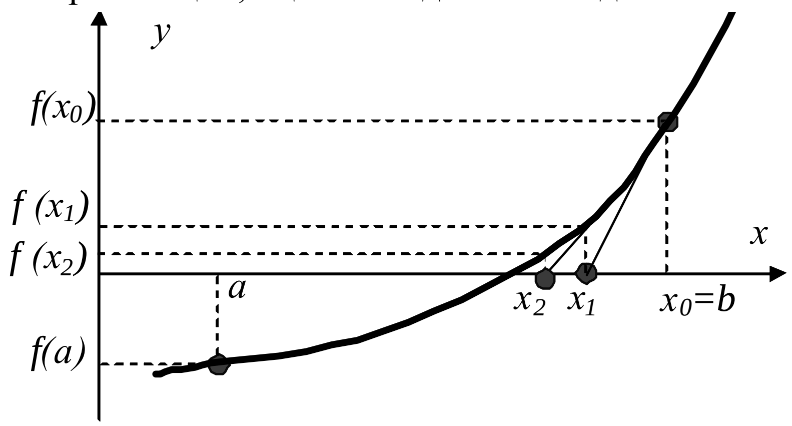


Рис. 5. Знаходження кореня за методом дотичних

чергової умови $\left| f(x_2) \right| < \varepsilon$. Ітераційний процес продовжуємо до виконання умови виходу, тобто $\left| f(x_n) \right| < \varepsilon$.

Для математичного опису методу дотичних отримаємо формулу дотичної, що проведена в точці (x_0 , $f(x_0)$) і має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \tag{10}$$

У точці перетину цієї дотичної з віссю x (точка $(x_1, 0)$) $y = 0$, тому формулу 2.11 можемо записати у вигляді:

$$- f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{11}$$

Для довільного кроку ітераційного процесу формулу Ньютона можемо записати у вигляді:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{12}$$

Метод дотичних (Ньютона) має високу збіжність до розв‘язку, але час виконання ітерації дещо збільшується за рахунок необхідності обчислення похідної $f'(x_k)$.

1.2.2.5. Метод простої ітерації

Замінимо рівняння $F(x) = 0$ рівносильним рівнянням:

$$x = f(x) \tag{13}$$

Припустимо w – корінь рівняння, а x_0 – отримане будь-яким способом нульове наближення до кореня w. Підставимо x_0 в праву частину рівняння (2.14), отримаємо ітераційну послідовність: $\boldsymbol{x_1 = f(x_0); \; x_2 = f(x_1); \; \ldots ;}$ $\boldsymbol{x_n = f(x_{n-1})}$. Таку числову послідовність називають послідовністю наближень. Послідовність наближень може бути збіжною чи розбіжною, і цей факт можемо визначити за наступною теоремою [6].

Теорема 2. *Ітераційна послідовність* буде *збіжною* при будь-якому початковому значенні з інтервалу $x_0 \in [a; b]$, якщо для рівняння $x=f(x)$, що має єдиний розв’язок на проміжку $[a, b]$, виконуються умови:

1) $f(x)$ визначена для всіх $x \in [a, b]$;
2) $f(x)$ диференційована на відрізку $[a, b]$;
3) існує таке дійсне q, яке задовольняє нерівності $\left| f'(x) \right| \le q < 1$ для всіх $x \in [a, b]$.

Умови теореми є достатніми, але не являються необхідними, тому при їх невиконанні, іноді, ітераційна послідовність може виявитися збіжною до розв‘язку.

Умовою припинення ітерацій є нерівність (умова Ліпшиця):

$$\left| f(x_n) - f(x_{n-1}) \right| \le \frac{q}{1-q} \left| x_n - x_{n-1} \right| \tag{14}$$

Для забезпечення умови збіжності ітераційного процесу проведемо перетворення рівняння $F(x)=0$ до ітераційного вигляду:

$$F(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x = x - m \cdot F(x) \tag{15}$$

де $m = 1/(\max(F'(x)))$ для $x \in [a, b]$. (16)

Застосування Matlab

Для реалізації першого етапу розв‘язання функціональних рівнянь з однією змінною – відділення коренів, потрібно перевірити варіанти (рис. 1) сполучень значень функції і похідних на кінцях локальних відрізків проміжку [*a*, *b*]. Реалізуємо дану функцію у вигляді .*m*-файлу:

```
function Segment1 (f,a,b,eps)
dx=(b-a)/10;
for x = a:dx:(b-dx)
    x0=x;
    x1=x+dx;
    f0=feval(inline(f),x0);
    f00=feval(inline(f),x0+eps);
    f1=feval(inline(f),x1);
    f10=feval(inline(f),x1+eps);
    df0=(f00-f0)/eps;
    df1=(f10-f1)/eps;
    if (f0*f1<0 & df0*df1>0)
        … <метод уточнення коренів>
    else
        while abs(x0-x1)> eps
        SegmentNewton (f,x,x+dx,eps);
        …
    end
end
```

Для перевірки отриманого результату побудуємо графік функції, наприклад якщо $f = sin(x^3)$. Для цього в Command Window наберемо:

```
>> x=-2:0.01:2;
>> plot(x,sin(x.^3),'-b')
>> title(char('sin(x.^3)'))
 >> grid on
```

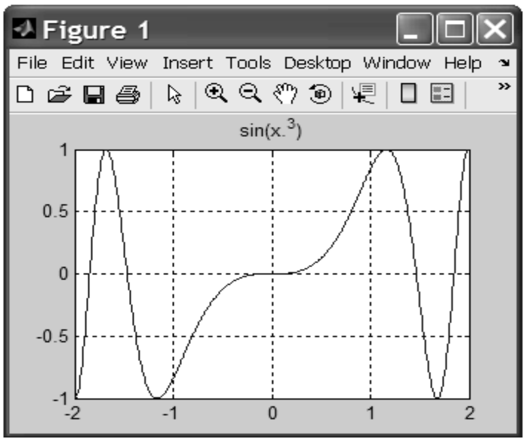


Рис.6. Графік функції y = sin(x^3)

Контрольні питання.

1. Які функціональні рівняння називаються трансцендентними?
2. Що значить розв‘язати задачу чисельним методом?
3. Які етапи є обов‘язковими для знаходження всіх коренів функціонального рівняння на заданому проміжку?
4. В чому полягає суть алгоритму реалізації етапу відокремлення коренів функціонального рівняння на заданому проміжку?
5. В чому суть методу половинного ділення? Як обирається остаточне значення розв‘язку?
6. В чому полягає суть методу хорд? Яка умова виходу з ітераційного процесу?
7. В чому суть методу січних? Чим він відрізняється від методу хорд, в чому є схожість? Від яких факторів залежить швидкість збіжності методу січних?
8. В чому полягає суть методу дотичних (Ньютона)?
9. До якого вигляду потрібно привести функціональне рівняння, щоб провести розрахунок кореня за методом простої ітерації?
10. Які умови збіжності методу простої ітерації і як їх врахувати при розв‘язанні функціонального рівняння?

Контрольні завдання

1. Визначте, скільки коренів має функціональне рівняння $\boldsymbol{sin(x) - x^3 = 0}$ на проміжку [-3, 3].
2. Знайдіть розв‘язок функціонального рівняння $\boldsymbol{x^2 - 2^x = 0}$ на проміжку [-1, 1], отриманому в результаті відокремлення коренів.
3. Знайдіть розв‘язки функціонального рівняння $\boldsymbol{x^2 - 0.5^x = 0}$ на проміжку [-5, 5]. Перевірте отримані розв‘язки графічно.
4. Розв‘яжіть функціональне рівняння $\boldsymbol{sin(x)^{x^2-3x} = 0}$ методом простої ітерації на проміжку [0.5, 3.5]. Перевірте отримані розв‘язки, скориставшись методом половинного ділення.
5. Вкажіть проміжок, на якому розв‘язання рівняння $\boldsymbol{0.5^x - 0.1 = 0}$ методом хорд буде неефективним якщо $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-3}}$.

1.3. Прямі методи розв‘язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод LU-розкладу.

Математичні моделі багатьох технічних задач представлені системами лінійних рівнянь. Багато методів розв’язання нелінійних задач також зводяться до розв’язання деякої послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Для багатьох методів розроблений математичний апарат, що дозволяє оцінити точність отриманого розв’язку. Чисельні методи розв’язку СЛАР поділяються на прямі (точні) та непрямі (ітераційні, наближені).

Прямі (точні) методи дозволяють розв’язати систему рівнянь за скінчене число арифметичних операцій. Якщо всі операції виконуються точно (без помилок округлення), то розв’язок заданої системи також отримуємо точним. До прямих методів належать: метод послідовного виключення невідомих (метод Гауса та його модифікації: метод головного елемента, метод квадратного кореня, метод відображень та ін.), метод ортогоналізації, метод LU-розкладу. Прямі методи застосовують на практиці для розв’язання СЛАР за допомогою обчислювальної техніки, як правило, з числами порядку не вище 10^3 [5].

Ітераційні методи є наближеними. Вони дозволяють знайти розв’язок системи, як межу послідовних наближень, що обчислюються по однаковому алгоритму. Для застосування ітераційних методів у початкових умовах необхідно задати точність обчислень ε і початкове наближення $\boldsymbol{x_0}$ чи ($\boldsymbol{x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots}$). До ітераційних методів належать: метод Зейделя, метод простої ітерації, метод релаксації, градієнтні методи та їх модифікації. На практиці ітераційні методи застосовують для розв’язання СЛАР з числами порядку 10^6 і вище.

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

Коротко її можна записати в матричному вигляді:

$$A \cdot x = B \tag{3.2}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} a_{m2} ... a_{mn} \end{pmatrix}$ матриця $m?n$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ та $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектори відповідно n-го порядку та m-го порядку.

Розв'язком системи ЛАР називається така впорядкована сукупність чисел $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ ...\ x_n = c_n$, яка перетворює всі рівняння системи у істинні рівняння.

Система ЛАР називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною* – якщо вона не має розв'язків. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має один розв'язок, і *невизначеною*, якщо має більше одного розв'язку.

Метод LU-розкладу. При розв‘язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь даним методом матрицю коефіцієнтів A розкладають на добуток двох матриць (формула 17) нижньої трикутної матриці L, на головній діагоналі якої стоять одиниці, та верхньої трикутної матриці U, елементи головної діагоналі якої не дорівнюють нулю. У матричному вигляді при n = 4 це можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Для розкладання матриці коефіцієнтів A на трикутні матриці використаємо метод виключення Гауса [2, 4, 17]. Отримаємо матрицю L з допомогою одиничної матриці. Для цього помножимо зліва матрицю A на одиничну матрицю. Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Перший рядок матриці A використовуємо для обнуління елементів першого стовпчика цієї ж матриці. Помножимо перший рядок на -2/4=–0,5 і віднімемо від другого, помножимо перший рядок на 1/4=0,25 і віднімемо від третього рядка. Використані коефіцієнти для перетворень запишемо на місця елементів одиничної матриці, що відповідають індексам обнулених елементів матриці A. В результаті отримаємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2,5 & 4,5 \\ 0 & 1,25 & 6,25 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Другий рядок матриці A використовуємо для обнуління елементів другого стовпчика цієї ж матриці, що знаходяться нижче другого рядка (у матриці, що утворена з одиничної, запишемо використані для обнулення коефіцієнти на місця елементів, що відповідають індексам обнулених елементів матриці A):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & 8,5 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

В результаті отримаємо LU-розклад матриці A і розв'яжемо систему рівнянь у два етапи:

$$\begin{aligned} &AX = B \quad \Rightarrow \quad LUX = B \\ &1 \text{ етап } LY = B \quad \Rightarrow \quad Y \\ &2 \text{ етап } UX = Y \quad \Rightarrow \quad X \end{aligned} \qquad (21)$$

На першому етапі знаходимо проміжний вектор Y, використовуючи пряму підстановку, на другому етапі знаходимо безпосередньо вектор розв'язків X, застосовуючи зворотну підстановку. Зокрема, приймаючи у наведеному прикладі $B = (1 \quad 6 \quad 14)^T$ з проміжної системи $LY = B$ отримаємо $Y = (1 \quad 6,5 \quad 17)^T$, розв‘язуючи систему, починаючи з 1-го рівняння. Здійснюючи другий етап розв‘язання системи, тобто розв‘язуючи рівняння $UX = Y$, отримаємо $X = (0 \quad 1 \quad 2)^T$, розв‘язуючи систему з останнього рівняння до першого.

1.4. Розв‘язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, як правило, мають великі розріджені матриці, тобто матриці, що містять велику кількість нульових елементів. При розв‘язанні даних систем необхідно застосовувати методи, що обробляють ненульові елементи, зменшуючи кількість обчислювальних операцій та час розв‘язання системи ЛАР.

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності з розрідженими матрицями застосовуються методи LU-розкладу, спрощеного LU-розкладу, метод прогонки, а також звичайні і адаптовані методи Зейделя, релаксації, Якобі.

1.4.1. Спрощений метод LU-розкладу

Застосування методі LU-розкладу значно спрощується [4, 10] для систем ЛАР з розрідженими матрицями, коефіцієнти яких зосереджені вздовж головної діагоналі. При розгляді три діагональної системи з матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

Отримаємо розклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{23}$$

Для отриманих матриць L та U: $\sigma_1 = \alpha_1, \delta_k = \dfrac{\beta_k}{\alpha_{k-1}}, \ \sigma_k = \alpha_k - \delta_k \gamma_{k-1},.$ $k = 2,3, \ldots, n$. Вирази для знаходження вектора невідомих спрощуються:

$$y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \delta_i y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

$$x_n = y_n, \ x_i = \frac{1}{\sigma_i}(y_i - \gamma_i x_{i+1}), \ i = n-1, \ldots, 1. \tag{24}$$

де b – компоненти вектора вільних елементів.

1.4.2. Метод прогонки

У методі прогонки використовуються процедури, схожі на процедури прямого методу Гауса, але тільки над ненульовими елементами матриці [4]. Запишемо систему рівнянь з попереднього пункту у вигляді:

$$
\begin{cases}
\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \\
\beta_2 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = b_2 \\
\beta_3 x_2 + \alpha_3 x_3 + \gamma_3 x_4 = b_3 \\
\dots \\
\beta_n x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n
\end{cases}
\tag{25}
$$

При виконанні процедури, аналогічної прямому ходу методу Гауса отримаємо:

$$
\begin{cases}
x_1 = \omega_1 x_2 = v_1 \Rightarrow x_1 - \left(-\dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) x_2 = \dfrac{b_1}{\alpha_1}, \\
x_2 = \omega_2 x_3 = v_2 \Rightarrow x_2 - \left(-\dfrac{\gamma_2}{\alpha_2 + \beta_2 \omega_1} \right) x_3 = \dfrac{b_2 - \beta_2 v_1}{\alpha_2 + \beta_2 \omega_1}, \\
x_3 = \omega_3 x_4 = v_3 \Rightarrow x_3 - \left(-\dfrac{\gamma_3}{\alpha_3 + \beta_3 \omega_2} \right) x_4 = \dfrac{b_3 - \beta_3 v_2}{\alpha_3 + \beta_3 \omega_2} \\
\dots \\
x_n = v_n
\end{cases}
\tag{26}
$$

де коефіцієнти визначаються за формулами:

$$
\begin{aligned}
\omega_i &= -\frac{\gamma_i}{\beta_i \omega_{i-1} + \alpha_i}, \quad i = 2,3, \dots ,n. \\
v_i &= \frac{b_i - \beta_i v_{i-1}}{\beta_i \omega_{i-1} + \alpha_i}, \quad i = 2,3, \dots ,n.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Обчислення прогоночних коефіцієнтів за формулами (27) з урахуванням початкових значень $\omega_1 = -\gamma_1 / \alpha_1 ;\ v_1 = b_1 / \alpha_1$, називають прямим ходом методу прогонки. Після цього здійснюють зворотний хід методу прогонки від останнього рівняння до 1-го за формулами:

$$
x_n = v_n, \quad x_i = \omega_i x_{i+1} + v_i, \quad i = n-1, \dots ,1.
$$

Основний час витрачається на обчислення коефіцієнтів за формулами (27), для визначення яких необхідно виконати вісім операцій для обчислення кожної пари коефіцієнтів, з яких тільки п‘ять є операціями множення/ділення [10].

