УДК 519.8 PACS 47.11.-j; 02.70.-c; 02.60.Cb; 47.27.E-; 47.27.em

О. А. Емец, А. О. Емец

ОБЩИЙ МНОГОГРАННИК РАЗМЕЩЕНИЙ: ПОДСЧЕТ ВЕРШИН

В статье исследуется многогранник евклидовых комбинаторных размещений, в частности, подсчитывается количество вершин общего многогранника размещений. Полученные свойства могут быть использованы для решения комбинаторных задач.

Ключевые слова: *размещения, многогранники комбинаторных множеств, евклидовая комбинаторная оптимизация.*

Введение

Исследование задач в евклидовой комбинаторной оптимизации проводится в двух аспектах (см., например, [1-10]): исследование допустимых областей и изучение свойств оптимизируемых функций, заданных на комбинаторных множествах [2, 3, 11]. Первый аспект предполагает исследование, в том числе, выпуклой оболочки евклидовых комбинаторных множеств – так называемых комбинаторных многогранников, в частности, общего многогранника размещений [1-6], что объясняется актуальностью исследований, в частности, задач на множестве размещений [2-6, 8-10, 12-14].

Исследования общего многогранника вершин изложены, в частности, в [2, 3, 9, 45], однако не ставилась задача определения количества его вершин. Данная задача решается далее в статье.

Постановка и решение задачи подсчета количества вершин общего многогранника размещений

Используется терминология согласно [3].

Рассмотрим общее множество размещений $E_{\eta n}^{k}(G)$, общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$, где мультимножество $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$; считаем, что $g_1\le\dots\le g_\eta$; основа G – это $S(G)=(e_1,\dots,e_n)$, где $e_1<\dots<e_n$; первичная спецификация G обозначена так: $[G]=(\eta_1,\dots,\eta_n)$.

Как известно [2, 3], $\Pi_{\eta n}^{k}(G)$ выражается формулой:

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall\omega\subset J_k,\ |\omega|\le k,$$

где $J_k=\{1,2,\dots,k\}$.

Перепишем эту систему в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in\omega} x_i \ge \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega\subset J_k; |\omega|\le k, \\ \displaystyle\sum_{i\in\Omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall\Omega\subset J_k; |\Omega|\le k. \end{cases}$$

Как известно [2, 3], вершиной $x = \{ x_1, ..., x_k \} \in vert\, \Pi^k_{\eta n}(G)$ является точка, у которой координаты – это элементы из G: g_1, …, g_s, $g_{\eta-r+1}$, $g_{\eta-r+2}$, …, g_η, где $s+r=k$; $s, r \in J^0_k = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$, и только они, стоящие в любом порядке в x.

Таким образом, одной из вершин является точка $g^0 = (g_1, g_2, ..., g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, ..., g_\eta)$, а другие получаются перестановкой этих элементов или выбором другого $s \in J^0_k$, а значит и $r = k - s$.

Количество L_s перестановок из элементов g^0 можно определить при $g_s \neq g_{\eta-r+1}$ по формуле:

$$L_s = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_\sigma! \cdot \chi_1! \cdot \chi_2! \cdot ... \cdot \chi_\rho!}, \tag{1}$$

где параметр σ определяется так:

$$g_s = e_\sigma ; \tag{2}$$

а константы $k_1, ..., k_\sigma$ задаются следующим образом:

$$k_1 = \eta_1 ;\ k_2 = \eta_2 ;\ \dots ;\ k_{\sigma-1} = \eta_{\sigma-1} ;\ k^L_\sigma = \sum_{i=1}^{\sigma-1} \eta_i ;\ k_\sigma = s - k^L_\sigma ; \tag{3}$$

при $s = 0$ и $k_\sigma = 0$; параметр ρ в (1) определяется так:

$$g_{\eta-r+1} = e_\rho , \tag{4}$$

а константы $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_\rho$ задаются следующим образом:

$$\chi_1 = \eta_n ;\ \chi_2 = \eta_{n-1} ;\ \dots ;\ \chi_{\rho-1} = \eta_{n-\rho+2} ;\ k^R_\rho = \sum_{i=1}^{\rho-1} \eta_{n-i+1} ;\ \chi_\rho = r - k^R_\rho ; \tag{5}$$

при $r = 0$ и $\chi_\rho = 0$.

