

УДК 532.5; 551.465

Павел В. Лукьянов

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ СУБМЕЗОМАСШТАБНОГО КОМПАКТНОГО ВИХРЯ ОТ ЕГО ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ

Представлены результаты исследования динамики компактного вихря от его внутренней горизонтальной структуры. Выявлен тип вихрей, обладающий такой горизонтальной структурой, при которой диффузионный рост компенсируется конвекцией (стоком), обуславливающим квазистационарное состояние течения. Горизонтальная структура вихря состоит из трех областей. Первая, довольно тонкая (приблизительно 10% от толщины), находится у оси вихря. Затем следует широкая (приблизительно 80% от толщины вихря) область с отсутствием завихренности (течение наподобие точечного вихря). Третья, внешняя область вихря, также тонкая (приблизительно 10% от толщины), но имеет завихренность противоположного знака той, что в первой области. Величины указанных завихренностей таковы, что в целом вихрь компенсирован (суммарная завихренность равна нулю). Приведено сравнение с известными теоретическими и экспериментальными данными по этой теме.

Ключевые слова: компактный вихрь, внутренняя структура, диффузионно-конвективный баланс

Введение. Цель работы

В природе многие явления наглядно подтверждают третий закон Ньютона: *действие равно противодействию*. Иными словами, существует определенный механизм компенсации между двумя и более силами. В гидромеханике, также как и во многих других отраслях науки, существует ряд примеров такой компенсации. Так, открытые впервые во время численного эксперимента уединенные волны, получившие название *солитонов*, – пример компенсации двух сил [1- 4]. В начале 60-х годов прошлого столетия целым шоком для океанологов было открытие глубоководных вихрей, получивших название *модонов*. В работе [5] указано, что одним из условий существования модонов является исчезающая с ростом расстояния от их центра циркуляция. Модоны относятся к мезомасштабным, или синоптическим, образованиям [5]. Хетоны [6], – пары бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью, – также существуют в виде компактных (уединенных) образований благодаря наличию механизма компенсации.

Многочисленные исследования морей и океанов, а впоследствии фотографии со спутников, указывают на существование компактных вихревых структур. Кинематическим условием существования компактного вихря есть компенсация поля завихренности [7], которая справедлива для любой формы течения – ламинарной или турбулентной, с учетом вязкости жидкости или без [8]. В зависимости от масштаба явления (вихря), те или иные силы играют первостепенную роль: на их основе производится обезразмеривание уравнений, описывающих интересующий нас физический процесс. Компактные компенсированные вихри планетарных (500 км – первые тысячи км) и мезомасштабных (50 км – первые сотни км) хорошо изучены. В то же время субмезомасштабные (с горизонтальным масштабом приблизительно 1–10 км) вихревые образования на шельфе (с вертикальным масштабом приблизительно 10-100 м) – наиболее слабо изученная область динамики морей и океанов [9].

Целью данной работы является изучение зависимости вырождения (диффузия) компактного вихря от его начальной формы горизонтальной структуры.

Постановка задачи

Данная работа посвящена динамике уединенного свободного вихря, находящегося вдали от горизонтальных границ. Поэтому в качестве физической области рассмотрим слой жидкости переменной глубины: $(x, y) \in [-l_x, l_x] \times [-l_y, l_y]$, $z \in [0, H(x)]$. Полагается, что жидкость имеет устойчивую плотностную стратификацию:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \left\{ 1 + \left(\exp \left[\left(\frac{(h-h_1)-z}{l_v} \right)^2 \right] - 1 \right) N^2 (z/l_v) / g \right\}, & 0 \leq z \leq h-h_1; \\ \rho_0, & h-h_1 \leq z \leq h. \end{cases} \quad (1)$$

где h_1 – глубина верхнего перемешанного слоя, l_v – начальная толщина вихря; N^2 – квадрат частоты Брента-Вайсяля; g – ускорение свободного падения.

Топография дна задаётся в явном виде одной из возможных функций глубины [10,11]:

$$H(x) = \begin{cases} h_{\min}, & -l_x \leq x \leq -l_x + x_0; \\ h_{\min} + (h - h_{\min}) \left(1 - \exp(-\alpha [(x - (-l_x + x_0)) / l_h]) \right), & -l_x + x_0 \leq x \leq l_x. \end{cases} \quad (2)$$

В выражениях (1,2) h, h_{\min} – максимальная и минимальная глубина области соответственно; l_h – начальный горизонтальный масштаб (радиус) вихря, x_0 – координата начала склона, α – параметр, характеризующий скорость изменения глубины. Рельеф дна показан на рис. 1, где по оси ординат отложена функция $L(x) = (h - H(x)) / l_v$. Легко показать, что при таком функциональном задании топографии дна сохраняются непрерывность функций и её производных. Ещё важным моментом есть то, что вблизи вертикальных границ $x = \pm l_x$ дно является горизонтальным, что используется далее при формулировке граничных условий.

Для описания горизонтальной турбулентной диффузии используется широко известная модель Смагоринского. Коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии поля скорости A_m и плавучести A_n вычисляются по формулам:

$$A_m = \frac{1}{2} C_m \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 \right], \quad A_n = \frac{A_m C_n}{C_m},$$

где C_m, C_n – постоянные. $C_m = 0,1$, $C_n = 0,2C_m$, $\Delta x, \Delta y$ – горизонтальные размеры расчетной сетки. Индексы m, n относятся соответственно к диффузии поля скорости и плотности (плавучести).

Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии находится по модели Прандтля-Обухова [12,13], согласно которой:

$$\begin{cases} K_z = (0,05h_2)^2 \sqrt{B} + K_{\min} & \text{при } B > 0, \\ K_z = K_{\min} & \text{при } B < 0. \end{cases} \quad B = \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + b,$$

где V_x, V_y – средние значения горизонтальных компонент скорости, b – плавучести, h_2 – глубина квазиоднородного слоя, определяемая по первой от поверхности расчетной точки, в которой выполняется условие:

$$(0,05z_k)^2 \sqrt{B_{z=z_k}} \leq K_{\min},$$

где K_{\min} – фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена, Z_K определяется из последнего неравенства. Коэффициенты вертикальной турбулентной диффузии полей плавучести и скорости связаны числом Струхала, которое в данной работе полагалось равным 20 (для температурной стратификации).

В прямоугольной декартовой системе координат, вертикальная ось которой направлена вертикально вверх, уравнения, описывающие динамику стратифицированной жидкости, имеют следующий вид [14]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fV_y + \nabla A_m \nabla V_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fV_x + \nabla A_m \nabla V_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + b + \nabla A_m \nabla V_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + V_z \frac{\partial b}{\partial z} - S(z)V_z = \nabla A_n \nabla b + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial b}{\partial z} \right), \quad (7)$$

В системе уравнений (3)–(7), V_z, p, b – средние значения вертикальной компонент вектора скорости, а также возмущения полей давления и плавучести; при этом $b = -g\rho/\rho_0$; $S(z)$ – функция, описывающая устойчивую стратификацию, согласно (1); A_m, A_n, K_z, χ – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии полей скорости и плавучести (плотности). Уравнения (3)–(7) дополняются граничными и начальными условиями. Компонента силы Кориолиса в уравнении (5) не учитывается в виду ее относительной малости для сплюсненных вихрей.

Граничные условия на дне выбраны стандартные: отсутствие течения (условия прилипания) и потока плавучести:

$$V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

На свободной поверхности задаются ветровые напряжения, а также отсутствие возмущений давления и плавучести:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} - \delta^2 \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{\tau_{zx}}{K_z}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} - \delta^2 \frac{\partial V_z}{\partial y} = -\frac{\tau_{zy}}{K_z}, \quad p = 0, \quad b = 0. \quad (9)$$

Первые два равенства заменяются, в условиях пространственной анизотропии ($\delta = 10^{-2}$), на соответствующие им приближенные:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\tau_{zx}}{K_z}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\tau_{zy}}{K_z}. \quad (10)$$

Последним граничным условием является приближение «твердой крышки»:

$$V_z = 0. \quad (11)$$

Важно отметить, что последнее из соотношений (8), с учетом плавного изменения функции топографии дна и пространственной анизотропии в данной задаче, можно, с точностью до малого параметра δ , заменить на более простое – равенство нулю вертикальной производной:

$$\frac{\partial b}{\partial z} \approx 0.$$

По горизонтали на боковых границах ($x = \pm l_x$, $y = \pm l_y$) для всех, без исключения, искомых функций задаются условия равенства нулю их производных по переменным x и y соответственно.

В качестве начальных условий, задаются согласованные поля азимутальной скорости и плавучести. Поскольку изучение зависимости внутренней когерентной (долгоживущей, согласованной с физикой явления) структуры вихря является центральным вопросом данной работы, рассмотрим его подробно. Остановимся сначала на вертикальных составляющих полей азимутальной скорости и плавучести. Распределение для азимутальной скорости задается в виде:

$$f_V(z) = (z - (z_0 + a_1))^2 (z - (z_0 - a_2))^2 / l_v^2, \quad z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2.$$

Вертикальная структура поля плотности описывается зависимостью:

$$b_z = (z - (z_0 + a_1))^3 (z - (z_0 - a_2))^3 \times (z - z_0 + 0.5(a_1 - a_2)) / l_v^7, \quad z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_2.$$

В приведенных соотношениях z_0 – положение центра вихря (горизонт); a_1, a_2 – толщины верхней и нижней частей вихря. Такой вид позволяет, при начальной толщине вихря близкой к глубине слоя жидкости и произвольном горизонте, очень быстро, в масштабах безразмерного времени, получить трехмерное течение, удовлетворяющее перечисленным выше граничным условиям. Вариация начального вида вертикальной структуры не менялась, задаваясь в классе последних соотношений.

Для исследования когерентности горизонтальной структуры в вихре использовались два класса решений. Первый – частные случаи общего автомодельного решения задачи турбулентной диффузии вихря [15]:

$$\Omega = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \eta^{k-1}, \quad \text{где } A_{k+2} = -\frac{3(k+n)}{2(k+1)^2} A_k, \quad k=1,3,\dots \quad (12)$$

для $n=3;5$. В (12) Ω – функция вертикальной компоненты завихренности.