1.5. Непрямі методи розв‘язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Непрямі (ітераційні, неточні) методи дозволяють наближено знайти розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, як границю послідовних наближень, що обчислюються за певним алгоритмом.

До ітераційних методів належать метод Зейделя, метод простої ітерації, метод релаксації, градієнтні методи та їх модифікації. Ознакою ітераційного методу розв'язання системи ЛАР є наявність початкового наближення $\boldsymbol{X^0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots)$ і потрібної точності отримання розв'язків $\boldsymbol{\varepsilon}$.

1.5.1. Забезпечення збіжності ітераційного процесу

Для успішного застосування ітераційних методів до початку ітерацій потрібно напевне знати, що ітераційний процес буде збігатися до конкретного розв'язку. Для цього початкову систему приводять до *нормалізованого вигляду* таким чином:

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{Початкова система}} & \boldsymbol{A \cdot X = B} \\ \textbf{\textit{Нормалізована система}} & \boldsymbol{A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B} \end{array} \tag{28}$$

Після заміни початкової системи лінійних рівнянь еквівалентною їй – нормалізованою системою – застосуємо ітераційні методи розв'язання СЛАР, забезпечивши збіжність ітерацій до розв'язку.

1.5.2. Метод простої ітерації та метод Зейделя для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Першим необхідним корком при застосуванні методів *простої ітерації* та *Зейделя* є приведення системи лінійних алгебраїчних рівнянь до нормалізованого вигляду [2, 5], представленого формулою (28).

Для здійснення ітераційного процесу нормалізовану систему приводимо до ітераційного вигляду, тобто виражаємо з кожного *i*-го рівняння відповідну змінну x_i:

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1} \end{array} \tag{29}$$

Для початку ітераційного процесу задаємо початкове наближення $\boldsymbol{X^0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots x_n^0)$ та необхідну точності отримання розв'язків $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Метод простих ітерації полягає у підстановці значень вектору початкових наближень $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ в праву частину системи (29) і отримання в лівій частині чергового вектора наближень $(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, x_n^1)$. Збіжність методу простих ітерацій досить повільна, для її підвищення Зейдель запропонував підстановку, яка дозволяє в $(n\text{-}1)$ раз зменшити кількість кроків і, таким чином, пришвидшити отримання результату.

При здійсненні ітерацій ***підстановка Зейделя*** полягає в тому, що знайшовши з першого рівняння x_1^1 по значеннях вектору початкових наближень інших змінних, ми використовуємо його при отриманні значення x_2^1 у складі вектора чергових наближень ($x_1^1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$). Тобто всі попередньо знайдені значення поточної ітерації використовуються для знаходження наступних значень цієї ж ітерації. Ітераційний процес можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
&x_1^1 = a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + a_{14}x_4^0 \dots + a_{1n}x_n^0 \\
&x_2^1 = a_{21}x_1^1 + a_{23}x_3^0 + a_{24}x_4^0 \dots + a_{1n}x_n^0 \\
&x_3^1 = a_{31}x_1^1 + a_{32}x_2^1 + a_{34}x_4^0 \dots + a_{1n}x_n^0 \\
&\dots \\
&x_n^1 = a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + a_{n3}x_3^1 \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^1
\end{aligned} \quad (30)$$

Умовою припинення ітерацій є $\left| x_i^{n-1} - x_i^n \right| < \varepsilon$ для всіх змінних x_i. При виході з ітераційного процесу можемо констатувати, що розв'язок знайдено з точністю ε.

1.5.3. Метод релаксації для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Даний метод [5] є ітераційним і для його успішного застосування потрібно забезпечити збіжність ітераційного процесу до розв'язку, для чого приведемо початкову систему лінійних алгебраїчних рівнянь до нормалізованого вигляду, представленого формулою (28).

Перед початком першої ітерації перетворюємо нормалізовану систему до канонічного вигляду (формула 1). Для початку обчислень вибираємо початкове наближення ($x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$) і точність обчислень ε. На першому етапі обчислюємо, так звані, нев'язки, тобто відхилення від нуля параметрів δ_i:

$$\begin{cases}
\delta_1 = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0 - b_1 \\
\delta_2 = a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{2n}x_n^0 - b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta_i = a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0 - b_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta_n = a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \dots + a_{nn}x_n^0 - b_n
\end{cases}, \quad (31)$$

які при канонічному представленні системи рівнянь повинні дорівнювати нулю.

В системі знаходимо рівняння з максимальною по модулю нев‘язкою: $\boldsymbol{\delta_i = a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0 - b_i}$, та, обнулюючи δ_i ($\delta_i = 0$), обчислюємо значення $\boldsymbol{x_1^1}$ за формулою:

$$\boldsymbol{x_1^1 = \frac{1}{a_{i1}}(b_i - a_{i2}x_2^0 - ... - a_{in}x_n^0)} \tag{32}$$

де i – номер рівняння з максимальною по модулю нев‘язкою. На наступному кроці підраховуємо нев‘язки за оновленим вектором наближень (x_1^1, x_2^0, ..., x_n^0) і вибираємо рівняння з максимальною по модулю нев‘язкою δ_j :

$$\boldsymbol{\delta_j = a_{j1}x_1^1 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 - b_j} \ , \tag{33}$$

після чого розраховуємо x_2^1, що задовольняє рівності:

$$\boldsymbol{a_{j1}x_1^1 + a_{j2}x_2^1 + a_{j3}x_3^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = b_j} \tag{34}$$

При знаходженні чергового значення x_j^n не забувайте обнулювати δ_j !

Розрахунки продовжуємо до знаходження всіх значень x_j^1, після цього перевіряємо умову припинення ітерацій, яка записується у вигляді: $\boldsymbol{|\delta_{max}| \le \varepsilon}$ (тому метод називається методом *релаксації.*).

Якщо умова не виконується розпочинаємо наступний цикл ітерацій, який проводиться так, як і попередній, але в якості початкових значень невідомих виступають значення, обчислені у попередньому циклі ітерацій, наприклад: $\boldsymbol{(x_1^1, x_2^1, ... x_n^1)}$.

При реалізації методу релаксації рівняння намагаються вибирати в такому порядку, щоб за найменшу кількість кроків знайти розв‘язок із заданою точністю. Оскільки такий вибір є невизначеним даний метод називають нестаціонарним [9].

Застосування Matlab

Для реалізації файлу-програми знаходження коренів системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса [5] скористаємось матричним представленням розрахунків, що прийняті у середовищі Mftlab [14, 15]. Реалізуємо даний метод у вигляді двох функцій, що представляють прямий (`gauss`) і зворотний (`basksub`) етапи методу Гауса:

```
function gauss(A,B)
[N,N]=size(A);
X=zeros(N,1);
```

```
C=zeros(1,N+1);
Aug=[A B];
for p=1:N-1
   [Y,j]=max(abs(Aug(p:N,p)));
   C=Aug(p,:);
   Aug(p,:)=Aug(j+p-1,:);
   Aug(j+p-1,:)=C;
if Aug(p,p)==0
   'A = 0'
   break
end
    for k=p+1:N
    m=Aug(k,p)/Aug(p,p);
    Aug(k,p:N+1)=Aug(k,p:N+1)-m*Aug(p,p:N+1);
    end
end
X=basksub(Aug(1:N,1:N),Aug(1:N,N+1))
BE=A*X

function X=basksub(A,B)
n=length(B);
X=zeros(n,1);
X(n)=B(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
   X(k)=(B(k)-A(k,k+1:n)*X(k+1:n))/A(k,k);
end
```

Результати виконання розрахунків (в Command Window) за даним методом системи ЛАР з перевіркою отриманих результатів наведені далі:

```
>> A=[1 5 8; 4 2 7; 9 1 3]
A =
    1    5    8
    4    2    7
    9    1    3
>> B=[2;5;1]
B =
    2
    5
    1
>> gauss(A,B)
X =
   -0.1268
   -1.5352
    1.2254
BE =
    2.0000
    5.0000
    1.0000
```

Вектор **B** та вектор **BE** збігаються, значить отримані результати можемо вважати достовірними. Невелика розбіжність в значеннях даних векторів може виникати по причині накопичення обчислювальної похибки (п. 1.1, стор. 8), оскільки сам метод Гауса є точним методом розв‘язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

При реалізації неточних методів розв‘язання систем ЛАР потрібно пам‘ятати про необхідність нормалізації початкових матриць A та B (для забезпечення збіжності ітераційного процесу), про введення в якості початкових даних початкового вектора $X = [x_1^0; x_2^0; x_3^0 \ldots x_n^0]$, а також про контроль умови виходу з ітераційного процесу.

Контрольні питання

1. В чому суттєва відмінність алгоритмів точних методів розв‘язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) від неточних?
2. Як в методі *LU*-розкладу з однієї матриці A отримують дві матриці $\boldsymbol{L}$ та $\boldsymbol{U}$?
3. В чому полягає суть методу *LU*-розкладу? Чим відрізняється матричний варіант методу *LU*-розкладу від його класичного варіанту?
4. Чому спрощений метод *LU*-розкладу є більш ефективним для розв‘язання три діагональних СЛАР ніж метод Гауса?
5. В чому полягає суть методу прогонки? Для розв‘язання яких систем рівнянь його використовують і чому?
6. Для чого потрібно виконувати нормалізацію СЛАР в ітераційних методах?
7. Чому метод Зейделя більш ефективний ніж метод простої ітерації при розв‘язанні СЛАР? У скільки разів швидше метод Зейделя збігається до розв‘язку?
8. Чому при розв‘язанні СЛАР методом релаксації виникають нев‘язки? Про що вони свідчать?
9. В чому полягає суть методу релаксації? Яка умова виходу з ітераційного процесу?
10. Як перевірити достовірність та точність отриманих розв‘язків при розв‘язанні СЛАР точними та неточними методами?

Контрольні завдання

1. Розв‘яжіть СЛАР методом Гауса та методом *LU*-розкладу. Перевірте достовірність отриманих розв‘язків.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь: .

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Знайдіть розв‘язок системи лінійних рівнянь з розрідженою матрицею $\rightarrow$ спрощеним LU-розкладу та методом Гауса. Порівняйте кількість кроків до розв‘язку.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Знайдіть розв‘язок системи лінійних рівнянь з розрідженою матрицею із завдання 2 методом прогонки. Порівняйте кількість кроків до розв‘язку з методом LU-розкладу.
4. Розв‘яжіть СЛАР із завдання 1 методом Зейделя та методом простої ітерації, порівняйте кількість кроків при розв‘язанні даними методами. Порівняйте точність отриманих результатів з розв‘язками, отриманими методом Гауса.
5. Розв‘яжіть СЛАР із завдання 1 методом релаксації. Порівняйте кількість кроків та точність отриманих результатів з розв‘язками, отриманими методом LU-розкладу.

1.6. Розв‘язання систем нелінійних рівнянь. Метод Ньютона

Не існує прямих методів розв‘язання нелінійних та трансцендентних рівнянь. Розв‘язання таких рівнянь складається з двох етапів: відокремлення коренів та їх уточнення. Процедура розв‘язання починається з вибору початкової точки x_0 і обчислення нев‘язки рівняння $f(x_0)$. Якщо $\varepsilon < f(x_0)$ вибирається алгоритм, за яким проводиться уточнення розв‘язків (при цьому використовується інформація про знак нев‘язки, її значення, або про швидкість її зміни $f(x_0)/dx$).

Для розв‘язання нелінійних та трансцендентних рівнянь можуть застосовуватися звичайний ітераційний метод [9]. Але при знаходженні розв‘язків збіжність ітераційного методу до конкретного розв‘язку залежить від початкових значень змінних. Також складно вибрати функції f_i, які б задовольняли умову збіжності $\|J(x)\| \le M < 1$, де J – матриця Якобі, що визначається формулою (35). Тому для розв‘язання систем нелінійних і трансцендентних рівнянь застосовують *узагальнений метод Ньютона* (далі – метод Ньютона).

Метод Ньютона оснований на знаходженні послідовності $\{[x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k]\}$, що збігається до розв‘язку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Цей метод називають ітерацією нерухомої точки [5]. Величина похідної в нерухомій точці визначає, чи буде ітераційний процес збіжним (теорема 2). Узагальненням похідної для системи функцій є матриця Якобі (Якобіан), яка містить частинні похідні. Наприклад, для функцій трьох незалежних змінних $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, $f_3(x,y,z)$ матриця Якобі має вигляд:

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Для функцій декількох змінних диференціал використовується, щоб показати, як змінення незалежних змінних (x, y, z) вплине на залежні змінні (u, υ, ω). Наприклад, задані функції:

$$u = f_1(x,y,z), \qquad \upsilon = f_2(x,y,z), \qquad \omega = f_3(x,y,z) \qquad (36)$$

Припустимо, що значення цих функцій відомі в точці (x_0, y_0, z_0) і необхідно визначити їх значення в точці (x, y, z) віддаленій на $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz, \\ d\upsilon &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz, \\ d\omega &= \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz, \end{aligned} \qquad (37)$$

де $du, d\upsilon, d\omega$ – диференціали залежних змінних, dx, dy, dz – диференціали незалежних змінних. Якщо змінення функції позначити dF, а змінення змінних dX, використовуючи векторне позначення можемо записати:

$$dF = \begin{bmatrix} \partial u \\ \partial \upsilon \\ \partial \omega \end{bmatrix} = J(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = J(x_0,y_0,z_0) \cdot dX \qquad (38)$$

Збіжність поблизу нерухомої точки. Ітерацію нерухомої точки визначаємо наступним чином [2]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_1(x_k, y_k, z_k) \\ y_{k+1} &= f_2(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} &= f_3(x_k, y_k, z_k) \end{aligned} \qquad (39)$$

Теорема 3. Припустимо, що функції (36) та їх перші частинні похідні неперервні в області, в якій знаходиться нерухома точка (x, y, z). Якщо початкова точка достатньо близько розташована до точки (x, y, z) і виконуються умови:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)\right| < 1,$$
$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)\right| < 1, \quad (40)$$
$$\left|\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\right| < 1$$

то ітерація збігається до нерухомої точки (x, y, z).

Початкове значення нульового наближення можна отримати графічним методом. Для цього побудуємо графіки функцій і визначимо приблизно координати перетину графіків (x_0, y_0, z_0).

Перетворивши рівняння системи нелінійних рівнянь до ітераційного вигляду, визначимо, чи буде ітераційний процес збіжним, тобто $\|J(x)\| \le M < 1$. Якщо умова виконається, використовуємо початкове наближення для розрахунків за методом Ньютона, простої ітерації, Зейделя.