В случае $g_s = g_{\eta-r+1} = e_\delta$ количество L'_s перестановок из элементов можно определить согласно формуле:

$$L'_s = \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_{\sigma-1}! \cdot \chi_1! \cdot ... \cdot \chi_{\rho-1}! \cdot \kappa!},$$

где параметры σ, ρ, $k_1, ..., k_{\sigma-1}$, $\chi_1, ..., \chi_{\rho-1}$ определяются в (2)-(5) как и для формулы (1), а $\kappa = k_\sigma + \chi_\rho$.

Учтем, что есть повторяющиеся выборки при разных s (и r), т. е. случаи, в частности, когда $g_s = g_{\eta-r+1}$.

Если при $s_1 \in J^0_k$ и $s_2 \in J^0_k$ ($r_i = k - s_i$, $i = 1, 2$), $s_1 \neq s_2$ имеем $g_{s_1} = g_{\eta-r_2+1}$ или $g_{s_2} = g_{\eta-r_1+1}$, тогда в первом случае получаем

$$(g_1, ..., g_{s_1}, g_{\eta-r_1+1}, ..., g_\eta) = = (g_1, ..., g_{s_2}, g_{\eta-r_2+1}, ..., g_\eta).$$

Если $\exists s \in J_k$, выполняются соотношения (2)-(5), а $r = k - s$ (при $s = 0$; $k_s = 0$), что при этом $e_\sigma = e_\rho (= e_\delta)$, то при разных $s \in J_k^0$ существуют одинаковые выборки. Это может быть и в случае существования e_δ такого, что

$$g^0 = (\, g_1, \ldots, g_{s-1}, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \ldots,\ g_\eta\ ),$$

а $g_s = e_\delta$ или $g_{\eta-r+1} = e_\delta$. При подсчете вершин надо эти выборки отследить и взять только раз.

В этих ситуациях, как не трудно видеть, между η, η_δ и k имеет место соотношение: $\eta - \eta_\delta < k$. Поэтому e_δ может (в зависимости от s, r, η_δ) выступать в качестве

$$\{\, g_s \,\};\ \{\, g_s, g_{s-1} \,\};\ \ldots;\ \{\, g_s, \ldots, g_1 \,\}$$

и

$$\{\, g_{\eta-r+1} \,\};\ \{\, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2} \,\};\ \ldots;\ \{\, g_{\eta-r+1}, \ldots, g_\eta \,\}.$$

Рассмотрим $s \ge k_\delta^L$; $r \ge k_\delta^R$; а из $r = k - s$, имеем $k - s \ge k_\delta^R$; или $s \le k - k_\delta^R$.

Из этих s выбираем одно образование соответствующей вершины g^0 для подсчета количества L_s' перестановок из элементов g^0, $k_\delta^L < k - k_\delta^R$.

Т. е., если обозначить $S_\delta(E_{\eta n}^k(G)) = \{\, k_\delta^L, k_\delta^L + 1, \ldots, k - k_\delta^R - 1, k - k_\delta^R \,\}$, то

$$L = |\, vert\ conv\ E_{\eta n}^k(G) \,| = |\, vert\ \Pi_{\eta n}^k(G) \,| = \sum_{s \notin S_\delta(E_{\eta n}^k(G)),\, s=0}^{k} L_s \ + L_s' =$$

$$= \sum_{s \notin s_\delta(E_{\eta n}^k(G)),\, s=0}^{k} \frac{k!}{k_1!\ \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_\sigma! \cdot \chi_1! \cdot \chi_2! \cdot \ldots \cdot \chi_\rho!} + \tag{6}$$

$$+ \frac{k!}{k_1!\ \cdot k_2! \cdot \cdots \ldots \cdot k_{\delta-1}! \cdot \chi_1! \cdot \ldots \cdot \chi_{\delta-1}! \cdot \kappa!} \Delta(S_\delta),$$

где

$$\Delta(S_\delta) = \begin{cases} 1, & |\, S_\delta(E_{\eta n}^k(G)) \,| > 0; \\ 0, & |\, S_\delta(E_{\eta n}^k(G)) \,| = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при условии $s \notin S_\delta(E_{\eta n}^k(G))$ имеем $g_s \ne g_{\eta-r+1}$, $s \ne 0$; $r \ne 0$ в k-размещении-вершине.

