Геометрично, обчислення m – кратного інтегралу

$$I = \iint\limits_{(S)} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_1 dx_2 \ldots dx_m ,$$

де $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – неперервна функція в обмеженій замкненій області S, зводиться до визначення $(m+1)$ – вимірного обсягу прямого циліндра в просторі $0x_1, x_2, \ldots x_m y$, що побудований на основі S й обмежений зверху поверхнею $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Для перетворення інтегралу таким чином, щоб нова область інтегрування цілком знаходилась в середині одиничного *m* – вимірного куба σ, зробимо заміну змінних

$x_i = a_i + (b_i - a_i)\xi_i$,

де ξ_i – відповідні координати від 0 до 1; a_i, b_i – граничні значення координат, де розташована область інтегрування.

Тоді отримуємо

$$I = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_m - b_m) I_\xi ,$$

де

$$I_\xi = \iint\limits_{(\sigma)} \ldots \int f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m .$$

Якщо застосувати m генераторів рівномірно розподілених випадкових чисел в діапазоні (0,1), то обчислення середнього значення функції від їх комбінацій з застосуванням багатовимірного індикатора області інтегрування дасть шукану оцінку інтегралу

$$I_\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{mi}) 1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{mi}] ,$$

де $1[\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{mi}]$ дорівнює 1, якщо точка потрапляє в середину області інтегрування, і 0, якщо не потрапляє.

Похибка обчислення m-кратного інтегралу за методом Монте–Карло оцінюється аналогічно однократному .

Список використаної літератури:

1. Квєтний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р., Софина О.Ю., Шушура О.М. Комп’ютерне моделювання систем та процесів. Частина 1, Розділ 6.

2. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш.шк., 2001. – 382 с.

Науковий керівник: к. ф.-м. н., доцент Ральченко С.А.

Б.В. Тимошенко

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

МЕТОД АПРІОРНИХ ОЦІНОК ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

При дослідженні консенсусу в мультиагентних робототехнічних системах виникає необхідність побудови математичних моделей динаміки таких систем у вигляді динамічних рівнянь на часових шкалах. Це зумовлено необхідністю врахування можливих переривань обміну інформацією в канал зв’язку між агентами [6]. Для аналізу стійкості розв’язків динамічних рівнянь на часових шкалах виникає необхідність дослідження деяких класів нелінійних інтегральних нерівностей. Роль теорії інтегральних нерівностей в задачах динаміки та стійкості складних нелінійних систем вказана в [1].

У роботі розглядається інтегральна нерівність із багатьма степеневими нелінійностями на довільній часовій шкалі. Основна проблема, що досліджується в роботі полягає в оцінці функції, яка задовольняє нелінійну інтегральну нерівність. Для розв’язання цієї проблеми узагальнюється метод дослідження інтегральних нерівностей, запропонований в [2]. У цій роботі запропоновано метод апріорних оцінок, який дозволяє досліджувати диференціальні та інтегральні нерівності, у випадку, коли відповідна система порівняння не інтегрується у квадратурах. Узагальнення методу апріорних оцінок для інтегральних нерівностей на часових шкалах не є тривіальним з огляду на те, що не існує загальних методів інтегрування найпростіших нелінійних динамічних рівнянь на часових шкалах. Тому в роботі запропоновано підхід до побудови оцінок розв'язків нелінійного динамічного рівняння $\overset{\Delta}{x}(t) = f(t)x^r(t)$, який базується на методі Лакшмікантама в теорії нелінійних інтегральних нерівностей [7]. Використовуючи ці підходи та ідеї, одержано нові результати, щодо нелінійних інтегральних нерівностей на часових шкалах, які узагальнюють результати [5].

Розглянемо інтегральну нерівність на довільній часовій шкалі $\mathbb{T} \in \mathbb{R}$:

$$u(t) \leq u_0 + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} h_k(s) u^{r_k}(s) \Delta s \tag{1}$$

де $u \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, $h_k \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, $r_k > 0, u_0 > 0$.

Розглянемо задачу про оцінку функції $u(t)$ зверху.

Уведемо до розгляду наступні позначення: $\bar{r} := \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_m}{m}$, $r^* = \max\limits_{k=\overline{1,m}}\{r_k\}$, $g(t) := m\left(\prod_{k=1}^{m} h_k(t)\right)^{1/m}$, $\theta(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} G_{min}(s)\Delta s$, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} h_k(t)\left(\theta^{1-\bar{r}}(t) + (1-\bar{r})\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s\right)^{\frac{r_k - r^*}{1-\bar{r}}}$, $\xi^* = \left((\bar{r}-1)\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{1-\bar{r}}}$.

Лема. *Розглянемо нелінійне динамічне рівняння:*

$$\overset{\Delta}{f}(t) = g(t) f^{\bar{r}}(t), \qquad f(t_0) = u_0. \tag{2}$$

Тоді:

1) $f(t) \geq \left(\theta^{1-\bar{r}}(t) + (1-\bar{r})\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{1-\bar{r}}}$, $\forall\, t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$ *таких, що* $u_0 + \int_{t_0}^{t} G_{min}(s)\Delta s > 0$, $u_0^{1-\bar{r}} + (1-\bar{r})\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s > 0$;

2) $f(t) \leq \left(u_0^{1-\bar{r}} + (1-\bar{r})\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{1-\bar{r}}}$, $\forall\, t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$ *таких, що* $u_0^{1-\bar{r}} + (1-\bar{r})\int_{t_0}^{t} g(s)\Delta s > 0$.

Теорема. *Функція* $u(t)$ *задовольняє оцінку:*

$$u(t) \leq \left(u_0^{1-r^*} + (1-r^*)\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{1-r^*}}.$$

$\forall\, t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$ *таких, що* $u_0^{1-r^*} + (1-r^*)\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\Delta s > 0$, $\bar{r} > 1$ *та таких, що виконуються умови 1 – 2 леми.*

Запропонований новий метод апріорних оцінок дозволяє досліджувати широкий клас інтегральних нерівностей на часових шкалах. Подальше узагальнення цього методу дозволить розширити застосування інтегральних нерівностей до якісного аналізу динамічних рівнянь на часових шкалах.

Список використаної літератури:

1. Мартынюк А. А. (1989). Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лила – К.: Наук. думка, – 270с.

2. Слинько В. І., Тимошенко Б. В. (2018). Метод апріорних оцінок в теорії диференціальних нерівностей. *Підсумкова науково-практична конференція II туру Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з галузі знань «Математика та статистика» (спеціальності «Математика», «Статистика» та «Прикладна математика» (спеціалізація «Механіка»)), 24 – 25 квітня, Львів.*

3. М. Бохнер, А. А. Мартынюк (2007). Элементы теории устойчивости А.М. Ляпунова для Динамических уравнений на временной шкале. *Прикладная механіка, том 43, №9, 3-27.*

4. Bohner, Martin, & Peterson, Allan (2012). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. Springer Science & Business Media.

5. Martynyuk A. A., Slyn'ko V. I. (2008). On a nonlinear inequality on the time scale. *Differential Equations, Vol. 44, No. 10, pp. 1482–1488.*
6. S. Babenko et al. (2018). On the consensus tracking investigation for multi-agent systems on time scale via matrix-valued Lyapunov functions. *Automatica 97, 316-326.*
7. V. Lakshmikantam (1973). A Variation of Constants Formula and Bellman – Gronwall – Reid Inequalities. *Journal of mathematical analysis and applications 41, 199-204.*

Науковий керівник: д. ф.-м. н., професор Слинько В.І.