Метод Ньютона виконується за наступними етапами:

1етап: для здійснення обчислень сформуємо функцію:

$$F(P_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k, z_k) \\ f_2(x_k, y_k, z_k) \\ f_3(x_k, y_k, z_k) \end{bmatrix} \quad (41)$$

2 етап: обчислимо Якобіан:

$$J(P_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial z} f_1(x_k, y_k, z_k) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial z} f_2(x_k, y_k, z_k) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_3(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial y} f_3(x_k, y_k, z_k) & \frac{\partial}{\partial z} f_3(x_k, y_k, z_k) \end{bmatrix} \quad (42)$$

3 етап: розв‘яжемо систему рівнянь:

$$J(P_k) \cdot \Delta P = -F(P_k)$$

Якщо матриця Якобі не вироджена, то розв‘язок системи запишемо у вигляді:

$$\Delta P \approx -J(P_k)^{-1} \cdot F(P_k)$$

4 етап: обчислимо координати наступної точки – наступне наближення до розв‘язку має вигляд:

$$P_1 = P_0 + \Delta P \approx P_0 - J(P_k)^{-1} \cdot F(P_k) \qquad (43)$$

При графічному представленні процесу розв‘язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона початкову точку розглядаємо в якості опорної, Якобіан визначає напрямок вектору до наступної точки розв‘язку, а значення функції, обчислене по даним початкової точки, – величину кроку у визначеному Якобіаном напрямку.

Приклад. Розв‘яжемо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

<u>Етап 1.</u> Визначимо початкові значення графічним методом. Побудуємо графіки функцій (див. рис. 6), що представлені в системі рівнянь: $x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0$ та $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

З графіків визначаємо $(x_0, y_0) = (2.00, 0.25)$. Представимо систему нелінійних рівнянь в ітераційному вигляді:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2x + y - 0{,}5} = f_1(x, y) \\ y = 0.25\sqrt{4 - x^2} = f_2(x, y) \end{cases}$$

Для даних значень розраховуємо частинні похідні в околі графічно найденого розв‘язку $G\{|x-2| \le 0.1; |y-0.25| \le 0.1\}$. Для розрахунків приймемо $x = 1.9; y = 0.25$ (з розрахунку, що в чисельнику похідних використовуємо найбільші значення діапазону G, а у знаменнику – найменші):

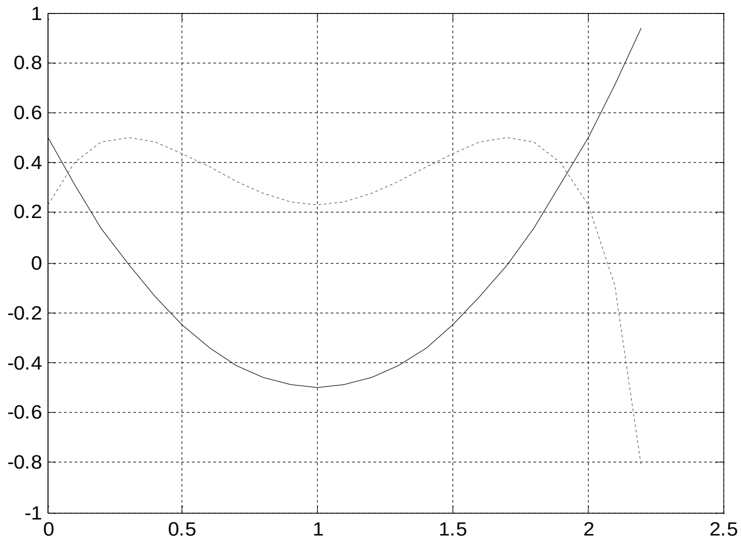


Рис. 6. Графіки функцій $x^2 - 2x - y + 0{,}5 = 0$ та $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{8x+4y-2}} & \frac{1}{\sqrt{8x+4y-2}} \\ \frac{-0.25}{x\sqrt{4-x^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.133 & 0.067 \\ -0.76 & 0 \end{pmatrix}$$

За теоремою 3 визначимо:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| = 0.133 + 0.067 = 0.2 < 1$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| = 0.76 + 0 = 0.76 < 1$$

Значить ітераційний процес буде збіжним. Переходимо до етапу безпосереднього визначення розв‘язків.

Етап 2. Початкові значення для даної системи нелінійних рівнянь при розв‘язанні методом Ньютона: $(x_0, y_0) = (1.9, 0.25)$.

Сформуємо вектор-функцію і обчислимо матрицю Якобі:

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 - 2x - y + 0,5 \\ x^2 + 4y^2 - 4 \end{bmatrix}, \quad J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x - 2 & -1 \\ 2x & 8y \end{bmatrix}.$$

В початковій точці вони приймуть значення:

$$F(2.00, 0.25) = \begin{bmatrix} 0.06 \\ -0.14 \end{bmatrix}, \quad J(2,00; 0,25) = \begin{bmatrix} 1.8 & -1.0 \\ 3.8 & 2.0 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо Δx, Δy з лінійної системи рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 1.8 & -1.0 \\ 3.8 & 2.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.06 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

Значення невідомих знаходять будь-яким, переважно точним, методом для розв‘язання систем лінійних рівнянь:

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0027 \\ 0.0649 \end{bmatrix}$$

Розрахуємо значення координат наступної точки:

$$P_1 = P_0 + \Delta P = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0027 \\ 0.0649 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9027 \\ 0.3149 \end{bmatrix}$$

Аналогічно знайдемо два наступні розв‘язки:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.900691 \\ 0.311213 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 1.900677 \\ 0.311219 \end{bmatrix}$$

Ітерації продовжуємо до досягнення заданої точності обчислень. В розглянутому прикладі точність обмежувалася чотирма десятковими знаками після коми, оскільки

$$\left|x_1^3 - x_1^2\right| = \left|1.900677 - 1.900691\right| = 0.000014 < 0.0001 = \varepsilon$$

$$\left|x_2^3 - x_2^2\right| = \left|0.311219 - 0.311213\right| = 0.000006 < 0.0001 = \varepsilon \; .$$

Для розв‘язання систем нелінійних рівнянь можемо також застосовувати [5, 9] метод простої ітерації та ітераційний метод Зейделя (п. 1.5.2).

Контрольні питання.

1. В чому суть методів розв‘язання систем нелінійних та трансцендентних рівнянь?
2. В чому фізичний сенс Якобіана?
3. Чому важливо правильно обрати початкове наближення при розв‘язанні систем нелінійних та трансцендентних рівнянь?
4. Як правильно вибрати початкове наближення при розв‘язанні систем нелінійних та трансцендентних рівнянь?
5. Які етапи має алгоритм методу Ньютона для розв‘язання систем нелінійних та трансцендентних рівнянь? Як перевірити достовірність та точність отриманого розв‘язку?

Контрольні завдання

1. Користуючись графічним способом оберіть початкове наближення для розв‘язання системи трансцендентних рівнянь: $\begin{cases} \sin(x) + \ln(x) - y = 0 \\ x + \ln(y) = 3 \end{cases}$.
2. Знайдіть розв‘язок системи нелінійних рівнянь: $\begin{cases} x^3 + xy + y^2 = 5 \\ x + xz - y^3 = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 3 \end{cases}$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0.01$. Початкове наближення визначте графічним способом.
3. Розв‘яжіть систему нелінійних рівнянь із завдання 2 методом простої ітерації. Порівняйте кількість кроків до розв‘язку з методом Ньютона, якщо $\varepsilon = 0.05$.
4. Розв‘яжіть систему нелінійних рівнянь із завдання 2 методом Зейделя. Порівняйте кількість кроків до розв‘язку, якщо $\varepsilon = 0.05$.
5. Оберіть метод, що дозволяє розв‘язати систему трансцендентних рівнянь з завдання 1 та розв‘яжіть систему ($\varepsilon = 0.05$), перевірте достовірність отриманих результатів.

2. Інтерполяція функцій поліномами та сплайнами

На практиці часто приходиться розв‘язувати задачі, в яких складні функції простіше обчислити по їх наближеним аналогам [2]. Наприклад, для обчислення стандартних функцій *sin(x), cos(x)*, e^x в пакетах прикладних програм використовуються обчислювальні процедури, які ґрунтуються на заміні заданої функції наближеними функціями, побудованими на основі поліномів n–го порядку.

Ще одним прикладом застосування поліномів є випадок, коли функція задана у вигляді таблиці вузлових точок. Для відображення поданих значень функцією і подальшому застосуванні цієї функції у розрахунках, будують поліноміальну криву $y = P(x)$, що проходить через вузлові точки (для обчислення поліноміальної кривої повинен бути визначений проміжок, на якому будується наближення). За допомогою такої функції можливо знайти наближені значення в точках, що не є вузловими. Якщо така точка знаходиться у межах інтервалу наближення $x_0 < x < x_N$, її значення називають ***інтерполяційним***, якщо за межами інтервалу $x < x_0$ чи $x_N < x$ – ***екстраполяційними***. Так побудова поліному для знаходження проміжних точок називається ***інтерполяцією***, для знаходження значень за межами заданого інтервалу – ***екстраполяцією***. Широке застосування наближуючі поліноми знаходять також у чисельному диференціюванні, чисельному інтегруванні, розв‘язанні нелінійних рівнянь та обробці графічних зображень [17]. Наближення реальної функції деякою простішою функцією називається ***апроксимацією***.

Припустимо, що функція $f(x)$ задана таблицею значень $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$ для деякої кінцевої множини аргументів x_i (вузлові точки) і при розв‘язуванні задачі потрібно використовувати значення функції $f(x)$ у проміжних точках. Для апроксимації функції $f(x)$ використовують функцію $\varphi(x)$, яку будують так, щоб у заданих точках x_0, x_1, x_2, …, x_n вона приймала значення, які збігаються зі значеннями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$, а в інших точках відрізку $[a,b]$ приблизно зображувала функцію $f(x)$. Ступінь точності опису визначається в залежності від вибраного методу апроксимації [17].

2.1. Кусково-лінійна інтерполяція. Інтерполяційні поліноми вищих порядків. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Найпростішим прикладом побудови інтерполяційного поліному є ***кусково-лінійна інтерполяція***. При такому інтерполюванні будується відрізок прямої, яка проходить через дві сусідні вузлові точки (рис. 7).

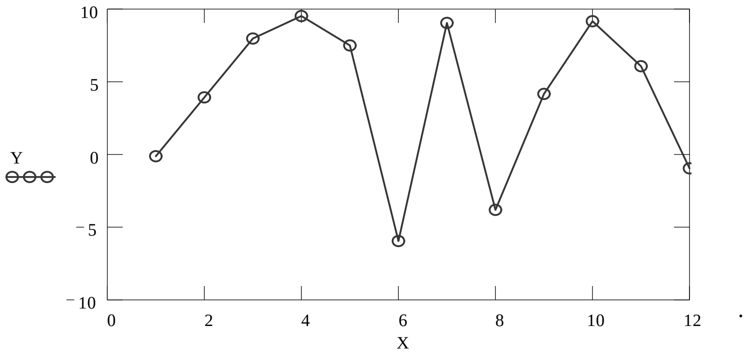


Рис. 7. Кусково-лінійна інтерполяція.

Тангенс кута нахилу між цими точками (x_0, y_0), (x_1, y_1) дорівнює $m = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$. Для точки y, що належить проміжку $[y_0, y_1]$, можемо записати:

$$y = P(x) = y_0 + m \cdot (x - x_0) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (44)$$

При побудові інтерполяційної функції необхідно, щоб початкова функція $F(x) \approx P(x)$. При класичному розв‘язуванні задачі вимагається також строгий збіг значень $F(x)$ та $P(x)$ у вузлах інтерполяції x_i.

Інтерполяційний поліном Лагранжа. Французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736-1813 р.р.) запропонував для побудови інтерполяційних поліномів наступний метод. Для двох вузлових точок (x_0, y_0), (x_1, y_1) він записав [13]:

$$y = P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (45)$$

Відношення при y_i називаються коефіцієнтами Лагранжа. Побудуємо коефіцієнти Лагранжа для n точок. Особливість їх побудови полягає у виключенні з ряду різниць, що перемножуються у чисельнику і знаменнику, різниці зі значенням x_i після знаку “–”. Для n точок коефіцієнт Лагранжа запишемо у загальному вигляді так:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{n-1})\cdot(x_i-x_n)} \tag{46}$$

Інтерполяційний поліном Лагранжа має вигляд:

$$P(x) = L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \tag{47}$$

Він дозволяє досить просто побудувати наближення функції по відомим вузловим точкам у випадку невеликої кількості точок. Зі збільшенням числа точок n порядок поліному збільшується відповідно до ступеню $(n-1)$.

Наприклад: функція, задана таблицею:

n	0	1	2
x	1	3	4
y	12	4	6

Ступінь поліному n = 2. Складемо інтерполяційний поліном Лагранжа для функції з трьох вузлових точок:

$$L_2(x) = 12\frac{(x-3)\cdot(x-4)}{(1-3)\cdot(1-4)} + 4\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-4)} + 6\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(4-1)\cdot(4-3)} =$$

$$= 2\cdot(x^2-7x+12) - 2\cdot(x^2-5x+4) + 2\cdot(x^2-4x+3) = 2x^2-12x+22$$

Графік, що відображає результати опису функції, поданий на рис. 8.

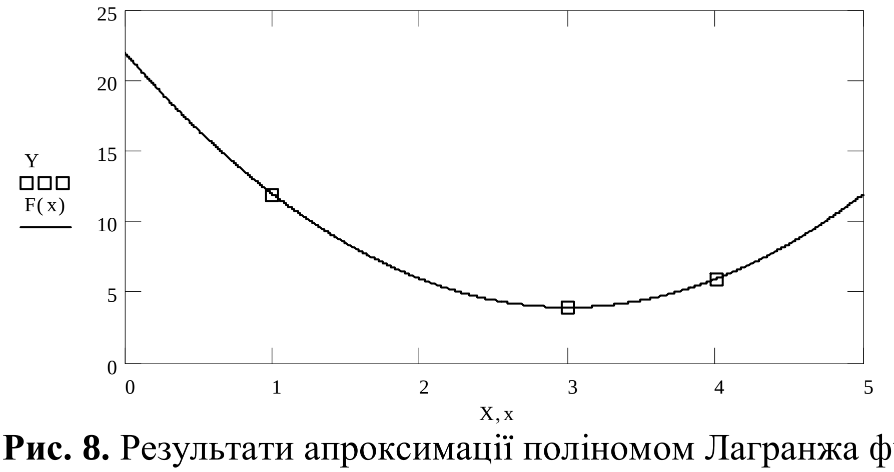


Рис. 8. Результати апроксимації поліномом Лагранжа функції, що задана таблицею.

При апроксимації складних функцій одним поліномом, такий поліном описує функцію з досить великими помилками: $\varepsilon = \left|F(x_j) - P(x_j)\right|$ де j – номери точок, які не є вузловими. У вузлових точках функція помилки за визначенням має значення нуль $\varepsilon = \left|F(x_j) - P(x_j)\right| = 0$.

Тому для опису таких функцій застосовують інші типи опису. Для опису складних функцій можуть застосовуватися інші поліноми (поліном Ньютона, ортогональні поліноми Чебишева, Лежандра, Ерміта та ін.) з рівновіддаленими чи адаптивно-підібраними вузловими точками. Але існує інший метод наближення – інтерполювання сплайнами.