Второй класс – два вида компактных компенсированных вихря, являющихся по сути решениями стационарных уравнений Навье-Стокса, то есть описывающих установившееся ламинарное вращение вязкой жидкости. Первый из них – это вихрь, состоящий из двух областей постоянной завихренности противоположного знака [15,16]:

$$V_{\theta} = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a; \\ V_0 a \left[\frac{1}{r} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right) \right], & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad \omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Второй – более сложный, состоящий из трех областей постоянной завихренности. В этом случае, как правило, получается на периферии вихря зона с противотечением.

$$V_{\theta} = \begin{cases} 0.5\Omega_0 r, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (r^2 - a^2)}{2r}, & a \leq r \leq R_1; \\ \frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2r} - \\ - \frac{[\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)](r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)2r}, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \quad \omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq r \leq a; \\ \Omega_1, & a \leq r \leq R_1; \\ -\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{R_2^2 - R_1^2}, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ 0, & r > R_2. \end{cases}$$

Независимо от их вертикальной структуры, сами осесимметричные вихри являются точными решениями квазигеострофических уравнений на f -плоскости [17]. С течением времени происходит генерация радиальной и вертикальной компонент скорости – задача становится существенно нелинейной.

Перейдем теперь к безразмерным величинам. Для этого за основу положим три баланса: между горизонтальным градиентом давления и горизонтальной адвекцией; гидростатический, а также между слагаемыми $\frac{\partial b}{\partial t}$ и $-S(z)V_z$.

Из сказанного выше, а также из существующих подходов, следует, что масштабы всех входящих в уравнения величин равны:

$$[x]=[y]=l_h, [z]=l_v, \delta=l_v/l_h, [t]=V_h/l_h, [V_x]=[V_y]=V_h, [V_z]=Fr_V^2 \delta V_h, [S]=N^2, \\ [P]=\rho_0 V_h^2, [b]=N^2 V_z, [A_m]=A_m, [A_n]=A_{n\max}, [K_z]=K_{z\max}, [\chi]=\chi_{\max}.$$

Основываясь на этих соотношениях, система размерных уравнений (3)-(7) может быть переписана в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Ro} V_y + \frac{1}{Re_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_x + \frac{1}{\delta Re_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_x}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Ro} V_x + \frac{1}{Re_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_y + \frac{1}{\delta Re_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_y}{\partial z} \right), \quad (14)$$

$$Fr_V^2 \delta^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + b + \frac{\delta}{Re_h} \nabla \overline{A_m} \nabla V_z + \frac{1}{Re_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{K_z} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + Fr_V^2 \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_x \frac{\partial b}{\partial x} + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial b}{\partial z} - V_z = \frac{1}{Sc_h Re_h} \nabla \overline{A_n} \nabla b + \frac{1}{\delta Sc_v Re_v} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\chi} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \quad (17)$$

где $\overline{A_m}, \overline{A_n}, \overline{K_z}, \overline{\chi}$ – безразмерные функции коэффициентов горизонтальной и вертикальной диффузии полей скорости и плавучести (плотности). $Re_h = l_h V_h / A_m$, $Re_v = l_v V_h / K_z$, $Fr_v = V_h / M_v$, $Ro = V_h / l_h / f$ и $Sc_h = A_n / A_m$, $Sc_v = \chi / K_z$ горизонтальное и вертикальное числа Рейнольдса, а также числа Фруда, Россби и Струхаля соответственно; $l_v \in O(100)$ м, $l_h \in O(10^3 - 10^4)$ м, $V_h \in O(10^{-1})$ м/с – начальные вертикальный и горизонтальный масштабы вихря, а также начальный масштаб скорости; f – параметр Кориолиса.

Из всех перечисленных выше граничных условий в безразмерном виде отличия будут лишь для касательных напряжений ветра:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{l_v}{V_h} \frac{[\tau_{zx}]}{\mu} \tau_{zx}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{l_v}{V_h} \frac{[\tau_{zy}]}{\mu} \tau_{zy}.$$

Поскольку рассматриваемая область имеет криволинейную границу в вертикальном направлении, удобно, для данной задачи, перейти от координаты z к новой вертикальной координате $z_1 = z/H(x)$. При этом вертикальная компонента скорости в новых переменных связана со старой соотношением $V_z = H(x)V_{z_1}$. Для удобства, оставим в уравнениях прежнее выражение вертикальной скорости (V_z), перейдя лишь к новой переменной $z_1(x)$. Уравнения (13-17) приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{Ro} V_y + \\ & + \frac{1}{Re_h} \left[\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{1}{Re_v \delta} \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + Fr_V^2 V_z \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Ro} V_x + \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\
 & + \frac{1}{\text{Re}_v \delta} \left[\frac{\partial^2 V_y}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \\
 & \text{Fr}_V^2 \delta^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} + b + \\
 & + \frac{\delta}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \\
 & + \frac{1}{\text{Re}_v} \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z}, \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 \frac{\partial V_z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b}{\partial t} + V_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial b}{\partial y} + \text{Fr}_V^2 V_z \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} V_z = \frac{1}{\text{Sc}} \left\{ \frac{1}{\text{Re}_h} \left[\left[\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right] + \right. \right. \\
 \left. \left. + \left[\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 b}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_v \delta} \left[\frac{\partial^2 b}{\partial z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial z} \right) \right] \right\} \frac{\partial z_1}{\partial z}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

Покажем, что граничные условия на боковых границах остаются прежними. Пусть $\varphi_i (i=1,2,3,4)$ – одна из искомым функций (компонент скорости и плавучесть). Тогда

