О. І. Бринько
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

ЗАДАЧА ПРО ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК, ЯКЕ ПОВ'ЯЗАНЕ З ЕЛІПСОМ

Одним із поширених способів утворення кривих є метод геометричних місць точок. Криві як геометричні місця точок визначаються певними вихідними даними. Наприклад, коло визначається точкою і заданою відстанню, парабола – точкою і прямою, еліпс і гіпербола двома точками та заданою відстанню.

Нове геометричне місце точок можна отримати шляхом заміни:

1) розмірності простору, в якому розглядаються шукані точки;
2) умов, які визначають геометричне місце точок;
3) основної фігури геометричного місця точок.

Так, наприклад, нами досліджувалося геометричне місце центрів кіл, які проходять через фокус *параболи* $y^2 = 2px$ і дотикаються до неї в заданій точці *M*. Шукане геометричне місце точок – крива γ_1.

Замінивши параболу на еліпс (або іншу лінію), можна отримати нове геометричне місце точок – геометричне місце центрів кіл, що проходять через фокус *F еліпса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і дотикаються до нього в заданій точці *M*. Шукане геометричне місце точок – крива γ_2.

Задачу розв'язано за планом:

1) складено рівняння прямої *FM* :

$$y_0 x - x_0 - \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right)y - y_0\sqrt{a^2 - b^2} = 0;$$

2) складено рівняння серединного перпендикуляра *p* до відрізка *FM*:

$$(-2x_0 + 2c)x - 2y_0 y + {x_0}^2 + {y_0}^2 - c^2 = 0;$$

3) складено рівняння дотичної до еліпса в точці *M*$(x_0; y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

4) складено рівняння нормалі до еліпса: $\frac{x - x_0}{b^2 x_0} = \frac{y - y_0}{a^2 y_0}$;

5) складено рівняння заданого кола:

$$\left(x - \frac{b^2 x_0 y - b^2 x_0 y_0 + a^2 x_0 y_0}{a^2 y_0}\right)^2 +$$
$$+ \left(y - \frac{2b^2 {x_0}^2 y_0 - 2b^2 c x_0 y_0 - a^2 {x_0}^2 y_0 + 2a^2 c x_0 y_0 + a^2 {y_0}^3 - a^2 c^2 y_0}{2a^2 {y_0}^2 + 2b^2 {x_0}^2 - 2b^2 c x_0}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{b^2 x_0 y - b^2 x_0 y_0}{a^2 y_0}\right)^2 + \left(\frac{-a^2 {x_0}^2 y_0 + 2a^2 c x_0 y_0 - a^2 {y_0}^3 - a^2 c^2 y_0}{2a^2 {y_0}^2 + 2b^2 {x_0}^2 - 2b^2 c x_0}\right)^2.$$

Отримано рівняння шуканого геометричного місця точок:

$$\begin{cases} x = \dfrac{bycos(t) + c^2 cos(t)sin(t)}{asin(t)}; \\ y = \dfrac{(2b^2 - a^2)a(cos(t))^2 sin(t) + 2c^3 cos(t)sin(t) + ab^2(sin(t))^3 - ac^2 sin(t)}{2ab - 2bccos(t)}. \end{cases}$$

Проведено повне дослідження кривих γ_1, γ_2 та побудовано їх у програмі «Advanced Grapher» (рис 1-2).