2.2. Сплайн-інтерполяція

При ***сплайн-інтерполяції*** зберігається умова проходження наближуючої функції через вузлові точки. Сплайн (spline) переводиться з англійської, як гнучка лінійка. Сплайн-функції різняться ступенем поліному, що зображає функцію. Сутністю сплайн-інтерполяції є моделювання фрагментів заданої функції рядом поліномів низького ступеню. Прикладом такого інтерполювання є кусково-лінійне інтерполювання (рис. 7), де кожна з функцій будується по двом сусіднім вузловим точкам. Такий же принцип побудови зберігається і для формування поліномів вищих порядків, тільки кількість точок, на основі яких будується кожен з поліномів може бути більшою. Так, наприклад, для кусково-квадратичного поліному на проміжку $[x_0, x_N]$ береться кожен інтервал $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ для побудови на ньому квадратичного поліному. Але при побудові такого сплайну кривизна в парних вузлах різко змінюється, що відбивається на якості апроксимації.

Найбільш оптимальною на даний момент є ***кусково-кубічна сплайн-інтерполяція***. Вона широко застосовується у системах комп‘ютерної графіки та системах проектування з використанням комп‘ютера: CAD-системах (системи комп‘ютеризованої допомоги в дизайні та кресленні) та GIS-системах (географічні інформаційні системи).

За допомогою цього виду інтерполяції можливо побудувати гладку криву, що проходить через задані точки.

Означення. Припустимо, задані *(N+1)* точки, де їх абсциси x_i задовольняють умові $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_N = b$. Функція $S(x)$ називається кубічним сплайном, якщо існують *N* кубічних поліномів $S_k(x)$ з коефіцієнтами $s_{k,0}$, $s_{k,1}$, $s_{k,2}$ та $s_{k,3}$, що задовольняють наступним умовам:

1) $S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x-x_k) + s_{k,2}(x-x_k)^2 + s_{k,3}(x-x_k)^3$, де $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$;
2) кусочно-кубічний поліном (сплайн) заданий сукупністю точок $S(x_k) = y_k$, де $k = 0, 1, \ldots, N$;
3) сплайн-функція складається з поліномів (гладких функцій), які сполучуються у вузлових точках $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$, де $k = 0, 1, \ldots, N-2$;
4) сплайн-функція буде неперервною, якщо існує і безперервна її перша похідна $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$, де $k = 0, 1, \ldots, N-2$;
5) радіус кривизни сплайн-функції визначений в кожній точці (гладкість функції), якщо існує і безперервна її друга похідна $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$, де $k = 0, 1, \ldots, N-2$.

Кубічний поліноми для утворення сплайн-функції будується по трьом сусіднім точкам за загальною формулою:

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k \tag{48}$$

де $h_k = x_{k+1} - x_k$, $m_k = S''(x_k)$, $u_k = 6(d_k - d_{k-1})$, де в свою чергу $d_k = (y_{k+1} - y_k)/h_k$.

При формуванні сплайн-функції будуються *N-1* рівнянь з *N+1* змінними. Для їх розв‘язання систему треба доповнити двома додатковими рівняннями. В якості таких рівнянь вибирають обмеження в крайніх точках сплайну, що наведені в таблиці 8.

Розглянемо побудову зімкненого кубічного сплайну. Якщо відома перша похідна у початковій точці, можна обчислити m_0 і перше рівняння прийме вигляд:

$$2(h_0+h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - h_0 m_0 \tag{49}$$

Аналогічно обчислюємо останнє рівняння:

$$h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2}+h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1}m_N \tag{50}$$

Таблиця 8

Обмеження в крайніх точках кубічного сплайну [17].

№	Тип сплайну	Обмеження в крайніх точках
1	Зімкнений кубічний сплайн (найкращий, якщо відомі похідні): задається $S'(x_0)$, $S'(x_n)$	$m_0 = \frac{3}{h_0}(d_0 - S'(x_0)) - \frac{m_1}{2}$ $m_N = \frac{3}{h_{N-1}}(S'(x_N) - d_{N-1}) - \frac{m_{N-1}}{2}$
2	Природній кубічний сплайн (“релаксована крива”)	$m_0 = 0$, $m_N = 0$
3	Екстраполювання $S''(x)$ в крайніх обмежуючих точках	$m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ $m_N = m_{N-1} - \frac{h_{N-1}(m_{N-1} - m_{N-2})}{h_{N-2}}$
4	$S''(x)$ постійна біля крайніх точок	$m_0 = m_1$, $m_N = m_{N-1}$
5	Задавання $S''(x)$ в кожній крайній точці	$m_0 = S''(x_0)$, $m_N = S''(x_N)$

Отримуємо тридіагональну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_{N-2} \\ \upsilon_{N-1} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Коефіцієнти сплайну обчислюємо за формулами:

$$s_{k,0} = y_k; \qquad s_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6};$$
$$s_{k,2} = \frac{m_k}{2}; \qquad s_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k} \tag{52}$$

Для зручності обчислень кожен кубічний сплайн мотжемо записувати у формі вкладених перемножень:

$$S_k(x) = ((s_{k,3}\omega + s_{k,2})\omega + s_{k,1})\omega + y_k \ , \qquad (53)$$

де $\omega = x - x_k$; $x_k \le x \le x_{k+1}$. При побудові сплайнів зі складними обмеженнями в крайніх точках, що враховують першу похідну, як, наприклад, в зімкненому кубічному сплайні, отримуємо більш точний результат, ніж при константному здаванні значень другої похідної (2 та 4 сплайни в таблиці 8). Найкращий результат отримуємо при екстраполяційному задаванні других похідних. Це пояснюється адаптивністю даних обмежень відносно вхідних даних, що дозволяє точніше враховувати особливості функції не тільки в середині проміжку інтерполяції, а і біля кінців проміжку, де похибка апроксимації досягає найбільших значень.

У випадку константного задавання обмежень частину експериментальних точок на початку і вкінці проміжку «обрізають» для усунення великих похибок, які виникають в цих діапазонах. Тому при плануванні експерименту такі обчислювальні особливості потрібно враховувати.

Приклад. Обчислимо зімкнений кубічний сплайн, що проходить через точки (*0, 0*), (*1, 0.5*), (*2, 2*) та (*3, 1.5*). Перша похідна задовольняє граничним умовам $S'(0) = 0.2$ та $S'(3) = -1$. Обчислимо проміжні величини:

$$h_0 = h_1 = h_2 = 1;$$

$$d_0 = (y_1 - y_0)/h_0 = (0.5 - 0)/1 = 0.5;$$

$$d_1 = (y_2 - y_1)/h_1 = (2.0 - 0.5)/1 = 1.5;$$

$$d_2 = (y_3 - y_2)/h_2 = (1.5 - 2)/1 = - 0.5;$$

$$u_1 = 6(d_1 - d_0) = 6(1.5 - 0.5) = 6;$$

$$u_2 = 6(d_2 - d_1) = 6(-0.5 - 1.5) = -12.$$

Складемо основні рівняння (перше і останнє рівняння складають за формулами з табл. 8., інші рівняння – за формулою (48)):

$$\left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1\right)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - 3(d_0 - S'(x_0))$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k \qquad \text{для} \quad k = 2,3,...,N-1$$

$$h_{k-2}m_{k-2} + \left(2h_{N-2} + \frac{3}{2}h_{N-1}\right)m_{N-1} = u_{N-1} - 3(S'(x_N) - d_{N-1})$$

Підставимо конкретні значення:

$$\left(\frac{3}{2}+2\right)m_1 + m_2 = 6 - 3(0{,}5-2) \qquad \left(\frac{3}{2}+2\right)m_1 + m_2 = 5.1;$$

$$m_1 + \left(\frac{3}{2}+2\right)m_2 = -12 - 3(-1-(-0{,}5)) \qquad m_1 + \left(\frac{3}{2}+2\right)m_2 = -10.5$$

При спрощенні системи отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 1.0 \\ 1.0 & 3.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 \\ -10.5 \end{bmatrix}$$

Обчислимо значення m_1 = 2.52 та m_2 = -3.72 Скористаємося додатковими рівняннями з таблиці 8:

$$m_0 = 3(0.5-0.2) - \frac{2.52}{2} = -0.36$$

$$m_3 = 3(-1+0.5) - \frac{-3.72}{2} = 0.36$$

Підставимо розраховані значення у формули (52), за якими обчислимо коефіцієнти сплайн-функцій. Отримаємо наступні вирази сплайн-функцій:

$$S_0(x) = 0.48x^3 - 0.18x^2 + 0.2x \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$S_1(x) = -1.04(x-1)^3 + 1.26(x-1)^2 + 1.28(x-1) + 0.5 \qquad 1 \le x \le 2;$$

$$S_2(x) = 0.68(x-2)^3 - 1.86(x-2)^2 + 0.68(x-2) + 2 \qquad 2 \le x \le 3$$

Графічний розв‘язок системи поданий на рис. 5.4.

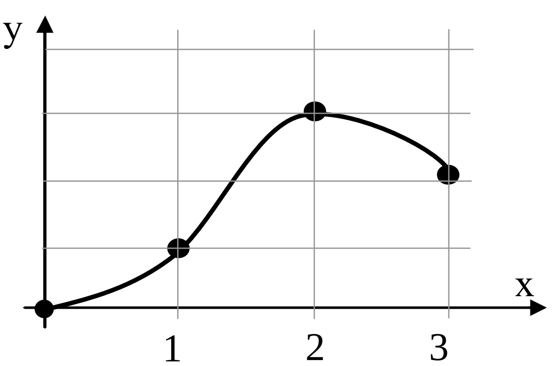


Рис. 9. Зімкнений кубічний сплайн.

Застосування Matlab.

Приклад 2. При формуванні у середовищі MatLAB [17] зімкненого кубічного сплайну, який проходить через точки (0, 0.0), (1, 0.5), (2, 2.0), (3, 1.5), з першою похідною у граничних точках *S'(0) = 0.2*; *S'(3) = -1* , функція задається так:

```
>> X = [0 1 2 3]; Y = [0 0.5 2.0 1.5]; dx0 = 0.2; dxn = -1;
>> S = zspline (X, Y, dx0, dxn)
S  =
  0.4800   -0.1800   0.2000   0
 -1.0400    1.2600   1.2800   0.5000
  0.6800   -1.8600   0.6800   2.0000
```

Графік сплайну будують, використовуючи команду *polyval*, яку потрібно задавати для кожного відрізка сплайну окремо:

```
>> x1 = 0 : .01 : 1; y1 = polyval (S(1,:),x1-X(1));
>> x2 = 1 : .01 : 2; y2 = polyval (S(2,:),x2-X(2));
>> x3 = 2 : .01 : 3; y3 = polyval (S(3,:),x3-X(3));
>> plot (x1,y1,x2,y2,x3,y3,X,Y,'.')
```

Контрольні питання.

1. Що називається апроксимацію функції?
2. Чим відрізняється інтерполяція від екстраполяції?
3. Від чого залежить точність інтерполяції функцій?
4. Які умови забезпечують неперервність і гладкість сплайну у кубічній сплайн-інтерполяції?
5. Які види кубічних сплайнів дозволяють отримати найвищу точність апроксимації?
6. При якій апроксимації, поліномом Лагранжа чи сплайном, досягається менша точність апроксимації функцій і чому?
7. При якому виді апроксимації необхідно знайти аналітичні вирази кількох апроксимуючих функцій?
8. Поліном Лагранжа якого ступеню отримаємо при його побудові на п'ятидесяти точках таблично заданої функції?
9. Як підвищити точність апроксимації функції кубічним сплайном?
10. Яку роль відіграє друга похідна від апроксимованої функції при сплайн-інтерполяції?

Контрольні завдання

1. Побудуйте поліном Лагранжа для функцій, яка задана таблицею:

Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**
x	2	4	6	8
y	3	10	8	5

2. Побудуйте кубічний зімкнений сплайн для функції, що задана у завданні 1. Порівняйте графічно сплайн-інтерполяцію з інтерполяцією поліномом Лагранжа.
3. Побудуйте кубічний природний сплайн для функції, що задана у завданні 1. Порівняйте графічно дану сплайн-інтерполяцію із сплайн-інтерполяцією зімкненим сплайном та інтерполяцією поліномом Лагранжа.

2.3. Апроксимація експериментальних даних. Метод найменших квадратів

При проведенні експериментів дослідник отримує дані, які є наближеними через неточність вимірювальних приладів, неточності відтворення умов спостережень, випадкові помилки та інші чинники. Для відновлення функції результатів спостережень або для заміни складної функції простішою для прискорення розрахунків часто використовують *метод найменших квадратів*.

Розглянемо задачу відновлення функції $f(t)$ результатів спостережень методом найменших квадратів [6]. Це задача мінімізації функціоналу. При її розв‘язанні необхідно забезпечити мінімум міри відхилень експериментальних значень від обраної функції в $(n+1)$ вузлових точках $(x_i\ ,\ y_i)$. Цільову функцію для цієї умови запишемо у вигляді:

$$I=\sum_{i=0}^{n}(f(x_i)-\varphi(x_i))^2\to\min \qquad (54)$$

де $\varphi(x_i)$ – базисні функції. Найчастіше базисні функції $\varphi(x_i)$ представляють у вигляді поліномів. Якщо функція $\varphi(x_i)$ задовольняє рівнянню 54, вона є поліномом найкращого середньоквадратичного наближення:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^k, \qquad k < n \tag{55}$$

де $c_0, c_1, ..., c_n$ – коефіцієнти узагальненого полінома. Тобто, побудова полінома найкращого середньоквадратичного наближення для заданої функції $f(t)$ зводиться до знаходження оптимального набору коефіцієнтів для $\varphi(x)$ у рівнянні (55). Для розв‘язання цієї задачі використаємо метод найменших квадратів.

У випадку, коли $k = n$ (формула 55) функція *φ (x)* збігається з інтерполяційним поліномом Лагранжа, побудованим по тих же вузлових точках. Для мінімізації цільової функції 54, функціоналу, необхідно, щоб перші похідні функціоналу *I* за його аргументами $c_0, c_1, ..., c_n$ дорівнювали нулю (необхідна умова екстремуму функції [17]):

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \qquad \forall i = 0,1,2,..., k. \tag{56}$$

Обчислимо похідні функціоналу по невідомих:

$$\frac{\partial I}{\partial c_0} = 2\sum_{i=0}^{n} (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^{\,2} + ... + c_k x_i^{\,k} - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_0 + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + ... + c_k \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,k} = \sum_{i=0}^{n} y_i \tag{57}$$

Проведемо заміну: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n+1}$

$$(n+1)c_0 + c_1(n+1)\bar{x} + c_2(n+1)\bar{x}^2 + ... + c_k(n+1)\bar{x}^k = (n+1)\bar{y}$$

$$c_0 + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + ... + c_k\bar{x}^k = \bar{y} \tag{58}$$

Обчислимо наступні похідні:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 2\sum_{i=0}^{n} (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^{\,2} + ... + c_k x_i^{\,k} - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + c_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,3} + ... + c_k \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,k+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \tag{59}$$

Отримаємо рівняння:

$$c_0\overline{x}+c_1\overline{x}^2+c_2\overline{x}^3+...+c_k\overline{x}^{k+1}=\overline{xy}, \quad \text{де} \quad \overline{xy}=\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i - y_i}{n+1} \tag{60}$$

У загальному випадку похідні функціоналу по невідомих:

$$\frac{\partial I}{\partial c_j}=2\sum_{i=0}^{n}(c_0+c_1x_i+c_2x_i^{\ 2}+...+c_jx_i^j+...+c_kx_i^{\ k}-y_i)\cdot x_i^j=0$$
$$\forall j=2,3,...,k \tag{61}$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$c_0\overline{x}^{\,j}+c_1\overline{x}^{\,j+1}+c_2\overline{x}^{\,j+2}+...+c_k\overline{x}^{\,j+k}=\overline{x}^{\,j}\overline{y} \tag{62}$$

Якщо система має єдиний розв‘язок, то він визначає коефіцієнти полінома найкращого середньоквадратичного наближення. Отриманий поліном $\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^k$ називається ***рівнянням регресії***.