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x}$$

на обеих границах $x = \pm l_x$. Однако, геометрия области в данной задаче выбрана именно так, что $\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0$ при $x = \pm l_x$. Поэтому в новой системе координат все условия на боковых границах сохраняют свой прежний простой вид:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

Граничные условия на свободной поверхности имеют теперь следующий вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = - \frac{l_V}{V_h} \frac{[\tau_{zx}]}{\mu} \tau_{zx} \quad \text{при } x = \pm l_x \quad \frac{\partial V_y}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = - \frac{l_V}{V_h} \frac{[\tau_{zy}]}{\mu} \tau_{zy} \quad \text{при } y = \pm l_y \tag{24}$$

Граничные условия прилипания на дне не изменяются. Однако нормальная к поверхности дна производная от функции плавучести, как указано выше, может быть

заменена, с точностью до малого параметра δ , обычной производной по новой вертикальной координате.

$$\frac{\partial b}{\partial z_1} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (18-22) с соответствующими им граничными и начальными условиями.

Результаты численных экспериментов и их обсуждение

Данным исследованиям предшествовал ряд работ, в которых были изучены взаимодействия компактного вихря с дрейфовым приповерхностным течением, роль величины стратификации, кривизны дна и пространственной анизотропии (сплюснутость) на его динамику и устойчивость вообще как структуры. Поэтому численный эксперимент, согласно со сформулированной выше целью работы, проводился в довольно узком диапазоне вариации параметров. Во всех случаях (максимальный) масштаб глубины был равен 100 м. Начальная толщина вихря – 80 м, начальный радиус – 5 км. Масштаб азимутальной скорости задавался $0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, фоновое значение вертикальной турбулентной диффузии $K_z = 0.0005 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Соответствующие безразмерные параметры равны $Re_v = 8 \cdot 10^4$, $\delta = 1,6 \cdot 10^{-2}$, $Fr_v^2 = 1,56$, $Ro = 0,97$, $Sc_h = 5$, $Sc_v = 20$. Размеры сетки по горизонтальным координатам выбирались $\Delta x = \Delta y = 0.025$, по вертикальной – ≈ 0.02 .

Выбранный начальный вертикальный размер вихря позволяет поместить его под слой приповерхностного дрейфового течения с масштабом 10 м и на небольшом расстоянии от дна – чтобы как можно быстрее произошло установление трехмерного течения, у которого есть все три компоненты скорости. Как указано во введении, варьировалась лишь начальная форма горизонтального распределения всех характеристик: поля скорости и возмущений плавучести согласно приведенным выше формулам.

Прежде всего, была рассмотрена эволюция (циклонического) вихря без учета кривизны дна и ветрового воздействия. На вихрь действовали лишь механизмы вертикальной и горизонтальной турбулентных диффузий, а также сила Кориолиса. Анализ данных показал, что можно сравнивать качественно схожие в начальный момент типы вихрей. Так изолированный гауссиан и компактный компенсированный вихрь, состоящий из двух областей постоянной завихренности разного знака ведут себя очень схоже. При этом, в случае компактного компенсированного вихря, задавались два размера ядра – 0.3 и 0.6 радиуса вихря. На рис. 2 представлены распределения азимутальной скорости и вертикальной компоненты завихренности в начальный момент времени и в последующие характерные безразмерные моменты $t = 1; 2$. Как следует из сравнения рис. 2а и рис. 2в, все три распределения азимутальной скорости со временем становятся схожими одно на другое. Следовательно, это и есть когерентная структура. Распределение вертикальной компоненты завихренности, хотя и не так хорошо как скорости, также имеет определенную когерентную структуру независимо от формы начальных данных (см. рис. 2б и рис. 2г). Отметим её особенности. Если во всех трех начальных распределениях были две области завихренности разных знаков, а азимутальная скорость – везде одного знака, то со временем, в условиях действия указанных физических механизмов (диффузии и

планетарного вращения), когерентной оказывается структура, в которой на периферии вихря есть, хотя и не значительная по амплитуде, зона противотечения, а поле завихренности дважды меняет знак. Следует отметить, что в атмосферных компактных вихрях, – торнадо, – наблюдается подобная, но более ярко выраженная, структура [18].

Свойствами указанной выше структуры качественно соответствуют частные автоточечные решения (12) с номерами 4 и 5. Последним также приближенно соответствуют компактные компенсированные вихри с тремя областями завихренности чередующихся знаков [8]. Численный эксперимент показал, что если в качестве начальных распределений выбирать эти зависимости, то на периферии вихря вновь появляется дополнительная зона завихренности со знаком, противоположным соседней. Это наводит на мысль, что, из-за неравномерной диффузии в центральной зоне вихря появляется избыток завихренности того или иного знака, который обуславливает генерацию, во время установления трехмерного течения, периферийной области завихренности.

В реальных течениях есть также радиальная и вертикальная компоненты скорости, которые, кстати, и генерируются. В работе [19] описаны результаты экспериментального изучения квазистационарного вихресточка. И хотя масштабы вихревого течения в эксперименте имели несколько сантиметров, важным есть то, что диффузия завихренности от оси вихря компенсируется (баланс) конвекцией – стоком. Этот механизм также описан в известной монографии [20]. Согласно [19], вихрь состоит из трех областей, причем завихренность сконцентрирована у оси и на периферии, а внутри – течение практически потенциальное.