Замечание. Не трудно видеть, что параметр κ можно вычислять так: $\kappa = k - (\eta - \eta_\delta)$, при этом $\exists \delta \in J_n$: $\kappa > 0$; если $\forall \delta \in J_n$ $\kappa \le 0$, то $\Delta(S_\delta) = 0$ в (6).

Пример 1. $G = \{\, 1, 1, 1, 2, 2, 3 \,\}$, $k = 3$, $S(G) = (\, 1, 2, 3 \,)$, $[G] = (\, 3, 2, 1 \,)$. Рассмотрим варианты g_i^0, меняя s. Подсчитаем L_s и L.

Отметим, что $\kappa^i = k - (\eta - \eta_i)$ такое, что $i = 1$,

$\eta_1 = 3$; $\kappa^1 = 0$; $i = r$;

$\eta_r = 2$; $\kappa^2 = -1$; $i = 3$;

$\eta_3 = 1$; $\kappa^3 = -2$;

т. е. $\Delta(S_\delta) = 0$.

Пусть $s = 0$; $r = 3$; размещения-вершины – это:
$(2, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$. $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 3 - 1 = 2$.

$L_0 = \dfrac{k!}{\chi_1! \cdot \chi_2!} = \dfrac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$.

Пусть $s = 1$; $r = 2$; вершины общего многогранника размещений это:
$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Если $s = 1$; то

$k_1 = 1$; $r = 2$ $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 2 - 1 = 1$.

$L_1 = \dfrac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$.

Пусть $s = 2$; $r = 1$. Имеем вершины $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$ и параметры $k_1 = 2$; $\chi_1 = 1$; $L_2 = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Пусть $s = 3$; $r = 0$. Есть только одна вершина:

$$(1, 1, 1);\ k_1 = 3;\ L_3 = \frac{k!}{k_1!} = \frac{3!}{3!} = 1.$$

Тогда $L = |\,vert\ conv\ E_{63}^3(G)| = 3 + 6 + 3 + 1 = 13$.

Пример 2. $G = \{1, 2, 2, 2, 3\}$; $k = 4$. Образуем для разных s вершину g^0, подсчитаем L_s.

Пусть $s = 0$; $r = 4$, $(2, 2, 2, 3) = g^0$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 3$; $L_0 = \dfrac{k!}{3! \cdot 1!} = 4$.

Пусть $s = 1$; $r = 3$. Тогда:

$k_1 = 1$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 2$; $g^0 = (1, 2, 2, 3)$;

$L_1 = \dfrac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 4 \cdot 3 = 12$.

Если $s = 2$; $r = 2$, то получаем ту же, что и при $s = 1$ вершину $g^0 = (1, 2, 2, 3)$. $k_1 = 1$; $k_2 = 1$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 1$; ($g_2 = g_4 = 2$), следовательно:

$\kappa = k_2 + \kappa_2 = 1 + 1 = 2$;

$L_2 = \dfrac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$.

Тут можно считать и так: $\kappa = k - \eta + \eta_\delta = 4 - 5 + 3 = 2$.

Пусть $s = 3$; $r = 1$. Снова $g^0 = (1, 2, 2, 3)$, имеем:

$k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $\chi_1 = 1$;

$L_3 = \dfrac{4!}{2!} = 12$.

Если $s=4$; $r=0$, то $g^0=(1,2,2,2)$, а $k_1=1$; $k_2=3$; $L_4=\frac{4!}{3!}=4$. Имеем $k_\delta^L=1$; $k_\delta^R=1$ $k-k_\delta^R=3$, т. е. $S_\delta(E_{53}^3(G))=\{1,2,3\}$.

Отметим: $[G]=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(1;3;1)$, $\kappa^i=k-(\eta-\eta_i)$, $i=1$, $\kappa^1=4-5+1=0$; $i=2$; $\kappa^2=4-5+3=2$; $i=3$; $\kappa^3=4-5+1=0$, значит $\delta=2$.

Таким образом, согласно (6) $L=(L_0+L_4)+L'=4+4+12=20$, где L_0+L_4 – это первая сумма в (6) (по условию $s\notin S_\delta(E_{53}^3(G))=\{1,2,3\}$), а $L'=L_1=L_2=L_3$.

Пример 3. $G=\{1,2,2,3\}$; $k=3$; $\eta=4$; $S(G)=(1,2,3)$; $[G]=(1,2,1)$. Найдем L.