Приклад. Запишемо систему рівнянь, складену за методом найменших квадратів для функціонала: $I(a_1,a_2,a_3)=a_1+a_2x+a_3x^2$.

$$\begin{cases} a_1\cdot(n+1)+a_2\sum_{i=0}^{n}x_i+a_3\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 2}=\sum_{i=0}^{n}y_i \\ a_1\sum_{i=0}^{n}x_i+a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 2}+a_3\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 3}=\sum_{i=0}^{n}(y_i\cdot x_i) \\ a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 2}+a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 3}+a_3\sum_{i=0}^{n}x_i^{\ 4}=\sum_{i=0}^{n}(y_i\cdot x_i^{\ 2}) \end{cases} \tag{63}$$

Якість апроксимації експериментальних даних поліномом *φ (x)* оцінюється залишковою дисперсією:

$$S^2=\frac{\sum_{i=0}^{n}(y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_m))^2}{p} \tag{64}$$

де p – число ступенів свободи, яке обчислюється як різниця між числом дослідних значень n і кількістю коефіцієнтів апроксимуючого поліному m ($p = n - m$). Для функцій з різною кількістю коефіцієнтів апроксимуючого поліному значення дисперсії будуть різними, з них вибирають той, який має найменше значення S^2.

2.4. Інтерполяція функцій ортогональними поліномами

Альтернативою методу найменших квадратів є метод, що оснований на використанні скалярних добутків базисних функцій [4, 15]. Якщо кожне рівняння системи:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x_0)c_0+\varphi_1(x_0)c_1+\ldots+\varphi_m(x_0)c_m = f(x_0)\\
&\varphi_0(x_1)c_0+\varphi_1(x_1)c_1+\ldots+\varphi_m(x_1)c_m = f(x_1)\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&\varphi_0(x_n)c_0+\varphi_1(x_n)c_1+\ldots+\varphi_m(x_n)c_m = f(x_n)
\end{aligned} \tag{65}$$

помножити на відповідну базисну функцію $\varphi_j(x)$, $j = 0,1,\ldots,m$, отримаємо систему рівнянь у *нормальній* формі:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_0\varphi_0)c_0+(\varphi_0\varphi_1)c_1+\ldots+(\varphi_0\varphi_m)c_m=(\varphi_0 f)\\
&(\varphi_1\varphi_0)c_0+(\varphi_1\varphi_1)c_1+\ldots+(\varphi_1\varphi_m)c_m=(\varphi_1 f)\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&(\varphi_m\varphi_0)c_0+(\varphi_m\varphi_1)c_1+\ldots+(\varphi_m\varphi_m)c_m=(\varphi_m f)
\end{aligned} \tag{66}$$

Система має ($m+1$) рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів c_j, $j=0,1,\ldots,m$ за значеннями функції f, що визначена на множині точок x_i, $i=0,1,\ldots,n$ для будь-якого $n \geq m$. Збільшення числа вузлових точок впливає лише на точність визначення скалярних добутків і не збільшує розмірності системи рівнянь.

Якщо в якості базисних функцій вибрати ортогональні поліноми (Лежандра, Чебишева, Ерміта та ін.), для яких $(\varphi_i,\varphi_j)=0$, $i \neq j$, $\|\varphi_i\| \neq 0$, обчислення коефіцієнтів c_j значно спрощується:

$$c_j=\frac{(f,\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)} \tag{67}$$

У цьому випадку похибка ортогональна до всіх $\varphi_j(x)$, $j = 0,1,\ldots,m$, тобто:

$$\sum_{j=0}^{m}(c_j\varphi_j - f\varphi_k) = 0, \quad k = 0,1,2,...,m \tag{68}$$

Спільною характеристикою для ортогональних поліномів є форма системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = c_{00} \\
&\varphi_1(x) = c_{10} + c_{11}x \\
&\varphi_2(x) = c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 \\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
&\varphi_m(x) = c_{m0} + c_{m1}x + c_{m2}x^2 + \dots + c_{mm}x^m
\end{aligned} \tag{69}$$

У загальному випадку систему можемо записати:

$$\begin{gathered}
\varphi^* = Ax^* \\
\varphi^*(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)] \qquad x^* = [x^0, x^1, x^2, ..., x^m]^T
\end{gathered} \tag{70}$$

У даній системі $A = \{a_{ij}\},\ i, j = 0,1,2,...,m$ – нижня трикутна матриця порядку ($m+1$). Розв‘язок задачі знайдемо з рівняння:

$$x^* = A^{-1}\varphi^*(x) = B\varphi^*(x) \tag{71}$$

звідки:

$$\begin{cases}
x^0 = b_{00}\varphi_0 \\
x^1 = b_{10}\varphi_0 + b_{11}\varphi_1 \\
x^2 = b_{20}\varphi_0 + b_{21}\varphi_0 + b_{22}\varphi_2 \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
x^m = b_{m0}\varphi_0 + b_{m1}\varphi_1 + b_{m2}\varphi_2 + \dots + b_{mm}\varphi_m
\end{cases} \tag{72}$$

Тобто, будь-який поліном n-го ступеню може бути представлений сукупністю базисних ортогональних поліномів виду:

$$p(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) \tag{73}$$

Такий алгоритм дозволяє проводити наближення функції ортогональними поліномами за допомогою множення на відповідну базисну функцію (66), а потім представляти наближення звичайною поліноміальною формою (73). Загальні формули ортогональних поліномів Лежандра, Чебишева і Ерміта наведені в таблиці 9.

Таблиця 9.

Властивості ортогональних поліномів [4]

Властивості	Поліном Лежандра	Поліном Чебишева	Поліном Ерміта
Область визначення	$-1 \le x \le 1$	$-1 \le x \le 1$	$-\infty \le x \le \infty$
φ_0	$P_0(x) = 1$	$T_0(x) = 1$	$H_0(x) = 1$
φ_1	$P_1(x) = x$	$T_1(x) = x$	$H_1(x) = x$
φ_2	$P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)$	$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
Рекурентна формула обчислення наступних поліномів	$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) -$ $- \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$	$T_{n+1}(x) =$ $= 2xT_n(x) -$ $- T_{n-1}(x)$	$H_{n+1}(x) =$ $= 2xH_n(x) -$ $- 2nH_{n-1}(x)$
Загальна формула опису	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \cdot$ $\cdot [(x^2 - 1)^n]$	$T_n(x) =$ $= \cos(n \cdot \arccos(x))$	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot$ $\cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Узагальнений інтерполяційний поліном *F(t)* в даному випадку можемо записати у вигляді:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N} f(t_n) \cdot \varphi(t_n) \tag{74}$$

В обчислювальній математиці часто використовується кусково-поліноміальна інтерполяція. Так, эрмітовим кубічним інтерполянтом називається кусково-кубічний інтерполянт з неперервною першою похідною, кубічним сплайном називається кусково-кубічний інтерполянт з двома першими неперервними похідними.

Контрольні питання

1. Для яких задач використовують метод найменших квадратів?
2. В чому полягає суть методу найменших квадратів?

3. Як будується поліном найкращого середньоквадратичного наближення?
4. Яке рівняння називається рівнянням регресії?
5. Як оцінюється якість апроксимації експериментальних даних?
6. Назвіть види ортогональних поліномів?
7. Обчислення якого ортогонального поліному у програмній реалізації займе найменше часу?

Контрольні завдання

1. Розрахуйте згладжуючи функцію для наближення експериментальних даних, що задані в таблиці, методом найменших квадратів. Визначте точність наближення.

Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x	0	2	4	6	8	10
y	7	5	-1	-3	9	6
Номер точки:→	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
x	12	14	16	18	20	22
y	-5	-2	3	7	11	8

2. Побудуйте поліном Чебишева для функції, що задана таблицею (таблиця завдання 1). Відобразіть на графіку задані точки та графік поліному Чебишева.
3. Побудуйте поліном Лежандра для функції, що задана таблицею (таблиця завдання 1). Відобразіть на графіку задані точки та графік поліному Лежандра.
4. Побудуйте поліном Ерміта для функції, що задана таблицею (таблиця завдання 1). Відобразіть на графіку задані точки та графік поліному Ерміта.

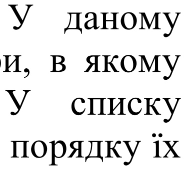
3. Методичні вказівки до виконання та оформлення розрахунково-графічної роботи

3.1. Методичні вказівки до виконання та оформлення розрахунково-графічної роботи для студентів стаціонару

Розрахунково-графічну роботу (РГР) студент виконує на листах формату А4, поля: ліве – 2 см, інші – 1 см. Титульний лист виконується за зразком, наведеним у додатку А. Нумерація сторінок починається з 2-ї сторінки. Варіанти вибираються з таблиці 1 (с. 51) в залежності від двох останніх цифр номеру залікової книжки. Розрахунки за варіантами виконуються в «ручному» вигляді, доповнюються необхідними коментарями й перевіряються у середовищі „Matlab", оформлюються у вигляді текстового документу у текстовому редакторі Word.

Опис кожного завдання починають з окремого листа. У завданні обов‘язковими є 1) формулювання завдання, 2) розв‘язок, 3) перевірка результатів, 4) відповідь (див. приклад оформлення завдання, с. 66). В кінці розрахунково-графічної роботи розміщується *список використаних джерел*, на який є посилання в тексті РГР (приклад оформлення списку джерел див. у додатку Б).

При виконанні завдання студент користується конспектом лекцій, рекомендованою літературою (с. 75-76) та Internet-посиланнями (с. 76). При використанні літературних та Internet-ресурсів обов'язково в тексті роботи наводяться посилання, наприклад: [3, с. 127-129]. У даному посиланні використовується 3-е джерело зі списку літератури, в якому наведені факти розміщуються на сторінках 127-129. У списку використаних джерел книги та Internet-ресурси нумеруються в порядку їх використання в тексті роботи.



Виконана робота роздруковується, підшивається і захищається студентом на підсумковому занятті з балами, що складають залікову оцінку за 5-й семестр. Захищена розрахунково-графічна робота є підсумковою за 5-й та допуском до іспиту з дисципліни „Чисельні методи в інформатиці ", який складається наприкінці 6-го семестру.

3.2. Методичні вказівки до виконання та оформлення розрахунково-графічної роботи для студентів заочної та екстернатної форм навчання

Студенти заочної та екстернатної форми навчання виконують розрахунково-графічну роботу після курсу лекцій. При виконанні завдання студент користується конспектом лекцій, рекомендованою літературою (с. 75-76) та Internet-посиланнями (с. 76). При використанні літературних та Internet-ресурсів обов'язково в тексті роботи наводяться посилання, наприклад: [3, с. 127-129]. У даному посиланні використовується 3-е джерело зі списку літератури, в якому наведені факти розміщуються на сторінках 127-129. У списку використаних джерел книги та Internet-ресурси нумеруються в порядку їх використання в тексті роботи.

Оформлюють роботу на листах формату А4, поля: ліве – 2 см, інші – 1 см. Титульний лист виконується за зразком, наведеним у додатку А. Нумерація сторінок починається з 2-ї сторінки. Варіанти вибираються з таблиці 1 (с. 51) в залежності від двох останніх цифр номеру залікової

книжки. Розрахунки за варіантами виконуються в «ручному» вигляді, доповнюються необхідними коментарями й перевіряються у середовищі „Matlab", оформлюються у вигляді текстового документу у текстовому редакторі Word, що дозволяє студентам-заочникам переслати роботу для попередньої перевірки викладачу по *e-mail*.

Опис кожного завдання починають з окремого листа. У завданні обов'язковими є 1) формулювання завдання, 2) розв'язок, 3) перевірка результатів, 4) відповідь (див. приклад оформлення завдання, с. 66). В кінці розрахунково-графічної роботи розміщується *список використаних джерел*, на який є посилання в тексті РГР (приклад оформлення списку джерел див. у додатку Б).

Виконана робота роздруковується, підшивається та захищається студентом на зимовій екзаменаційній сесії з балами, що складають залікову оцінку за 5-й семестр; та є допуском до іспиту з дисципліни „Чисельні методи в інформатиці ", який складається наприкінці 6-го семестру.

4. Варіанти завдань до виконання розрахунково-графічної роботи

Варіанти завдань студент вибирає за таблицею 1 керуючись двома останніми цифрами номера залікової книжки.

Таблиця 1

Варіанти завдань

Останні цифри номеру залікової книжки	Варіант	Останні цифри номеру залікової книжки	Варіант	Останні цифри номеру залікової книжки	Варіант
01	1	34	9	67	17
02	2	35	10	68	18
03	3	36	11	69	19
04	4	37	12	70	20
05	5	38	13	71	21
06	6	39	14	72	22
07	7	40	15	73	23
08	8	41	16	74	24
09	9	42	17	75	25
10	10	43	18	76	1
11	11	44	19	77	2
12	12	45	20	78	3
13	13	46	21	79	4
14	14	47	22	80	5
15	15	48	23	81	6
16	16	49	24	82	7
17	17	50	25	83	8
18	18	51	1	84	9
19	19	52	2	85	10
20	20	53	3	86	11
21	21	54	4	87	12
22	22	55	5	88	13
23	23	56	6	89	14
24	24	57	7	90	15
25	25	58	8	91	16
26	1	59	9	92	17
27	2	60	10	93	18
28	3	61	11	94	19
29	4	62	12	95	20
30	5	63	13	96	21
31	6	64	14	97	22
32	7	65	15	98	23
33	8	66	16	99	24

4.1. Завдання до розрахунково-графічної роботи.

Завдання 1. Розв‘язати функціональне рівняння двома заданими методами (табл. 2). $\varepsilon = 0.01$. Порівняти результати, отримані в кожному з методів і графічно. Пояснити (у відповіді), яку роль грає виконання попереднього етапу в заданих методах – етапу відокремлення коренів.