Ввиду только что сказанного, было проведено численный эксперимент для начального распределения в вихре с указанными свойствами. На рис. 3 представлены кривые зависимости для азимутальной скорости и завихренности. Как видно из рис. 3б, поле завихренности состоит из трех областей, причем зона противотечения отсутствует (см. рис. 3а). Численный эксперимент проводился для тех же значений амплитуд поля скорости и масштабов вихря. Тем не менее, поведение указанных полей отличается от обсуждавшихся выше. Теперь происходит диффузия внутренней вихревой области, на что указывают соответствующие кривые на рис. 3. Кривые с номером I – начальные распределения, с номерами II и III – в моменты безразмерного времени 1 и 2. Диффузия внешней – сводится практически на нет сгенерированным, при установлении трехмерного течения, в периферийной зоне вихря полем радиальной компоненты скорости, направленной к оси (сток). На рис. 4 приведены вертикальные сечения $y=0$ (рис. 4а) и $x=0$ (рис. 4б) поля радиальной компоненты скорости, а также горизонтальные сечения, соответствующие глубинам 5м (рис. 4в), 50м (рис. 4г), и 90м (рис. 4д). Видно, что оно носит довольно сложный характер: азимутальная симметрия радиальной компоненты скорости отсутствует. На каждом горизонте вихрь имеет две пары областей – стока и источника. Но самое важное, что окружен он областью стокового течения, на что указывают отрицательные значения V_r во всех приведенных сечениях.

Важным в динамике геофизических вихрей является направление их вращения. Обсуждавшиеся выше результаты относятся к циклоническим вихрям. Численный эксперимент показал, что в случае антициклонического вращения вихрей приведенные выше различия слабо выражены. Возможно, планетарное вращение компенсирует каким-то образом диффузионный рост горизонтального размера вихря.

При ветровом воздействии типичным является то, что с подветренной стороны дрейфовое течение направлено, в целом, к центру вихря, то есть действует подобно стоку и компенсирует, как было указано выше, диффузию. С противоположной стороны вихрь несколько увеличивает свой размер. Симметрия вихря нарушается.

Поэтому, в случае слабого ветрового воздействия, можно лишь говорить о некой приближенной стационарности: хотя амплитуды поля скорости и завихренности уменьшаются во времени, его горизонтальный масштаб остается приближенно прежним.

Кроме указанных параметров, рассматривалась также переменная топография дна. Минимальная глубина задавалась 40 м, а максимальная 100 м. Параметр крутизны полагался $\alpha \approx 0.2$. Сравнение результатов случаем плоского дна показало на неплохую схожесть на горизонтах вдали от дна, что объясняется малым абсолютным наклоном. Поэтому они отдельно не приводятся. Естественно, что при перепадах глубины одного порядка с горизонтальным размером вихря, указанная схожесть вряд ли будет присутствовать

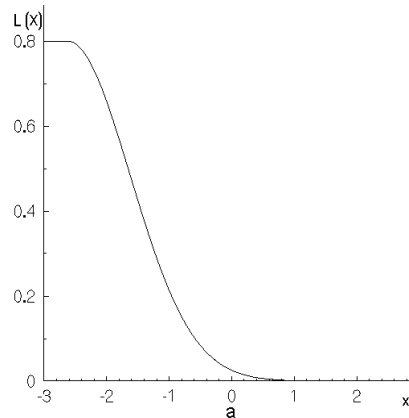
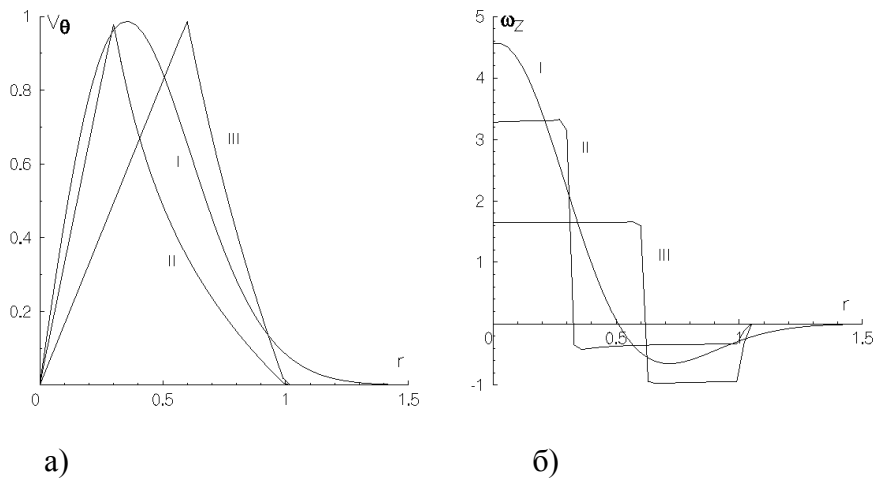
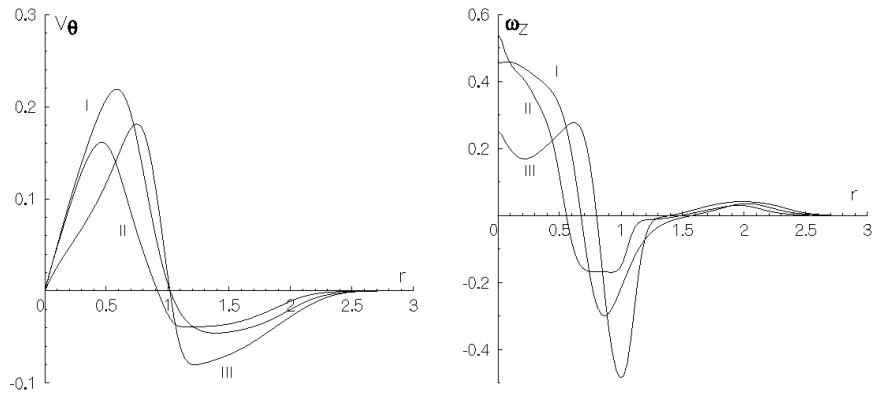