$\eta_\delta=2$; $\eta-\eta_\delta<k$; $4-2<3$.

Имеем $e_\rho=2$, при $s=0$ $e_\delta=g_{\eta-r+1}=g_{\eta-r+2}$, этот случай не дает L'_s.

При $s=1$ имеем $e_\delta=g_{\eta-r+1}=2$.

При $s=2$ получаем $e_\delta=g_s=2$.

При $s=3$ $e_\delta=g_s=g_{s-1}$, этот случай не дает L'_s.

Имеем $\kappa=k-\eta+\eta_\delta=3-4+2=1$; $S_\delta(E_{4,3}^3(G))=\{1,2\}$.

Получаем вершины:

$s=0$; $g^0=(2,2,3)$; $r=3$.

$s=1$; $g^0=(1,2,3)$; $r=1$.

$s=2$; $g^0=(1,2,3)$; $r=2$.

$s=3$; $g^0=(1,2,2)$; $r=0$.

Таким образом, при $s=0$ $L_0=3$; при $s=1$ $L_1=6$; $s=2$ $L_2=6$ (но это количество исключаем этот случай не дает $L'_s=L_1=L_2$.); $L_3=3$; $L=(L_0+L_3)+L_1=3+3+6=12$.

Другая форма формулы для количества вершин может быть получена так.

Согласно критерия вершины ОМР [2, 3] вершина имеет координаты $g_1,g_2,\dots,g_s,g_\eta,g_{\eta-1},\dots,g_{\eta-r+1}$, где $r+s=k$, $s,r\in J_k^0$. Рассмотрим мультимножества $G^{s,r}\subset G=\{g_1,\dots,g_n\}$; $g_1\le\dots\le g_n$, элементы которых могут образовывать некоторую вершину:

$$G^{s,r}=\{g_1,g_2,\dots,g_s,g_{\eta-r+1},g_{\eta-r+2},\dots,g_{\eta-1},g_\eta\},\ s,r\in J_k^0;\ r+s=k.$$

Основу $G^{s,r}$ обозначим $S(G^{s,r})=(e_{r1},e_{r2},\dots,e_{rm_r})$. Первичную спецификацию обозначим: $[G^{s,r}]=(\eta_{r1},\eta_{r2},\dots,\eta_{rn_r})$.

Перестановки элементов $G^{s,r}$ образуют вершины, количество перестановок в общем множестве перестановок $E_{k,n_r}(G^{s,r})$ вычисляется, как известно, по формуле:

$$|E_{k,n_r}(G^{s,r})|=\frac{k!}{\eta_{r1}!\cdot\eta_{r2}!\cdot\ldots\cdot\eta_{rn_r}!}. \tag{7}$$

Остается найти сумму по всем r выражений (7), учтя, что если $\exists\delta\in J_n$ такое, что в G $\exists e_\delta\in S(G)$ кратностью $\eta_\delta>\eta-k$, то некоторые из $G^{s,r}$ будут одинаковые. Таким образом,

$$|vert\,\Pi_{\eta n}^k(G)|=\sum_{\substack{r=0\\ G^{s,r}\ne G^{s-1,r+1}}}^{k}\frac{k!}{\eta_{r1}!\cdot\eta_{r2}!\cdot\ldots\cdot\eta_{rn_r}!},$$

то есть суммирование ведется по разным $G^{s,r}$ $\forall s, r \in J_k^0,\ r+s=k$.

Заключение

В статье рассмотрен подсчет количества вершин в общем многограннике размещений – выпуклой оболочке множества размещений, образованных из мультимножества, каждый элемент основы которого имеет в мультимножестве свою кратность повторений.

Приведены примеры определения количества вершин общего множества размещений.

Результаты могут быть полезны для разработки методов оптимизации на размещениях. В дальнейшем целесообразно изучить структуру этого многогранника и провести их типизацию, выявив все возможные комбинаторные типы.

Литература

1. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: учеб. пособие / О. А. Емец. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/489.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
4. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
5. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування: Монографія / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377.
6. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
7. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К.: Наук. думка, 2010. – 105 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. Ємець О. О. Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
9. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К.: Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
10. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв’язування, узагальнення: монографія / О. О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/353.
11. Ємець О. О. Дискретна математика: Навч. посібник. Вид. 2-ге, допов. / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2009. – 287 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
12. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія / О. О. Ємець, О. О. Черненко. – Полтава: ПУЕТ, 2011. – 204 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.
13. Стоян Ю. Г. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доповіді НАНУ. – 1999. – № 8. – С. 37-41.