Таблиця 2

Варіант	1-й метод уточнення коренів	2-й метод уточнення коренів	Функціональне рівняння	Інтервал розв‘язання
1	половинного ділення	простої ітерації	$0.2^x - \sin 2x = 0$	[0, 4]
2	хорд	дотичних	$x - 3\sin x^x = 0$	[0.5, 2.5]
3	дотичних	половинного ділення	$\sin(x) - x^3 = 0$	[-2, 2]
4	січних	хорд	$\cos(-x^3) + \log(x^{0.5}) = 0$	[0.3, 2]
5	простої ітерації	січних	$-x^{0.5} + 2^x - 0.75 = 0$	[-1.5, 1.5]
6	половинного ділення	січних	$\sin(\ln(x^2) - x^5) = 0$	[0.2, 2]
7	хорд	простої ітерації	$x^{-0.5} - tg(x) = 0$	[0.5, 7]
8	дотичних	хорд	$x^{-x} - x^2 = 0$	[-10, -6]
9	січних	дотичних	$x^4 - 4^x + x^3 - 3^x = 0$	[-2, 4]
10	простої ітерації	половинного ділення	$x^3/2 - 3^x/4 + x^2 - 2^x = 0$	[-3, 5]
11	половинного ділення	дотичних	$2^x - 2\cos(x) = 0$	[-10, 2]
12	хорд	січних	$\sin(2x) - \ln(x) = 0$	[6, 10]
13	дотичних	простої ітерації	$x^3 - 5x^2 + 2 = 0$	[-2, 5]
14	січних	половин. ділення	$x^2\cos(2x) + 1 = 0$	[1, 6]
15	простої ітерації	дотичних	$\sin(x) - \sqrt{lg(x+2)} = 0$	[0, 9]
16	половинного ділення	хорд	$\cos(x)\log_3(x+1) + 1 = 0$	[2, 9]
17	хорд	половинного ділення	$arctg(x-1) + 3^{\sin(x)} - 2 = 0$	[0, 7]
18	дотичних	січних	$tg(0.5x) + 0.2 - x^2 = 0$	[-2, 3]
19	січних	простої ітерації	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	[-4, 9]
20	простої ітерації	хорд	$\cos(x) - \dfrac{1}{(3x)^3} = 0$	[-8,-1]
21	половинного ділення	простої ітерації	$\dfrac{1}{(\sin(x) + 1.5)^2} + 2x = 0$	[-4, 0]
22	хорд	січних	$\ln(0.5 - x + 2\sin^2(x)) = 0$	[-1, 2]
23	дотичних	хорд	$2^x - x^3 - 1 = 0$	[-1, 10]
24	січних	дотичних	$x^3 + 0.4^x - 1.2 = 0$	[-2, 2]
25	простої ітерації	половинного ділення	$2\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) - 0.5x^3 - 1 = 0$	[-2, 2]

Завдання 2. Розв‘язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом LU–розкладу та одним з ітераційних методів (за варіантом з табл. 3). Точність розв‘язків у ітераційному методі ε = 0,1. Перевірити результати розв‘язку. Порівняти отримані розв‘язки.

Таблиця 3

Варіант	Ітераційний метод	Система лінійних алгебраїчних рівнянь	Вектор початкових наближень
1	***2***	***3***	***4***
1	простої ітерації	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$
2	Зейделя	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 18 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	релаксації	$\begin{cases} 7x_1 + 11x_2 + 8x_3 = -1 \\ 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	простої ітерації	$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$
5	Зейделя	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$
6	релаксації	$\begin{cases} 11x_1 + 15x_2 + 8x_3 = 22 \\ -2x_1 + 14x_2 - 3x_3 = 11 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
7	простої ітерації	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 8 \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
8	Зейделя	$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ 9_1 - 5x_2 + 8x_3 = 7 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$
9	релаксації	$\begin{cases} 12x_1 + 18x_2 + 6x_3 = 20 \\ 22_1 - 14x_2 + 20x_3 = -18 \\ 17x_1 + 28x_2 - 19x_3 = 25 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1	2	3	4
10	простої ітерації	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 15 \\ 9_1 + 14x_2 + 7x_3 = -1 \\ 5x_1 + 11x_2 - 11x_3 = 5 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
11	Зейделя	$\begin{cases} 2.7x_1 + 14.9x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 1.3x_1 + 2.8x_2 - 9.3x_3 = 1.7 \\ 15.8x_1 + 4.1x_2 - 1.7x_3 = 0.8 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix}$
12	релаксації	$\begin{cases} 1.7x_1 + 2.8x_2 + 11.9x_3 = 0.7 \\ 12.1x_1 + 1.8x_2 + 1.3x_3 = 1.1 \\ 4.2x_1 + 11.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ -0.3 \end{pmatrix}$
13	простої ітерації	$\begin{cases} 3.7x_1 + 1.9x_2 + 9.3x_3 = 5.1 \\ 8.5x_1 + 1.4x_2 - 2.1x_3 = 3.5 \\ 1.8x_1 - 7.3x_2 - 0.7x_3 = -7.2 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
14	Зейделя	$\begin{cases} 0.34x_1 - 7.9x_2 + 0.3x_3 = -4.1 \\ 11.3x_1 + 2.8x_2 - 1.3x_3 = 0.7 \\ 1.8x_1 + 2.4x_2 + 7.7x_3 = 0.48 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
15	релаксації	$\begin{cases} -1.56x_1 + 1.9x_2 + 12.3x_3 = 4.1 \\ 6.3x_1 + 0.8x_2 - 0.3x_3 = -21.2 \\ 0.28x_1 + 8.1x_2 - 1.2x_3 = 3.8 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
16	простої ітерації	$\begin{cases} 2.66x_1 + 0.9x_2 + 15.3x_3 = 7.1 \\ 1.3x_1 + 22.8x_2 + 3.3x_3 = 6.89 \\ 15.8x_1 - 4.1x_2 - 1.7x_3 = 2.8 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
17	Зейделя	$\begin{cases} 21.6x_1 - 4.9x_2 + 1.3x_3 = 25.1 \\ 1.3x_1 + 2.5x_2 + 19.4x_3 = 1.55 \\ 5.8x_1 + 24.1x_2 - 1.9x_3 = 2.56 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$
18	релаксації	$\begin{cases} 5.89x_1 + 0.9x_2 + 0.3x_3 = 0.987 \\ 0.3x_1 + 0.8x_2 - 9.25x_3 = 10 \\ 1.8x_1 + 8.1x_2 - 0.7x_3 = 3.8 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$
19	простої ітерації	$\begin{cases} 15x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 9 \\ 8x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ 8x_1 + 12x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
20	Зейделя	$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 2 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$

1	2	3	4
21	релаксації	$\begin{cases} 2x_1 - 12x_2 + x_3 = 21 \\ 3x_1 + 5x_2 - 20x_3 = 4 \\ 9x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
22	простої ітерації	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 15x_3 = 8 \\ 2x_1 + 23x_2 + 4x_3 = 7 \\ 16x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
23	Зейделя	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
24	релаксації	$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \\ 7x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 6 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
25	простої ітерації	$\begin{cases} 9x_1 - 11x_2 + 13x_3 = 2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 8 \\ 11x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 5 \end{cases}$	$X^0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

Завдання 3. Розв‘язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з розрідженою (тридіагональною) матрицею коефіцієнтів спрощеним методом LU–розкладу чи методом прогонки (за варіантом з табл. 4). Виконати перевірку (A·X – B = …), визначити точність отриманих розв‘язків.

Таблиця 4

Варі-ант	Метод розв‘язання СЛАР	Система лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею
1	*2*	*3*
1	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

1	***2***	***3***
2	прогонки	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -7 \\ 8 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 6.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1.5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 8.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \\ 5.5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$
4	прогонки	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4.5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \\ 12 \\ 7 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$
5	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \\ -0.5 \end{pmatrix}$
6	прогонки	$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$

1	*2*	*3*
7	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6007 \\ 0.0103 \\ 0.6673 \\ 0.2111 \\ 0.6820 \\ 0.0195 \\ 0.4738 \end{pmatrix}$
8	прогонки	$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0695 \\ 0.6210 \\ 0.6085 \\ 1.9314 \\ 0.1553 \\ 1.2347 \\ 0.3765 \end{pmatrix}$
9	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -6 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -9 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$
10	прогонки	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -11 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$
11	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1	*2*	*3*
12	прогонки	$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -3 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
13	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
14	прогонки	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
15	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \\ 9 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$
16	прогонки	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1	2	3
17	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \\ 10 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$
18	прогонки	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
19	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
20	прогонки	$\begin{pmatrix} -7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
21	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -8 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

1	*2*	*3*
22	прогонки	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 9 \\ 4 \\ 9 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$
23	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$
24	прогонки	$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 9 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 11 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$
25	спрощений LU-розкладу	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -2 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Завдання 4. Розв‘язати систему нелінійних рівнянь (СНР) вказаним за варіантом методом (табл. 5). Початкове наближення розрахувати графічним методом (див. приклад 4 на с. 35). Похибка результатів має бути не більше $\varepsilon = 0.01$. Перевірити достовірність отриманих розв‘язків ($F(X_n)=0$).

Таблиця 5

Варіант	Метод розв‘язання СНР	Система нелінійних рівнянь
1	***2***	***3***
1	Ньютона	$\begin{cases} \sin(x) - y - 1.32 = 0 \\ \cos(y) - x + 0.85 = 0 \end{cases}$
2	Зейделя	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy^3 - y = 3 \end{cases}$
3	простої ітерації	$\begin{cases} x^3 + y^3 - 7x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 7y + 2 = 0 \end{cases}$
4	Ньютона	$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - 0.5x^2 = 1 \end{cases}$
5	Зейделя	$\begin{cases} \sin(x + 1) - y = 1 \\ 2x + \cos(y) = 2 \end{cases}$
6	простої ітерації	$\begin{cases} y - 0.5x^2 + x = 0.5 \\ 2x + y - \frac{1}{6}y^3 = 1.6 \end{cases}$
7	Ньютона	$\begin{cases} \cos\left(\frac{x - y}{3}\right) - 2y + 1 = 0 \\ \sin\left(\frac{x + y}{3}\right) - 2x + 5 = 0 \end{cases}$
8	Зейделя	$\begin{cases} \cos(x - 1) + y = 0.8 \\ x - \cos(y) = 3 \end{cases}$
9	простої ітерації	$\begin{cases} 5x - 6y + 20lg(x) + 16 = 0 \\ 2x + y - 10lg(y) - 4 = 0 \end{cases}$
10	Ньютона	$\begin{cases} 3x^2 y + y^2 = 1 \\ x^4 + xy^3 = 1 \end{cases}$
11	Зейделя	$\begin{cases} x^3 - y^2 = 1 \\ xy^3 - y = 4 \end{cases}$
12	простої ітерації	$\begin{cases} x^7 - 5x^2 y^4 + 1510 = 0 \\ y^5 - 3x^4 y - 105 = 0 \end{cases}$
13	Ньютона	$\begin{cases} x^2 y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0 \\ x^4 - 9y + 2 = 0 \end{cases}$
14	Зейделя	$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y\sin y - x = 1 \end{cases}$

1	*2*	*3*
15	простої ітерації	$\begin{cases} e^{xy} = x - y + 1 \\ (x + 0.5)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
16	Ньютона	$\begin{cases} \cos(0.4y + x^2) + x^2 + y^2 = 1.6 \\ 1.5x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$
17	Зейделя	$\begin{cases} \sin(x - y) - xy + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0.75 \end{cases}$
18	простої ітерації	$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
19	Ньютона	$\begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0 \\ 2x + y - 10\lg y - 4 = 0 \end{cases}$
20	Зейделя	$\begin{cases} 15x - 20y - 60\lg x = 6 \\ 4x - 5y - 29\lg y = 5 \end{cases}$
21	простої ітерації	$\begin{cases} 2x - y - 6\lg y = 0 \\ 15x - 10y - 60\lg x = 6 \end{cases}$
22	Ньютона	$\begin{cases} 6x - 5y - 30\lg x - 12 = 0 \\ 3x - 3y + 30\lg(x) + 10 = 0 \end{cases}$
23	Зейделя	$\begin{cases} tg(x + y) + 0.1 = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
24	простої ітерації	$\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 1.5 \\ e^{xy} - x + y = 0 \end{cases}$
25	Ньютона	$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3xy^2 + 6xy - x - 2y^2 + y = 4 = 0 \\ -y^3 + 3y^2 - 3x^2 y + 4xy - y - 3x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

Завдання 5. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції, що задана таблично. Побудувати графік заданих точок та отриманого поліному Лагранжа.

Таблиця 6.

Варіант	Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	***x***	0	2	5	8	9
	y	3	5	7	4	5
2	***x***	7	14	23	31	35
	y	8	2	12	17	10
3	***x***	1	2	3	4	5
	y	7	3	5	11	8

Продовження табл. 6

Варіант	Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
4	***x***	1	3	5	8	11
	y	7	5	1	8	5
5	***x***	0	2	4	6	8
	y	11	12	7	22	5
6	***x***	15	16	18	20	23
	y	7	9	4	12	1
7	***x***	10	15	20	25	30
	y	5	11	14	3	-1
8	***x***	3	4	5	6	7
	y	12	-1	5	8	3
9	***x***	-2	-1	0	1	2
	y	14	8	-4	6	3
10	***x***	-7	-4	-1	2	5
	y	3	-11	-5	4	-7
11	***x***	-0,9	0,0	0,5	-0,8	0,7
	y	0,895	1,035	1,131	0,908	1,172
12	***x***	4,0	3,5	2,8	3,9	2,3
	y	2,011	1,873	1,683	1,983	1,552
13	***x***	-4,8	-4,1	-5,3	-4,2	-4,9
	y	1,108	0,940	1,283	0,954	1,140
14	***x***	6,5	7,7	8,2	6,2	7,4
	y	2,698	3,004	3,123	2,618	2,930
15	***x***	-5	-1.6	-0.8	-0.2	0.6
	y	-2.31	-1.25	-0.73	-0.2	0.57
16	***x***	0.5	1	1.5	2	2.5
	y	2.5	2	2.17	2.5	2.9
17	***x***	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	y	-0.01	-0.03	-0.09	-0.12	-0.08
18	***x***	1	2.5	3	4.1	5.3
	y	-0.79	-0.27	-0.15	0.08	0.28
19	***x***	-2	-1.5	-0.5	0	1
	y	5	3.75	2.75	3	5
20	***x***	0	0.2	0.4	0.6	0.8
	y	1.2	2.4	3.6	4.8	5.9
21	***x***	-10	-7	-4	-1	2
	y	1.73	0.51	2.13	0.43	2.48

Продовження табл. 6

Варіант	Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
22	***x***	1.5	3.5	5.5	7.5	9.5
	y	0.36	0.07	0.03	0.017	0.011
23	***x***	1	3	5	7	9
	y	6.93	17.91	23.02	36.39	28.9
24	***x***	-5	-3	-1	1	3
	y	0.06	0.047	0.26	0.73	0.95
25	***x***	-3	0	3	6	9
	y	-0.98	1	-0.75	-0.64	0.03

Завдання 6. Побудувати замкнений кубічний сплайн (непарні варанти 1, 3, 5 …) чи природній кубічний сплайн (парні варіанти: 2, 4, 6 …) для функції, що задана таблицею (див. варіанти **завдання 5**). На графічному полотні попереднього завдання побудувати графік кубічного сплайну (наклавши його на графік заданих точок та отриманого поліному Лагранжа).

Завдання 7*[1]. Побудувати згладжуючу функцію за методом найменших квадратів для функції, що задана таблицею (див. варіанти **завдання 5**). Побудувати графік даних точок та згладжуючої функції.

Завдання 8*. Побудувати поліном Чебишева для таблично заданої функції (за варіантом табл. 7). Побудувати графік заданих точок та поліному Чебишева.

[1] Завдання, відмічені зірочкою (*) до виконання не обов‘язкові. При їх правильному виконанні студент може набрати додатково сумарно до 33% балів за розрахунково-графічну роботу.

Таблиця 7.

Варіант	Номер точки:→	**1**	**2**	**3**	**4**
1	***x***	1	6	10	14
	y	3	8	7	5
2	***x***	3	5	7	9
	y	1	-3	4	2
3	***x***	1	2	3	5
	y	7	4	11	15
4	***x***	15	20	25	30
	y	7	1	9	8
5	***x***	5	7	9	11
	y	3	8	-2	0,5

Завдання 9*. Побудувати поліном Ерміта для таблично заданої функції (за варіантом табл. 7). Побудувати графік заданих точок та поліному Ерміта.