Рис. 1. Топография дна.

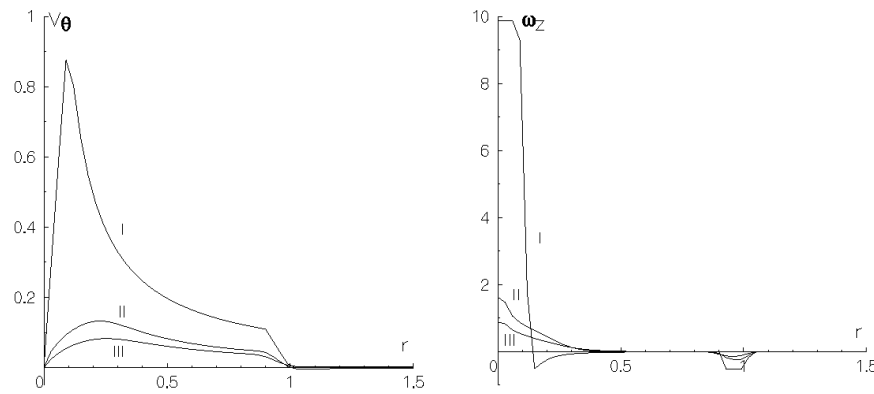




в)

г)

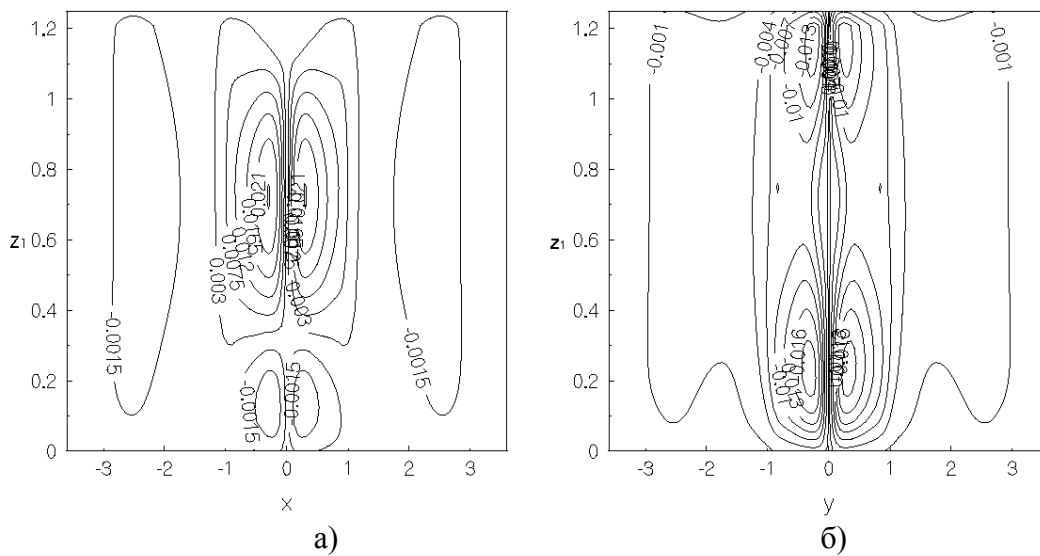
Рис. 2. Радиальные распределения азимутальной скорости и вертикальной компоненты завихренности в циклоническом вихре. а, б, – начальный момент времени; в, г – момент безразмерного времени, равного 1.



а)

б)

Рис. 3. Эволюция во времени азимутальной скорости и завихренности компактного компенсированного вихря, находящегося в диффузионно-конвективном балансе.



а)

б)