14. Emets O. A. Solving Linear Optimization Problems on Arrangements by the Truncation Method / O. A. Emets, T. N. Barbolina // Cybernetics and Systems Analysis – 2003 – V. 39, № 6. – P. 889–896.
15. Ємець О. О. Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та поліроміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. – № 18 (351). – 2015. – С. 3-10.

References

1. Emelichev V. A. Polyhedra, graphs, optimization / V. A. Emelichev, M. M. Kovalev, M. M. Kravtsov. – M.: Nauka, 1981. – 344 p.
2. Iemets O. A. Euclidian combinatorial sets and optimization on them. New in mathematical programming: Tutorial / O. A. Iemets. – K.: UMK VO, 1992. – 92 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.
3. Stoyan Y. G. Theory and methods of Euclidian combinatorial optimization / Y.G. Stoyan, O. O. Iemets. – K.: Institute of system research of education, 1993. – 188 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/ 487.
4. Stoyan Yu. G. Optimization on polypermutations: theory and methods / Yu. G. Stoyan, O. O. Iemets, E. M. Yemets. – Poltava: RVTs PUSKU, 2005. – 103 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/ 376.
5. Iemets O. O. Optimization problems on polyarrangements: properties and solution / O. O. Iemets, O. V. Roskladka. – Poltava: RVTs PUSKU, 2006. – 129 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/ 377.
6. Yemets O. A. Combinatorial optimization on arrangements / O. A. Yemets, T. N. Barnolina. – K.: Naukova Dumka, 2008. – 159 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
7. Iemets O. A. Optimization on polypermutations / O. A. Iemets, N. G. Romanova. – K.: Naukova Dumka, 2010. – 105 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. Iemets O. O. Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets / O. O. Iemets, Ol. O. Yemets‘. – Poltava: PUET, 2011. – 239 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
9. Yemets O. A. Optimization of linear fractional functions on arrangements / O. A. Yemets, O. A. Chernenko. – K.: Naukova Dumka, 2011. – 154 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
10. Iemets O. O. Combinatorial transportation problems: properties, solutions, generalizations / O. O. Iemets, T. O. Parfyonova. – Poltava: PUET, 2011. – 174 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
11. Iemets O. O. Discrete mathematics: Tutorial. Edit. 2-nd, agg. / O.O. Iemets, T.O. Parfionova. – Poltava: PD of PUCCU, 2009. – 287 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.
12. Iemets O. O. Models of euclidean combinatorial optimization / O. O. Iemets, O. O. Chernenko. – Poltava: PUET, 2011. – 204 p. – Access mode: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.
13. Stoyan Yu. G. Sets of polypermutations in combinatorial optimization / Yu. G. Stoyan, O. O. Iemets, E. M. Yemets // Dopovidi NANU. – 1999. – № 8. – P. 37-41.
14. Emets O. A. Solving Linear Optimization Problems on Arrangements by the Truncation Method / O. A. Emets, T. N. Barbolina // Cybernetics and Systems Analysis – 2003 – V. 39, № 6. – P. 889–896.

15. Yemets O. O. About the number of elements in the in the general sets of arrangements and polyarrangements // O. O. Yemets, T. V. Chilikina // Visnyk Cherkas'kogo universytetu. Serija Prykladna matematyka. Informatyka. – № 18 (351). – 2015. – P. 3-10.

Анотація

О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

Загальний многогранник розміщень: підрахунок вершин

У статті досліджується многогранник евклідових комбінаторних розміщень, зокрема, підраховується кількість вершин загального многогранника розміщень. Отримані властивості можуть бути використані для розв'язування комбінаторних задач.

Ключові слова: *розміщення, многогранники комбінаторних множин, евклідова комбінаторна оптимізація.*

Summary

O.O. Iemets, O. O. Yemets`

The general polyhedron of arrangements: counting of vertices

It is investigated the polyhedron of Euclidean combinatorial arrangements, in particular, it is calculated the number of vertices of the general polyhedron of arrangements, in the article. These properties can be used to solve combinatorial problems.

Keywords: *arrangements, polyhedrons of combinatorial sets, Euclidean combinatorial optimization.*

Стаття надійшла 06.04.2016
Прийнято до друку 13.04.2016