5. Приклади виконання завдань.

<u>Завдання 1.</u> Розв‘язати функціональне рівняння $sin(x^3)=0$ на проміжку $[1.4, 1.8]$ методами половинного ділення та методом простої ітерації. Точність отримання розв‘язків $\varepsilon = 0.01$. Порівняти результати, отримані в кожному з методів. Пояснити (у відповіді), яку роль грає виконання попереднього етапу в заданих методах – етапу відокремлення коренів.

Розв‘язок. 1) Для знаходження всіх коренів на заданому проміжку $[1.4, 1.8]$ проведемо етап відокремлення коренів. Вирахуємо з кроком $h = 0.1$ значення функції $f(x) = sin(x^3)$.

$sin(1.4^3) = 0.3872$ $\quad$ $sin(1.5^3) = -0.2313$ $\quad$ $sin(1.6^3) = -0.816$

$sin(1.7^3) = -0.9799$ $\quad$ $sin(1.8^3) = -0.436$

Функція змінює знак на проміжку: ***[1.4; 1.5]***. На цих проміжках уточнимо значення функції за методом половинного ділення.

2) Для уточнення значень функції на проміжку ***[1.4; 1.5]***, поділимо його навпіл точкою $x_c = 0.5 \cdot (1.4 + 1.5) = 1.45$. Значення функції:

$$f(a) = sin(1.4^3) = 0.3872$$

$$f(x_c) = sin(1.45^3) = 0.0928,$$

$$f(b) = sin(1.5^3) = -0.2313.$$

Функція змінює знак на проміжку ***[1.45; 1.5]***. Перевіримо умову виходу $|1.5 - 1.45| = |0.05| > 0.01$, тому продовжимо ітерації й поділимо проміжок навпіл точкою $x_{c1} = 0.5 \cdot (1.45 + 1.5) = 1.475$. Значення функції:

$$f(a_1) = sin(1.45^3) = 0.0928 \quad ,$$

$$f(x_{c1}) = sin(1.475^3) = -0.0674,$$

$$f(b_1) = sin(1.5^3) = -0.2313 \ .$$

Функція змінює знак на проміжку ***[1.45; 1.475]***. Перевіримо умову виходу $|1.5 - 1.475| = |0.025| > 0.01$, тому продовжимо ітерації й поділимо проміжок навпіл точкою $x_{c2} = 0.5 \cdot (1.45 + 1.475) = 1.4625$. Значення функції:

$$f(a_2) = sin(1.45^3) = 0.0928 \quad ,$$

$$f(x_{c2}) = sin(1.4625^3) = 0.0134 \quad ,$$

$$f(b_2) = sin(1.475^3) = -0.0674 \quad .$$

Функція змінює знак на проміжку ***[1.4625; 1.475]***. Перевіримо умову виходу $|1.475 - 1.4625| = |0.0125| > 0.01$, тому продовжимо ітерації й поділимо проміжок навпіл точкою $x_{c2} = 0.5 \cdot (1.4625 + 1.475) = 1.46875$. Значення функції:

$$f(x_{c2}) = \sin(1.4625^3) = 0.0134 \ ,$$

$$f(x_{c3}) = \sin(1.46875^3) = -0.0268 \ ,$$

$$f(b_2) = \sin(1.475^3) = -0.0674 \ .$$

Функція змінює знак на проміжку ***[1.46875; 1.475]***. Перевіримо умову виходу $|1.4625 - 1.46875| = |-0.00625| < 0.01$, тому припиняємо ітерації. Корінь рівняння на даному проміжку беремо як середину проміжку ***[1.4625; 1.46875]***. $x_{c3} = 1.4656$ знайдений з точністю $\varepsilon = 0.01$.

3) Перевіримо отриманий розв‘язок, знаходячи корінь за методом простої ітерації. Для здійснення кроків за цим методом приведемо рівняння до виду $x = f(x)$, користуючись обмеженнями по збіжності ітераційного процесу: $x = x - m \cdot F(x)$, де $m = 1/(\max(F'(x)))$ на заданому відрізку. $F'(x) = (\sin(x^3)) = 3x^2 \cos(x^3)$. На відрізку ***[1.4; 1.5]*** похідна в точках:

$$F'(1.4) = -5.4213;\ F'(1.42) = -5.8164;\ F'(1.44) = -6.1456;$$
$$F'(1.46) = -6.3920;\ F'(1.48) = -6.5382;\ F'(1.5) = -6.567 \ .$$

Максимальне значення $F'(1.5) = -6.567$ використаємо для знаходження $m = 1/(\max(F'(x)))$. $m = 1/-6.567 = -0.152$. Таким чином ітераційний вид рівняння має вигляд: $x_i = x_{i-1} + 0.152 \cdot \sin(x_{i-1}^3)$.

Розрахуємо значення функції на перших двох ітераціях, приймаючи за $x_0 = 1.4$:

$$x_1 = x_0 + 0.152 \cdot \sin(x_0^3) = 1.4 + 0.152 \cdot \sin(1.4^3) = 1.4589$$

$$x_2 = x_1 + 0.152 \cdot \sin(x_1^3) = 1.4589 + 0.152 \cdot \sin(1.4589^3) = 1.4644$$

Перевіримо умову виходу з ітераційного процесу при $q = 0.5$:

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \ \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \le \frac{0.5}{1-0.5}|x_2 - x_1|$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\sin(1.4644^3) - \sin(1.4589^3)| = |0.0012 - 0.0365| = 0.0353$$

$$|x_2 - x_1| = |1.4644 - 1.4589| = 0.0055$$

Таким чином, прирощення функції менше, ніж прирощення аргументу: $|\sin(1.4644^3) - \sin(1.4589^3)| = 0.0353 < |1.4644 - 1.4589| = 0.0055$. Ітераційний процес припиняємо, в якості відповіді обираємо $x_2 = 1.4644$.

Перевірка результатів розв‘язку:

Розв‘язки, отримані методом половинного ділення: $x_{c3} = 1.4656$ та методом простої ітерації $x_2 = 1.4644$, близькі по значенню і відповідають розташуванню кореня при графічному відображенні (рис. 1.1). При підстановці їх у початкове рівняння отримаємо:

$sin(1.4656^{3}) = -0.0065$ та $sin(1.4644^{3}) = 0.0012$, що відповідає наближенню значення функції до нуля.

Значення $x_{c3} = 1.4656$, розраховане за методом половинного ділення, знайдене з точністю $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow |0.0065| < 0.01 = \varepsilon_{ПД}$. Значення за методом простої ітерації $x_2 = 1.4644$ отримано точніше, похибка не перевищує $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow |0.0012| < 0.01 = \varepsilon_{ПІ}$.

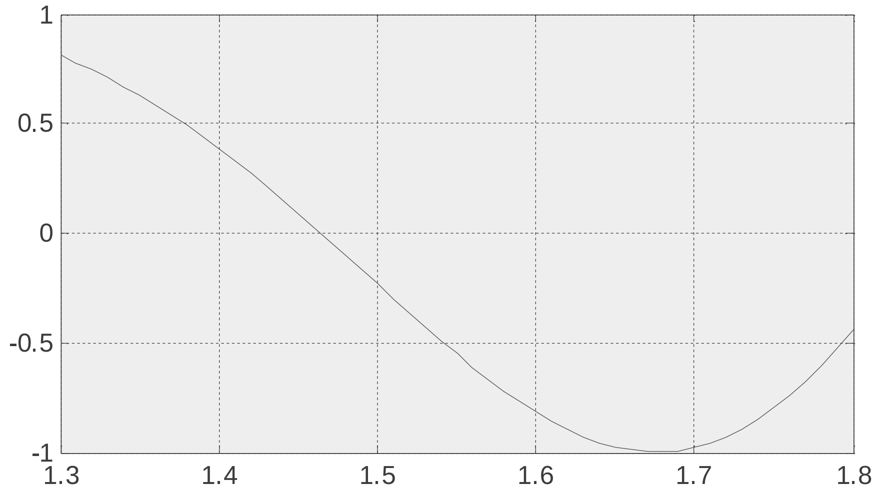


Рис. 1.1. Графік функції $f(x) = sin(x^3)$ на проміжку ***[1.4; 1.8]***.

Відповідь: Значення функції $sin(x^3) = 0$ отримане методом половинного ділення $x_{П Д} = 1.4656$ знайдене з точністю $\varepsilon = 0.01$. Значення, отримане за методом простої ітерації $x_{П І} = 1.4644$, похибка розв‘язку не перевищує $\varepsilon = 0.01$.

Етап відокремлення коренів необхідно проводити для знаходження всіх коренів на заданому проміжку.

Завдання 2. Розв‘язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ методом LU-розкладу та методом релаксації. Точність розв‘язків у ітераційному методі ε = 0,1. Порівняти отримані розв‘язки.

Розв‘язок 2.1. 1) Для розв‘язання СЛАР методом LU-розкладу розкладемо матрицю $\boldsymbol{A}$ на дві трикутні матриці $\boldsymbol{L}$ та $\boldsymbol{U}$. Для цього помножимо матрицю $\boldsymbol{A}$ на одиничну матрицю $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ зліва. Перший рядок обох матриць залишимо незмінним, а від другого рядка матриці $\boldsymbol{A}$ віднімемо перший рядок, помножений на коефіцієнт $4/2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad 4/2 \times \ (2 \ \ 3) \qquad (4 \ \ 6)$$

В одиничній матриці запишемо отриманий перетворюючий коефіцієнт в позицію онулення $\boldsymbol{I(2, 1)}$. Таким чином, отримуємо з матриці коефіцієнтів $\boldsymbol{A}$ дві трикутні матриці: нижню трикутну матрицю $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ та верхню трикутну матрицю $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь $AX = B$ перетворюється на систему $LUX = B$.

2) Зворотній хід методу LU-розкладу виконуємо в два етапи:

$$\begin{matrix} 1 \ \text{етап} \ \ LY = B & & \Rightarrow \ Y \\ 2 \ \text{етап} \ \ UX = Y & \text{звідки знаходимо відповідно} & \Rightarrow \ X \end{matrix}$$

На 1-у етапі розв‘язуємо систему $LY = B$, починаючи з 1-го рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 + 0 \cdot y_2 = 5 \\ 2y_1 + y_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow \Downarrow \begin{matrix} y_1 = 5 \\ y_2 = 5 - 2 \cdot y_1 = 5 - 10 = -5 \end{matrix}$$

На 2-у етапі розв‘язуємо систему $UX = Y$, починаючи з останнього рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 0x_1 - 5x_2 = -5 \end{matrix} \Rightarrow \Uparrow \begin{matrix} x_1 = 1/2 \cdot (5 - 3x_2) = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

Перевірка результатів розв‘язку:

Розв‘язок, отриманий методом LU-розкладу: $x_1 = 1; \ x_2 = 1$, при підстановці у початкову систему рівнянь: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ дозволяє отримати значення вектора **B**. Результат є точним, похибка методу і обчислювальна похибка $\varepsilon + \varepsilon_{обчисл.} = 0 + 0 = 0$.

Розв‘язок 2.2. 1) Для забезпечення збіжності ітераційного процесу до розв‘язку в методі релаксації проведемо нормалізацію початкової СЛАР:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2) В якості вектора початкових наближень обираємо $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

3) Ітерації проводимо, підставляючи значення вектора початкових наближень у нормалізовану систему, приведену до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^0} \begin{cases} 20 \cdot 1.5 + 10 \cdot 0.6 - 30 = 6 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.5 + 10 \cdot 0.6 - 20 = 1 = \delta_2 \end{cases}$$

На першому кроці максимальна по модулю нев‘язка $|\delta_1| = 6$. Тому для знаходження значення x_1 виберемо перше рівняння. Онулимо максимальну нев‘язку: $\delta_1 = 0$, тоді:

$$20 \cdot x_1 + 10 \cdot 0.6 - 30 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.6) = \frac{24}{20} = 1.2$$

4) На другому кроці вектор наближень $X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$.

Проведемо наступну ітерацію:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^1} \begin{cases} 20 \cdot 1.2 + 10 \cdot 0.6 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.2 + 10 \cdot 0.6 - 20 = -2 = \delta_2 \end{cases}$$

Максимальна по модулю нев‘язка $|\delta_2| = 2$. Оскільки $|\delta_2| = 2 > 0.1$ і умова виходу з ітераційного процесу $|max(\delta_i)| < 0.1$ не виконується продовжимо ітерації.

Для знаходження значення x_2 виберемо друге рівняння. Онулимо максимальну нев‘язку: $\delta_2 = 0$, тоді:

$$10 \cdot 1.2 + 10 \cdot x_2 - 20 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.2) = \frac{8}{10} = 0.8$$

5) На третьому кроці вектор наближень $X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$.

Проведемо наступні ітерації до виконання умови виходу з ітерацій:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^2} \begin{cases} 20 \cdot 1.2 + 10 \cdot 0.8 - 30 = 2 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.2 + 10 \cdot 0.8 - 20 = 0 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_1 з 1-го рівняння за умов онулення δ_1 ($\delta_1 = 0$) дорівнює:

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.8) = \frac{22}{20} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad X^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_1| = 1$. $|\delta_1| = 1 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^3} \begin{cases} 20 \cdot 1.1 + 10 \cdot 0.8 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.1 + 10 \cdot 0.8 - 20 = -1 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_2 з 2-го рівняння за умов, онулення δ_2 ($\delta_2 = 0$) дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.1) = \frac{9}{10} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad X^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_2| = 1$. $|\delta_2| = 1 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^4} \begin{cases} 20 \cdot 1.1 + 10 \cdot 0.9 - 30 = 1 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.1 + 10 \cdot 0.9 - 20 = 0 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_1 з 1-го рівняння за умов онулення δ_1 ($\delta_1 = 0$) дорівнює:

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.9) = \frac{21}{20} = 1.05 \quad \Rightarrow \quad X^5 = \begin{pmatrix} x_1^5 \\ x_2^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.05 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_1| = 1$. $|\delta_1| = 1 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^5} \begin{cases} 20 \cdot 1.05 + 10 \cdot 0.9 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.05 + 10 \cdot 0.9 - 20 = -0.5 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_2 з 2-го рівняння за умов, онулення δ_2 ($\delta_2 = 0$) дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.05) = \frac{9.5}{10} = 0.95 \quad \Rightarrow \quad X^6 = \begin{pmatrix} x_1^6 \\ x_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.05 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_2| = 0.5$. $|\delta_2| = 0.5 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^6} \begin{cases} 20 \cdot 1.05 + 10 \cdot 0.95 - 30 = 0.5 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.05 + 10 \cdot 0.95 - 20 = 0 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_1 з 1-го рівняння за умов онулення δ_1 ($\delta_1 = 0$) дорівнює:

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.95) = \frac{20.5}{20} = 1.025 \quad \Rightarrow \quad X^7 = \begin{pmatrix} x_1^7 \\ x_2^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_1| = 0.5$. $|\delta_1| = 0.5 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^7} \begin{cases} 20 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.95 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.95 - 20 = -0.25 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_2 з 2-го рівняння за умов, онулення δ_2 ($\delta_2 = 0$) дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.025) = \frac{9.75}{10} = 0.975 \quad \Rightarrow \quad X^8 = \begin{pmatrix} x_1^8 \\ x_2^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.975 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_2| = 0.25$. $|\delta_2| = 0.25 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^8} \begin{cases} 20 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.975 - 30 = 0.25 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.975 - 20 = 0 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_1 з 1-го рівняння за умов онулення δ_1 ($\delta_1 = 0$) дорівнює:

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.975) = \frac{20.25}{20} = 1.0125 \quad \Rightarrow \quad X^9 = \begin{pmatrix} x_1^9 \\ x_2^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0125 \\ 0.975 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_1| = 0.25$. $|\delta_1| = 0.25 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^9} \begin{cases} 20 \cdot 1.0125 + 10 \cdot 0.975 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.0125 + 10 \cdot 0.975 - 20 = -0.125 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_2 з 2-го рівняння за умов, онулення δ_2 ($\delta_2 = 0$) дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.0125) = \frac{9.875}{10} = 0.9875 \quad \Rightarrow \quad X^{10} = \begin{pmatrix} x_1^{10} \\ x_2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0125 \\ 0.9875 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_2| = 0.125$. $|\delta_2| = 0.125 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^{10}} \begin{cases} 20 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.9875 - 30 = 0.25 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.025 + 10 \cdot 0.9875 - 20 = 0 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_1 з 1-го рівняння за умов онулення δ_1 ($\delta_1 = 0$) дорівнює:

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 10 \cdot 0.9875) = \frac{20.125}{20} = 1.00625 \quad \Rightarrow \quad X^{11} = \begin{pmatrix} x_1^{11} \\ x_2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00625 \\ 0.9875 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_1| = 0.25$. $|\delta_1| = 0.25 > 0.1$ умова виходу з ітерацій не виконується.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 - 30 = 0 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X^{11}} \begin{cases} 20 \cdot 1.00625 + 10 \cdot 0.9875 - 30 = 0 = \delta_1 \\ 10 \cdot 1.00625 + 10 \cdot 0.9875 - 20 = -0.0625 = \delta_2 \end{cases}$$

Значення x_2 з 2-го рівняння за умов, онулення δ_2 ($\delta_2 = 0$) дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{10}(20 - 10 \cdot 1.00625) = \frac{9.9375}{10} = 0.99375 \quad \Rightarrow \quad X^{12} = \begin{pmatrix} x_1^{12} \\ x_2^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00625 \\ 0.99375 \end{pmatrix}$$

$\delta_{max} = |\delta_2| = 0.0625$. $|\delta_2| = 0.0625 < 0.1$ умова виходу з ітерацій виконується, тому припиняємо ітераційний процес.