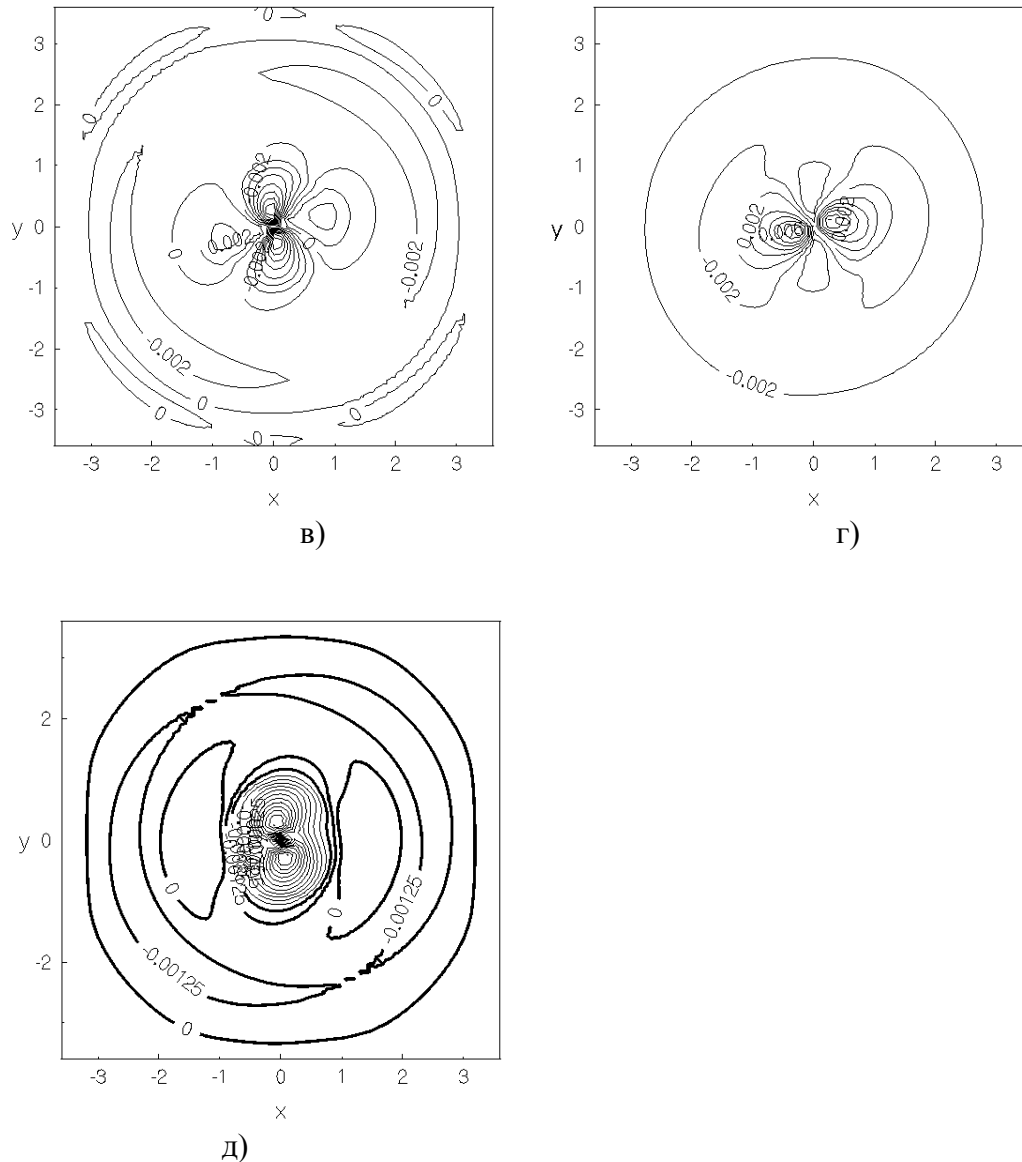


Рис. 4. Поле радиальной компоненты скорости компенсированного вихря, находящегося в диффузионно-конвективном балансе.

Выводы

Из всего сказанного выше, можно сделать следующие выводы. В качестве начальных горизонтальных распределений в компактном вихре можно использовать как автомодельное решение (аналог изолированного гауссиана), так и компактный компенсированный вихрь, состоящий из двух зон завихренности разных знаков. При этом, несмотря на различные размеры ядра компенсированного вихря (0,3 или 0,6), с течением времени довольно похожее распределение, состоящее из трех областей завихренности и появляется, хотя и слабо выраженная, внешняя область противотечения. Это и есть одна из форм когерентного состояния вихрей. Задание в начальный момент компактного компенсированного вихря, состоящего из трех зон с не равной нулю завихренностью, приводит, после установления трехмерного течения, к появлению добавочной (четвертой) зоны завихренности. Хотя также слабо выраженной.

Если структура в вихре такова, что между центральной и периферийной зонами завихренности разных знаков находится область потенциального течения, то генерируемое поле радиальной скорости может осуществлять диффузионно-конвективный баланс: вязкий диффузионный перенос завихренности компенсируется переносом к оси – стоком жидкости. Это – вторая возможная когерентная структура вихря, которую предпочтительнее использовать при моделировании ситуации с неизменным во времени радиальным размером вихря.

Антициклонический вихрь диффундирует в радиальном направлении значительно слабее – очевидно сказывается планетарное вращение. В целом все рассмотренные виды начальных распределений, включая направление вращения, при наличии ветрового воздействия очень слабо меняют свой горизонтальный масштаб, поэтому указанные выше различия существенны лишь на начальной стадии установления трехмерного течения при подстройке модели под данную ситуацию, в зависимости от того нужен лишь определенный рост начального горизонтального масштаба вихря или нет.

В качестве дальнейших исследований можно, на основании численных методов, рассматривать задачи устойчивости горизонтально и вертикально компенсированных вихрей – в продолжение работ [21,22]. Кроме этого, использовать модели эллиптических вихрей для случая сдвигового течения [23]. Имеет смысл также рассмотреть топографию дна с сильным наклоном: там горизонтальная симметрия компактного вихря серьезно нарушается и могут появиться новые физические эффекты.