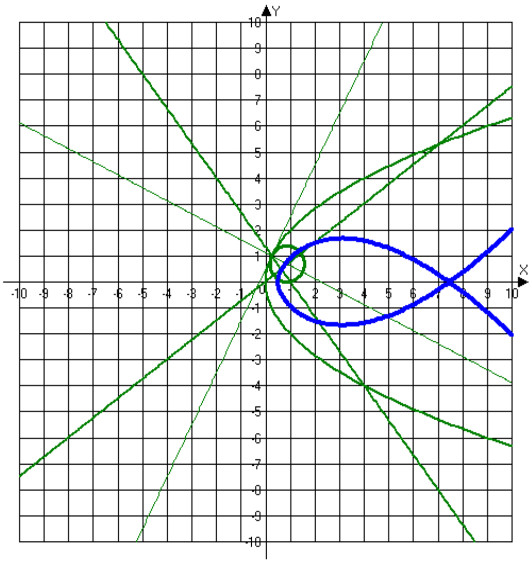


Рис. 1

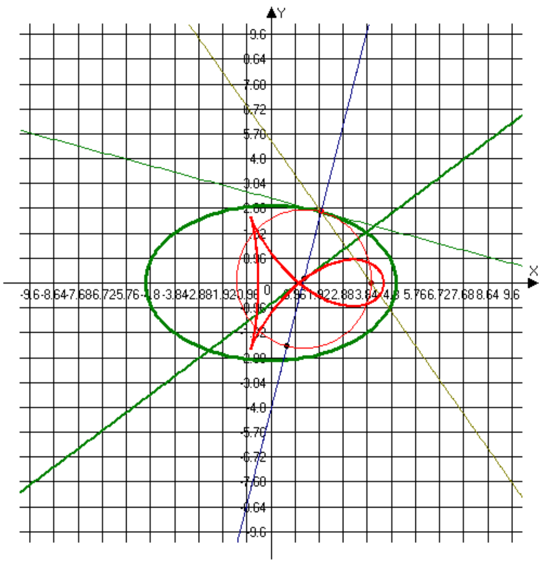


Рис. 2

Використана література:

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія / О. А. Борисенко – Х.: Основа, 1993. – 304 с.
2. Стеблянко П. О. Основи диференціальної геометрії (застосування сучасних комп'ютерних технологій, зокрема системи MatLab): Навчальний посібник для студентів університетів / П. О. Стеблянко, О. М. Коломієць – Черкаси: Вид. від ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2011. – 204 с.

Науковий керівник: к. пед. н., доцент Коломієць О. М.

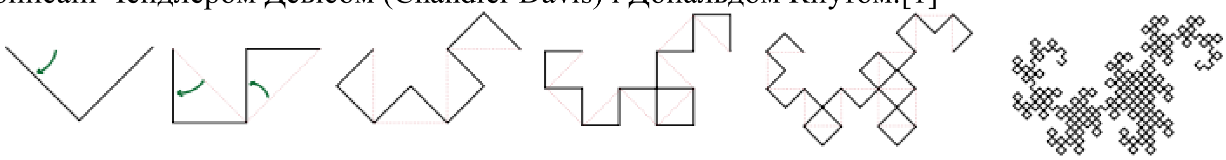
Т.П. Варяниця

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

ПЛОЩА ДРАКОНА ХАРТЕРА-ХЕЙТУЕЯ

Вивчаючи фрактали, важко не звернути увагу на фрактал дракон Хартера. Простий у побудові (існує декілька різних способів побудови) і незвичайно красивий на великих ітераціях. Назву отримав напевне із-за схожості з міфічним створінням. Незважаючи на те, що побудова не складна, даний дракон має розмірність Хаусдорфа рівну 2, а це свідчить про те що він покриває площину, тобто має площу. Опрацювавши різні джерела, не знайшла згадок про його площу. Тому поставила перед собою ціль – знайти її. Для цього буде використаний незвичайний спосіб побудови, який я знайшла на просторах інтернету.

Дракон Хартера, також відомий як дракон Хартера - Хейтуея, був вперше досліджений фізиками NASA - Джоном Хейтуеєм (John Heighway), Брюсом Бенксі (Bruce Banks), і Вільямом Хартера (William Harter). Він був описаний в 1967 році Мартіном Гарднером в колонці «Математичні ігри» журналу «Scientific American». Багато з властивостей фрактала були описані Чендлером Девісом (Chandler Davis) і Дональдом Кнутом.[1]



Знайти довжину і ширину даного фрактала ми можемо використовуючи ітерації:

Ширина на 2 ітерації рівна $\frac{1}{2}$, на наступний ітерація добавляється ще $\frac{1}{4}$, а далі $\frac{1}{8}$, і за таким принципом далі звідси отримуємо геометричну прогресію:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$