Перевірка результатів розв‘язку:

Розв‘язок, отриманий методом релаксації: $x_1 = 1.00625;\ \ x_2 = 0.99375$, при підстановці у початкову систему рівнянь: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.00625 \\ 0.99375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9938 \\ 5.0188 \end{pmatrix}$ дозволяє отримати значення вектора **B**, що не більше, ніж на $\varepsilon = 0.1$, відрізняються від заданих: $\left|b_1 - b_{1(R)}\right| = \left|5 - 4.9938\right| = 0.0062 < \varepsilon = 0.1$, $\left|b_2 - b_{2(R)}\right| = \left|5 - 5.0188\right| = 0.0188 < \varepsilon = 0.1,$ а значить його можна вважати достовірним розв‘язком, отриманим з точністю $\varepsilon = 0.1$.

Відповідь:

Розв‘язком заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом LU-розкладу є значення $x_1 = 1;\ \ x_2 = 1$.

Розв‘язком заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь за методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0.1$ є значення $x_1 = 1.00625;\ \ x_2 = 0.99375$.

Порівнюючи отримані результати, можна сказати, що вони відрізняються не більше ніж на $\varepsilon = 0.1$:

$\left|x_{1(LU)} - x_{1(R)}\right| = \left|1 - 1.00625\right| = 0.00625 < \varepsilon = 0.1$,

$\left|x_{2(LU)} - x_{2(R)}\right| = \left|1 - 0.99375\right| = 0.00625 < \varepsilon = 0.1$

і їх можна вважати достовірними.

5.1. Типові запитання

При виконанні і оформленні розрахунково-графічної роботи найчастіше виникають наступні запитання:

1) Як провести перевірку достовірності отриманого результату?

Відповідь: При перевірці значення, що приймаються за результат підставляють в початкове рівняння чи систему рівнянь і розраховують значення кожного рівняння. Якщо підставлені результати перетворюють всі рівняння у вірні (або наближаються до вірного із заданою точністю ε), значить вони є достовірними.

2) Як оцінити якість побудови сплайну?

Відповідь: При відображенні сплайну на підсумковому графіку відрізки сплайну мають бути сполучені плавно (без зламів чи розривів), сплайн функція має співпадати у вузлових точках з оригінальною функцією, чи відповідними значеннями функції, що задана таблицею.

3) Як правильно написати висновок про достовірність отриманих розв‘язків?

Відповідь: Про достовірність отриманих розв‘язків може свідчити перевірка результатів, чи порівняння отриманих результатів з результатами розв‘язку цієї ж системи іншим (можливо, точним) методом. Приклад висновку наведений у відповіді завдання 2 (с. 73).

4) Чому розв‘язки, отримані за методом Ньютона для розв‘язання систем нелінійних рівнянь, мають велику похибку.

Відповідь: Великі похибки результатів можуть виникати, якщо початкове наближення, яке знаходиться графічно, визначено дуже приблизно і не виконуються умови теореми 3 (с. 27), тобто якщо по підрахункам за початковим вектором $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y}(x,y,z)\right| + \left|\frac{\partial f_i}{\partial z}(x,y,z)\right| > 1$.

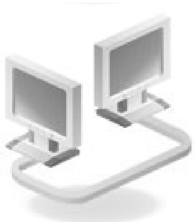
5) Як оформити розв‘язання завдання якщо кількість ітерацій до розв‘язку надто велика ($i > 5$)?

Відповідь: При описі результатів слід детально описати дві перші ітерації, а інші представити таблицею, у якій відобразити проміжні результати і показники, за якими приймають рішення про продовження чи припинення ітераційного процесу.

Список рекомендованої літератури

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы, М.: Наука, 1987.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 632 с.
3. Гаврилюк М.А., Галамай Т.Г. Прикладные программы и лабораторный практикум для персонального компьютера. – К.: УМКВО, 1988. – 202 с.
4. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича группа BHV, 2006. – 480 с.
5. Метьюз Дж., Фінк К. Численные методы. Использование MatLab. – СПб.: Вильямс, 2001. – 583 с.
6. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. – 192 с.
7. Мартынов Н.Н., Иванов А.П. 5.х Вычисления, визуализация, программирование. М.: Кудиц-Образ, 2000. – 336 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 228 с.
9. Цегелик Г.Г. Чисельні методи: Підручник. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004.– 408 с.
10. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988.
11. Власова Б.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 700 с.
12. Романовский И.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. – М.: Изд-во МГУ. 2006. – 112 с.
13. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1994. – 554 с.
14. Ануфриев И.Д., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 1104 с.
15. Дьяконов В. П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. – М.: Солон-Пресс, 2008. – 799 с.

16. Методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт з курсу „Чисельні методи” для студентів усіх форм навчання спеціальностей 7.080401 „Інформаційні управляючі системи та технології”, 7.080403 „Програмне забезпечення автоматизованих систем”, 7.080404 „Інтелектуальні системи прийняття рішень”, 7.080407 „Комп‘ютерний еколого-економічний моніторинг”, 6.080200 „Прикладна математика”. Частина 1. / Укладачі д.т.н., проф. Середенко В.М., ст.в. Супруненко О.О., ас. Хрипко О.М. Черкаси: ЧДУ, 2003. – 58 с.
17. Супруненко О.О. Чисельні методи в інформатиці. Курс лекцій: для студентів, які навчаються за напрямами підготовки 050101 „Комп‘ютерні науки ”, 050103 „Програмна інженерія ”. – Черкаси: ЧНУ, 2009. – 132 с.



Internet – посилання

1. http://www.mathworks.com (MATLAB Documentation).
2. http://srcc.msu.su/ (Науково-дослідний обчислювальний центр МГУ ім. Ломоносова).
3. http://biblioteki.net/viewtopic.php?t=6672# (вибрані книги по чисельним методам).
4. http://lib.mexmat.ru/books/780 (электронная библиотека попечительского совета механико-математического факультета МГУ).
5. http://www.diary.ru/~eek/p67723918.htm (математика в технічному університеті – учбові матеріали МВТУ ім. Н.Е.Баумана).
6. http://www.vargin.mephi.ru/book_pc_chisl.html (навчальна література по чисельним методам МІФІ).
7. http://ru.wikipedia.org/wiki/Численные_методы
8. http://www.kodges.ru/komp/program/page/3/
9. http://www.rusbooks.org/computernaja/999-osnovy-chislennykh-metodov.html
10. http://mat.net.ua (книги і статті по чисельним методам).
11. http://www.uchites.ru/files/nummethod_book_chapter1-1.pdf
12. http://www.iqlib.ru/support/about.visp (електронна бібліотека освітніх і просвітницьких видань).

ДОДАТОК А

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

Факультет обчислювальної техніки,
інтелектуальних та управляючих систем

Кафедра програмного забезпечення
автоматизованих систем

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з курсу “ Чисельні методи в інформатиці ”

Варіант 21

Перевірив: | **Виконав:**

доц. Супруненко О.О. | **студент Вакула О.М.**

(група КС-091)

____
(Підпис)
“___”_______________2011 р.

____
(Підпис)
“___”_______________2011 р.

Черкаси 2011

ДОДАТОК Б

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ СПИСКУ ІНФОРМАЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ

Список інформаційних джерел оформлюється у відповідності з **ДСТУ ГОСТ 7.1:2006** Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ЗАПИС. БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ОПИС. Загальні вимоги та правила складання.

Новий державний стандарт України (ДСТУ) введений на заміну 5-и існуючих раніше стандартів на опис нотних видань, картографічних творів, ізовидань, аудіовізуальних матеріалів, печатних видань. ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 відображає бібліографічні описи всіх видів документів, в тому числі й електронних, а також частини документу чи групи документів.

В ДСТУ наведені приклади бібліографічних описів різних документів, зі всіма областями опису та знаками пунктуації.

Деякі приклади бібліографічного опису:

- **Книга одного автора:**

Андреев, В. В. Как организовать делопроизводство на предприятии [Текст] / В. В. Андреев. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 94 с.

- **Книга двох авторів:**

Белов, А. В. Финансы и кредит [Текст]: учеб. / А. В. Белов, В. Н. Николаев ; КНУ им. Т. Г. Шевченко. – К.: Университет, 2004. – 215 с. – Библиогр. : с. 213-215. – ISBN 5-7042-1441-X.

- **Книга трьох авторів:**

Агафонова, Н. Н. Гражданское право [Текст]: учеб, пособие / Н. Н. Агафонова, Т. В. Богачева, Л. И. Глушкова ; под общ. ред. А. Г. Калпина; МОН Украины. – 2-е изд., перераб. и доп. – Х.: Фактор, 2000. – 542 с. – (Университетская книга).

- **Книга чотирьох авторів:**

Елементи інформатики [Текст]: довідник / В. С. Височанський, А. І. Кардаш, В. С. Костев, В. В. Черняхівський . – К.: Наук, думка, 2003. – 192 с.

- **Книга п‘яти авторів і більше:**

Коротковолновые антенны [Текст]: учеб, пособие / Г. 3. Айзенберг, С. П. Белоусов, Я. М. Журбин и др. ; под общ. ред. А. А. Стогния. – 2-е изд. – М.: Радио и связь, 2003. – 192 с.

- **Перекладене видання:**

Нойман, Э. Происхождение и развитие сознания [Текст]: пер. с англ. – К.: Ваклер ; М.: Реал-бук, 1998. – 462с.

- **Книги під заголовком:**

Информационные технологии в маркетинге [Текст]: учеб. / под ред. Г. А. Титаренко. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 335 с. – (Texbook). – 13ВК 5-238-00154-1

• **Багатотомне видання, окремий том:**

Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст]. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учеб, пособие / И. В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1982. – 432 с.

• **Статті з журналів:**

Гончаров, В. А. Численная схема моделирования дозвуковых течений вязкого сжимаемого газа [Текст] / В. А. Гончаров, В. М. Кравцов // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – Т. 28, №12. – С. 1858-1866.

Анализ направляемого движения электрической дуги по массивному электроду, покрытому тонким слоем изолятора [Текст] // Прикладная физика. – 2001. – № 3. – С. 58-67.

• **Збірники наукових праць:**

Отчет о выполнении плана научно-исследовательских работ за 2003 год [Текст]: сб. науч. тр. / Рос. Акад. мед. паук, Сиб. отд. – Новосибирск : СО РАМН, 2004. – 83 с.

• **Тези конференцій:**

Образование, наука, производство: пути углубления интеграции и повышения качества инженерного образования [Текст]: тез. докл. науч.-практ. конф. (окт. 2000) / отв. ред. В. Г. В до вен ко. – Красноярск: САА, 2000. – 53 с.

• **Матеріали конференцій:**

Проблемы экономики, организации и управления реструктуризацией и развитием предприятий промышленности, сферы услуг и коммунального хозяйства [Текст]: материалы IV междунар. науч.-практ. конф., 30 марта 2005 г. Новочеркасск / редкол.: Б. Ю. Серебряков (отв. ред.). – Новочеркасск: Темп, 2005. – 58 с.

• **Стандарти, техніко-економічні й технічні документи:**

ГОСТ Р 517721-2001. Аппаратура радиоэлектронная бытовая. Входные и выходные параметры и типы соединений. Технические требования [Текст]. – Введ. 2002-01-01. – М.: Изд-во стандартов, 2001. — 27 с.

Инструкция по проектированию, строительству и эксплуатации гидротехнических сооружений на подрабатываемых горными работами территориях [Текст]: СП 522-85. – Утв. Госстроем СССР 03.05.86. – Изд. офиц. – М.: Стройиздат. 1986. – 32 с.

Електронні ресурси:

• **Віддаленого доступу:**

Основные направления исследований, основанные на семантическом анализе текстов [Электронный ресурс] / С.-Петерб. гос. ун-т, факультет прикладной математики и процессов управления. – Режим доступа: \www/ URL: http://apmath.spdu/ru/ru/staff/tuzov/onapr.html/ – 10.12.2004 г. – Загл. с экрана.

• **Локального доступу:**

Internet шаг за шагом [Электронный ресурс] : интеракт. учеб. – Электрон, дан. и прогр. -СПб.: Питер Ком, 1997. – 1 электрон, опт. диск (CD-ROM). – Систем, требования: ПК от 486 DX 66 МГц ; RAM 1616 Мб ; Windows 95; зв. плата. – Загл. с этикетки диска.

Джерела рекомендовано розміщувати у порядку подання посилань у тексті роботи.

Навчально-методичне видання

Супруненко Оксана Олександрівна
Гребенович Юлія Євгенівна

Розв'язання задач з дисципліни "Чисельні методи в інформатиці"

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів напрямів підготовки

050103 – Програмна інженерія,
050101 – Комп'ютерні науки,
040303 – Системний аналіз

усіх форм навчання

Частина 1

Комп'ютерна верстка О.О. Супруненко

Підписано до друку 23.12.2011. Формат 60?84/16.
Ум. друк. арк. 2,5. Тираж 300 прим. Зам. № 4111.

Видавець і виготовлювач
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
Адреса: 18000, м. Черкаси, бул. Шевченка, 81, кімн. 117,
тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 37-22-33,
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, http://www.cdu.edu.ua
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єкт видавничої справи ДК № 3427 від 17.03.2009 р.