Литература

1. Берестов А.Л. Уединенные волны Россби // Изв. АН СССР. ФАО. 1979. Т. 15 №6. С. 648-654.
2. Кизнер З.И. К интерпретации солитонных решений уравнения квазигеострофического вихря для бароклинного океана // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 3. С. 330-332.
3. Кизнер З.И. Солитоны Россби с осесимметричными бароклинными модами // Океанология – 1976. – v. 16, № 6. – С.961–967.
4. Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №5, С. – 1077-1079.
5. Stern M. E. Minimal properties of planetary eddies // J. Marine Res. – 1975. – v. 33, № 1. – P. 1-13.
6. Hogg N.G., Stommel H.M. }The heton, an elementary interaction between discrete baroclinic geophysical vortices? and its implimentation concerning eddy heat flow
7. Flierl G.R., Stern M.E. and Whitehead J.A. The physical significance of modons: laboratory experiments and general integral constraints // Dynam. Atmos. Oceans – 1983. – v. 7 - P. 233-263.
8. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикладна гідромеханіка. 2011. №2. С. 37–43.
9. 9. Baumert H.Z., Simpson J.H. and Sundermann J. Marine Turbulence: Theories, Observations and Models // Cambridge University Press, – 2011. – 630 p.
10. Лукьянов П.В. Взаимодействие двух вихрей в стратифицированном водоеме в условиях стационарного ветрового воздействия // Техническая механика. 2012, №3. С. 50-63.
11. Лукьянов П.В. Динамика компактного вихря в зоне прибрежного шельфа // Морской гидрофизический журнал. 2013, №1. С.21–33.
12. Белоліпецький В.М., Белоліпецький П.В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоёмах. // Вычислительные технологии. 2006. № 5. С. 21–31.
13. Марчук Г.И. и др. Математические модели циркуляции в океане. М.: Наука, 1980. 391с.
14. Динамика океана / Под ред. Ю.П. Доронина. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 304 с.
15. Лукьянов П.В. Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. 2006. №3. С. 63 –77.
16. Соболев С.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 430с.
17. Adragna A., Salusti E. Observation of small scale shelf –trapped dipolar vortices near eastern Sicilian coast // J. Phys. Oceanogr. 1990. № 7. P. 1105-1112.

18. Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями // ДАН. 2004. №4. С. 541-546.
19. Рудяк В.Я., Савченко С.О. Моделирование закрученной затопленной струи, индуцируемой вихрестокком // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002, №4. С.139-149
20. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 693 с.
21. Козлов В.Ф., Макаров В.Г. Моделирование неустойчивости осесимметричных вихревых шнуров с помощью метода контурной динамики // Механика жидкости и газа . 1985. №1. С. 33-39.
22. Козлов В.Ф., Макаров В.Г., Соколовский М.А. Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойном океане // Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана.1986. №8. С. 868-874.
23. Rizer S.C., Owens W.B., Rossby H.T., Ebbesmeyer C.C. The Structure Dynamics and Origin of Small-Scale Lens of water in the Western North Atlantic Thermocline. // J.Phys. Oceanogr. 1986. № 3. P. 572–590.

Стаття надійшла 14.03.2014
 Прийнято до друку 08.04.2014

Анотація

П.В. Лук'янов.

Залежність динаміки субмезомасштабного компактного вихора від його внутрішньої структури

Представлено результати досліджень динаміки компактного вихора від його внутрішньої структури. Виявлено тип вихорів, що мають таку горизонтальну структуру, при якій дифузійне зростання компенсує конвекцією (стік рідини), обумовлюючий квазістаціонарний стан течії. Горизонтальна структура вихра складається з трьох областей. Перша, доволі тонка (приблизно 10% від товщини) область, знаходиться біля вісі вихра. За нею слідує широка (приблизно 80% від товщини вихра) область із відсутністю завихреності (течія на зразок точкового вихра). Третя, зовнішня область вихра, таке є тонкою (приблизно 10% від товщини), але має завихреність протилежного знака тій, що у першій області. Величини вказаних завихреностей є такими, що у цілому вихор компенсований (сумарна завихреність дорівнює нулеві). Наведено порівняння із відомими теоретичними та експериментальними даними за цією тематикою.

Ключові слова: компактний вихор, внутрішня структура, дифузійно-конвективний баланс

Summary

P.V. Lukianov

The effect of internal structure on submesoscale vortex dynamics

The effect of compact vortex horizontal structure on vortex dynamics investigations results have been presented. It was found out the type of vortexes that have such the horizontal structure when horizontal vortex scale growth is compensated by convection (weak sink flow) that results into quasi-steady vortex state. The vortex horizontal structure consists of three domains. First one, a rather thin (some 10% of vortex thickness), that is near axis of vortex. It has the same sign of vorticity as vortex rotation. Then it follows a wide (some 80% of vortex thickness) domain of non-rotational flow (point-vortex like flow). The third (external) vortex domain is also thin (some 10% of vortex thickness) but it has opposite-sign vorticity to that in first domain. The values of the vorticities are such that the vortex is compensated (total vortex vorticity is equal to zero). The comparison with known similar theoretical and experimental data on the theme has been given.

Key words: compact vortex, internal structure, diffusive-convective balance.